Esercizio. Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la seguente matrice è invertibile. Per tali valori calcolare l'inversa.

$$A := \begin{pmatrix} k^2 & 1 & k \\ \alpha & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione: Applichiamo l'algoritmo di Gauss con la seguente catena di operazioni

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} k^2 & 1 & k & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -k \\ \alpha & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -k \\ \alpha & 0 & 0 & -1 & 1 & k \\ k & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Se $\alpha = 0$ la forma a scalini ridotta di A ha una riga nulla, quindi A non è invertibile. Altrimenti per $\alpha \neq 0$ possiamo continuare l'algoritmo

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -k \\ 1 & 0 & 0 & -1/\alpha & 1/\alpha & k/\alpha \\ k & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -k \\ 1 & 0 & 0 & -1/\alpha & 1/\alpha & k/\alpha \\ 0 & 0 & 1 & k/\alpha & -k/\alpha & 1 - k^2/\alpha \end{array}\right),$$

da cui si ottiene

$$A^{-1} = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} -1 & 1 & k \\ \alpha & 0 & -k\alpha \\ k & -k & \alpha - k^2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio. Calcolare le potenze N^2 ed N^3 della matrice

$$N := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Usare il risultato (ed il binomio di Newton) per calcolare la potenza di matrice M^{k+5}, dove

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione: abbiamo

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da cui

$$\begin{aligned} M^{k+5} = (\mathrm{Id} + N)^{k+5} &= \mathrm{Id}^{k+5} + (k+5)\mathrm{Id}^{k+4} N + \frac{(k+5)(k+4)}{2} \mathrm{Id}^{k+3} N^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (k+5) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{(k+5)(k+4)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$