ELEMENTI DI TEORIA DELLA MISURA E DELL'INTEGRAZIONE SECONDO LEBESGUE

A. Brini

April 5, 2013

Contents

1 Misura esterna e misura in $\mathbb{R}^n$

1.1 PREMESSA. Sulla cardinalita' di insiemi infiniti. Insiemi NUMERABILI

Come vedremo, nella trattazione della teoria della misura ed integrazione la dizione *insieme numerabile* svolge un ruolo essenziale. Di conseguenza richiamiamo alcuni fatti fondamentali, allo scopo di acquisire familiarita' con questa nozione (di interesse anche generale ed indipendente dagli obiettivi di queste brevi note).

Il punto cruciale e' capire che la nozione di $CARDINALITA'$ deve essere estesa - ed assume significati profondissimi - anche al caso di insiemi "infiniti".

Definizione 1.
- *Dati gli insiemi X, Y, (finiti o infiniti) diremo che "hanno la stessa cardinalita'" - brevemente, sono "equicardinali" - se e solo se ESISTE UNA BIIEZIONE $f : X \to Y$.*
- *Un insieme X si dice NUMERABILE se e solo se ha la stessa cardinalita' dell'insieme $\mathbb{N}$ (insieme dei numeri NATURALI).*

Osservazione 1. Teoremi di Cantor

- *Ogni unione di una famiglia finita o numerabile di insiemi finiti o numerabili e' un insieme finito o numerabile.*
- *Il prodotto cartesiano di insiemi finiti o numerabili e' un insieme finito o numerabile.*
- *Gli insiemi $\mathbb{Z}^+$ (interi positivi), $\mathbb{Z}$ (interi relativi), $\mathbb{Q}$ (numeri razionali) sono NUMERABILI.*
- *Dato un insieme X, sia $\mathbf{P}(X)$ il suo insieme delle parti. Allora $\mathbf{P}(X)$ ha cardinalita' strettamente maggiore della cardinalita' di X, nel senso che esististono funzioni iniettive $f : X \hookrightarrow \mathbf{P}(X)$, ma NON VICEVERSA.*
- *Gli insiemi equipotenti a $\mathbb{R}$ (numeri reali) si dicono aventi cardinalita' del CONTINUO, strettamente maggiore dela cardinalita' numerabile.*
- *L' insieme $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ (numeri irrazionali) ha la cardinalita' del continuo.*

1.2 Ricoprimenti Lebesguiani

Siano $a_j < b_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$; l'insieme

$$I = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; a_j < x_j < b_j,\ j = 1, \ldots, n\}$$

si dice *INTERVALLO LIMITATO APERTO* di $\mathbb{R}^n$.

Il numero reale

$$\mu(I) = \Pi_{j=1}^{n}\ (b_j - a_j)$$

si dice *misura* dell'intervallo I.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, e sia $\{I_k; k \in \mathcal{A}\}$ una famiglia di intervalli limitati ed aperti di $\mathbb{R}^n$ con $\mathcal{A}$ *FINITO* o, al piu', *NUMERABILE*; la famiglia $\{I_k; k \in \mathcal{A}\}$ si dice *RICOPRIMENTO LEBESGUIANO* di A se e solo se risulta

$$A \subseteq \bigcup_{k \in \mathcal{A}} I_k.$$

Nel seguito, indicheremo con $\mathcal{I}_A$ l'insieme di tutti i ricoprimenti lebesguiani dell'insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$:

1.3 Misura esterna in $\mathbb{R}^n$

Si dice *MISURA ESTERNA* dell'insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ il "numero reale esteso" (cioe', appartenente a $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$) cosi' definito:

$$\mu^*(A) = inf\ \{\sum_{k \in \mathcal{A}} \mu(I_k);\ \{I_k; k \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{I}_A\}.$$

Se $\mu^*(A) = \infty$ si dice che A ha misura esterna infinita; altrimenti, si dice che A ha misura finita.

Esempio 1. *Ogni insieme singoletto ha misura esterna uguale a zero. In simboli, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, si ha $\mu^*(\{x\}) = 0$.*

Infatti, sia $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Scelto $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, poniamo

$$I(x;\varepsilon) = \{y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n; x_j - \frac{\varepsilon}{2} < y_j < x_j + \frac{\varepsilon}{2}, j = 1, \ldots, n\}.$$

Poiche' $I(x;\varepsilon)$ e' un intervallo limitato aperto di $\mathbb{R}^n$ e $x \in I(x;\varepsilon)$, l' insieme (singoletto) $\{I(x;\varepsilon)\}$ e' un ricoprimento lebesguiano dell' insieme (singoletto) $\{x\}$. Poiche' $\mu(I(x;\varepsilon)) = \varepsilon^n$, si ha $\mu^*(\{x\}) \leq \varepsilon^n$; quindi, per l' arbitrarieta' di $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, risulta $\mu^*(\{x\}) = 0$.

Il seguente fondamentale risultato ci assicura che, *nel caso di intervalli limitati aperti* I, la misura esterna $\mu^*(I)$ coincide proprio con la misura $\mu(I)$ data per definizione, ed, inoltre che la misura esterna di I e' uguale alla misura della chiusura $\overline{I}$ (intervallo limitato chiuso) di I.

Teorema 1. *Sia I intervallo limitato aperto di $\mathbb{R}^n$. Allora:*

$$\mu^*(I) = \mu(I) = \mu^*(\overline{I}).$$

Immediatamente dalla definizione, osservando che $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ implica $\mathcal{I}_{A_2} \subseteq \mathcal{I}_{A_1}$,si ha:

Teorema 2. *(sulla monotonicita' della misura esterna)*

Dati $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \mathbb{R}^n$, risulta $\mu^*(A_1) \leq \mu^*(A_2)$.

Corollario 1. $\mu^*(\emptyset) = 0$.

Esempio 2. *La retta reale $\mathbb{R}$ ha misura esterna infinita. Infatti, per ogni $n \in \mathbf{Z}^+$, l'intervallo limitato aperto $]-n, n[$ ha misura esterna $\mu^*(]-n, n[) = \mu(]-n, n[) = 2n$ ed inoltre $]-n, n[\subseteq \mathbb{R}$; percio' $\mu^*(\mathbb{R}) \geq 2n$, per ogni $n \in \mathbf{Z}^+$. Ne segue che $\mu^*(\mathbb{R}) = \infty$.*

Teorema 3. *(sulla subadditivita' numerabile della misura esterna)*
Sia $\{A_k; k \in \mathcal{A}\}$ una famiglia al piu' numerabile di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$. Allora:

$$\mu^*(\bigcup_{k\in\mathcal{A}} A_k) \leq \sum_{k\in\mathcal{A}} \mu^*(A_k).$$

DIMOSTRAZIONE. L' affermazione e' banalmente vera se $\sum_{k\in\mathcal{A}} \mu^*(A_k) = +\infty$. Consideriamo percio' il caso $\sum_{k\in\mathcal{A}} \mu^*(A_k) =< \infty$. Dalla definizione di misura esterna, segue che, comunque si fissi un $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, per ogni $k \in \mathcal{A}$ ESISTE un ricoprimento lebesguiano $\{I_{k_j}; j \in \mathcal{A}_k\}$ di A_k tale che

$$\sum_{j\in\mathcal{A}_k} \mu(I_{k_j}) < \mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Ora, l' insieme

$$\{I_{k_j}; j \in \mathcal{A}_k\}, k \in \mathcal{A}\}$$

e' un ricoprimento lebesguiano di $\bigcup_{k\in\mathcal{A}} A_k)$. Percio'

$$\mu^*(\bigcup_{k\in\mathcal{A}} A_k) \leq \sum_{k\in\mathcal{A}} \sum_{j\in\mathcal{A}_k} \mu(I_{k_j}) < \sum_{k\in\mathcal{A}} (\mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}) \leq \sum_{k\in\mathcal{A}} \mu^*(A_k) + \varepsilon.$$

Per per l' arbitrarieta' di $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ si ha quindi

$$\mu^*(\bigcup_{k\in\mathcal{A}} A_k) \leq \sum_{k\in\mathcal{A}} \mu^*(A_k).$$

Corollario 2. *Sia A sottoinsieme numerabile di $\mathbb{R}^n$. Allora $\mu^*(A) = 0$.*

Infatti, scrivendo $A = \bigcup_{a\in A} \{a\}$, l' insieme A risulta unione numerabile di singoletti; percio'

$$\mu^*(A) \leq \sum_{a\in A} \mu^*(\{a\}) = 0.$$

Esempio 3. *Sia $\mathbb{Q}$ l' insieme dei razionali. Allora $\mu^*(\mathbb{Q}) = 0$.*

Di piu', abbiamo

Teorema 4. *Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ tali che $d(A, B) =^{def} \; inf\{d(a, b); a \in A, b \in B\} > 0$. Allora $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$.*

OSSERVAZIONI.

- Si noti che la condizione $d(A,B) > 0$ implica $A \cap B = \emptyset$, MA NON VICEVERSA. (ad esempio $]0,1],]1,2]$ sono intervalli digiunti in $\mathbb{R}$, ma $d(]0,1],]1,2]) = 0$.)

- Il precedente risultato diviene FALSO se si sostituisce la condizione $d(A,B) > 0$ con la condizione piu' debole $A \cap B = \emptyset$. In altri termini, esistono coppie di sottoinsiemi disgiunti A , B tali che

$$\mu^*(A \cup B) < \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

1.4 Sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^n$

Definizione 2. *(after C. Caratheodory) Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^n$ si dice MISURABILE se e solo se, per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^n$, risulta:*

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c_{\mathbb{R}^n}),$$

ove $A^c_{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n - A$.

OSSERVAZIONI:

- La disuguaglianza
$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c_{\mathbb{R}^n})$$
e' sempre verificata, per subadditivita'.

- NON TUTTI i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ sono misurabili.

- In generale, se A_1 e A_2 sono sottinsiemi non-misurabili *DISGIUNTI* di $\mathbb{R}^n$, e' in generale FALSO che

$$\mu^*(A_1 \cup A_2) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2).$$

(come gia' osservato nella sezione precedente).

- Dalla simmetria della definizione, segue immediatamente che un sottoinsieme A e' misurabile se e solo se il suo complementare $A^c_{\mathbb{R}^n}$ e' misurabile.

Nel caso di insiemi misurabili, la *MISURA* di detti insiemi e', per definizione, la loro misura esterna e si scrive $\mu(A)$ in luogo di $\mu^*(A)$.

1.5 Proprieta' fondamentali della misura e degli insiemi misurabili

Teorema 5. *Se A_1, A_2 sono sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^n$. Allora anche*

$$A_1 \cup A_2,\ A_1 \cap A_2,\ A_1 - A_2,\ A_2 - A_1$$

sono sottoinsiemi misurabili.

Teorema 6. *Sia $\{A_k; k \in \mathcal{A}\}$ una famiglia al piu' numerabile di sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^n$. Allora $\bigcup_{k\in\mathcal{A}} A_k$ e' misurabile.*

Teorema 7. *(sulla additivita' numerabile per insiemi misurabili a due a due disgiunti)*

Sia $\{A_k; k \in \mathcal{A}\}$ una famiglia al piu' numerabile di sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^n$, A DUE A DUE DISGIUNTI.

Allora:

$$\mu(\bigcup_{k\in\mathcal{A}} A_k) = \sum_{k\in\mathcal{A}} \mu(A_k).$$

Esempio 4.

- *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che $\mu^*(A) = 0$. Allora A e' misurabile.*

  Infatti, per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^n$, risulta:

  $$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c_{\mathbb{R}^n}),$$

  per subadditivita' numerabile. D'altra parte, risulta:

  $$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c_{\mathbb{R}^n}) = 0 + \mu^*(E \cap A^c_{\mathbb{R}^n}),$$

  per monotonicita'.

- *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A numerabile. Allora A e' misurabile e $\mu(A) = 0$.*

  Infatti, per il teorema di subadditivita' numerabile, risulta:

  $$\mu^*(\bigcup_{a\in A} \{a\}) \leq \sum_{a\in A} \mu^*(\{a\}) = 0.$$

- *Consideriamo l'insieme $[0,1] - \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ il sottoinsieme degli irrazionali compresi nell'intervallo chiuso $[0,1]$.*

  $[0,1] - \mathbb{Q}$ e' misurabile? In caso affermativo, quale e' la sua misura?

  Osserviamo che $[0,1]$ e' misurabile, e, quindi, anche $[0,1]-\mathbb{Q}$ lo e' (PERCHE'?). Inoltre abbiamo

  $$\mu([0,1]) = 1 = \mu([0,1] - \mathbb{Q}) + \mu([0,1] \cap \mathbb{Q}) = \mu([0,1] - \mathbb{Q}) + 0,$$

  da cui $\mu([0,1] - \mathbb{Q}) = 1$.

1.6 Teoremi di passaggio al limite per successioni "annidate" di insiemi misurabili

Proposizione 1. *Sia $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^n$ tali che $A_k \subseteq A_{k+1}$, per ogni $k \in \mathbb{N}$. Allora*

$$\mu(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k) = lim_{k\to\infty}\ \mu(A_k).$$

DIMOSTRAZIONE: L' unione $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$ sappiamo essere misurabile. Poniamo $B_0 = A_0$, $B_{k+1} = A_{k+1} - A_k$, per ogni $k > 0$.

Gli insiemi B_k sono misurabili, a due a due disgiunti e tali che $\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$. Allora

$$\mu(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k) = \mu(\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(B_k) =^{def} lim_{k\to\infty}\ (\sum_{j=0}^{k} \mu(B_j);$$

d' altra parte

$$\sum_{j=0}^{k} \mu(B_j) = \mu(\bigcup_{j=0}^{k} B_j) = \mu(\bigcup_{j=0}^{k} A_j) = \mu(A_k).$$

Esempio 5. *Fissata una costante $\theta \in \mathbb{R}$, si consideri la retta $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y = \theta\}$. L' insieme A e' misurabile, in quanto chiuso. Per ogni $k \in \mathbb{Z}^+$, sia $A_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; k < x < k, y = \theta\} \subset A$.*

Chiaramente ogni A_k risulta misurabile, di misura nulla e $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k = A$. Dal risultato precedente, segue che la retta A ha misura nulla in $\mathbb{R}^2$.

Proposizione 2. *Sia $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^n$ tali che $A_k \supseteq A_{k+1}$, per ogni $k \in \mathbb{N}$. Supponiamo inoltre che valga la condizione*

$$\exists k \in \mathbb{N} \ tale\ che\ \mu(A_k) < \infty \qquad (\dagger)$$

Allora

$$\mu(\bigcap_{k=0}^{\infty} A_k) = lim_{k\to\infty}\ \mu(A_k).$$

OSSERVAZIONE. Se si trascura la condizione ($\dagger$), l' asserto diventa FALSO. Ad esempio, si consideri la successione di semirette $A_k =]k, +\infty[, k \in \mathbb{N}$. Chiaramente $\mu(]k, +\infty[) = +\infty, \forall k$. D' altra parte, $\bigcap_{k=0}^{\infty}]k, +\infty[= \emptyset$, da cui

$$\mu(\bigcap_{k=0}^{\infty}]k, +\infty[) = \mu(\emptyset) = 0 \neq lim_{k\to\infty}\ \mu(]k, +\infty[) = +\infty.$$

1.7 Misurabilita' e topologia. $\sigma-$algebre

Teorema 8. *(misurabilita' e topologia)*

Ogni sottoinsieme aperto e, di conseguenza, anche ogni sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}^n$ e' misurabile.

Esempio 6. *Consideriamo l' insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \in \mathbb{Q}\}$.*

Poiche' $A = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = q\}$ (unione numerabile!) ed ogni unendo e' misurabile in quanto chiuso e di misura nulla (e' una retta orizzontale), ne segue che l' insieme A (i punti del piano di ordinata razionale) risulta anche esso misurabile e di misura nulla.

Una famiglia $\mathcal{E} \subseteq \mathbf{P}(\mathbb{R}^n)$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ si dice $\sigma-$*algebra* se e solo se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

- $\emptyset \in \mathcal{E}$.
- Se $A \in \mathcal{E}$, allora $A^c_{\mathbb{R}^n} \in \mathcal{E}$.
- Sia $\{A_k; k \in \mathcal{A}\}$ una famiglia al piu' numerabile di sottoinsiemi, $A_k \in \mathcal{E}$. Allora $\bigcup_{k\in\mathcal{A}} A_k \in \mathcal{E}$

IN PAROLE SEMPLICI, una $\sigma-$algebra e' una famiglia di sottoinsiemi che contiene l'insieme vuoto $\emptyset$, e che sia *"chiusa"* rispetto alle operazioni insiemistiche di passaggio al complementare, e di unione ed intersezione (per la legge di DeMorgan) al piu' numerabile.

Le proprieta' dei sottoinsiemi misurabili enunciate nei precedenti paragrafi possono quindi essere sinteticamente espresse come segue:

La famiglia dei sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^n$ e' una $\sigma-$algebra.

1.8 $\sigma-$algebre generate da una famiglia di sottoinsiemi. La $\sigma-$algebra dei Boreliani di $\mathbb{R}^n$

Sia $\{\mathcal{E}_i; i \in \mathcal{A}\}$ una famiglia (qualsiasi) di $\sigma-$algebre di $\mathbb{R}^n$.

Allora l'intersezione

$$\bigcap_{i\in\mathcal{A}} \mathcal{E}_i$$

e' una $\sigma-$algebra di $\mathbb{R}^n$.

(La dimostrazione segue direttamente dalle definizioni).

Definizione 3. *($\sigma-$algebre generate)*

Denotiamo con $\mathcal{I}$ una famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$.

Poniamo, per definizione:

$$\mathcal{S}_{\mathcal{I}} = \bigcap_{\mathcal{E} \supseteq \mathcal{I}} \mathcal{E}, \quad \mathcal{E} \quad \sigma - algebra \quad di \quad \mathbb{R}^n.$$

Poiche' l'intersezione di $\sigma-$algebre e' una $\sigma-$algebra,

$$\mathcal{S}_{\mathcal{I}} \quad e' \quad una \quad \sigma - algebra,$$

detta $\sigma-$*algebra generata dalla famiglia* $\mathcal{I}$.

Chiaramente, $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}$ e' la piu' piccola (nel senso dell' inclusione) $\sigma-$algebra contenente la famiglia $\mathcal{I}$.

Osservazione 2. *(Principio di identita' per $\sigma-$algebre generate)*

Siano $\mathcal{I}, \ \mathcal{J} \subseteq \mathbf{P}(\mathbb{R}^n), \ \mathcal{S}_{\mathcal{I}}, \ \mathcal{S}_{\mathcal{J}}$ le $\sigma-$algebre generate da $\mathcal{I}, \ \mathcal{J}$, rispettivamente.

Allora $\mathcal{S}_{\mathcal{I}} = \mathcal{S}_{\mathcal{J}}$ se e solo se

$$\mathcal{I} \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{J}} \quad e \quad \mathcal{J} \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{I}}.$$

Definizione 4. *(La $\sigma-$algebra dei Boreliani)*

Denotiamo con $\mathcal{O}$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}^n$.

Poniamo, per definizione:

$$\mathcal{B} =^{def} \mathcal{S}_{\mathcal{O}} = \bigcap_{\mathcal{E} \supseteq \mathcal{O}} \mathcal{E}, \quad \mathcal{E} \quad \sigma - algebra \quad di \quad \mathbb{R}^n.$$

La $\sigma-$algebra $\mathcal{B}$ generata dalla famiglia $\mathcal{O}$ di tutti gli aperti di $\mathbb{R}^n$ e' detta $\sigma-$algebra dei BORELIANI. Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice BORELIANO se e solo se appartiene a $\mathcal{B}$.

Dal "principio di identita'", la $\sigma-$algebra dei Boreliani $\mathcal{B}$ e' anche la $\sigma-$algebra generata dalla famiglia $\mathcal{C}$ di tutti i chiusi di $\mathbb{R}^n$.

Osservazione 3.

- *Ogni Boreliano e' un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^n$.*
- *(NON OVVIO) In generale, e' falso che un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^n$ sia Boreliano.*
- *Per definizione, $\mathcal{B}$ e' la piu' piccola (nel senso dell'inclusione) $\sigma-$algebra contente tutti gli aperti ed i chiusi di $\mathbb{R}^n$.*

IN PRATICA, se vogliamo dimostrare che un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e' Boreliano (e, quindi, misurabile), e' sufficiente dimostrare che A e' esprimibile, a partire da insiemi aperti e chiusi (Boreliani per definizione), usando le operazioni insiemistiche di passaggio al complementare, di differenza insiemistica e di unione ed intersezione al piu' numerabile ("legittime", nel senso che ci mantegono all'interno di una $\sigma-$algebra).

Esempio 7. *Consideriamo l'insieme*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x, y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}\},$$

cioe' l'insieme dei punti del piano $\mathbb{R}^2$ *aventi entrambe le le coordinate IRRAZIONALI.*

A e' misurabile? A e' Boreliano? In caso affermativo, quale e' la misura di A?

Procediamo come segue.

In primo luogo, osserviamo che A puo' essere riscritto nella forma:

$$A = \mathbb{R}^2 - \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x, y \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{R}^2 - \bigcup_{(x,y)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}} \{(x, y)\}.$$

Ora, $\mathbb{Q}$ *e' numerabile e, quindi, anche* $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ *e' numerabile (per il primo Teorema di Cantor).*

Percio'

$$\bigcup_{(x,y)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}} \{(x, y)\}$$

e' unione numerabile di singoletti, chiusi (e, quindi, Boreliani), tutti di MISURA ZERO.

Di conseguenza

$$\mathbb{R}^2 - \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x, y \in \mathbb{Q}\}$$

e' differenza di Boreliani e, quindi, e' Boreliano.

Inoltre, osserviamo che $\bigcup_{(x,y)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}} \{(x, y)\}$*, in quanto unione numerabile di sottoinsiemi di misura zero e', a sua volta, di misura zero.*

Per la proprieta' additiva della misura su misurabili disgiunti, segue che:

$$\mu(\mathbb{R}^2) = \infty = \mu(A) + \mu(\bigcup_{(x,y)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}} \{(x, y)\}) = \mu(A) + 0,$$

da cui $\mu(A) = \infty$*.*

1.9 La $\sigma-$algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ dei Boreliani di $\mathbb{R}$

La $\sigma-$algebra dei Boreliani di $\mathbb{R}$ merita attenzione particolare, come vedremo.

In primo luogo, richiamiamo un significativo risultato sugli aperti di $\mathbb{R}$, avente anche interesse independente dal presente contesto.

Lemma 1. (*di Lindelöf*)

Sia $\mathcal{A}$ una famiglia di aperti di $\mathbb{R}$. Allora esiste una sottofamiglia NUMERABILE $\{A_n \in \mathcal{A}; n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$ tale che

$$\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n.$$

DIMOSTRAZIONE

Sia $U = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$, e sia $x \in U$. Esiste un aperto $A \in \mathcal{A}$ tale che $x \in A$ e quindi un intervallo aperto I_x tale che $x \in I_x \subseteq A$.

Ricordiamo che: *dati due numeri reali α e β, esiste un razionale q tale che $\alpha < q < \beta$.* Allora possiamo trovare un intervallo aperto J_x con estremi razionali tale che $x \in J_x \subseteq I_x$. Poiche' l' insieme di tutti gli intervalli aperti con estremi razionali e' *numerabile*, la famiglia $\{J_x; x \in U\}$ e' numerabile e $U = \bigcup_{x\in U} J_x$.

Per ogni intervallo J_x scegliamo un $A \in \mathcal{A}$ che lo contenga. Otteniamo cosi' una sottofamiglia numerabile $\{A_n \in \mathcal{A}; n \in \mathbb{N} \subseteq \mathcal{A}\}$ tale che $U = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$.

Proposizione 3. *Le seguenti $\sigma-$algebre di $\mathbb{R}$ sono uguali:*

1. *La $\sigma-$algebra generata dalla famiglia $\{[a, +\infty[; a \in \mathbb{R}\}$.*
2. *La $\sigma-$algebra generata dalla famiglia $\{]a, +\infty[; a \in \mathbb{R}\}$.*
3. *La $\sigma-$algebra generata dalla famiglia $\{[a, b]; a, b \in \mathbb{R}\}$.*
4. *La $\sigma-$algebra generata dalla famiglia $\{]-\infty, b]; b \in \mathbb{R}\}$.*
5. *La $\sigma-$algebra generata dalla famiglia $\{]-\infty, b[; b \in \mathbb{R}\}$.*
6. *La $\sigma-$algebra generata dalla famiglia $\{]a, b[; a, b \in \mathbb{R}\}$.*
7. *La $\sigma-$algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ dei Boreliani di $\mathbb{R}$.*

DIMOSTRAZIONE

L' uguaglianza tra le $\sigma-$algebre generate da $1.-6.$ segue direttamente dal "principio di identita' ": di fatto, si tratta di riconoscere che ogni elemento di una "famiglia di generatori" da $1.-6.$ puo' essere ottenuto dagli elementi di un'altra famiglia tramite operazioni di $\sigma-$algebra, vale a dire, ricordiamo, "unioni/intersezioni al piu' numerabili", "passaggio al complementare", "differenza" (utile e semplice esercizio).

Denotiamo ora con il simbolo $\mathcal{S}$ la $\sigma-$algebra generata dalle famiglie di generatori da $1.-6.$. Poiche' queste famiglie sono sottoinsiemi della famiglia $\mathcal{O}$ di tutti i sottoinsiemi aperti ovvero della famiglia $\mathcal{C}$ di tutti i sottoinsiemi chiusi di $\mathbb{R}$, si ha che $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Viceversa, per il Lemma di *Lindelöf*, ogni aperto di $\mathbb{R}$ e' rappresentabile come unione NUMERABILE di intervalli aperti in esso contenuti (generatori al punto 6,), per cui $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{S}$.

Concludiamo che $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}$.

1.10 Boreliani, misurabilita' e misura interna

Come abbiamo visto, la misura esterna di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ e' definita mediante una sorta di procedimento di "approssimazione dall' esterno" (rigorosamente parlando, considerando l' estremo inferiore in $\overline{\mathbb{R}}$) con sottoinsiemi "elementari", vale a dire unioni di famiglie al piu' numerabili di intervalli contenenti l' insieme dato (ricoprimenti lebesguiani).

Riesce naturale cercare di riproporre lo stesso procedimento "dall' interno" - definendo una *misura interna*, in modo che, per sottoinsiemi misurabili, misura esterna ed interna coincidano (in analogia con la nozione di integrale di Riemmann). Se ci limitiamo a considerare ancora famiglie di intervalli, quella appena tratteggiata e' l' idea alla base della teoria di Peano/Jordan (che storicamente precede la teoria di Lebesgue/Borel); sfortunatamente, seguendo questo tipo di approccio, la classe degli insiemi misurabili risulterebbe molto ristretta: di conseguenza, definiremo la *misura interna* mediante una "approssimazione dall'interno" mediante misurabili o Boreliani.

Lo spunto per questa strategia e' suggerito dal seguente fondamentale risultato, la cui dimostrazione e' omessa.

Teorema 9. *Sia* $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

- $\mu^*(A) = inf\{\mu(E); E\ misurabile, E \supseteq A\} = inf\{\mu(O); O\ aperto, O \supseteq A\}$.
- *Esiste un boreliano* B *tale che* $B \supseteq A$, $\mu^*(A) = \mu(B)$ *e* $\mu(C) = 0$ *per ogni* C *misurabile,* $C \subseteq B - A$.

Motivati dal precedente risultato, definiamo la *MISURA INTERNA* di A ponendo:

$$\mu_*(A) = sup\{\mu(E); E\ misurabile, E \subseteq A\}.$$

Teorema 10. *Sia* $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Esiste un boreliano B *tale che* $B \subseteq A$, $\mu^*(A) = \mu(B)$ *e* $\mu(C) = 0$ *per ogni* C *misurabile,* $C \subseteq A - B$.

Teorema 11. *Un sottoinsieme* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *e' misurabile se e solo se, per ogni* $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ *esistono un aperto* O *ed un chiuso* K *tali che* $K \subseteq A \subseteq 0$ *e* $\mu(O - K) < \varepsilon$.

Osservazione 4.

- *Per ogni* $A \subseteq \mathbb{R}^n$, *risulta* $\mu_*(A) \leq \mu^*(A)$.

  Infatti, se E, F *sono misurabili e* $E \subseteq A \subseteq F$, *si ha* $\mu(E) \leq \mu(F)$ *e quindi*

  $$\mu_*(A) = sup\{\mu(E); E\ misurabile, E \subseteq A\} \leq \mu(F)$$

  per ogni F *misurabile,* $F \supseteq A$. *Percio'*

  $$\mu_+(A) \leq inf\{\mu(F); A \subseteq F\} = \mu^*(A).$$

- *Se* A *e' misurabile, allora* $\mu_*(A) = \mu(A) = \mu^*(A)$.

  Infatti, sia B *un boreliano tale che* $B \subseteq A$ *e* $\mu(B)0\mu_*(A)$.

  Poiche' A *e' misurabile, anche* $A - B$ *e' misurabile ed inoltre deve aversi* $\mu(A - B) = 0$.

  Allora

  $$\mu^*(A) = \mu(A) = \mu(B) + \mu(A - B) = \mu(B) = \mu_*(A).$$

- *"Viceversa", sia* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *e sia* $\mu_(A) = \mu^*(A) < +\infty$. *Allora* A *e' misurabile.*

  Infatti, sappiamo che esistono due boreliani E, F *tali che* $E \sqsubseteq A \subseteq F$ *e*

  $$\mu(E) = \mu_*(A), \quad \mu^*(A) = \mu(F).$$

  Da $F = E \cup (F - E)$ *segue che* $\mu(F) = \mu(E) + \mu(F - E)$ *ed, essendo* $\mu_(E) = \mu(F) < +\infty$, *segue che* $\mu(F - E) = 0$.

  D' altra parte, fissato ad arbitrio $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, *esiste almeno un chiuso* K *tale che* $K \subseteq E$ *e* $\mu(E - K) < \frac{\varepsilon}{2}$. *(Infatti* E *boreliano implica* E *misurabile. Allora esiste un aperto* E', $E' \supseteq E$ *tale che* $\mu(E' - K) < \frac{\varepsilon}{2}$; *poiche'* $E - K \subseteq E' - K$, *allora* $\mu(E - K) < \frac{\varepsilon}{2}$.*)*

  Per analoghe ragioni, esiste un aperto O, $O \supseteq F$ *tale che* $\mu(O - F) < \frac{\varepsilon}{2}$.

  Poiche' $O - F = (O - F) \cup (F - E) \cup (E - K)$, *risulta* $\mu(O - K) < \varepsilon$, *e la tesi segue dal teorema precedente.*

1.11 Trasformazioni di coordinate e proprieta' di invarianza della misura

Teorema 12. *Siano L una applicazione lineare invertibile di $\mathbb{R}^n$ in se',* $\mathbf{c}$ *un vettore di $\mathbb{R}^n$. Consideriamo la trasformazione (affine) tale che $T(x) = L(x) + \mathbf{c}$, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.*

Per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^n$, l' insieme $T[A] = \{T(x);\ x \in A\}$ misurabile se e solo se A e' misurabile.

Inoltre $\mu(T[A]) = |det(\mathcal{M})| \cdot \mu(\mathcal{A})$, essendo $\mathcal{M}$ la matrice di L rispetto ad una base fissata.

In particolare, se T e' una ISOMETRIA (cioe' $det(\mathcal{M}) = \pm 1$), allora $\mu(T[A]) = \mu(A)$.

Ancora piu' in particolare, segue che la misura e' invariante rispetto al gruppo delle trasformazioni euclidee, cioe' con $det(\mathcal{M}) = 1$ (rototraslazioni).

2 Funzioni misurabili ed integrale di Lebesgue

2.1 Funzioni misurabili

PREMESSA

E' utile estendere il sistema dei numeri reali "aggiungendo" due elementi formali $+\infty, -\infty$. Indicheremo ancora questo insieme col simbolo $\overline{\mathbb{R}}$, che sara' detto insieme dei numeri *reali estesi*.

Consistentemente, si estende la definizione dell' ordine, ponendo $-\infty < x < +\infty$, per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Poniamo inoltre $x + \infty = +\infty$, $x - \infty = -\infty$, $x \cdot \infty = +\infty$, $x \cdot (-\infty) = -\infty$ se $x > 0$, $\infty + \infty = +\infty$, $-\infty - \infty = -\infty$, $\infty \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$.

L' "operazione" $\infty - \infty$ e' lasciata INDEFINITA, mentre adotteremo la convenzione $0 \cdot \infty = 0$.

Uno degli usi dei nemeri reali estesi e' nell' uso dell' espressione *sup* S. Se S e' un insieme non vuoto di numeri reali superiormente limitato, ricordiamo che *sup* S esiste ed e' il minimo dei maggioranti di S. Se S non e' superiormente limitato, allora *sup* $S = +\infty$. Se poniamo *sup* $\emptyset = -\infty$, allora, in tutti i casi *sup* S rimane definito come il piu' piccolo numero reale esteso che risulta maggiore o uguale di ogni elemnto dell' insieme S.

Una funzione che assume valori in $\overline{\mathbb{R}}$ si dice funzione a valori reali estesi.

Proposizione 4. *Sia $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione a valori reali estesi, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A misurabile. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

1. *per ogni numero reale α, l' insieme $\{x \in A; f(x) > \alpha\}$ e' misurabile;*
2. *per ogni numero reale α, l' insieme $\{x \in A; f(x) \geq \alpha\}$ e' misurabile;*
3. *per ogni numero reale α, l' insieme $\{x \in A; f(x) < \alpha\}$ e' misurabile;*
4. *per ogni numero reale α, l' insieme $\{x \in A; f(x) \leq \alpha\}$ e' misurabile.*

DIMOSTRAZIONE

- $(1 \Rightarrow 4)$

  Infatti $\{x \in A; f(x) \leq \alpha\} = A - \{x \in A; f(x) > \alpha\}$ e la differenza di misurabili e' misurabile.

- Per la stessa ragione $(4 \Rightarrow 1)$ ed. inoltre, $2 \Leftrightarrow 3$.

- $(1 \Rightarrow 2)$

  Poiche' $\{x \in A; f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in A; f(x) > \alpha - \frac{1}{n}\}$, l' insieme $\{x \in A; f(x) \geq \alpha\}$ e' intersezione numerabile di misurabili.

- $(2 \Rightarrow 1)$

  Poiche' $\{x \in A; f(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in A; f(x) > \alpha + \frac{1}{n}\}$, l' insieme $\{x \in A; f(x) \geq \alpha\}$ e' unione numerabile di misurabili.

DEFINIZIONE FONDAMENTALE

Una funzione $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ a valori reali estesi, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, si dice $\underline{MISURABILE}$ se e solo se:

- A e' misurabile;
- f soddisfa (una delle) quattro condizioni equivalenti $1), 2), 3), 4)$.

Dalla Proposizione 3 (sect. 1.9) si ha che:

Proposizione 5. *Sia $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione a valori reali estesi, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A misurabile. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

- *f e' misurabile;*
- *per ogni $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto, l' insieme $f^{-1}[A]$ e' misurabile;*
- *per ogni $C \subseteq \mathbb{R}$ chiuso, l' insieme $f^{-1}[C]$ e' misurabile.*

Corollario 3. *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua, A misurabile. Allora f e' misurabile.*

DIMOSTRAZIONE Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si ha, per definizione, $\{x \in A; f(x) > \alpha\} = f^{-1}(\ ]\alpha, +\infty[\ )$. Essendo $]\alpha, +\infty[$ aperto ed f continua, esiste un aperto $B \subseteq \mathbf{R}^n$ tale che $\{x \in A; f(x) > \alpha\} = f^{-1}(\ ]\alpha, +\infty[\ ) = B \cap A$. Ora A e' misurabile per ipotesi, B e' misurabile in quanto aperto, e quindi $\{x \in A; f(x) > \alpha\}$ e' misurabile in quanto intersezione di due misurabili.

Osservazione 5. *La classe delle funzioni misurabili su un misurabile A e' estremamente piu' ampia della classe delle funzioni continue.*

Si consideri, ad esempio, la "funzione di Dirichlet" $\chi : [0,1] \to \mathbb{R}$ cosi' definita:

$$\chi(x) = 0 \ \forall x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \qquad \chi(x) = 1 \ \ \textit{altrimenti}.$$

La funzione χ e' chiaramente discontinua OVUNQUE sul suo dominio chiuso $[0,1]$; tuttavia, poiche' $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ e $[0,1] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ sono evidentemente misurabili, la funzione χ e' misurabile.

Osservazione 6. *Vi e' "consistenza" tra la nozione di insieme misurabile e la nozione di funzione misurabile.*

Infatti, dato $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e denotata con $\chi_A : \mathbb{R}^n \to \{0,1\}$ e' un semplice esercizio mostrare che A e' misurabile (come insieme) se e solo se χ_A e' misurabile (come funzione).

La classe delle funzioni misurabili e' "stabile" rispetto alle operazioni algebriche, come formalizzato dal seguente risultato la cui dimostrazione e' omessa.

Proposizione 6. *Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ funzioni a valori reali, A misurabile. Sia $c \in \mathbb{R}$. Allora $f+g, c \cdot f, f+c, f-g, f \cdot g$ sono misurabili.*

Una fondamentale differenza tra la classe delle funzioni misurabili e la classe delle funzioni continue e' che la prima - a differenza della seconda - e' "stabile" anche rispetto alle operazioni "di ordine" quali "*sup*", "*inf*", "*minlim*", "*maxlim*" e limiti puntuali (se estono, cioe' se la succesione e' puntualmente convergente).

Definizione 5. *Siano $\{f_1, \ldots, f_n\}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un insieme finito ed una successione di funzioni a valori reali estesi aventi il medesimo dominio $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Si definiscono*

- $$inf\{f_1, \ldots, f_n\} : A \to \overline{\mathbb{R}},\ inf\{f_1, \ldots, f_n\}(x) = inf\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}\ \forall x \in A;$$

- $$sup\{f_1, \ldots, f_n\} : A \to \overline{\mathbb{R}},\ sup\{f_1, \ldots, f_n\}(x) = sup\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}\ \forall x \in A;$$

- $$inf(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : A \to \overline{\mathbb{R}},\ inf(f_n)_{n\in\mathbb{N}}(x) = inf(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}\ \forall x \in A;$$

- $$sup(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : A \to \overline{\mathbb{R}},\ sup(f_n)_{n\in\mathbb{N}}(x) = sup(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}\ \forall x \in A;$$

- $$maxlim(f_n)_{n\in\mathbb{N}} =^{def}\ \ inf_{n\in\mathbb{N}}\ (sup(f_k)_{k\geq n}\ )$$

  $$minlim(f_n)_{n\in\mathbb{N}} =^{def}\ \ sup_{n\in\mathbb{N}}\ (inf(f_k)_{k\geq n}\ );$$

- *In generale, dalle definizioni, segue che*

$$minlim(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \leq maxlim(f_n)_{n\in\mathbb{N}};$$

se (e solo se)

$$minlim(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = maxlim(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

la successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e' PUNTUALMENTE CONVERGENTE, ed il comune valore

$$minlim(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = maxlim(f_n)_{n\in\mathbb{N}} =^{def} lim_{n\to\infty}\ f_n$$

si dice LIMITE PUNTUALE della successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Teorema 13. *Siano $\{f_1,\dots,f_n\}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un insieme finito ed una successione di funzioni misurabili aventi il medesimo dominio (misurabile) $A\subseteq\mathbb{R}^n$.*

Allora le funzioni $inf\{f_1,\dots,f_n\}$, $sup\{f_1,\dots,f_n\}$, $inf(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $sup(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $minlim(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $maxlim(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono misurabili.

In particolare, se la successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e' puntualmente convergente, allora $lim_{n\to\infty}\ f_n$ e' funzione misurabile.

DIMOSTRAZIONE

E' sufficiente osservare che, per ogini $\alpha\in\mathbb{R}$;

$$\{x\in A; sup\{f_1,\dots,f_n\}(x)>\alpha\} = \bigcup_{i=1}^{n}\{x\in A; f_i(x)>\alpha\};$$

percio' la misurabilta' delle funzioni $f_1,\dots,f_n$ implica la misurabilita' della funzione $sup\{f_1,\dots,f_n\}$.

Similmente

$$\{x\in A; sup(f_n)_{n\in\mathbb{N}}(x)>\alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in A; f_n(x)>\alpha\},$$

da cui segue che la funzione $sup(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e' misurabile.

Analogamente si procede per le funzioni "inf".

I rimanenti asserti seguono direttamente dalle definizioni.

Osservazione 7. *Il precedente risultato e' FALSO se sostituiamo "funzioni continue" a "funzioni misurabili".*

Ad esempio, consideriamo la successione di funzioni

$$f_n:[0,1]\to\mathbb{R}, \qquad f_n(x)=x^n \quad \forall x\in[0,1].$$

Le funzioni f_n sono polinomiali e, quindi, continue (e limitate). La successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e' puntualmente convergente e

$$lim_{n\to\infty}\ f_n = f,$$

essendo il limite puntuale la funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1[, \qquad f(1) = 0.$$

Percio' il limite puntuale f e' discontinua nel punto $x = 1$.

Tuttavia f ancora misurabile! (cfr, ad esempio, il prossimo risultato).

Definizione 6. *Una proprieta' si dice valida QUASI DAPPERTUTTO (abbreviato: Q.D.) se e solo se l'insieme dei punti in cui NON e' valida e' misurabile di misura nulla.*

In particolare, date due funzioni f, g aventi lo stesso dominio A,

diremo $f = gQ.D.$ se e solo se $\mu(\{x \in A; f(x) \neq g(x)\}) = 0$.

Analogamente, diremo che una successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di dominio A converge (puntualmete) Q.D. ad una funzione f se e solo se esiste un sottoinsieme $E \subseteq A$, $\mu(E) = 0$, tale che $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente ad f sul dominio $A - E$, cioe'

$$lim_{n\to\infty}\ f_n(x) = f(x), \qquad x \in \forall A - E.$$

Proposizione 7. *Se f e' una funzione misurabile di dominio A e $g = fQ.D.$, allora anche g e' misurabile.*

DIMOSTRAZIONE

Sia $E = \{x \in A; f(x) \neq g(x)\}$, $\mu(E) = 0$. Ora

$$\{x \in A; g(x) > \alpha\} = (\{x \in A; f(x) > \alpha\} \cup \{x \in E; g(x) > \alpha\}) - \{x \in E; g(x) \leq \alpha\}.$$

L'insieme $\{x \in A; f(x) > \alpha\}$ e' misurabile, in quanto f e' misurabile. Gli insiemi $\{x \in E; g(x) > \alpha\}$, $\{x \in E; g(x) \leq \alpha\}$ sono misurabili in quanto sottoinsiemi dell' insieme E di misura nulla e quindi anche essi di misura nulla.

Osservazione 8. *La funzione di Dirichlet (Oss.3) e' misurabile in quanto uguale Q.D. alla funzione costante 1.*

La funzione f limite puntuale dell' Oss.5 e' misurabile in quanto uguale Q.D. alla funzione indenticamente nulla.

I prossimi risultati possono essere "informalmente/intuitivamente" riassunti affermando (cfr. Littlewood) che ogni successione di funzioni misurabili (su domini di $\underline{misura\ finita}$) e' "quasi" uniformemente convergente.

Proposizione 8. *(Lemma di Littlewood)*
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mu(A) < \infty$. *Sia* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di funzioni misurabili di dominio* A *e sia* $f : A \to \mathbb{R}$ *una funzione a* <u>*valori reali*</u> *tale che*

$$lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \qquad \forall x \in A.$$

Allora, per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ *e per ogni* $\delta \in \mathbb{R}^+$, *esistono un sottoinsieme misurabile* $B \subseteq A$, $\mu(B) < \delta$ *ed un intero positivo* N *tali che*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \qquad \forall x \notin B, \qquad \forall n > N.$$

Una riformulazione piu' intuitiva del precedente risultato e' data dal seguente

Teorema 14. *(di Egoroff)*
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mu(A) < \infty$. *Sia* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di funzioni misurabili di dominio* A *e sia* $f : A \to \mathbb{R}$ *una funzione a* <u>*valori reali*</u> *tale che*

$$lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \qquad \forall x \in A \qquad (convergenza\ puntuale\ su\ A).$$

Allora, per ogni $\eta \in \mathbb{R}^+$ *(arbitrariamente piccolo) esiste un sottoinsieme misurabile* $B \subseteq A$, $\mu(B) < \eta$ *tale che* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\underline{converga\ uniformemente}$ *ad* f *su* $A - B$.

Osservazione 9. *Ricordiamo che, data una successione di funzioni (a valori reali)* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *di dominio* $X \subseteq \mathbb{R}^n$, *si dice che e'* $\underline{uniformemente\ convergente}$ *alla funzione* $f : X \to \mathbb{R}$ *(a valori reali) se* $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *tale che*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \qquad \forall n > N_\varepsilon \qquad \forall x \in X.$$

2.2 Richiami sull' integrale di Riemann

Dato un intervallo chiuso $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, una *FUNZIONE A GRADINI* su $[a, b]$ e' una funzione $\Psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ della forma

$$\Psi(x) = c_i, \quad \forall x \in]x_{i-1}, x_i], \qquad c_i \in \mathbb{R}, \qquad\qquad (\ddagger)$$

per qualche *suddivisione* $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots x_n = b$ dell'intervallo chiuso $[a, b]$, ed insieme di costanti $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$. Equivalentemente,

$$\Psi = \Psi(a) \cdot \chi_{\{a\}} + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \chi_{]x_{i-1}, x_i]},$$

denotando con χ le funzioni caratteristiche degli intervalli.

Data una funzione a gradini $\psi : [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ della forma (‡), l' integrale di Ψ su $[a,b]$ e' cosi' (naturalmente) definito:

$$\int_a^b \Psi(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \ c_i \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Data una funzione limitata $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, l' *integrale inferiore secondo Riemann* di f su $[a,b]$ e' cosi' definito:

$$\underline{R} \int_a^b f(x)dx = sup_{\ \Psi \leq f} \ \int_a^b \Psi(x)dx,$$

ove il *sup* e' considerato rispetto a tutte le funzioni a gradini Ψ minori o uguali ad f definite sull'intervallo $[a,b]$.

Data una funzione limitata $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, l' *integrale superiore secondo Riemann* di f su $[a,b]$ e' cosi' definito:

$$\overline{R} \int_a^b f(x)dx = inf_{\ \Phi \geq f} \ \int_a^b \Phi(x)dx,$$

ove lo inf e' considerato rispetto a tutte le funzioni a gradini Φ maggiori o uguali ad f definite sull'intervallo $[a,b]$.

In generale si ha, immediatamente dalle definizioni,

$$\underline{R} \int_a^b f(x)dx \leq \overline{R} \int_a^b f(x)dx.$$

Data una funzione limitata $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, diremo che e' *Riemann integrabile* (abbreviato, $R-$ *integrabile*) su $[a,b]$ se e solo integrale inferiore e superiore risultano *uguali*, e l' integrale di Riemann $R\int_a^b f(x)dx$ di f e', per definizione, il comune valore. In simboli

$$R \int_a^b f(x)dx =^{def} \ \underline{R} \int_a^b f(x)dx = \overline{R} \int_a^b f(x)dx.$$

Indichiamo con il simbolo $R\int_a^b f(x)dx$ l'integrale di Riemann per distinguerlo dall' integrale di Lebesgue del quale tratteremo in seguito.

Fin da ora anticipiamo che, come da attendersi, se una funzione risulta integrabile sia nel senso di Riemann che nel senso di Lebesgue, i due integrali *sono uguali*.

Grazie alla teoria della misura di Lebesgue e' possibile caratterizzare le funzioni $R-$integrabili su un intervallo $[a,b]$.

Teorema 15. *(di Lebesgue-Vitali)*

Condizione necessaria e sufficiente affinche' una funzione limitata $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *sia* $R-$*integrabile su un intervallo* $[a,b]$ *e' che* f *sia continua QUASI DAPPERTUTTO.*

2.3 Integrale di Lebesgue per funzioni semplici

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e denotiamo con χ_E la sua funzione caratteristica.

Una combinazione lineare

$$\varphi = \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot \chi_{E_i}, \qquad c_i \in \mathbb{R} \qquad\qquad (\dagger)$$

si dice FUNZIONE SEMPLICE se tutti gli insiemi $E_i,\ i = 1, \ldots, m$ sono misurabili di misura FINITA.

Osservazione 10. • *Da Oss.* 4 *e Prop.* 4 *segue subito che ogni funzione semplice e' funzione misurabile.*

- *La rappresentazione in forma* ($\dagger$) *NON E', evidentemente, UNICA.*
- *Tuttavia, e' un piccolo esercizio provare che le funzioni semplici possono essere caratterizzate intrinsecamente come segue: Una funzione* φ *e' semplice se e solo se e' misurabile, il suo "supporto" supp* $\varphi = \{x \in \mathbb{R}^n; \varphi(x) \neq 0\}$ *ha misura nulla, ed assume solo un insieme finito* $\{a_1, \ldots, a_n\}$ *di valori non nulli.*

Sia φ una funzione semplice, sia $\{a_1, \ldots, a_n\}$ l' insieme dei valori non nulli assunti da φ; allora

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \chi_{A_i} \qquad\qquad (\dagger\dagger),$$

ove

$$A_i = \{x \in \mathbb{R}^n; \varphi(x) = a_i\}.$$

La rappresentazione ($\dagger\dagger$) di φ si dice *rappresentazione canonica*, e' evidentemente unica ed e', a sua volta, caratterizzata dal fatto che gli insiemi (non vuoti, misurabili) A_i sono disgiunti ed i coefficienti $\{a_1, \ldots, a_n\}$ sono distinti e diversi da zero.

Definizione 7. • *L' INTEGRALE della funzione semplice* φ *e' cosi' definito:*

$$\int \varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mu(A_i), \qquad\qquad (\S),$$

ove φ *ha rappresentazione canonica* $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \chi_{A_i}$.

- *Sia* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *misurabile,* $\mu(E) < \infty$*. L' INTEGRALE su* E *della funzione semplice* φ *e' cosi' definito:*

$$\int_E \varphi = \int \varphi \cdot \chi_E = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mu(A_i \cap E). \qquad\qquad (\S\S)$$

A questo punto, l' integrale di una funzione semplice risulta correttamente (univocamente) definito in temini della rappresentazione canonica della funzione.

Una questione importante che sorge naturale e' la seguente; "se la rappresentazione che conosciamo non e' quella canonica, come calcolarne l' integrale"?

Il prossimo risultato, la cui dimostrazione e' materia di semplice esercizio, ci fornisce - tra altre conseguenze - la risposta.

Proposizione 9. *Siano φ, ψ funzioni semplici definite su $\mathbb{R}^n$. Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Allora*

$$\int (a\phi + b\psi) = \int a\phi + \int b\psi \qquad (linearita').$$

Inoltre, se $\varphi \geq \psi$ Q.D., allora

$$\int \varphi \geq \int \psi \qquad (monotonicita').$$

Osservazione 11. *Il primo asserto della precedente Proposizione esprime la linearita' dell' operazione del passaggio all' integrale. Questo implica, come rilevante conseguenza, la possibilita' di calcolare l' integrale di una funzione semplice prescindendo dalla conoscenza della rappresentazione canonica.*

*(**NB**. Si osservi che $\int \chi_E = \mu(E)$.)*

Formalmente, sia

$$\varphi = \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot \chi_{E_i}, \qquad c_i \in \mathbb{R} \qquad\qquad (\dagger)$$

ove $(\dagger)$ non sia necessariamente la rappresentazione canonica. Per la proprieta' di linearita' appena menzionata, e' ancora vero che

$$\int \varphi = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \mu(E_i).$$

2.4 Integrale di Lebesgue per funzioni limitate con dominio di misura finita

Sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione limitata $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mu(E) < \infty$.

In analogia con quanto fatto per l' integrale di Riemann, consideriamo i numeri reali:

- $$sup_{\ \psi \leq f} \int_E \psi,$$

ove l' estremo superiore e' considerato al variare di ψ funzione *semplice* tale che $\psi(x) \leq f(x), \forall x \in E$.

- $$inf_{\ \varphi \geq f} \int_E \varphi,$$
  ove l' estremo inferiore e' considerato al variare di φ funzione *semplice* tale che $\varphi(x) \geq f(x), \forall x \in E$.

Si ha immediatamente dalle definizioni e per monotonicita'che

$$sup_{\ \psi \leq f} \int_E \psi \leq inf_{\ \varphi \geq f} \int_E \varphi.$$

Definizione 8. *Data una funzione limitata $f : E \to \mathbb{R}, \mu(E) < \infty$, diremo che e' integrabile secondo Lebesgue (abbreviato, $L-$ integrabile) su E se e solo sussiste l' uguaglianza, e l' integrale di Lebesgue $\int_E f$ di f e', per definizione, il comune valore. In simboli*

$$\int_E f = sup_{\ \psi \leq f} \int_E \psi = inf_{\ \varphi \geq f} \int_E \varphi.$$

Il seguente fondamentale risultato caratterizza in modo assai chiaro ed elegante le funzioni $f : E \to \mathbb{R}$, ($\mu(E) < \infty$, f *limitate*) che risultano $L-$integrabili. Si noti, confrontando con il Teorema di Lebesgue-Vitali, quanto risulti "piu' ampia" la nuova classe di funzioni integrabili (anche nel caso $E = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$).

Teorema 16. *Sia $f : E \to \mathbb{R}$, $\mu(E) < \infty$, f limitata.*

La funzione f e' integrabile secondo Lebesgue su E se e solo se e' misurabile.

DIMOSTRAZIONE.

Supponiamo che f sia misurabile e fissiamo un intero positivo $M \in \mathbb{R}$ tale che $|f(x)| < M$, $\forall x \in E$.

Allora, per ogni $n \in \mathbb{Z}^+$, gli insiemi

$$E_k = \{x \in E;\ \frac{kM}{n} > f(x) \geq \frac{(k-1)M}{n}\}, \qquad k \in \mathbb{Z}, \qquad -n \leq k \leq n$$

sono misurabili, disgiunti ed hanno unione uguale ad E.

Ricordiamo che $\sum_{k=-n}^{n} \mu(E_k) = \mu(E)$.

Le funzioni *semplici* cosi' definite

$$\varphi_n = \frac{M}{n} \cdot \sum_{k=-n}^{n} k \cdot \chi_{E_k},$$

$$\psi_n = \frac{M}{n} \cdot \sum_{k=-n}^{n} (k-1) \cdot \chi_{E_k}$$

soddisfano le disuguaglianze

$$\psi_n(x) \leq f(x) \leq \varphi_n(x), \quad \forall x \in E.$$

Segue che

$$sup_{\ \psi \leq f,\ \psi\ semplice} \int_E \psi \geq \int \psi_n = \frac{M}{n} \cdot \sum_{k=-n}^{n} (k-1) \cdot \mu(E_k),$$

$$inf_{\ \varphi \geq f,\ \varphi\ semplice} \int_E \varphi \leq \int \varphi_n = \frac{M}{n} \cdot \sum_{k=-n}^{n} k \cdot \mu(E_k),$$

e quindi

$$0 \leq inf_{\ \varphi \geq f,\ \varphi\ semplice} \int_E \varphi - sup_{\ \psi \leq f,\ \psi\ semplice} \int_E \psi \leq \frac{M}{n} \cdot \sum_{k=-n}^{n} \mu(E_k) = \frac{M}{n} \cdot \mu(E).$$

Poiche' $n \in \mathbb{Z}^+$ e' arbitrario, segue che

$$inf_{\ \varphi \geq f,\ \varphi\ semplice} \int_E \varphi - sup_{\ \psi \leq f,\ \psi\ semplice} \int_E \psi = 0,$$

ed abbiamo quindi provato che la condizione f misurabile e' condizione sufficiente alla $L-$integrabilita'.

Viceversa, supponiamo che

$$inf_{\ \varphi \geq f,\ \varphi\ semplice} \int_E \varphi = sup_{\ \psi \leq f,\ \psi\ semplice} \int_E \psi.$$

Di conseguenza, fissato un intero positivo $n \in \mathbb{Z}^+$, esistono due funzioni semplici ψ_n, φ_n tali che

$$\psi_n(x) \leq f(x) \leq \varphi_n(x),\ \forall x \in E,$$

con

$$\int_E \varphi_n - \int_E \psi_n < \frac{1}{n}.$$

Ricordiamo (cfr. Teorema 13) che le funzioni

$$\psi^* = sup\ \psi_n \quad e \quad \varphi^* = inf\ \varphi_n$$

sono misurabili e

$$\psi^*(x) \leq f(x) \leq \varphi^*(x), \qquad \forall x \in E.$$

Ora, l' insieme

$$\Delta = \{x \in E; \psi^*(x) \leq \varphi^*(x)\}$$

e' l' unione degli insiemi

$$\Delta_r = \{x \in E; \psi^*(x) < \varphi^*(x) - \frac{1}{r}\}, \qquad r \in \mathbb{Z}^+.$$

Ogni insieme Δ_r e' contenuto nell' insieme

$$\{x \in E; \psi_n(x) < \varphi_n(x) - \frac{1}{r}\}$$

e questo ha misura minore di $\frac{r}{n}$. Poiche' n e' arbitrario, allora $\mu(\Delta_r) = 0$, da cui $\mu(\Delta) = 0$.

Percio' $\psi^* = \varphi^* Q.D.$ e quindi $\psi^* = f = \varphi^* Q.D.$; poiche' ψ^*, φ^* sono misurabili, anche f e' misurabile, e la condizione f misurabile e' necessaria alla $L-$integrabilita' su E.

Osservazione 12. *Il precedente risultato mostra, tra l' altro, che la nozione di integrale di Lebesgue per funzioni limitate su domini di misura finita e' consistente con quella precedentemente data per funzioni semplici; infatti, abbiamo osservato che le funzioni semplici sono funzioni misurabili con supporto di misura finita e, chiaramente, le due nozioni di integrale (quando ristrette al caso di funzioni semplici) forniscono il medesimo risultato.*

Il seguente risultato mostra che davvero l' integrale di Lebesgue e' una generalizzazione - in senso stretto - dell' integrale di Riemann.

Proposizione 10. *Sia f una funzione limitata definita su un intervallo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Se f e' integrabile secondo Riemann su $[a, b]$, allora f e' misurabile e, quindi, integrabile secondo Lebesgue su $[a, b]$. Inoltre*

$$R \int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f.$$

DIMOSTRAZIONE.

Notiamo che ogni funzione a gradini h su $[a, b]$ definisce univocamente la funzione semplice ξ tale che $\xi(x) = h(x), \forall x \in [a, b]$, $\xi(x) = 0, \forall x \notin [a, b]$, e viceversa. Di conseguenza, si ha

$$\underline{R} \int_a^b f(x)dx \leq sup_{\ \psi \leq f \psi, \psi\ semplice} \int_{[a,b]} \psi \leq inf_{\ \varphi \geq f, \varphi\ semplice} \int_{[a,b]} \varphi \leq \overline{R} \int_a^b f(x)dx.$$

Poiche' f e' integrabile secondo Riemann, le precedenti disuguaglianze sono UGUAGLIANZE, quindi f e' misurabile (per il precedente Teorema) e, di piu'

$$R\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f.$$

Proposizione 11. *Siano f, g funzioni misurabili, limitate, definite su un dominio E di misura finita. Allora.*

- $$\int_E (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_E f + \beta \int_E g, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$
- *Se $f = gQ.D.$, allora*
$$\int_E f = \int_E g.$$
- *Se $f \leq gQ.D.$, allora $\int_E f \leq \int_E g$. In particolare, $|\int_E f| \leq \int_E |f|$.*
- *Siano $k, K \in \mathbb{R}$ tali che $k \leq f(x) \leq K,\ \forall x \in E$. Allora*
$$k \cdot \mu(E) \leq \int_E f \leq K \cdot \mu(E).$$
- *Siano A, B misurabili di misura finita, $A \cap B = \emptyset$. Allora*
$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

Esempio 8. *Consideriamo la funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ cosi' definita:*

$$f(x) = x^2,\ x \in [0,1] - \mathbb{Q}, \qquad f(x) = 0,\ x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}.$$

La funzione f e' ovunque discontinua, tuttavia misurabile in quanto

$$f = gQ.D., \qquad essendo \qquad g(x) = x^2.$$

Abbiamo allora che f e' $L-$integrabile su $[0,1]$ e, di piu':

$$\int_{[0,1]} f = \int_{[0,1]} g = R\int_0^1 x^2 dx = [\frac{x^3}{3}]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3}.$$

Proposizione 12. *(della convergenza puntuale dominata)*
Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e' una successione di funzioni misurabili definite su un dominio* E *di misura finita.*

Supponiamo che esista una costante $M \in \mathbb{R}$ *tale che*

$$|f(x)| \le M, \qquad \forall x \in E, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \qquad\qquad (*)$$

Se

$$lim_{n\to\infty}\ f_n(x) = f(x), \qquad \forall x \in E,$$

(cioe' la successione di funzioni converge puntualmente) allora

$$lim_{n\to\infty}\ \int_E f_n = \int_E f.$$

DIMOSTRAZIONE.

Dalla Prop. 6 (Lemma di Littlewood), per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, esistono un intero positivo N ed un misurabile $B \subseteq E,\ con\ \mu(B) < \frac{\varepsilon}{4M}$ tali che risulti

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2\cdot\mu(E)}, \qquad \forall x \in E - B, \qquad \forall n > N.$$

Allora

$$|\int_E f_n - \int_E f| = |\int_E (f_n - f)| \le \int_E |f_n - f| \le \int_{E-B} |f_n - f| + \int_B |f_n - f|.$$

Ora

$$\int_{E-B} |f_n - f| < \ \frac{\varepsilon}{2\cdot\mu(E)} \cdot \mu(E-B) < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\int_B |f_n - f| < \ 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2},$$

da cui

$$|\int_E f_n - \int_E f| < \varepsilon \qquad \forall n > N.$$

Percio'

$$lim_{n\to\infty}\ \int_E f_n = \int_E f.$$

Osservazione 13. *Se trascuriamo l' ipotesi* $(*)$ *(detta "di dominanza"), l' enunciato precedente risulta FALSO.*

Ad esempio, consideriamo la successione

$$(f_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}, \qquad f_n = n\cdot\chi_{[0,\frac{1}{n}]}.$$

La successione non soddisfa l' ipotesi $(*)$, *e converge puntualmente alla funzione identicamente nulla* $f\equiv 0$ *sull' intervallo* $[0,1]$.

Abbiamo

$$\int_{[0,1]} f_n = n\cdot\mu([0,\frac{1}{n}]) = n\cdot\frac{1}{n} = 1, \qquad \int_{[0,1]} f = 0.$$

Percio'

$$lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]} f_n = 1 \neq 0 = \int_{[0,1]} f.$$

2.5 Integrale di Lebesgue per funzioni misurabili non-negative

In questa sezione, ci proponiamo di estendere ulteriormente la teoria al caso di funzioni *non necessariamente limitate*, su domini *non necessariamente di misura finita*; tuttavia, siamo costretti a considerare, per il momento, funzioni a valori *non negativi*.

Osservazione 14. *Sia* $h : E \to \mathbb{R}$ *funzione misurabile limitata, e supponiamo che il suo supporto* $supp(h) = \{x\in E; h(x)\neq 0\}$ *sia di misura finita.*

Allora $\int_{supp(h)} h$ *e' definito a norma della sezione precedente, ed e' naturale porre*

$$\int_E h =^{def} \int_{supp(h)} h.$$

Definizione 9. *Sia* $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ *funzione misurabile non-negativa. Poniamo, per definizione,*

$$\int_E f =^{def} sup_{\ h\leq f}\int_E h,$$

ove l' estremo superiore e' considerato rispetto a tutte le funzioni h misurabili, limitate, con supporto di misura finita e tali che $h(x)\leq f(x),\ \forall x\in E$.

Proposizione 13. *Siano* f, g *funzioni misurabile non-negative. Allora:*

- $$\int_E c\cdot f = c\cdot\int_E f, \qquad \forall c\in\overline{\mathbb{R}}.$$

- $$\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g;$$

  inoltre, se la funzione misurabile non-negativa g e' tale che $\int_E g < \infty$, si ha anche

  $$\int_E (f-g) = \int_E f - \int_E g;$$

- *se $f \leq g$ Q.D., allora*

  $$\int_E f \leq \int_E g.$$

Teorema 17. *(Lemma di Fatou)*

Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili non-negative di dominio E che converga puntualmente Q.D. alla funzione f di dominio E. Allora

$$\int_E f \leq minlim \int_E f_n.$$

DIMOSTRAZIONE.

In primo luogo, notiamo che - senza perdita' di generalita' - possiamo ragionare sull' insieme $E' \subseteq E$ sul quale $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f, $\mu(E - E') = 0$ per ipotesi, in quanto il contributo all' integrale di valutazioni su insiemi di misura nulla e' evidentemente nullo.

Sia $h : E \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile limita tale che non-negativa $supp(h) \subseteq E'$, $\mu(supp(h)) < \infty$, e tale che $h \leq f$ su E'.

L' integrale $\int_E h = \int_{E'} h$ e' ben definito, per le osservazioni precedenti.

Definiamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$, li funzione h_n come segue:

$$h_n = min\{h, f_n\}.$$

Le funzioni h_n sono limitate, con supporto di misura finita e misurabili, in quanto definite come "inf" di funzioni misurabili, da cui segue che gli integrali $\int_E h_n = \int_{E'} h_n$ sono ben definiti.

Inoltre, essendo $h_n \leq h \leq f = \lim_{n\to\infty} f_n$, la successione $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente alla funzione h.

Di piu' notiamo che, posto

$$M = sup\{h(x); x \in E\} = sup\{h(x); x \in supp(h)\},$$

risulta
$$|h_n(x)| \leq M, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad x \in supp(h) \subseteq E' \subseteq E$$
e, quindi, la successione $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soddisfa le ipotesi della Prop. 10 (convergenza puntuale dominata). Percio'
$$\int_{supp(h)} h = \int_{E'} h = \int_E h = lim_{n\to\infty} \int_E h_n = minlim \int_E h_n \leq minlim \int_E f_n.$$
Considerando l' estremo superiore rispetto alle funzioni h, si conclude che
$$\int_E f \leq minlim \int_E f_n.$$

Osservazione 15. *Nella sua formulazione generale, il Lemma di Fatou e' "il migliore risultato possibile": infatti, data una successione puntualmente convergente di funzioni misurabili non-negative NON E', in generale, vero che la relativa successione di integrali sia convergente (per questa ragione parliamo di "minlim"), NE' che valga l' uguaglianza.*

Esempio 9.

- *Consideriamo la successione di funzioni caratteristiche $\chi_{[n,+\infty[}$, $n \in \mathbb{N}$ (di dominio $\mathbb{R}$). Si ha: $\int_{\mathbb{R}} \chi_{[n,+\infty[} = +\infty$. D' altra parte, la successione converge puntualmente alla funzione identicamente nulla $f \equiv 0$. Percio'*
$$\int_{\mathbb{R}} f = 0 \neq lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[n,+\infty[} = \infty.$$
- *Consideriamo la successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (di dominio $\mathbb{R}$), ove*
$$f_n = \chi_{[n,n+1[},\ n\ pari, \qquad f_n \equiv 0,\ n\ dispari.$$
La successione converge puntualmente alla funzione identicamente nulla $f \equiv 0$. Tuttavia
$$(\int_{\mathbb{R}} f_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 0, 1, 0, \ldots),$$
da cui
$$\int_{\mathbb{R}} f = minlim \int_{\mathbb{R}} f_n = 0 < maxlim \int_{\mathbb{R}} f_n = 1.$$

Teorema 18. *(di Beppo Levi o, della "convergenza monotona")*

Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili non-negative di dominio E.

Assumiamo che la successione sia monotona non-decrescente (cioe', $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, $\forall x \in E, \quad n \in \mathbb{N}$.)

Posto

$$f = lim_{n\to\infty} f_n,$$

risulta

$$\int_E f = lim_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

DIMOSTRAZIONE.

In primo luogo, notiamo esplicitamente che la condizione di monotonicita' non-decrescente

$$f_n(x) \le f_{n+1}(x), \ \forall x \in E, \quad n \in \mathbb{N}$$

implica

$$minlim f_n(x) = maxlim f_n(x) = lim_{n\to\infty} f_n(x) =^{def} f(x), \ \forall x \in E;$$

percio' la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e' certamente puntualmente convergente ad una funzione f.

Ora, dal Lemma di Fatou segue che

$$\int_E f \le minlim \int_E f_n. \qquad (\dagger)$$

D' altra parte, per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta $f_n \le f$, da cui $\int_E f_n \le \int_E f$; percio'

$$maxlim \int_E f_n \le \int_E f. \qquad (\dagger\dagger)$$

Poiche', in generale, $minlim \int_E f_n \le maxlim \int_E f_n$, le condizioni ($\dagger$) e ($\dagger\dagger$) implicano

$$maxlim \int_E f_n = \int_E f = minlim \int_E f_n = lim_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

Con i medesimi argomenti, si dimostra la seguente variante del Teorema di Beppo Levi.

Proposizione 14. *Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili non-negative di dominio E.*

Assumiamo che la successione sia puntualmente convergente ad una funzione f e che risulti

$$f_n \le f, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Allora

$$\int_E f = lim_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

Una tipica conseguenza del Teorema di Beppo Levi, molto utile nelle applicazioni, e' data dal seguente

Corollario 4. *Sia $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile non-negativa e sia $(A_n)_{n\in\mathbb{N}},\ A_n \subseteq E$ una successione di sottoinsiemi misurabili di E "annidata non-decrescente", cioe' tale che $A_n \subseteq A_{n+1},\ n \in \mathbb{N}$. Assumiamo*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = E.$$

Allora

$$lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f = \int_E f.$$

DIMOSTRAZIONE.

Dalle ipotesi, la successione $(f \cdot \chi_{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ e' successione monotona non-decrescente di funzioni misurabili non-negative che, riguardate come funzioni su E, converge puntualmente alla funzione f. Allora, per il Teorema di Beppo Levi, si ha

$$\int_E f = lim_{n\to\infty} \int_E f \cdot \chi_{A_n} = lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f.$$

Esempio 10. *Consideriamo la funzione $f :]0, +\infty+[\to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$. La funzione f e' non-negativa, misurabile (in quanto continua) e quindi ammette integrale su $]0, +\infty+[$. Vogliamo calcolare $\int_{]0,+\infty+[} f$.*

Consideriamo la successione di intervalli limitati e chiusi

$$([\frac{1}{n}, n])_{n\in\mathbb{Z}^+}$$

che soddisfa le ipotesi del Corollario precedente.

Allora

$$\int_{]0,+\infty+[} f = lim_{n\to\infty} \int_{[\frac{1}{n},n]} f.$$

Sull' intervallo $[\frac{1}{n}, n]$ la funzione f e' anche $R-$integrabile (in quanto continua e limitata) ed inoltre

$$\int_{[\frac{1}{n},n]} f = R\int_{\frac{1}{n}}^{n} f = [log(x)]_{x=\frac{1}{n}}^{x=n} = log(n) - log(\frac{1}{n}).$$

Percio'

$$\int_{]0,+\infty+[} f = lim_{n\to\infty}(log(n)-log(\frac{1}{n})) = lim_{n\to\infty}log(n)-lim_{n\to\infty}log(\frac{1}{n}) = \infty-(-\infty) = \infty.$$

Esempio 11. *Sia fissato $m \in \mathbb{Z}^+$. Consideriamo la funzione $f :]1, +\infty + [\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^m}$. La funzione f e' non-negativa, misurabile (in quanto continua) e quindi ammette integrale su $]1, +\infty + [$. Vogliamo calcolare $\int_{]1,+\infty+[} f$.*

Consideriamo la successione di intervalli limitati e chiusi

$$([1 + \frac{1}{n}, n])_{n \in \mathbb{Z}^+}$$

che soddisfa le ipotesi del Corollario precedente.

Allora

$$\int_{]1,+\infty+[} f = lim_{n\to\infty} \int_{[1+\frac{1}{n},n]} f.$$

Sull' intervallo $[1 + \frac{1}{n}, n]$ la funzione f e' anche $R-$integrabile (in quanto continua e limitata) ed inoltre

$$\int_{[1+\frac{1}{n},n]} f = R \int_{1+\frac{1}{n}}^{n} f.$$

Distinguiamo due casi:

- *Sia $m = 1$. Allora*

$$\int_{]1,+\infty+[} f = lim_{n\to\infty} (log(n) - log(1 + \frac{1}{n})) =$$

$$lim_{n\to\infty} log(n) - lim_{n\to\infty} log(1 + \frac{1}{n}) = \infty - 0 = \infty.$$

- *Sia $m > 1$. Allora*

$$\int_{]1,+\infty+[} f = lim_{n\to\infty} [-(m-1)^{-1} \cdot x^{-m+1}]_{x=1+\frac{1}{n}}^{x=n} =$$

$$lim_{n\to\infty} (-(m-1)^{-1} \cdot n^{-m+1}) - lim_{n\to\infty} (-(m-1)^{-1} \cdot (1 + \frac{1}{n})^{m-1}) =$$

$$0 - (-(m-1)^{-1}) = (m-1)^{-1}.$$

Proposizione 15. *(di Beppo Levi per le serie)*

Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili non-negative di dominio E.

Poniamo

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} f_n.$$

Allora

$$\int_E g = \sum_{n=0}^{\infty} \int_E f_n.$$

DIMOSTRAZIONE.
Notiamo che, la successione di "somme parziali"

$$(\sum_{k=0}^{n} f_k)_{n\in\mathbb{N}}$$

e' monotona non-decrescente e che, per definizione

$$g = lim_{n\to\infty}\ (\sum_{k=0}^{n} f_k).$$

Poiche'

$$\int_E \sum_{k=0}^{n} f_k = \sum_{k=0}^{n}\ \int_E f_k$$

dal teorema di Levi per le successioni segue che

$$\int_E g = lim_{n\to\infty}\ (\int_E\ \sum_{k=0}^{n} f_k) = lim_{n\to\infty}\ (\sum_{k=0}^{n}\ \int_E f_k) = \sum_{n=0}^{\infty}\ \int_E f_n.$$

Esempio 12. *Consideriamo la funzione (sul dominio* $[0,+\infty[$ *) cosi' definita:*

$$g = \sum_{n=0}^{\infty}\ \frac{1}{n}\cdot\chi_{[n,n+1[}.$$

Dal risultato precedente, si ha:

$$\int_{[0,+\infty[} g = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{[0,+\infty[}\frac{1}{n}\cdot\chi_{[n,n+1[} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty,$$

in quanto la "serie armonica" di esponente 1 *e' divergente.*

Definizione 10. *Una funzione* $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ *misurabile non-negativa si dice SOMMABILE (su E) se e solo se* $\int_E f < \infty$.

Osservazione 16. *Il Teorema di Beppo Levi e sue varianti (ad es., il Corollario* 4*) sono strumento "tipico" per verificare se una data funzione risulta sommabile o meno. Si confrontino Esempi* 10, 11.

Esempio 13. *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$. *Ci chiediamo se* f *e' sommabile sulla semiretta* $[0,+\infty[$.

A norma del Corollario 4, ponendo $f_n = f \cdot \chi_{[0,n]},\ n \in \mathbb{Z}^+$*, risulta:*

$$\int_{[0,+\infty[} f = lim_{n\to\infty} \int_{[0,+\infty[} f_n = lim_{n\to\infty} \int_{[0,n]} e^{-x} =$$

$$= lim_{n\to\infty}\ R\int_0^n e^{-x}dx = lim_{n\to\infty}[-e^{-x}]_{x=0}^{x=n} = lim_{n\to\infty}(-e^{-n}+1) = 1.$$

Percio' f e' sommabile sulla semiretta $[0, +\infty[$.

Esempio 14. *Consideriamo la serie di funzioni*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \chi_{]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]}, \qquad (\diamondsuit)$$

pensate di dominio $]0, 1]$*. La serie* $(\diamondsuit)$ *converge puntualmente su* $]0, 1]$ *ad una funzione g. Ci chiediamo su g e' sommabile su* $]0, 1]$.

Dal Teorema di Levi per le serie abbiamo

$$\int_{]0,1]} g = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{]0,1]} \frac{1}{n} \cdot \chi_{]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \mu(]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \infty.$$

Infatti la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ *di esponente 3 e' convergente, e quindi si ha*

$$\int_{]0,1]} g < +\infty;$$

percio' g e' sommabile su $]0, 1]$.

Esempio 15. *Consideriamo la serie di funzioni*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \cdot \chi_{]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]}, \qquad (\diamondsuit\diamondsuit)$$

pensate di dominio $]0, 1]$*. La serie* $(\diamondsuit\diamondsuit)$ *converge puntualmente su* $]0, 1]$ *ad una funzione g. Ci chiediamo su g e' sommabile su* $]0, 1]$.

Dal Teorema di Levi per le serie abbiamo

$$\int_{]0,1]} g = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{]0,1]} (n+1) \cdot \chi_{]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \cdot \mu(]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(n+1) \cdot \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Infatti la serie armonica "classica" $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ e' divergente, e quindi si ha

$$\int_{]0,1]} g = +\infty;$$

percio' g e' non e' sommabile su $]0, 1]$.

2.6 Funzioni sommabili ed integrale generale di Lebesgue

Sia $f : E \to \overline{\mathbb{R}},\ E \subseteq \mathbb{R}^n$ una funzione a valori reali estesi.
La sua *parte positiva* f^+ e' la funzione (ancora di dominio E) cosi' definita:

$$f^+(x) = f(x) \textit{ se } f(x) \geq 0, \qquad f^+(x) = 0 \textit{ altrimenti}.$$

La sua *parte negativa* f^- e' la funzione (ancora di dominio E) cosi' definita:

$$f^-(x) = -f(x) \textit{ se } f(x) \leq 0, \qquad f^-(x) = 0 \textit{ altrimenti}.$$

Osservazione 17. *Sia $f : E \to \overline{\mathbb{R}},\ E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile.*

- *La parte positiva f^+ e la parte negativa f^- sono entrambe misurabili non-negative. Infatti abbiamo*

  $$f^+ = sup\ \{f,\ \mathbf{0}\}, \qquad f^- = sup\ \{-f,\ \mathbf{0}\}$$

  ove $\mathbf{0}$ denota la funzione identicamente nulla, che e' evidentemente misurabile.

- $$f = f^+ - f^-, \qquad |f| = f^+ - f^-.$$

Definizione 11.
- *Una funzione (misurabile) f si dice SOMMABILE sull' insieme E (misurabile) se e solo se le funzioni $f^+,\ f^-$ sono ENTRAMBE SOMMABILI su E.*

- *Se f e' sommabile su E, si pone, per definizione:*

  $$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-.$$

Proposizione 16. *Siano f, g funzioni sommabili su E. Allora:*

- $$\int_E c \cdot f = c \cdot \int_E f, \qquad \forall c \in \overline{\mathbb{R}}.$$
- $$\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g.$$
- *se $f \leq g$ Q.D., allora*
$$\int_E f \leq \int_E g.$$
- *Se $A, B \subseteq E$ sono misurabili, e $A \cap B = \emptyset$, allora*
$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

.

Teorema 19. *(della convergenza dominata di Lebesgue)*
Sia g una funzione sommabile su E e sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili su E tale che:

- *la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente Q.D. alla funzione f.*
- $|f_n| \leq g$ *su E* *(condizione di dominanza).*

Allora f e' sommabile su E e, di piu',

$$\int_E f = lim_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

DIMOSTRAZIONE.
In primo luogo, notiamo che, dalle ipotesi, segue immediatamente che

$$f^+ + f^- = |f| \leq g \ Q.D.;$$

dalla Proposizione 14, si ha che

$$\int_E f^+ + \int_E f^- = \int_E |f| \leq \int_E g < +\infty,$$

per cui f^+, f^- sono entrambe sommabili (come funzioni non-negative), e quindi f e' sommabile.
Le funzioni $(g - f_n), n \in \mathbb{N}$ sono misurabili non-negative e la successione $\Big((g - f_n)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente Q.D. alla funzione $(g - f)$.
Dal Lemma di Fatou, segue che

$$\int_E (g - f) \leq minlim \int_E (g - f_n).$$

Ora

$$\int_E g - \int_E f = \int_E (g - f) \leq minlim \int_E (g - f_n) = sup_{\ n\in\mathbb{N}} \Big(inf_{\ k\geq n} \int_E (g - f_k)\Big) =$$

$$= sup_{\ n\in\mathbb{N}} \Big(\int_E g - \ sup_{\ k\geq n} \int_E f_k\Big) =$$

$$= \int_E g - \ inf_{\ n\in\mathbb{N}} \Big(sup_{\ k\geq n} \int_E f_k\Big) = \int_E g - \ maxlim \int_E f_n.$$

In breve, abbiamo provato che

$$\int_E g - \int_E f \leq \int_E g - \ maxlim \int_E f_n,$$

e, di conseguenza:

$$\int_E f \geq maxlim \int_E f_n.$$

Analogamente, funzioni $(g + f_n), n \in \mathbb{N}$ sono misurabili non-negative (ricordiamo che, per ipotesi, $g \geq |f_n|$) e la successione $\Big((g + f_n)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente Q.D. alla funzione $(g + f)$,
Ancora dal Lemma di Fatou, segue che

$$\int_E (g + f) \leq minlim \int_E (g + f_n).$$

Ora

$$\int_E g + \int_E f = \int_E (g + f) \leq minlim \int_E (g + f_n) = sup_{\ n\in\mathbb{N}} \Big(inf_{\ k\geq n} \int_E (g + f_k)\Big) =$$

$$= sup_{\ n\in\mathbb{N}} \Big(\int_E g + inf_{\ k\geq n} \int_E f_k\Big) =$$

$$= \int_E g + sup_{\ n\in\mathbb{N}} \left(inf_{\ k\geq n} \ \int_E f_k \right) = \int_E g + minlim \ \int_E f_n.$$

In breve, abbiamo provato che

$$\int_E g + \int_E f \leq \int_E g + \ minlim \ \int_E f_n,$$

e, di conseguenza:

$$\int_E f \leq minlim \ \int_E f_n.$$

Poiche', in generale "$minlim \leq maxlim$", concludiamo che

$$maxlim \ \int_E f_n = \int_E f = minlim \ \int_E f_n = lim_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

3 Calcolo di misure ed integrali per domini in $\mathbb{R}^n$: Teorema di Fubini-Tonelli ed "integrali multipli"

Ricordiamo che la misura di Lebesgue e' sempre definita relativamente alla scelta di un fissato spazio $\mathbb{R}^n$, cioe' per una fissata dimensione finita $n \in \mathbb{Z}^+$.

Nel seguito, per mettere in evidenza questo aspetto, scriveremo μ_n in luogo di μ.

Useremo inoltre le ulteriori convenzioni notazionali.

Dati $n, r, s \in \mathbb{Z}^+, \quad n = r + s$ ed un punto $\alpha = (x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s) \in \mathbb{R}^n$, scriveremo $\alpha = (x, y)$, essendo $x = (x_1, \ldots, x_r) \in \mathbb{R}^r, \quad y = (y_1, \ldots, y_s) \in \mathbb{R}^s$.

In altre parole, pensando $\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$, un punto $\alpha \in \mathbb{R}^n$ viene riguardato canonicamente come coppia ordinata (x, y), essendo $x = (x_1, \ldots, x_r) \in \mathbb{R}^r, \quad y = (y_1, \ldots, y_s) \in \mathbb{R}^s$.

Teorema 20. *(***Fubini – Tonelli***)*

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n, \ n \geq 2$, A misurabile.

Siano $r, s \in \mathbb{Z}^+, \quad n = r + s$.

Indichiamo con (x, y) il generico punto in $\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$, essendo $x = (x_1, \ldots, x_r) \in \mathbb{R}^r, \quad y = (y_1, \ldots, y_s) \in \mathbb{R}^s$.

Fissato $\underline{x} \in \mathbb{R}^r$, sia

$$A_{\underline{x}} = \{y \in \mathbb{R}^s; \ (\underline{x}, y) \in A\} \subseteq \mathbb{R}^s,$$

e sia

$$S_A = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^r; \ \mu_s^*(A_{\underline{x}}) > 0\} \subseteq \mathbb{R}^r.$$

L' insieme

$$S_A = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^r; \ \mu_s^*(A_{\underline{x}}) > 0\} \subseteq \mathbb{R}^r \ e' \ misurabile.$$

Sia

$$f : A \to \overline{\mathbb{R}}$$

una funzione misurabile non-negativa. Allora (Tonelli)

1. *Esiste un sottoinsieme $S_A^0 \subseteq S_A$ misurabile con $\mu_r(S_A^0) = 0$ tale che, per ogni $\underline{x} \in S_A - S_A^0$, la funzione $f_{\underline{x}} : A_{\underline{x}} \to \overline{\mathbb{R}}$ definita come*

$$f_{\underline{x}}(y) = f(\underline{x}, y), \qquad y \in A_{\underline{x}}$$

   e' funzione misurabile non-negativa.

In particolare, quindi,

$$A_{\underline{x}} = \{y \in \mathbb{R}^s;\ (x, y) \in A\} \subseteq \mathbb{R}^s \ e' \ misurabile \ \forall \underline{x} \in S_A - S_A^0.$$

(A parole, le "sezioni" $A_{\underline{x}}$ sono misurabili Q.D. sull'insieme S_A).

2. *La funzione*

$$f_1 : \underline{x} \mapsto f_1(\underline{x}) = \int_{A_{\underline{x}}} f_{\underline{x}} = \int_{A_{\underline{x}}} f_{\underline{x}}(y)dy, \qquad \underline{x} \in S_A - S_A^0$$

(definita sull' insieme misurabile $S_A - S_A^0$) e' misurabile non-negativa.

3. *Si ha:*

$$\int_A f = \int_{S_A - S_A^0} f_1(\underline{x})d\underline{x} = \int_{S_A - S_A^0} (\int_{A_{\underline{x}}} f_{\underline{x}}(y)dy)d\underline{x}.$$

Sia

$$f : A \to \overline{\mathbb{R}}$$

una funzione misurabile qualsiasi, f sommabile su A. Allora (Fubini) le funzioni $f_{\underline{x}}$, f_1 definite come ai punti 1) *e* 2) *sono sommabili.*

Mantenendo le notazioni del precedente Teorema, abbiamo, come caso particolare:

Corollario 5. *(Teorema di Tonelli per la misura)*
Sia $B \subseteq \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$, B misurabile.
Siano

$$S_B = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^r; \mu_s^*(B_{\underline{x}}) > 0\}, \qquad S_B^0 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^r; B_{\underline{x}} \ NON \ misurabile\} \subseteq S_B.$$

1. *I sottoinsiemi S_B, $S_B^0 \subseteq \mathbb{R}^r$ sono misurabili, e $\mu_r(S_B^0) = 0$.*
2. *Si ha:*

$$\mu_n(B) = \int_{S_B - S_B^0} \mu_s(B_{\underline{x}}).$$

DIMOSTRAZIONE

A titolo di esempio/esercizio, deriviamo questo enunciato (per specializzazione) dai punti 1), 2), 3) del Teorema 20.

Nel formalismo e nella notazione del Teorema 20, poniamo

$$A = \mathbb{R}^n,$$

da cui

$$S_A = S_{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^r$$

e

$$A_{\underline{x}} = \mathbb{R}^n{}_{\underline{x}} = \mathbb{R}^s, \qquad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^r.$$

Consideriamo la *funzione caratteristica* $\chi_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, che e' funzione misurabile non-negativa, e quindi soddifa le ipotesi del Teorema di Tonelli.

Dal punto 1), si ha che esiste un $(\mathbb{R}^r)^0$ di MISURA NULLA tale che

$$(\chi_B)_{\underline{x}} \equiv \chi_{B_{\underline{x}}} : \mathbb{R}^n{}_{\underline{x}} = \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$$

risulta misurabile per ogni $\underline{x} \in \mathbb{R}^r - (\mathbb{R}^r)^0$, cioe' $B_{\underline{x}}$ misurabile, da cui

$$(\mathbb{R}^r)^0 = S_B^0 \subseteq S_B.$$

Dal punto 2), la funzione

$$(\chi_B)_1 : \underline{x} \mapsto \int_{\mathbb{R}^s} (\chi_B)_{\underline{x}} = \int_{\mathbb{R}^s} \chi_{B_{\underline{x}}} = \mu_s(B_{\underline{x}})$$

e' misurabile su $\mathbb{R}^r - (\mathbb{R}^r)^0 = \mathbb{R}^r - S_B^0$ (equivalentemente, su $\mathbb{R}^r$).

Percio'

$$supp((\chi_B)_1) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^r; B_{\underline{x}}\ misurabile,\ \mu_s(B_{\underline{x}}) > 0\}$$

e' misurabile, e

$$supp((\chi_B)_1) \cup S_B^0 = S_B$$

e' a sua volta misurabile.

Dal punto 3), segue allora

$$\mu_n(B) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_B = \int_{\mathbb{R}^r - S_B^0} (\chi_B)_1 = \int_{S_B - S_B^0} (\chi_B)_1 = \int_{S_B - S_B^0} \mu_s(B_{\underline{x}}).$$

Esempio 16. *1. Sia*

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \le 1\},$$

e calcoliamo $\mu_2(A)$.

Per $\underline{x} \in \mathbb{R}$, *risulta*

$$A_{\underline{x}} = \emptyset, \qquad \text{se } |x| > 1,$$

$$A_{\underline{x}} = \{y \in \mathbb{R};\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}\ \} \qquad \text{se } |x| \le 1,$$

Gli insiemi $A_{\underline{x}}$ *sono chiusi, quindi misurabili. Inoltre* $\mu(A_{\underline{x}}) = 2\sqrt{1-\underline{x}^2} > 0$, *per ogni* $\underline{x} \in]-1,1[$, *da cui* $S_A =]-1,1[$.

Percio'

$$\mu_2(A) = \int_{S_A=]-1,1[} 2\sqrt{1-x^2} = R\int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}dx.$$

2. *Sia*

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 < y \le 1\}$$

e calcoliamo $\mu_2(A)$.

Poiche' $A_{\underline{x}} = \{y \in \mathbb{R}; \underline{x}^2 < y \le 1\}$, *si ha* $S_A =]-1,1[$.

Percio'

$$\mu_2(A) = \int_{]-1,1[} \mu_1(A_{\underline{x}}) = R\int_{-1}^{1} (1-x^2)dx = \big[x - \frac{x^3}{3}\big]_{x=-1}^{x=1} = \frac{4}{3},$$

da cui

$$\mu_2(A) = \frac{4}{3}.$$

3. *Sia*

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; |x| < 1, |y| < 1\}, \qquad f : A \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x + y,$$

e calcoliamo

$$\int_A f.$$

Si ha

$$S_A =]-1,1[, \qquad A_{\underline{x}} = \{y \in \mathbb{R}; -1 < y < 1\} =]-1,1[,\ \forall \underline{x} \in S_A.$$

Allora

$$\int_A f = \int_{-1}^{1} f_1(x)dx$$

essendo, per ogni fissato $\underline{x} \in S_A =]-1,1[$,

$$f_1(\underline{x}) = \int_{-1}^{1} (\underline{x} + y)dy = \big[\underline{x}y + \frac{y^2}{2}\big]_{y=-1}^{y=1} = 2\underline{x}.$$

Si conclude quindi che

$$\int_A f = \int_{-1}^{1} f_1(x)dx = \int_{-1}^{1} 2xdx = \big[x^2\big]_{x=-1}^{x=1} = 0.$$

4. Sia

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 0 \le z \le x^2 + y^2 + 2,\ |x| \le 1,\ |y| \le 1\}.$$

e calcoliamo

$$\mu_3(A).$$

Si ha Q.D. $S_A =]-1,1[$ *da cui*

$$\mu_3(A) = \int_{-1 \le \underline{x} \le 1} \mu_2(A_{\underline{x}})d\underline{x},$$

ove, per ogni $\underline{x} \in]-1,1[$, *si ha*

$$A_{\underline{x}} = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le z - y^2 \le \underline{x}^2 + 2,\ |y| \le 1\}.$$

Ora

$$\mu_2(A_{\underline{x}}) = \int_{-1 \le \underline{y} \le 1} \mu_1((A_{\underline{x}})_{\underline{y}})\ d\underline{y},$$

ove, per ogni fissato $\underline{y} \in]-1,1[$, *si ha*

$$(A_{\underline{x}})_{\underline{y}} = \{z \in \mathbb{R};\ 0 \le z \le \underline{x}^2 + \underline{y}^2 + 2\},$$

da cui

$$\mu_1((A_{\underline{x}})_{\underline{y}}) = \underline{x}^2 + \underline{y}^2 + 2.$$

Percio'

$$\mu_2(A_{\underline{x}}) = \int_{-1 \le y \le 1} (\underline{x}^2 + y^2 + 2)dy = \big[(\underline{x}^2 + 2)y + \frac{y^3}{3}\big]_{y=-1}^{y=1} = 2(\underline{x}^2 + 2) + \frac{2}{3}.$$

Di conseguenza,

$$\mu_3(A) = \int_{-1 \le x \le 1} \mu_2(A_x)dx = \int_{-1 \le x \le 1} (2(x^2+2) + \frac{2}{3})dx =$$

$$= 2\int_{-1 \le x \le 1} (x^2+2)dx + \frac{2}{3}\int_{-1 \le x \le 1} 1dx = 2\big[\frac{x^3}{3} + 2x\big]_{x=-1}^{x=1} + \frac{4}{3} = \frac{32}{3}.$$

5. *Da ora in avanti, per rendere piu' leggera la notazione, abbandoneremo la notazione "sottosegnata" e, quindi, scriveremo ad esempio x in luogo di $\underline{x}$; dalla fase di ragionamento, dovrebbe risultare ormai chiaro quando x indichera' un punto FISSATO oppure una VARIABILE (sulla quale integrare).*

   Inoltre, nel caso di "sezioni successive", scriveremo semplicemente $A_{x,y}$ in luogo di $(A_{\underline{x}})_{\underline{y}}$.

6. *Sia*
$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 0 < z < -x^2 - y^2 + 1,\ |x| < 1,\ |y| < 1\}$$
   e calcoliamo
$$\mu_3(A).$$

   Risulta
$$S_A = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2;\ \mu_2(A_x) > 0\} =]-1,1[$$
   da cui
$$\mu_3(A) = \int_{-1<x<1} \mu_2(A_x)dx.$$

   FISSATO $x \in]-1,1[$, per calcolare $\mu_2(A_x)$, dobbiamo considerare, per ogni $y \in \mathbb{R}$, le "sezioni successive" $A_{x,y}$ (dipendenti da x), ed integrare $\mu_1(A_{x,y})$ sull' insieme S_{A_x}.
   Per ogni $x \in]-1,1[$, risulta
$$S_{A_x} = \{y \in \mathbb{R};\ -\sqrt{1-x^2} < y < \sqrt{1-x^2}\}.$$

   Percio'
$$\mu_2(A_x) = \int_{-\sqrt{1-x^2}<y<\sqrt{1-x^2}} \mu_1(A_{x,y})dy,$$
   e, poiche'
$$\mu_1(A_{x,y}) = -x^2 - y^2 + 1$$
   si ha
$$\mu_2(A_x) = \int_{-\sqrt{1-x^2}<y<\sqrt{1-x^2}} (-x^2 - y^2 + 1)dy,$$
   da cui
$$\mu_3(A) = \int_{-1<x<1} \Big(\int_{-\sqrt{1-x^2}<y<\sqrt{1-x^2}} (-x^2 - y^2 + 1)dy\Big)\, dx.$$

7. Sia

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| < 1,\ |y| < 1\}, \qquad f : B \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = x^2 + y^2 + 2$$

e calcoliamo

$$\int_B f.$$

In termini dell' interpretazione "geometrica" dell' integrale (essendo f non-negativa), e' sostanzialmente immediato che

$$\int_B f = \mu_3(A),$$

essendo

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 0 < z < x^2 + y^2 + 2,\ |x| < 1,\ |y| < 1\}$$

di Es. 4.

Tuttavia, a scopo di approfondimento/confronto, ri-calcoliamo $\int_B f$ *usando il Teorema di Fubini-Tonelli per gli integrali.*

Si ha:

$$S_B = \{x \in \mathbb{R}; \mu_1(B_x) > 0\} =]-1,1[, \qquad B_x = \{y \in \mathbb{R}; |y| \leq 1\}.$$

Percio'

$$f_1(x) = \int_{-1 \leq y \leq 1} (y^2 + (x^2+2))dy = \big[\frac{y^3}{3} + (x^2+2)y\big]_{y=-1}^{y=1} = \frac{2}{3} + 2(x^2+2).$$

Ne segue

$$\int_B f = \int_{S_B =]-1,1[} f_1(x)dx = \int_{-1}^{1} (2(x^2+2) + \frac{2}{3})dx =$$

$$= (2\big[\frac{x^3}{3} + 2x\big]_{x=-1}^{x=1} + \frac{4}{3} = \frac{32}{3} = \mu_3(A), \qquad (cfr.\ Es.\ 4).$$

8. *Sia*

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| < 1,\ |y| < 1\}, \qquad f : B \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = -x^2 - y^2 + 1$$

e calcoliamo

$$\int_B f.$$

Si ha:

$$S_B = \{x \in \mathbb{R}; \mu_1(B_x) > 0\} = [-1,1], \qquad B_x = \{y \in \mathbb{R}; |y| \leq 1\}.$$

Percio'

$$f_1(x) = \int_{-1\leq y\leq 1} (-y^2+(-x^2+1))dy = \big[-\frac{y^3}{3}+(-x^2+1)y\big]_{y=-1}^{y=1} = -\frac{2}{3}+2(-x^2+1).$$

Ne segue

$$\int_B f = \int_{S_B=]-1,1[} f_1(x)dx = \int_{-1}^{1} (2(-x^2+1)+\frac{2}{3})dx.$$

SI OSSERVI che, in questo caso,

$$\int_B f \neq \mu_3(A),$$

essendo A l' insieme considerato in Es. 6.

Infatti, "geometricamente" parlando, il grafico di f

$$graph(f) = \{(x,y,-x^2-y^2+1) \in \mathbb{R}^3\}$$

e' la superficie che si ottiene "ruotando" la parabola di equazione $z = -x^2+1$ nel piano XZ attorno all' asse Z, superficie che interseca il piano XY nella circonferenza unitaria centrata nell' origine.

Quindi $\mu_3(A)$ calcola il "volume" dell' insieme di punti in $\mathbb{R}^3$ compresi tra il piano XY e la superficie $graph(f)$. Di fatto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq -(x^2+y^2)+1\}.$$

D' altro canto, l' integrale $\int_B f$ calcola anche, con contributo NEGATIVO, il "volume" dell' insieme

$$A' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2 > 1,\ |x| \leq 1,\ |y| \leq 1,\ 0 \geq z \geq -(x^2+y^2)+1\}.$$

(Cio' segue, ad esempio, dal fatto che - per definizione - $\int_B f = \int_B f^+ - \int_B f^-$.)

A titolo di ulteriore esercizio, si calcoli $\mu_3(A')$ e si verifichi che

$$\int_B f = \mu_3(A) - \mu_3(A').$$

9. *Sia*

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\},\ f : A \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \frac{x}{1+xy}.$$

e si calcoli

$$\int_A f.$$

Si ha:

$$S_A = \{x \in \mathbb{R};\ \mu_1(A_x) > 0\} = [0,1], \qquad A_x = \{y \in \mathbb{R};\ (x,y) \in A\} = [0,1]\ \forall x \in S_A.$$

Allora

$$\int_A f = \int_{0 \leq x \leq 1} \Big(\int_{0 \leq y \leq 1} (\frac{x}{1+xy})dy\Big)dx = \int_{0 \leq x \leq 1} \Big(\big[log(1+xy)\big]_{y=0}^{y=1}\Big)dx =$$

$$= \int_{0 \leq x \leq 1} log(1+x)dx.$$

Mediante integrazione per parti, si ottiene

$$\int_A f = \big[x \cdot log(1+x)\big]_{x=0}^{x=1} - \int_{0 \leq x \leq 1} \frac{x}{1+x}dx = log2 - \big[x - log(1+x)\big]_{x=0}^{x=1} = 2log2 - 1.$$

10. *Sia*

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1,\ y \leq x^2\},\ f : A \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x^2 + y^2.$$

e si calcoli

$$\int_A f.$$

Si ha

$$\int_A f = \int_{0 \leq x \leq 2} f_1(x)dx = \int_{0 \leq x \leq 1} f_1(x)dx + \int_{1 < x \leq 2} f_1(x)dx =$$

$$= \int_{0 \leq x \leq 1} f_1(x)dx + \int_{1 \leq x \leq 2} f_1(x)dx =$$

$$= \int_{0 \leq x \leq 1} \Big(\int_{0 \leq y \leq x^2} (x^2+y^2)dy\Big)dx + \int_{1 \leq x \leq 2} \Big(\int_{0 \leq y \leq 1} (x^2+y^2)dy\Big)dx =$$

$$= \int_{0 \leq x \leq 1} \Big(\big[x^2y + \frac{y^3}{3}\big]_{y=0}^{y=x^2}\Big)dx + \int_{1 \leq x \leq 2} \Big(\big[x^2y + \frac{y^3}{3}\big]_{y=0}^{y=1}\Big)dx =$$

$$= \int_{0 \leq x \leq 1} (x^4 + \frac{x^6}{3})dx + \int_{1 \leq x \leq 2} (x^2 + \frac{1}{3})dx = [\frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{21}]_{x=0}^{x=1} + [\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3}]_{x=1}^{x=2} = \frac{102}{35}.$$

11. Sia

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq y^4,\ y \geq x^2\},\ f : A \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \sqrt{x} - y^2.$$

e si calcoli

$$\int_A f.$$

Si ha

$$\int_A f = \int_{0 \leq x \leq 1} \Big(\int_{x^2 \leq y \leq x^{\frac{1}{4}}} (\sqrt{x} - y^2) dy \Big) dx =$$

$$= \int_{0 \leq x \leq 1} \Big(\big[y\sqrt{x} - \frac{y^3}{3} \big]_{y=x^2}^{y=x^{\frac{1}{4}}} \Big) dx =$$

$$= \int_{0 \leq x \leq 1} (x^{\frac{3}{4}} - \frac{1}{3}x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}x^6) dx = \int_{0 \leq x \leq 1} (\frac{2}{3}x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}x^6) dx =$$

$$= \big[\frac{8}{21}x^{\frac{7}{4}} - \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{21}x^7 \big]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{7}.$$

12. Sia

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 1,\ y \geq 1,\ x + y \leq 3\},\ f : A \to \mathbb{R},\ f(x,y) = (x+y)^{-3}.$$

e si calcoli

$$\int_A f.$$

Si ha

$$\int_A f = \int_{1 \leq x \leq 2} \Big(\int_{1 \leq y \leq 3-x} (x+y)^{-3} dy \Big) dx = \int_{1 \leq x \leq 2} \Big(\big[-\frac{1}{2}(x+y)^{-2} \big]_{y=1}^{y=3-x} \Big) dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{1 \leq x \leq 2} \big((x+3-x)^{-2} - (x+1)^{-2} \big) dx = -\frac{1}{2} \int_{1 \leq x \leq 2} \big((\frac{1}{9} - (x+1)^{-2} \big) dx =$$

$$= -\frac{1}{18} + \frac{1}{2} \int_{1 \leq x \leq 2} (x+1)^{-2} dx = -\frac{1}{18} - \frac{1}{2} \big[(x+1)^{-1} \big]_{x=1}^{x=2} = \frac{1}{36}.$$

13. Sia
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \frac{y^2}{4} \le x \le 4\},\ f : A \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x^2 - xy.$$
e si calcoli
$$\int_A f.$$

Si ha

$$\int_A f = \int_{0\le x\le 4} \Big(\int_{-2\sqrt{2}\le y\le 2\sqrt{2}} (x^2 - xy)dy\Big)dx =$$
$$= \int_{0\le x\le 4} \Big(\big[x^2y - \frac{xy^2}{2}\big]_{y=-2\sqrt{2}}^{y=2\sqrt{2}} \Big)dx = 4\sqrt{2}\int_{0\le x\le 4} x^2dx = 4\sqrt{2}\big[\frac{x^3}{3}\big]_{x=0}^{x=4} = 4\sqrt{2}\frac{64}{3}.$$

14. Sia
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| + |y| \le 1\},\ f : A \to \mathbb{R},\ f(x,y) = |x| + |y|.$$
e si calcoli
$$\int_A f.$$

Per SIMMETRIA sia del dominio A (Perche'?), che della funzione f (Perche'?), si ha:

$$\int_A f = 4 \cdot \int_B (x+y)dy\ dx,$$

essendo
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 1\}.$$

Ora

$$\int_A f = 4 \cdot \int_B (x+y)dy\ dx = \int_{0\le x\le 1} \Big(\int_{0\le y\le 1-x} (x+y)dy\Big)dx =$$
$$= \int_{0\le x\le 1} \Big(\big[xy + \frac{y^2}{2}\big]_{y=0}^{y=1-x}\Big)dx == \frac{1}{2}\int_{0\le x\le 1} (1-x^2)dx = \frac{1}{2}\big[x - \frac{x^3}{3}\big]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3}.$$

15. Sia

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, z \ge 0, x + y + z \le 2\}$$

e si calcoli

$$\mu_3(B).$$

Si ha

$$\mu_3(B) = \int_{0 \le x \le 1} \mu_2(B_x)dx = \int_{0 \le x \le 1} \Big(\int_{0 \le y \le 1} \mu_1((B_x)_y)dy \Big)dx,$$

essendo

$$B_x = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le y \le 1, z \ge 0, y + z \le 2 - x\} \qquad \forall x \in [0, 1]$$

e

$$(B_x)_y = \{z \in \mathbb{R};\ z \ge 0, z \le 2 - x - y\} \qquad \forall y \in [0, 1].$$

Poiche' $\mu_1((B_x)_y) = 2 - x - y$, *deduciamo*

$$\mu_3(B) = \int_{0 \le x \le 1} \Big(\int_{0 \le y \le 1} (2 - x - y)dy \Big)dx = \int_{0 \le x \le 1} \Big(\big[2y - xy - \frac{y^2}{2}\big]_{y=0}^{y=1} \Big)dx =$$

$$= \int_{0 \le x \le 1} (\frac{3}{2} - x)dx = \big[\ \frac{3}{2}x - \frac{x^2}{2}\ \big]dx = 1.$$

16. Fissato $\rho \in \mathbb{R}^+$, *sia*

$$B_\rho = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \le \rho\}$$

e si calcoli

$$\mu_3(B_\rho).$$

Si ha

$$(B_\rho)_x = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2;\ y^2 + z^2 \le \rho - x^2\},$$

da cui

$$\mu_3(B_\rho) = \int_{-\sqrt{\rho} \le x \le \sqrt{\rho}} \mu_2((B_\rho)_x)\ dx = \int_{-\sqrt{\rho} \le x \le \sqrt{\rho}} \pi(\rho - x^2)\ dx =$$

$$= \pi\big[\ \rho x - \frac{x^3}{3}\ \big]_{x=-\sqrt{\rho}}^{x=\sqrt{\rho}} == \pi(\rho\sqrt{\rho} + \rho\sqrt{\rho} - \frac{\rho\sqrt{\rho}}{3} - \frac{\rho\sqrt{\rho}}{3}) = \frac{4}{3}\ \pi(\sqrt{\rho})^3.$$

17. *Sia*
$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2-z^2 \leq 1,\ |z| \leq 1\}$$
e si calcoli
$$\mu_3(A).$$
Per ogni $z \in \mathbb{R},\ |z| \leq 1$, *risulta*
$$A_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \leq 1+z^2\}$$
da cui
$$\mu_2(A_z) = \pi(1+z^2).$$
Percio'
$$\mu_3(A) = \int_{-1\leq z\leq 1} \mu_2(A_z)dz = \int_{-1\leq z\leq 1} (\pi(1+z^2))dz =$$
$$= \pi\big[z+\frac{z^3}{3}\big]_{z=-1}^{z=1} = \pi(2+\frac{2}{3}) = \frac{8}{3}\pi.$$

18. *Sia* $p(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ *un polinomio non nullo a coefficienti reali nelle variabili* x, y.

Sia
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ p(x,y) = 0\}.$$
Si provi che
$$\mu_2(A) = 0.$$
Infatti, per ogni fissato $\underline{x} \in \mathbb{R}$, *la "sezione"*
$$A_{\underline{x}} = \{y \in \mathbb{R};\ (\underline{x},y) \in A\} = \{y \in \mathbb{R};\ p(\underline{x},y) = 0\}$$
e' data dall' insieme degli zeri del polinomio $p(\underline{x},y) \in \mathbb{R}[y]$ *nella variabile* y, *e quindi e' FINITA (percio'* $\mu_1(A_{\underline{x}}) = 0$*) quando* $p(\underline{x},y)$ *NON E' IDENTICAMENTE NULLO.*

D'altra parte, scrivendo
$$p(x,y) = a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_1(x)y + a_0,$$
riconosciamo che l' insieme
$$S_A = \{\underline{x} \in \mathbb{R};\ p(\underline{x},y) \equiv 0\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R};\ \mu_1(A_{\underline{x}}) > 0\} = \mathbb{R}$$
e' anche esso tale che
$$\mu_1(S_A) = 0.$$
Si conclude che
$$\mu_2(A) = \int_{S_A} \mu_1(A_{\underline{x}})d\underline{x} = 0.$$

19. *Consideriamo un' istanza "concreta" di quanto visto, in generale, al punto* 18).
Sia $p(x,y) = x^2y^2 - y^2 + x^2y - y \in \mathbb{R}[x,y]$, *consideriamo l' insieme*

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ p(x,y) = 0\}$$

e si calcoli

$$\mu_2(A).$$

Per semplicita' espositiva, premettiamo un paio di osservazioni "geometriche":

- $$p(x,y) = x^2y^2 - y^2 + x^2y - y = (x^2-1)y^2 + (x^2-1)y = (x^2-1)(y^2+y).$$
- *Da questo, segue che* A *e' l' unione di quattro rette nel piano* $\mathbb{R}^2$*:*
  due verticali

  $$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x = -1\} \qquad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x = 1\},$$

  e due orizzontali

  $$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = 0\} \qquad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = -1\}.$$

Seguendo la notazione del punto 18)*, abbiamo la seguente descrizione delle "sezioni"*

$$A_{\underline{x}}, \qquad \underline{x} \in \mathbb{R}.$$

- *Se* $\underline{x} = \pm 1$, *allora*

  $$A_{\underline{x}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ p(\underline{x},y) = 0\} = \mathbb{R},$$

  essendo $p(\underline{x},y) \in \mathbb{R}[y]$ *il polinomio nullo nella variabile* y.
  Percio', se $\underline{x} = \pm 1$, *allora* $\mu_1(A_{\underline{x}}) = \infty > 0$.
- *Se* $\underline{x} \neq \pm 1$, *allora*

  $$A_{\underline{x}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ p(\underline{x},y) = 0\} = \{0,-1\}.$$

  Percio', se $\underline{x} \neq \pm 1$, *allora* $\mu_1(A_{\underline{x}}) = 0$.

Di conseguenza, l' insieme

$$S_A = \{\underline{x} \in \mathbb{R};\ \mu_1(A_{\underline{x}}) > 0\} = \{-1,1\}$$

e' tale che

$$\mu_1(S_A) = \mu_1(\{-1,1\}) = 0.$$

Si conclude che

$$\mu_2(A) = \int_{S_A=\{-1,1\}} \mu_1(A_{\underline{x}})d\underline{x} = 0.$$

20. Sia

$$p(x, y, z) = xyz^2 - xz^2 + x^2y^2z - x^2z + xy - x \in \mathbb{R}[x, y, z],$$

e consideriamo l' insieme

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ p(x, y, z) = 0\}.$$

Si provi che

$$\mu_3(A) = 0.$$

Notiamo che, "raccogliendo per variabili", risulta

$$p(x, y, z) = (xy - x)z^2 + (x^2y^2 - x^2)z + (xy - x).$$

Siano

$$a_2(x, y) = xy - x, \quad a_1(x, y) = x^2y^2 - x^2, \quad a_1(x, y) = xy - x.$$

dato $(\underline{x}, \underline{y}) \in \mathbb{R}^2$*, la "sezione"*

$$A_{(\underline{x},\underline{y})} = \{z \in \mathbb{R};\ p(\underline{x}, \underline{y}, z) = 0\}$$

e' tale che

$$\mu_1(A_{(\underline{x},\underline{y})}) > 0$$

se e solo se il polinomio $p(\underline{x}, \underline{y}, z) \in \mathbb{R}[z]$ *e' il polinomio nullo nella variabile* z*.*

Percio' l' insieme

$$S_A = \{(\underline{x}, \underline{y}) \in \mathbb{R}^2;\ \mu_1(A_{(\underline{x},\underline{y})}) > 0\} =$$

$$= \{(\underline{x}, \underline{y}) \in \mathbb{R}^2;\ a_2(\underline{x}, \underline{y}) = 0, a_1(\underline{x}, \underline{y}) = 0, a_0(\underline{x}, \underline{y}) = 0\}$$

e' tale che

$$\mu_2(S_A) = 0,$$

a norma del punto 18)*.*

Di conseguenza

$$\mu_3(A) = \int_{S_A} \mu_1(A_{(\underline{x},\underline{y})})d\underline{x}d\underline{y} = 0.$$

21. Sia

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n],$$

un polinomio non nullo a coefficienti reali nelle n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$*, e consideriamo l' insieme*

$$A = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0\}.$$

Si provi che

$$\mu_n(A) = 0.$$

Ragioniamo per induzione sul numero n delle variabili. Per $n = 1$ *il risultato e' ovvio, essendo FINITO il numero delle radici. (Per* $n = 2$*, il risultato e' provato al punto* 18)*).*

Notiamo che, "raccogliendo per variabili", risulta

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= a_m(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})x_n^m + a_{m-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})x_n^{m-1} + \cdots + a_0(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}).$$

Dato $(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$*, la "sezione"*

$$A_{(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_{n-1})} = \{x_n \in \mathbb{R};\ p(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_{n-1}, x_n) = 0\}$$

e' tale che

$$\mu_1(A_{(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_{n-1})}) > 0$$

se e solo se il polinomio $p(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}[x_n]$ *e' il polinomio nullo nella variabile* x_n*.*

Percio' l' insieme

$$S_A = \{(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1};\ \mu_1(A_{(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_{n-1})}) > 0\} =$$

$$= \{(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1};\ a_m(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_{n-1}) = 0\} \bigcap$$

$$\bigcap \{(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1};\ a_{m-1}(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_{n-1}) = 0\} \bigcap \cdots$$

$$\cdots \bigcap \{(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1};\ a_0(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_{n-1}) = 0\}$$

e' tale che

$$\mu_{n-1}(S_A) = 0,$$

per ipotesi di induzione.

Di conseguenza

$$\mu_n(A) = \int_{S_A} \mu_1(A_{(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_{n-1})}) d\underline{x}_1 d\underline{x}_2 \cdots d\underline{x}_{n-1} = 0.$$

22. Sia

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 - y^2 - z^2 > 1,\ |x| > 1,\ |x| \leq 2\},$$

e si calcoli

$$\mu_3(A).$$

Per favorire l' intuizione "geometrica", osserviamo che l' insieme

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 - y^2 - z^2 = 1\}$$

e' la superficie ("iperboloide a due falde") ottenuta ruotando (nello spazio $\mathbb{R}^3$) l' iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 1$ nel piano XY attorno all' asse X.

Per ragioni di simmetria, si ha percio'

$$\mu_3(A) = 2\mu_3(B),$$

ove

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 - y^2 - z^2 > 1,\ 1 < x \leq 2\}.$$

Dato $x \in \mathbb{R},\ 1 < x \leq 2$, si ha

$$B_x = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2;\ y^2 + z^2 \leq x^2 - 1\},$$

da cui

$$\mu_2(B_x) = \pi(x^2 - 1).$$

Di conseguenza

$$\mu_3(B) = \int_{1<x\leq 2} \mu_2(B_x)dx = \int_1^2 (\pi(x^2-1))dx = \pi\Big[\frac{x^3}{3} - x\Big]_{x=1}^{x=2} = \frac{4}{3}\pi,$$

e quindi

$$\mu_3(A) = \frac{8}{3}\pi.$$

4 Appendice. Elementi di Teoria generale della misura. Misure esterne e misure: Teorema di Caratheodory. Teorema di Hahn-Kolmogorov, misure di probabilita', misura di Lebesgue

4.1 Costruzione di misure esterne. 1^o metodo di Caratheodory

Sia Ω un insieme, $\mathcal{C} \subseteq \mathbf{P}(\Omega)$ tale che $\emptyset \in \mathcal{C}$.
Sia

$$\varphi : \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}$$

una funzione non negativa tale che

$$\varphi(\emptyset) = 0.$$

Definizione 12. *Definiamo una funzione*

$$\mu^* : \mathbf{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$$

ponendo

$$\mu^*(E) = inf \ \{\sum_{i \in \mathcal{I}} \ \varphi(A_i); \ A_i \in \mathcal{C}\}$$

ove l' estemo inferiore e' considerato rispetto a tutte le famiglie AL PIU' NUMERABILI

$$\{A_i; \ A_i \in \mathcal{C}, \ i \in \mathcal{I}\}$$

che "ricoprono" E, cioe' tali che

$$E \subseteq \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \ A_i.$$

Se non esiste alcuna famiglia con queste proprieta', si pone $\mu^*(E) = \infty$.

Usando, per astrazione, gli *stessi* argomenti usati per Teoremi 2 e 3 (subsect. 1.3), si riconosce che μ^* e' una MISURA ESTERNA su $\mathbf{P}(\Omega)$, cioe' soddifa i seguenti assiomi:

- $\mu(\emptyset) = 0.$
- Se $E \subseteq F \subseteq \Omega$, allora $\mu^*(E) \leq \mu^*(F) \qquad (monotonicita')$.
- Se $\{E_n \in \mathbf{P}(\Omega); n \in \mathbb{N}\}$ e' famiglia numerabile di sottoinsiemi disgiunti di Ω, allora
$$\mu^*(\bigcup_{n=0}^{\infty} (E_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \ \mu^*(E_n) \qquad (subadditivita' \ numerabile).$$

4.2 Da misure esterne a misure. Teorema di Caratheodory, $\sigma-$algebre di misurabili

Sia Ω un insieme e sia $\mathcal{S}$ una $\sigma-$algebra di sottoinsiemi di Ω; la coppia $(\Omega,\ \mathcal{S})$ si dice *spazio misurabile*.

Definizione 13. *Una misura su* $(\Omega,\ \mathcal{S})$ *e' una funzione*

$$\mu : \mathcal{S} \to \overline{\mathbb{R}}$$

tale che

- μ *e' non-negativa.*
- $\mu(\emptyset) = 0.$
- μ *e'* $\sigma-$*additiva; cioe', per ogni famiglia numerabile* $\{A_n \in \mathcal{S}; n \in \mathbb{N}\}$ *di insiemi DISGIUNTI, risulta*

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

Osservazione 18. *Le precedenti condizioni implicano:*

- $$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B), \qquad A, B \in \mathcal{S}.$$
- *Se* $A \subseteq B$*, allora* $\mu(A) \leq \mu(B)$.
- *Sia* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}},\ A_n \in \mathcal{S},\ A_n \subseteq A_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$. *Allora*

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = lim_{n\to\infty}\ \mu(A_n).$$

- *Sia* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}},\ A_n \in \mathcal{S},\ A_n \supseteq A_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$. *Se esiste un* $\underline{n} \in \mathbb{N}$ *tale che* $\mu(A_{\underline{n}}) < \infty$*, allora*

$$\mu\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = lim_{n\to\infty}\ \mu(A_n).$$

Definizione 14.
$$\mu^* : \mathbf{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$$
una misura esterna su $\mathbf{P}(\Omega)$.

Un sottoinsieme $A \subseteq \Omega$ *si dice* μ^*-*MISURABILE (o piu' brevemente - se non possono incorrere equivoci - "misurabile") se e solo se e' soddifatta la seguente condizione:*
$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c), \qquad \forall E \subseteq \Omega.$$

Teorema 21. *(***Caratheodory***)*
La famiglia
$$\mathcal{M} = \{A \subseteq \Omega;\ A\ e'\ \mu^* - misurabile\}$$
e' una $\sigma-$*algebra su* Ω.

Inoltre:

- *La restrizione* μ *della misura esterna* μ^* *alla* $\sigma-$*algebra* $\mathcal{M}$ *e' una misura sullo spazio misurabile* $(\Omega, \mathcal{M})$.
- *La tripla* $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ *e' uno spazio misurato* μ^*-*COMPLETO, cioe' verifica l' ulteriore condizione:*
$$se\ A \subseteq \Omega\ e'\ tale\ che\ \mu^*(A) = 0,\ allora\ A \in \mathcal{M}.$$

DIMOSTRAZIONE.

Banalmente, l' insieme vuoto e' misurabile.

La simmetria della condizione mostra che A e' misurabile se e solo se A^c e' misurabile.

Siano A_1 e A_2 insiemi misurabili. Dalla misurabilita' di A_2 si ha
$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A_2) + \mu^*(E \cap A_2^c)$$
e
$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A_2) + \mu^*(E \cap A_2^c \cap A_1) + \mu^*(E \cap A_2^c \cap A_1^c), \qquad (\dagger)$$
per misurabilita' di A_1.

Poiche'
$$A_1 \cup A_2 = A_2 \cup (A_1 \cap A_2^c) \Rightarrow E \cap (A_1 \cup A_2) = (E \cap A_2) \cup (E \cap A_1 \cap A_2^c),$$
abbiamo
$$\mu^*\big(E \cap (A_1 \cup A_2)\big) \le \mu^*\big(E \cap A_2\big) + \mu^*\big(E \cap A_1 \cap A_2^c\big), \qquad (\dagger\dagger)$$

per subadditivita'. Componendo le condizioni $(\dagger), (\dagger\dagger)$, risulta

$$\mu^*(E) \geq \mu^*\big(E \cap (A_1 \cup A_2)\big) + \mu^*(E \cap A_2^c \cap A_1^c).$$

Questa ultima condizione implica che $A_1 \cup A_2$ e' misurabile, essendo $(A_1 \cup A_2)^c = A_1^c \cup A_2^c$.

In conclusione, l'unione di due misurabili e' misurabile e, per induzione, l' unione di una qualsiasi famiglia finita di misurabili e' misurabile; per passaggio al complementare, la stessa affermazione vale anche per intersezioni finite. In sintesi, abbiamo provato che $\mathcal{M}$ e' una *algebra* di insiemi.

Consideriamo ora il caso $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$, essendo $\{A_i; A_i \subseteq \Omega\}$ una famiglia numerabile di sottoinsiemi misurabili DISGIUNTI, e poniamo

$$G_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Per quanto appena visto, ogni G_n e' misurabile, ed inoltre:

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap G_n) + \mu^*(E \cap G_n^c) \geq \mu^*(E \cap G_n) + \mu^*(E \cap A^c) \qquad \forall E \subseteq \Omega,$$

essendo $A^c \subseteq G_n^c$.

Ora $G_n \cap A_n = A_n$ e $G_n \cap A_n^c = G_{n-1}$ e - per la misurabilita' diA_n - risulta:

$$\mu^*(E \cap G_n) = \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap G_{n-1}).$$

Per induzione,

$$\mu^*(E \cap G_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E \cap A_i),$$

e quindi

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(A \cap E^c) + \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E \cap A_i) \geq \mu^*(A \cap E^c) + \mu^*(A \cap E),$$

in qunato

$$E \cap A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (E \cap A_i),$$

percio' A e' misurabile. In conclusione, poiche' ogni unione di famiglie al piu' numerabili in una algebra di insiemi puo' essere sostituita da una unione DISGIUNTA di insiemi nella stessa algebra, abbiamo provato che $\mathcal{M}$ e' una $\sigma-$algebra.

Proviamo ora che la restrizione μ di μ^* a $\mathcal{M}$ e' FINITAMENTE ADDITIVA.

Siano A_1 e A_2 insiemi misurabili disgiunti. La misurabilita' di A_2 implica che

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu^*(A_1 \cup A_2) = \mu^*((A_1 \cup A_2) \cap A_2) + \mu^*((A_1 \cup A_2) \cap A_2^c) = \mu^*(A_2) + \mu^*(A_1),$$

in quanto $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ implica $(A_1 \cup A_2) \cap A_2^c = A_1$. La additivita' finita segue per induzione.

Proviamo ora la $\sigma-$additivita' di μ.

Se A e' unione disgiunta di una famiglia numerabile di misurabili $\{A_i; i \in \mathbb{N}\}$, allora

$$\mu(A) \geq \mu(\bigcup_{i=0}^{n} A_i) = \sum_{i=0}^{n} \mu(A_i), \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

e quindi

$$\mu(A) \geq \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i).$$

D' altra parte,

$$\mu(A) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i)$$

per subadditivita' di μ^*.

Percio' μ e' numerabilmente additiva e percio' e' una misura, in quanto funzione non-negativa e $\mu(\emptyset) = \mu^*(\emptyset) = 0$.

Il fatto che lo spazio misurato $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ risulti μ^*-COMPLETO segue dal *medesimo argomento* usato in Esempio 4, subsect. 1.5.

La prossima osservazione, che potrebbe apparire quasi banale, e' in realta' essenziale per apprezzare pienamente il profondo significato del Teorema di Hahn/Kolmogorov, che discuteremo tra poco.

Osservazione 19. *Nel caso di una misura esterna μ^* costruita a partire (1^o-metodo) da una funzione φ definita su un insieme $\mathcal{C}$ (subsect. 4.1), il Teorema di Caratheodory NON afferma che la restrizione della misura esterna μ^* associata a φ COINCIDA con φ quando ristretta all'insieme $\mathcal{C}$.*

L' unica affermazione vera in generale e' che

$$\mu^*(A) \leq \varphi(A), \qquad \forall A \in \mathcal{C};$$

infatti, e' sufficiente osservare che il "singoletto" $\{A\}$ fornisce un ricoprimento dell' insieme A.

Tuttavia, potrebbe darsi che $\mu^*(A) < \varphi(A)$, come evidente dal seguente controesempio. Sia $\Omega = [-2, 2] \subseteq \mathbb{R}$, e sia $\mathcal{C} = \{\emptyset, A_1 = [-2, 0], A_2 = [0, 2], A_3 = [-1, 1]\}$, $\varphi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ cosi' definita:

$$\varphi(\emptyset) = 0, \ \varphi(A_1) = 1, \ \varphi(A_2) = 1, \ \varphi(A_3) = 3.$$

La famiglia $\{A_1, A_2\} \subseteq \mathcal{C}$ ricopre A_3, e quindi:

$$\mu^*(A_3) = 2 < \varphi(A_3) = 3.$$

4.3 Misure generate da algebre di sottoinsiemi. Misure finite e misure di probabilita'. Teorema di Hahn/Kolmogorov

Sia $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{P}(\Omega)$ una algebra di sottoinsieni di Ω, cioe', ricordiamo, una famiglia di sottoinsiemi contenente l' insieme vuoto, e "chiusa" rispetto alle operazioni di passaggio al complementare, unione ed intersezione FINITA.

Una funzione non negativa

$$\mu_0 : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$$

si dice $\sigma-$ADDITIVA se e solo se soddisfa le condizioni:

- $\mu_0(\emptyset) = 0$.
- Sia $\{A_i \in \mathcal{A}; i \in \mathcal{I}\}$ una famiglia al piu' numerabile di insiemi DISGIUNTI.

  Se
  $$\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i \in \mathcal{A},$$
  allora
  $$\mu_0\Big(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i\Big) = \sum_{i \in \mathbb{I}} \mu_0(A_i). \qquad (\sharp)$$

Osservazione 20. *L' ipotesi*

$$\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i \in \mathcal{A},$$

nella condizione di additivita' $(\sharp)$ e' piuttosto sottile e necessita di un commento. Specificamente, se la famiglia $\{A_i \in \mathcal{A}; i \in \mathcal{I}\}$ e' FINITA, allora $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i \in \mathcal{A}$ per definizione di algebra di insiemi.

Se la famiglia $\{A_i \in \mathcal{A}; i \in \mathcal{I}\}$ e' numerabile, in generale l' unione dei suoi elementi non appartiene all' algebra $\mathcal{A}$. Tuttavia, per determinate famiglie, puo' accadere che *l' unione appartenga all' algebra ed, in questo caso e solo in questo, la condizione di $\sigma-$additivita' ($\sharp$) deve essere verificata.*

Consideriamo il seguente esempio, che riprenderemo in seguito. Sia $\Omega =]0,1] \subseteq \mathbb{R}$ e sia $\mathcal{A}$ l' algebra generata dagli intervalli (semiaperti a sinistra) della forma $]a,b],\ 0 < a < b \leq 1$.

Chiaramente, gli elementi di $\mathcal{A}$ sono tutti e soli i sottoinsiemi di $\Omega =]0,1]$ esprimibili come unioni FINITE di intervalli semiaperti. Consideriamo i due casi

- *Consideriamo la famiglia numerabile*

$$\{A_n =]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \in \mathcal{A};\ n \in \mathbb{Z}^+\};$$

  poiche'

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} A_n =]0,1] \in \mathcal{A},$$

  la condizione di additivita' ($\sharp$) impone

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n) = \mu_0(]0,1]).$$

- *Consideriamo la sottofamiglia della precedente cosi' definita:*

$$\{A_n =]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \in \mathcal{A};\ n \in \mathbb{Z}^+,\ n\ dispari\};$$

  Poiche' l' unione di questa famiglia numerabile di questi intervalli semiaperti NON PUO' essere espressa come unione FINITA di intervalli semiaperti, essa non appartiene all' algebra $\mathcal{A}$; percio' la condizione di $\sigma-$additivita' ($\sharp$) non si applica a questa sottofamiglia.

Alla coppia $(\mathcal{A}, \mu_0)$ - $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{P}(\Omega)$ algebra come sottoinsieme dell' insieme delle parti di Ω - possiamo applicare il 1^o-metodo di Caratheodory e costruire la MISURA ESTERNA μ^* ad essa associata. I temini espliciti, poniamo:

per ogni $E \subseteq \Omega$

$$\mu^*(E) = inf\ \{\sum_{i \in \mathcal{I}} \mu_0(A_i);\ A_i \in \mathcal{A}\}$$

ove l' estremo inferiore e' considerato rispetto a tutte le famiglie AL PIU' NUMERABILI

$$\{A_i \in \mathcal{A};\ i \in \mathcal{I}\}$$

che "ricoprono" E, cioe' tali che

$$E \subseteq \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i.$$

CHIARAMENTE, se $\mu_0(\Omega) = 1$, allora $\mu^*(\Omega) = 1$.

Teorema 22. Di Estensione. Unicita′ nel caso Finito – Probabilistico *(***Frechet, Hahn, Kolmogorov***)*

Sia $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{P}(\Omega)$ una algebra di sottoinsieni di Ω, $\emptyset \in \mathcal{A}$ e sia

$$\mu_0 : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}, \qquad \mu_0(\emptyset) = 0$$

una funzione $\sigma-$additiva su $\mathcal{A}$.

Sia μ^* la misura esterna associata (1^o metodo di Carathedory) alla funzione μ_0.

1. *Sia $\mathcal{M}$ la $\sigma-$algebra dei sottoinsiemi μ^*-misurabili di Ω, e sia $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ il relativo spazio misurato.*

   Allora

   - *$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$.*
   - *Sia $\mu|\mathcal{A}$ la restrizione di μ a $\mathcal{A}$. Allora $\mu|\mathcal{A} \equiv \mu_0$.*

2. *Sia $\mathcal{S}_\mathcal{A}$ la $\sigma-$algebra generata dall' algebra $\mathcal{A}$.*

   - *$\mathcal{S}_\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$.*
   - *La restrizione $\overline{\mu}$ di μ a $\mathcal{S}_\mathcal{A}$ e' ovviamente una misura su $\mathcal{S}_\mathcal{A}$, e quindi $(\Omega, \mathcal{S}_\mathcal{A}, \overline{\mu})$ e' spazio misurato (in generale, non completo).*
   - *Se $\mu^*(\Omega) = \mu(\Omega) < \infty$, allora $\overline{\mu}$ e' l' UNICA MISURA su $\mathcal{S}_\mathcal{A}$ la cui restrizione ad $\mathcal{A}$ coincide con μ_0.*

DIMOSTRAZIONE.

Dal Teorema 20, sappiamo che la famiglia

$$\mathcal{M} = \{A \subseteq \Omega; A \ e' \ \mu^* - misurabile\}$$

e' una $\sigma-$algebra e che $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ e' una spazio misurato completo, essendo μ la restrizione a $\mathcal{M}$ della misura esterna μ^*.

Mostriamo, in primo luogo, che la restrizione di μ^* ad $\mathcal{A}$ coincide con μ_0.

Sappiamo che, in generale, si ha $\mu^*(A) \leq \mu_0(A)$.

Sia $\{A_1, A_2, \dots, A_i, \dots\}$ una famiglia finita o al piu' numerabile di insiemi in $\mathcal{A}$ che ricopre $A \in \mathcal{A}$.

Ponendo

$$B_1 = A_1, B_2 = A_2 - A_1, \ \dots, B_i = A_i - (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{i-1}), \dots$$

si ottiene una famiglia $\{B_1, B_2, \dots, B_i, \dots\}$ una famiglia finita o al piu' numerabile di insiemi in $\mathcal{A}$ DISGIUNTI tale che

$$\bigcup_i B_i = \bigcup_i A_i,$$

che quindi ancora ricopre A. Percio'

$$A = A \cap (\bigcup_i B_i) = \bigcup_i (A \cap B_i),$$

e quindi

$$\mu_0(A) = \mu_0\big(\bigcup_i (A \cap B_i) \big) = \sum_i \mu_0(A \cap B_i) \leq \sum_i \mu_0(B_i) \leq \sum_i \mu_0(A_i),$$

per $\sigma-$additivita' e monotonicita' di μ_0.

Poiche' questa disuguaglianza vale per ogni famiglia finita o al piu' numerabile di insiemi in $\mathcal{A}$ che ricopre A, dalla definizione della misura esterna μ^* segue che $\mu_0(A) \leq \mu^*(A)$, e quindi

$$\mu_0(A) = \mu^*(A) \qquad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Mostriamo ora che $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$.

Dobbiamo provare che, dato $A \in \mathcal{A}$ per ogni $E \subseteq \Omega$ risulta:

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Notiamo che, per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, esiste una famiglia al piu' numerabile $\{A_i \in \mathcal{A};\ i \in \mathcal{I}\}$ tale che:

$$\mu^*(E) + \varepsilon \geq \sum_i \mu_0(A_i) = \sum_i \mu_0(A_i \cap A) + \sum_i \mu_0(A_i \cap A^c) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

(L' uguaglianza si ottiene scrivendo $A_i = (A_i \cap A) \cup (A_i \cap A^c)$ ed usando la $\sigma-$additivita' di μ_0. La disuguaglianza si ottiene ossevando che $\{A_i \cap A \in \mathcal{A};\ i \in \mathcal{I}\}$ e' ricoprimento sia di $E \cap A$ che di $E \cap A^c$.)

Per l' arbitrarieta' di $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$,, segue che

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c),$$

e, per subadditivita', si ha l' uguaglianza voluta.

Mostriamo infine l' unicita', sotto l' ipotesi di finitezza $\mu^*(\Omega) < \infty$.

Indichiamo con ν una "nuova" misura su $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ che estende μ_0.

Dato un qualsiasi insieme $A \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$, sia $\{C_i \in \mathcal{A};\ i \in \mathcal{I}\}$ famiglia al piu' numerabile che ricopra A, tale che

$$\sum_i \mu^*(C_i) < \infty, \quad \forall i \in \mathcal{I}$$

(esiste per l' ipotesi di finitezza $\mu^*(A) \leq \mu^*(\Omega) = \mu_0(\Omega) < \infty$).

Allora

$$\nu(A) \leq \sum_i \nu(C_i) = \sum_i \mu^*(C_i),$$

da cui, passando allo *inf* rispetto ai ricoprimenti costruiti con insiemi in $\mathcal{A}$, si deduce $\nu(A) \leq \mu(A)$.

Questo ragionamento vale anche per l' insieme $\Omega - A \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$, da cui si deduce $\nu(\Omega - A) \leq \mu(\Omega - A)$.

Poiche'

$$\nu(A) + \nu(\Omega - A) = \nu(\Omega) = \mu_0(\Omega) = \mu(\Omega) = \mu(A) + \mu(\Omega - A),$$

deve essere $\nu(A) = \mu(A)$, per ogni $A \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$.

Osservazione 21. *Per ragioni di semplicita' didattico/espositiva abbiamo formulato e dimostrato l' asserto* 2) (*UNICITA'*) *nell' ipotesi restrittiva di FINITEZZA, vale a dire* $\mu_0(\Omega) < \infty$.

Cio' e' comunque assai rilevante, in quanto comprende il caso di misure di PROBABILITA', cioe' tali che $\mu_0(\Omega) = 1$.

Osserviamo che l' asserto di unicita' sussiste anche nell' ipotesi molto piu' generale di μ_0 $\sigma-$*FINITA, cioe' tale che ESISTA un ricoprimento al piu' numerabile*

$$\{A_i \in \mathcal{A};\ i \in \mathcal{I}\}$$

di Ω *tale che*

$$\mu_(A_i) < \infty, \qquad \forall\ i \in \mathcal{I}.$$

4.4 Misura di Lebesgue su $]0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ come misura di probabilita'

Una *MISURA DI PROBABILITA'* su uno spazio misurabile $(\Omega,\ \mathcal{S})$ e' una *misura* $\mathcal{P}$ su Ω tale che

$$\mathcal{P}(\Omega) = 1.$$

Come applicazione dei Teoremi di Caratheodory ed Hahn/Kolmogorov, mostriamo il seguente risultato, che permette di interpretare la misura di Lebesgue ristretta all' intervallo $]0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ in termini probabilistici.

Proposizione 17. *Sia* $\Omega =]0, 1]$, $\mathcal{B}$ *la* $\sigma-$*algebra dei Boreliani contenuti in* $]0, 1]$. *Esiste unica una misura di probabilita'*

$$\mathcal{P} : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$$

sullo spazio misurabile $(]0, 1], \mathcal{B})$ *tale che, per ogni intervallo semiaperto* $]a, b],\ 0 < a < b \leq 1$, *risulti*

$$\mathcal{P}(]a, b]) = b - a.$$

Specificamente,

$$\mathcal{P} \equiv \overline{\mu},$$

essendo $\overline{\mu}$ *la restrizione misura di Lebesgue alla* $\sigma-$*algebra* $\mathcal{B}$ *dei Boreliani di* $]0, 1]$.

DIMOSTRAZIONE.

Alcune osservazioni preliminari.

1. In primo luogo, riconosciamo che l' algebra di sottoinsiemi $\mathcal{A}$ generata dall' insieme degli intervalli semiaperti

$$\{]a, b] \subseteq \mathbb{R};\ 0 < a < b \leq 1\}$$

   e' (come insieme) costituita da tutti e soli i sottoinsiemi esprimibili (in modo evidentemente unico) come unione FINITA di intervalli semiaperti (infatti complementari ed intersezioni di intervalli semiaperti sono unioni FINITA di intervalli semiaperti: ricordando ad esempio la "*forma normale disgiuntiva*" per espressioni *Booleane*, l' affermaxione segue immediatamente).

2. Questo implica che ogni funzione additiva su $\mathcal{A}$ e' UNIVOCAMENTE determinata dai valori assunti sugli intervalli semiaperti della forma $]a, b] \subseteq \mathbb{R};\ 0 < a < b \leq 1$.

3. Poiche' $\mu(]a,b]) = b - a$, l' unica funzione additiva su $\mathcal{A}$ e', per restrizione, la funzione μ, misura di Lebesgue.

4. Poiche' gli intervalli semiaperti sono misurabili secondo Lebesgue, la restrizione della misura di Lebesgue e' anche (l'unica) funzione $\sigma-$additiva μ_0 su $\mathcal{A}$ soddisfacente le ipotesi.

5. La $\sigma-$algebra dei Boreliani $\mathcal{B}$ coincide con la $\sigma-$algebra $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ generata da $\mathcal{A}$. (cfr. Proposizione 3, subsect. 1.9)

Traiamo le conclusioni, nel formalismo del Teorema di Hahn/Kolmogorov.

Sia $\overline{\mu}$ la restrizione della misura di Lebesgue μ alla $\sigma-$algebra $\mathcal{B}$.

Ulteriormente ristretta all' algebra $\mathcal{A}$ coincide con la funzione (unica) μ_0 su $\mathcal{A}$.

Poiche' stiamo parlando di misure di probabilita'

(quindi la misura dell' insieme $\Omega =]0,1]$ deve essere finita - uguale ad 1 -)

e

$$\mathcal{B} = \mathcal{S}_{\mathcal{A}},$$

dal punto 2) del Teorema di Hahn/Kolmogorov segue che $\overline{\mu}$ e' l' unica misura di probabilita' sullo spazio misurabile $(]0,1], \mathcal{B})$ soddisfacente le ipotesi.

Andrea Brini

Dipartimento di Matematica, Universita' di Bologna

40126 Bologna, Italy

E-mail: andrea.brini@unibo.it