6 settembre 2022, es.1: Programmazione lineare

Discutere il seguente problema di Programmazione lineare: trovare, se esiste, il massimo di $p(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 + x_2 + x_3$ con i vincoli $x_k \geq 0$ $(1 \leq k \leq 3)$ e

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 24 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 36 \end{cases}$$

Si assuma come base iniziale per applicare l'algoritmo del simplesso, $\mathcal{B} = \{A_4, A_3, A_5\}$, in cui A_3 è la terza colonna della matrice dei coefficienti del sistema dei vincoli e A_4, A_5 sono rispettivamente $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, colonne relative alle variabili di scarto x_4, x_5 che si debbono introdurre.

Soluzione.

Il sistema dei vincoli si modifica introducendo le due variabili di scarto x_4, x_5 e diventa

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 24 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_5 = 36 \end{cases}$$

Con operazioni elementari tra le righe della matrice di questo sistema facciamo in modo che la terza colonna diventi $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; si ottiene così la tabella del simplesso associata alla base $\mathcal{B} = \{A_4, A_3, A_5\}$:

		A_1	A_2	A_3	A_4	A_4	B
$x_{v_1} = x_4$	$c_{v_1} = c_4 = 0$	-1	1	0	1	0	16
$x_{v_2} = x_3$	$c_{v_2} = c_3 = 1$	2	1	1	0	0	8
$x_{v_3} = x_5$	$c_{v_3} = c_1 = 0$	1	2	0	0	1	12
		-2	0	0	0	0	8
		$(z_1 - c_1)$	$(z_2 - c_2)$	$(z_3 - c_3)$	$(z_4 - c_4)$	$(z_5 - c_5)$	(z)

Siccome $z_1 - c_1 < 0$, bisogna passare ad una nuova base. Deve entrare A_1; per decidere quale vettore uscirà dalla base bisogna calcolare i due rapporti

$$\frac{\beta_2}{\alpha_{2,1}} = 4; \quad \frac{\beta_3}{\alpha_{3,1}} = 12;$$

il valore minimo è $\frac{\beta_2}{\alpha_{2,1}} = 4$, perciò deve uscire il vettore $A_{v_2} = 3$.

La "trasformazione pivotale" dà luogo alla seguente nuova tabella del simplesso, relativa alla base $\mathcal{B}' = \{A_4, A_1, A_5\}$:

		A_1	A_2	A_3	A_4	A_4	B
$x_{v_1} = x_4$	$c_{v_1} = c_4 = 0$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	20
$x_{v_2} = x_1$	$c_{v_2} = c_1 = 4$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	4
$x_{v_3} = x_5$	$c_{v_3} = c_5 = 0$	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	8
		0	1	1	0	0	16
		$(z_1 - c_1)$	$(z_2 - c_2)$	$(z_3 - c_3)$	$(z_4 - c_4)$	$(z_5 - c_5)$	(z)

Siccome adesso i valori $z_i - c_i$ sono tutti non negativi, l'algoritmo è terminato. Il massimo è raggiunto in $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (4, 0, 0, 20, 8)$ e vale $p(4, 0, 0) = z = 16$.

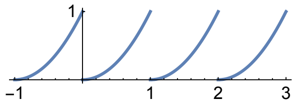
6 settembre 2022, es.2: Distribuzioni

Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione periodica di periodo 1 tale che per ogni $x \in [0, 1[$, $f(x) = x^2$; sia $T = T_f$ la distribuzione associata a f.

a) Descrivere la distribuzione T', derivata di T in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, scrivendo un'espressione di $\langle T', \varphi\rangle$ per una generica $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
b) Descrivere la distribuzione T'', derivata seconda di T in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, scrivendo un'espressione di $\langle T'', \varphi\rangle$ per una generica $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Soluzione.

a) (nella figura il grafico di f)

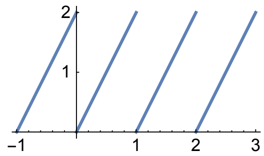


La funzione f può essere descritta da

$$f(x) = (x-n)^2 \text{ per } x \in [n, n+1[\,, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Questa funzione è C^∞ in $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$, e ha delle discontinuità di prima specie nei punti $x \in \mathbb{Z}$. La derivata di f è descritta, nei punti in cui esiste, da

$$f'(x) = 2(x-n) \text{ per } x \in]n, n+1[\,, \quad n \in \mathbb{Z}$$



e quindi, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, è

$$\langle T', \varphi\rangle = \langle T_{f'}, \varphi\rangle + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle \delta(x-n), \varphi(x)\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\varphi(n) + 2\int_n^{n+1} (x-n)\,\varphi(x)\,dx\right)$$

in cui la somma ha in effetti un numero finito di addendi, a causa del supporto compatto di φ.

b) f' è C^∞ in $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$, e ha delle singolarità di prima specie nei punti $x \in \mathbb{Z}$. La derivata seconda di f, nei punti in cui esiste, vale costantemente 2. La derivata di $T_{f'}$ è la distribuzione associata alla funzione costante 2, più le delta moltiplicate per 2, nei punti di ascissa intera. Inoltre T'' contiene anche le derivate delle delta presenti in T'. Pertanto, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, è

$$\langle T'', \varphi\rangle = \langle T_{f''}, \varphi\rangle + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle \delta'(x-n), \varphi(x)\rangle + 2\sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle \delta(x-n), \varphi(x)\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(-\varphi'(n) + 2\,\varphi(n) + 2\int_n^{n+1} \varphi(x)\,dx\right).$$

6 settembre 2022, es.3: funzioni lipschitziane e altro

Ricordiamo le seguenti definizioni, che qui sono riferite a una funzione $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:
- si dice che f è *lipschitziana* se: $\exists\, L > 0,\ \forall\, x_1,\ x_2 \in \mathbb{R},\ \ |f(x_2) - f(x_1)| \le L\,|x_2 - x_1|$.
- si dice che f è *uniformemente continua* se: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0,\ \ \forall\, x_1,\ x_2 \in \mathbb{R},\ \ |x_2 - x_1| < \delta \Longrightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$.

a) Dimostrare che se f è derivabile in $\mathbb{R}$ e f' è limitata, allora f è lipschitziana.
b) Dimostrare che se f è lipschitziana, allora è uniformemente continua.

Soluzione.

a) Supponiamo f derivabile in $\mathbb{R}$ e f' limitata; sia $L = \sup\{|f'(x)|;\ x \in \mathbb{R}\}$. Siano $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$. Per il Teorema di Lagrange del valor medio, esiste c compreso tra x_1 e x_2 tale che $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\cdot(x_2 - x_1)$, e quindi

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(c)| \cdot |x_2 - x_1| \le L\,|x_2 - x_1|.$$

È quindi dimostrato che f è lipschitziana.

b) Supponiamo f lipschitziana, e sia L la costante che appare nella corrispondente definizione. Sia $\varepsilon > 0$, e siano $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$. Poiché f è lipschitziana, abbiamo che $|f(x_2) - f(x_1)| \le L\,|x_2 - x_1|$; il secondo membro è $< \varepsilon$ se $|x_2 - x_1| < \frac{\varepsilon}{L}$. Perciò, se scegliamo δ positivo e $\le \frac{\varepsilon}{L}$ avremo che $|x_2 - x_1| < \delta \Longrightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$, quindi f è uniformemente continua.

6 settembre 2022, es.4: Verifica di un limite.

Verificare in base alla definizione di limite che $\lim\limits_{x\to e} x^2 \ln x = e^2$.

Soluzione.

Si tratta di far vedere che

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 \, , \; \forall x \in]0, +\infty[, \; \left(0 < |x - e| < \delta \Longrightarrow \left| x^2 \ln x - e^2 \right| < \varepsilon\right).$$

Supponiamo dunque assegnato $\varepsilon > 0$. Per $x > 0$ è

$$\left| x^2 \ln x - e^2 \right| = \left| x^2 \ln x - x^2 + x^2 - e^2 \right| \le \left| x^2 \ln x - x^2 \right| + \left| x^2 - e^2 \right| = x^2 \, |\ln x - 1| + \left| x^2 - e^2 \right|.$$

Poiché siamo interessati al comportamento in un intorno di e, possiamo supporre d'ora in avanti $2 < x < 3$. Allora:

- $\left| x^2 - e^2 \right| = |x - e| \cdot |x + e| < 6 \, |x - e|$; questo è $< \frac{\varepsilon}{2}$ se $|x - e| < \frac{\varepsilon}{12}$.
- $x^2 \, |\ln x - 1| < 9 \, |\ln x - 1|$; questo è $< \frac{\varepsilon}{2}$ se $|\ln x - 1| < \frac{\varepsilon}{18}$, cioè $e^{1-\frac{\varepsilon}{18}} < x < e^{1-\frac{\varepsilon}{18}}$;

si noti che risulta $e^{1-\frac{\varepsilon}{18}} < e < e^{1-\frac{\varepsilon}{18}}$. Pertanto l'intervallo $]2, 3[\cap]e - \frac{\varepsilon}{12}, \; e + \frac{\varepsilon}{12}[\cap]e^{1-\frac{\varepsilon}{18}}, \; e^{1-\frac{\varepsilon}{18}}[$ è un intorno di e; se x appartiene a tale intervallo allora $\left| x^2 \ln x - x^2 + x^2 - e^2 \right| \le x^2 \, |\ln x - 1| + \left| x^2 - e^2 \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Ciò conclude la verifica.

6 settembre 2022, es.5: Una nuova bicicletta per Carlo

Carlo è un cicloamatore, e ha deciso di acquistare una nuova bicicletta da corsa, che costa 5000€. Il venditore gli propone un pagamento rateale: 2000€ subito, e 11 rate mensili da 300€, la prima tra un mese da oggi.
a) Calcolare un valore approssimato per il tasso annuo i del finanziamento; conviene riferirsi inizialmente al tasso mensile i_{12}, e applicare un'interpolazione lineare tra i tassi mensili 0.01 e 0.02.
b) Stabilire se l'approssimazione di i_{12}, e conseguentemente di i, calcolata in (a) è per eccesso o per difetto.

Soluzione.

a) Le 11 rate da 300€ costituiscono una rendita mensile immediata posticipata, il cui valore attuale è uguale a 3000€, pari all'importo rimanente dovuto per la bicicletta. Il tasso mensile di detta rendita è quindi i_{12} tale che $300 \, \frac{-1+(1+i_{12})^{11}}{i\,(1+i_{12})^{11}} = 3000$, vale a dire $\frac{-1+(1+i_{12})^{11}}{i\,(1+i_{12})^{11}} = 10$. Tale equazione non è risolubile in modo esatto.

Sia allora

```
f[x_] := (-1 + (1 + x)^11)/(x (1 + x)^11);
```

Calcoliamo:

```
{f[0.01], f[0.02]}
```

```
{10.3676, 9.78685}
```

Determiniamo un'approssimazione di i_{12} con una interpolazione lineare, $i_{12} \approx 0.01 + t$ con t ricavato dalla seguente proporzione:

```
NSolve[(f[0.01] - 10)/t == (f[0.01] - f[0.02])/(0.02 - 0.01), t]
```

```
{{t → 0.0063299}}
```

che fornisce come valore approssimato di i_{12} il valore

```
i12 = 0.0163299;
```

Questo corrisponde al tasso annuo i uguale a

```
(1 + i12)^12 - 1
```

```
0.214553
```

ossia 21.4553% (assai esoso!).

b) La funzione f definita sopra esprime un valore attuale in funzione del tasso; essa è quindi una funzione *decrescente.* Con i_{12} approssimato come in (a) abbiamo

```
f[i12]
```

```
9.99434
```

che è minore di 10, risultato che si sarebbe dovuto ottenere con il tasso esatto; perciò il valore esatto per i_{12} è *minore* di quello da noi calcolato; la nostra approssimazione di i_{12} è dunque *per eccesso.*

Per completezza, riportiamo il valore "esatto" (o meglio: un'approssimazione più accurata) di i_{12} :

```
FindRoot[f[x] == 10, {x, 0.01}]
```

```
{x → 0.0162313}
```

leggermente inferiore al risultato ottenuto dall'interpolazione lineare.

6 settembre 2022, es.5: Il prestito per un investimento

Mark è un giovane uomo d'affari; gli viene prospettata un'operazione finanziaria che tra due anni restituirà il 110% del capitale investito. Mark non dispone al momento di liquidità, ma l'anziano miliardario Warren è disposto a prestargli fino a 4 000 000 \$. Tra due anni Mark dovrà restituire quanto ricevuto, aumentato del 20%. L'accordo tra i due è soltanto verbale; se nel corso dei due anni Warren passerà a miglior vita, non vi sarà traccia dell'operazione di prestito, e Mark non dovrà restituire quanto a suo tempo ricevuto. Mark ritiene che, data l'età avanzata, vi sia probabilità 40% che tra due anni Warren non sia più in vita.

a) Calcolare quale importo conviene a Mark chiedere in prestito da Warren, in base al criterio della massima speranza matematica.

b) Stessa questione, applicando però la funzione utilità $u(x) = x - \frac{x^2}{10}$ (x espresso in milioni di \$) al guadagno (positivo o negativo) conseguito da Mark ta due anni.

Soluzione.

a) Sia x l'importo, espresso in milioni di \$, che Mark chiede in prestito a Warren; dunque $x \in [0, 4]$. Tra due anni, il risultato per Mark dell'operazione di prestito e investimento sarà:

• $1.1\,x - 1.2\,x = -0.1\,x$, se in quel momento Warren sarà ancora in vita;

• $1.1\,x$, se in quel momento Warren non sarà più in vita.

La speranza matematica del guadagno è pertanto

```
e[x_] := 0.6 * (-0.1 x) + 0.4 * 1.1 x; Expand[e[x]]
```

```
0.38 x
```

Il massimo valore di $e(x)$, per $x \in [0, 4]$. si ottiene quindi per $x = 4$; vale a dire che, in base a questo criterio di decisione, conviene a Mark avvalersi del prestito di Warren nella misura massima che questi gli offre.

b) Ora adottiamo la funzione utilità (per un importo monetario x espresso in milioni di \$):

$$u[x\_] := x - \frac{x^2}{10};$$

L'utilità attesa del guadagno è allora

```
eu[x_] := 0.6 * u[-0.1 x] + 0.4 * u[1.1 x]; Expand[eu[x]]
```

$$0.38\,x - 0.049\,x^2$$

Ci serve il valore di $x \in [0, 4]$ che rende massima $eu(x)$. La derivata è:

```
Expand[eu'[x]]
```

```
0.38 - 0.098 x
```

```
NSolve[eu'[x] == 0, x]
```

```
{{x → 3.87755}}
```

Questo è il valore che rende massima l'utilità attesa; secondo questo criterio di decisione Mark deve chiedere in prestito da Warren 3 877 550 \$.