Pre-Corso di allineamento "Analisi matematica per le prime lezioni di fisica"

Maurizio Spurio
Università di Bologna and INFN
Maurizio.spurio@unibo.it

Motivazioni

- Un pre-corso di allineamento dal titolo "**Analisi matematica per le prime lezioni di fisica**" per tutte le matricole di Fisica (sia corso AL che MZ) si terrà da **LUNEDI' 12 a VENERDI' 16 Settembre dalle 14.30 alle 17.00 nell'Aula A** dell'edificio **di Via Irnerio 49** (di fronte al Dipartimento di Fisica). Le lezioni del corso saranno trasmesse via TEAMS e registrate per poter essere visualizzate offline. La presenza di studenti in aula è incoraggiata per permettere di avere domande/risposte. Informazioni dettagliate sulle modalità trasmissione saranno successivamente inserite.

- L'iscrizione (raccomandata ma non obbligatoria) può essere effettuata accedendo al presente link:

- **MOTIVAZIONE**: Gli studenti che si iscrivono al primo anno di Fisica (ma talvolta anche ad altri corsi, ad es. Chimica, Ingegneria) incontrano subito, nel corso di Meccanica (o Fisica Generale I), i concetti di derivata, di integrale e di equazione differenziale che nel corso estensivo di Analisi Matematica saranno introdotti in maniera formale settimane o mesi dopo. Se lo studente non è entrato in contatto con questi argomenti già in un liceo scientifico, un disagio iniziale è inevitabile. Il problema è risultato acuito negli ultimi due anni, con la penalizzazione legata al Covid anche per studenti che provengono da Licei Scientifici.

Finalità e link

- **FINALITA'**: Il pre-corso "Analisi matematica per le prime lezioni di fisica" ha lo scopo di introdurre i concetti di funzione di variabile reale, limite, derivata e integrale in maniera funzionale allo studio della cinematica e illustrarli basandosi su alcuni semplici esempi che si incontrano in fisica, rimandando la trattazione rigorosa ai corsi di Analisi. Cosa sono le equazioni differenziali e come si utilizzano in fisica verrà illustrato attraverso due semplici modelli che portano alla legge del decadimento radioattivo, e all'attenuazione del numero di nuclei che penetrano un materiale.
- **METODO DIDATTICO**: Le lezioni saranno svolte nell'aula A dell'edificio di via Irnerio 49 dove sarà possibile sia la trasmissione via TEAMS (attraverso questo **link**) dello schermo e dei programmi utilizzati (power point, excel), che di quanto verrà scritto nella lavagna di ardesia tradizionale. Tutto verrà registrato e reso disponibile offline nella piattaforma VIRTUALE d'ateneo.
- **A CHI SI RIVOLGE**: Agli studenti immatricolati (o che intendono farlo) al corso di Laurea in Fisica (entrambi i canali) o altra laurea ove il calcolo differenziale in fisica viene utilizzato dalle prime lezioni.
- **CHI LO TIENE:** Il docente del corso di Meccanica AL, prof (di Fisica) M. Spurio. Tutto il contenuto è propedeutico al corso di Meccanica (AL e MZ)

- Link teams

Pre-requisiti di base: argomenti che si assumono acquisiti

Calcolo
- Somme, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni (calcoli svolti anche a mente!)
- Ordini di grandezza numerici
- Calcolo con formule letterali, semplificazioni
- Rappresentazioni dei numeri (notazione scientifica, potenze di dieci)
- Equivalenze (conversioni tra unità di misura)
- Calcolo di aree, superfici e volumi di semplici enti geometrici
- Espressioni: definizioni ed espressioni elementari

Concetti di base e algebrici
- Nozioni elementari di insiemistica
- Concetti elementari di logica matematica
- Il calcolo letterale: i monomi. I polinomi: operazioni con i polinomi
- Numeri naturali, interi e razionali; Frazioni, MCD e mcm
- Scomposizione in fattori primi
- Potenze, radici, proprietà delle potenze
- Espressioni algebriche, loro riduzione, semplificazione e fattorizzazione
- Equazioni e disequazioni, significato grafico. Equazioni di 1 e 2 grado.
- Sistemi di equazioni di 1 e 2 grado
- Il valore assoluto: equazioni e disequazioni col valore assoluto

Pre-requisiti di base: argomenti che si assumono acquisiti

Geometria di base

- Punto, linea, segmenti, angoli, rette
- Piano geometrico, Concetto di parallelismo e perpendicolarità;
- Triangoli, criteri di eguaglianza e similitudine, teorema di Pitagora
- Geometria Euclidea: assiomi e teoremi
- Poligoni inscritti e circoscritti.
- Geometria analitica di base: rette, parabole, circonferenze
- Piano cartesiano e sistemi di coordinate cartesiane.
- Rappresentazione nel piano cartesiano di semplici funzioni matematiche (rette, parabole…)

Trigonometria piana di base

- Definizione di grandezze trigonometriche; circonferenza goniometrica
- Angoli in gradi e radianti
- Seno, coseno, tangente, cotangente e funzioni inverse
- Formule goniometriche: addizione, sottrazione, duplicazione, bisezione, prostaferesi e Werner.

Argomenti che verranno approfonditi nei corsi del I anno

Vettori (NB: per la loro importanza, questi saranno affrontati anche nei corsi di Fisica)
- Concetto di scalare e vettore. Notazioni
- Somma e sottrazione di vettori. La regola del parallelogramma. Prodotto di uno scalare per un vettore
- Prodotto tra vettori: prodotto scalare e prodotto vettoriali. Significato geometrico
- Operatori vettoriali (gradiente, divergenza, rotore)
- Vettori assiali e polari

Elementi di Analisi matematica
- Concetto di numero reale
- Variabile dipendente e indipendente
- Concetto di limite; continuità
- Funzioni, dominio di validità, rappresentazione grafica
- Funzioni elementari (trigonometriche, logaritmo, esponenziale), loro comportamento analitico e grafico

Derivate e Integrali
- Funzione di variabile reale, definizione di continuità e derivabilità
- Derivata e significato geometrico di derivata e derivata delle funzioni elementari
- Teoremi sulle derivate (somma e prodotto di funzione, funzione di funzione..)
- Massimi e minimi con il metodo delle derivate, applicazioni.
- Significato di “differenziale”
- Integrale e significato geometrico di integrale
- Integrale definito e indefinito; concetto di “funzione primitiva”

Nuovi argomenti, approfonditi nei corsi universitari

- Calcolo differenziale e integrale per funzioni di una variabile reale
- Sviluppo in serie di Taylor
- Equazioni differenziali ordinarie e soluzioni di casi semplici
- Funzioni di più variabili
- Calcolo differenziale per funzioni di più variabili: limiti, derivate direzionali, derivate parziali.
- Operatori differenziali:
    - divergenza
    - gradiente
    - rotore
- Calcolo infinitesimale per le curve regolari
- Integrali di linea e di superficie
- Sviluppi di serie trigonometriche e analisi di Fourier
- Tensori
- ….

Argomenti trattati in questo modulo

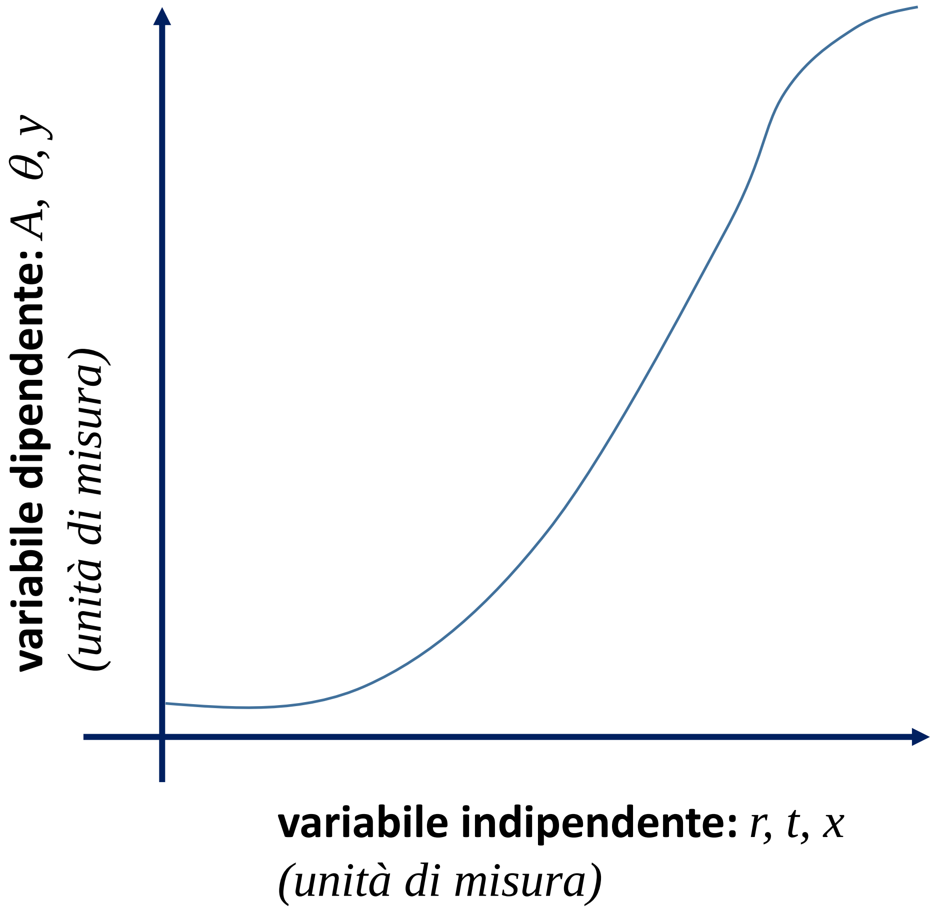
1) Variabili e funzioni di una variabile
2) La «rapidità» e il rapporto incrementale
3) Derivata di una funzione
4) Massimo e minimo di una funzione
5) Funzioni di più variabili
6) Derivate parziali
7) Il problema inverso della «differenziazione»
8) Integrali indefiniti
9) Integrali definiti
10) Primo cenno sulle equazioni differenziali
11) Numeri reali in matematica e fisica: il caso del π

1) Variabili e funzioni di una variabile

- Una **FUNZIONE** di una variabile in fisica rappresenta la relazione esistente tra due grandezze che, normalmente, rappresentano quantità misurabili.
- Una funzione può essere scritta in modo formale come:

$$A = \pi r^2$$
$$\vartheta(t) = \omega \cdot t$$
$$y = k \cdot x$$

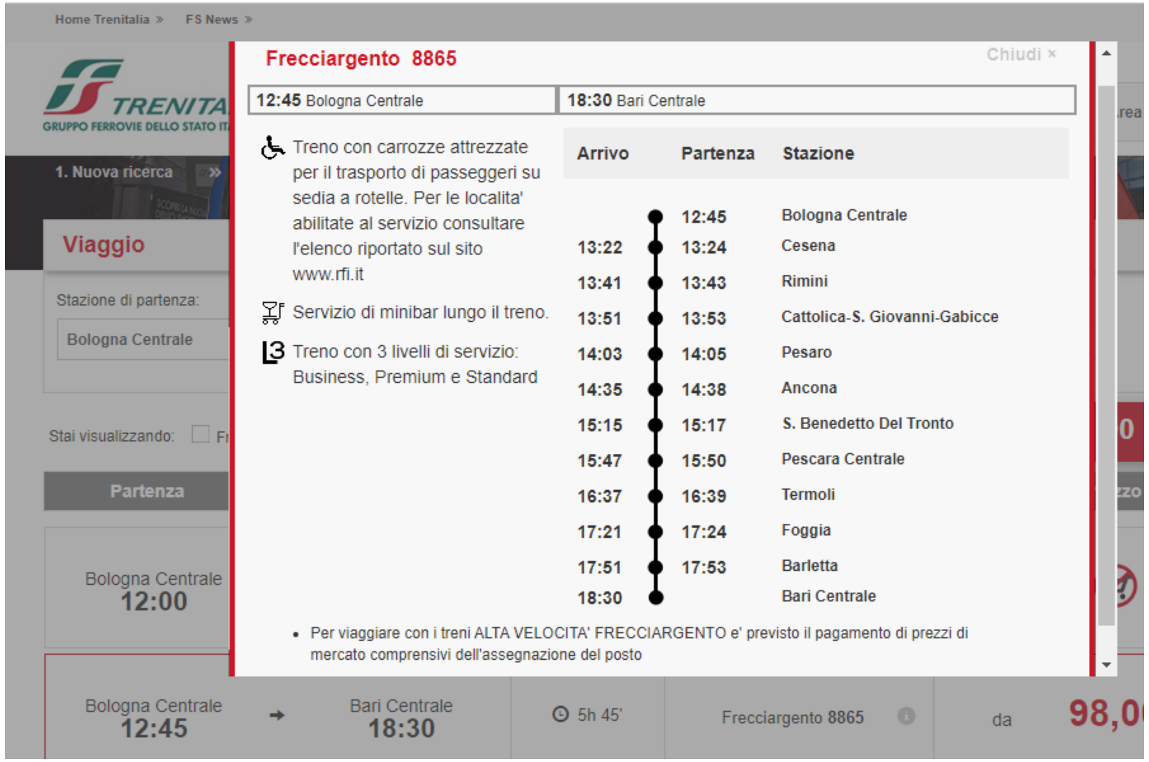
- In tutte queste rappresentazioni, una variabile sta a sinistra **(variabile dipendente)** e un'altra a destra **(variabile indipendente)** del segno di uguaglianza (=)
- **Attenzione**: in fisica è molto importante che le equazioni siano **omogenee**. Questo significa che le dimensioni fisiche delle grandezze a sinistra e destra di una equazione siano identiche (**analisi dimensionale**).
- Figura: rappresentazione grafica (cartesiana di una **funzione di variabile reale)**



NOTA: il testo scritto in BLU verrà approfondito nei corsi di Fisica

Fisica = ambito delle quantità **osservabili**

- Normalmente, noi osserviamo la grandezza da studiare (**dipendente**) in concomitanza di alcuni valori della variabile **indipendente**.
- E' molto importante associare un «*errore*» (=incertezza, indeterminazione) sia alla variabile indipendente che a quella dipendente (Laboratorio)
- Talvolta, non si conosce la legge matematica che lega le due variabili (noi **presumiamo che ci sia una tal legge** tra grandezze)
- Non posso trovare una relazione tra la fame che ho e il tempo (ora del giorno), in quanto non ho strumenti per misurare «*fame*».
- Possiamo raccogliere i dati in forma di
  - Tabelle
  - Istogrammi
  - punti su un grafico cartesiano



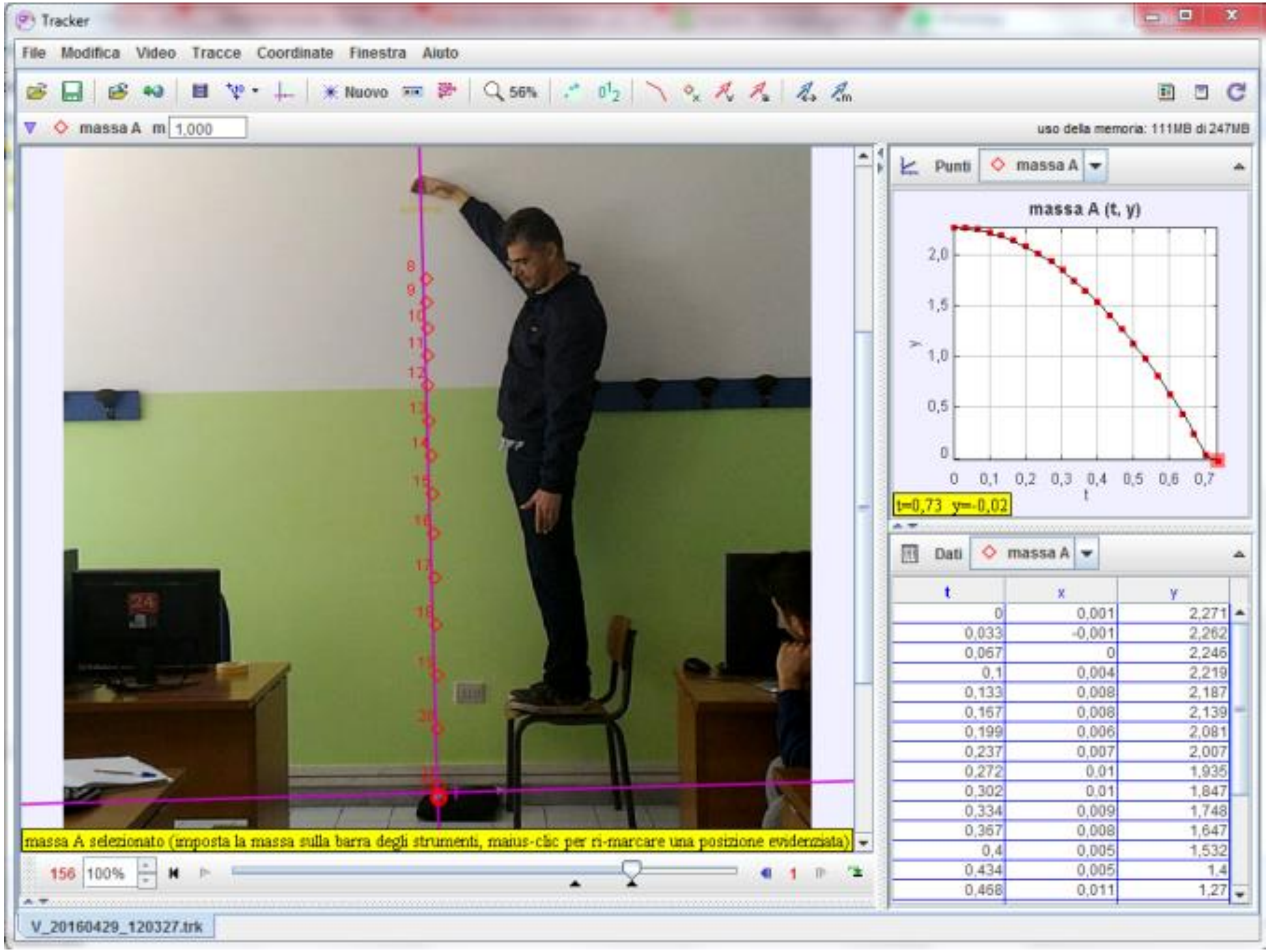
Esempio di Tabella oraria: la posizione attesa (=stazione di arrivo, km da Bologna centrale) vs. tempo (in ore da 12.45)

Domanda: quale grandezza dovrà comparire se tra la parte destra e sinistra dell'equazione che relaziona km e tempo?

Esempio: un semplice esperimento di caduta di un grave

- Qui, correliamo la posizione lungo la direzione di caduta (variabile **dipendente**) in funzione del tempo (variabile **indipendente**).
- Vogliamo determinare la posizione per ogni **possibile valore del tempo, anche negli istanti di tempo in cui non abbiamo la misura**.
- In linguaggio matematico, assumiamo che **posizione** e tempo siano **grandezze reali**

Testo e grandezze in verde saranno definite in modo rigoroso nei corsi di matematica

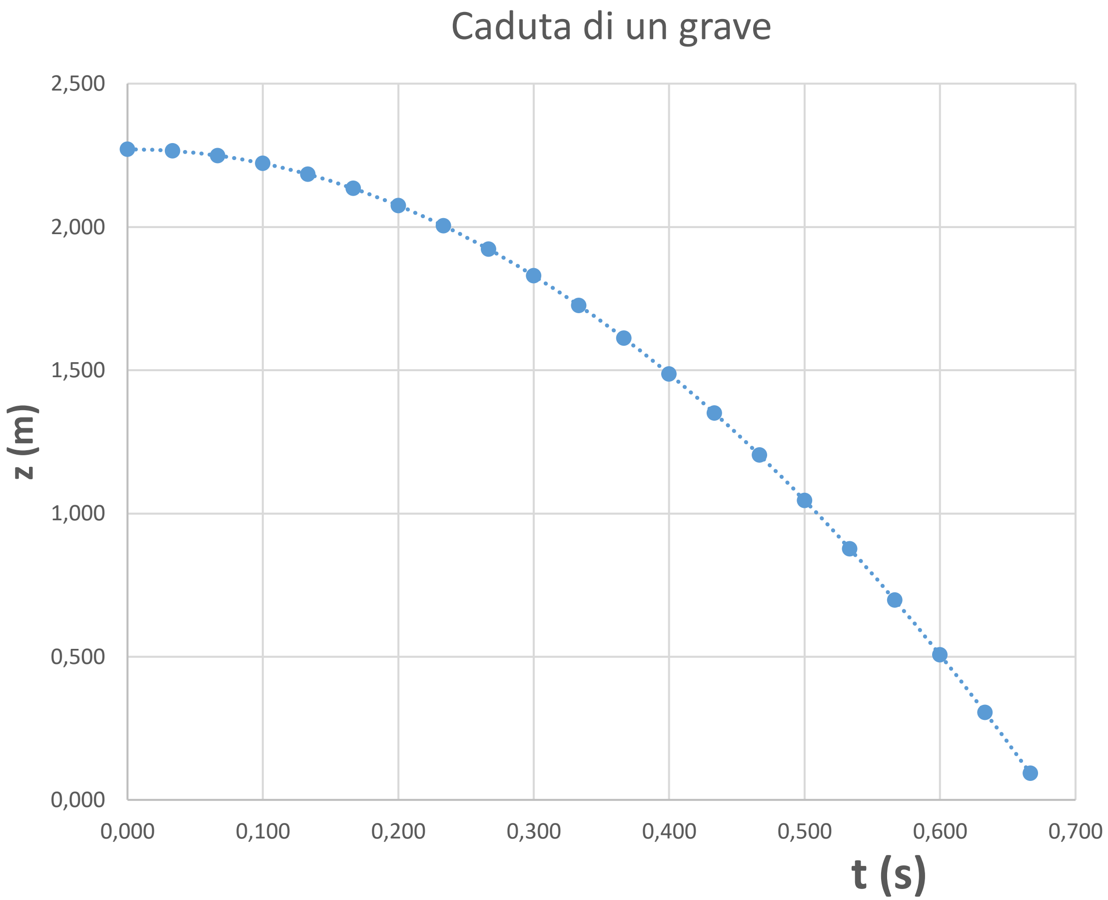


Dal discreto al continuo

Foto #	t	z
0	0,000	2,271
1	0,033	2,266
2	0,067	2,249
3	0,100	2,222
4	0,133	2,184
5	0,167	2,135
6	0,200	2,075
7	0,233	2,004
8	0,267	1,922
9	0,300	1,830
10	0,333	1,726
11	0,367	1,612
12	0,400	1,487
13	0,433	1,351
14	0,467	1,203
15	0,500	1,046
16	0,533	0,877
17	0,567	0,697
18	0,600	0,506
19	0,633	0,305
20	0,667	0,092

Z

- I dati mostrati sono contenuti in un foglio elettronico che useremo come base di lavoro



NB: la presente sequenza di dati è stata acquisita con un setup sperimentale che prevedeva la caduta dell'oggetto entro un tubo in cui era stato fatto il vuoto

Tempo e spazio sono grandezze reali (matematicamente)?

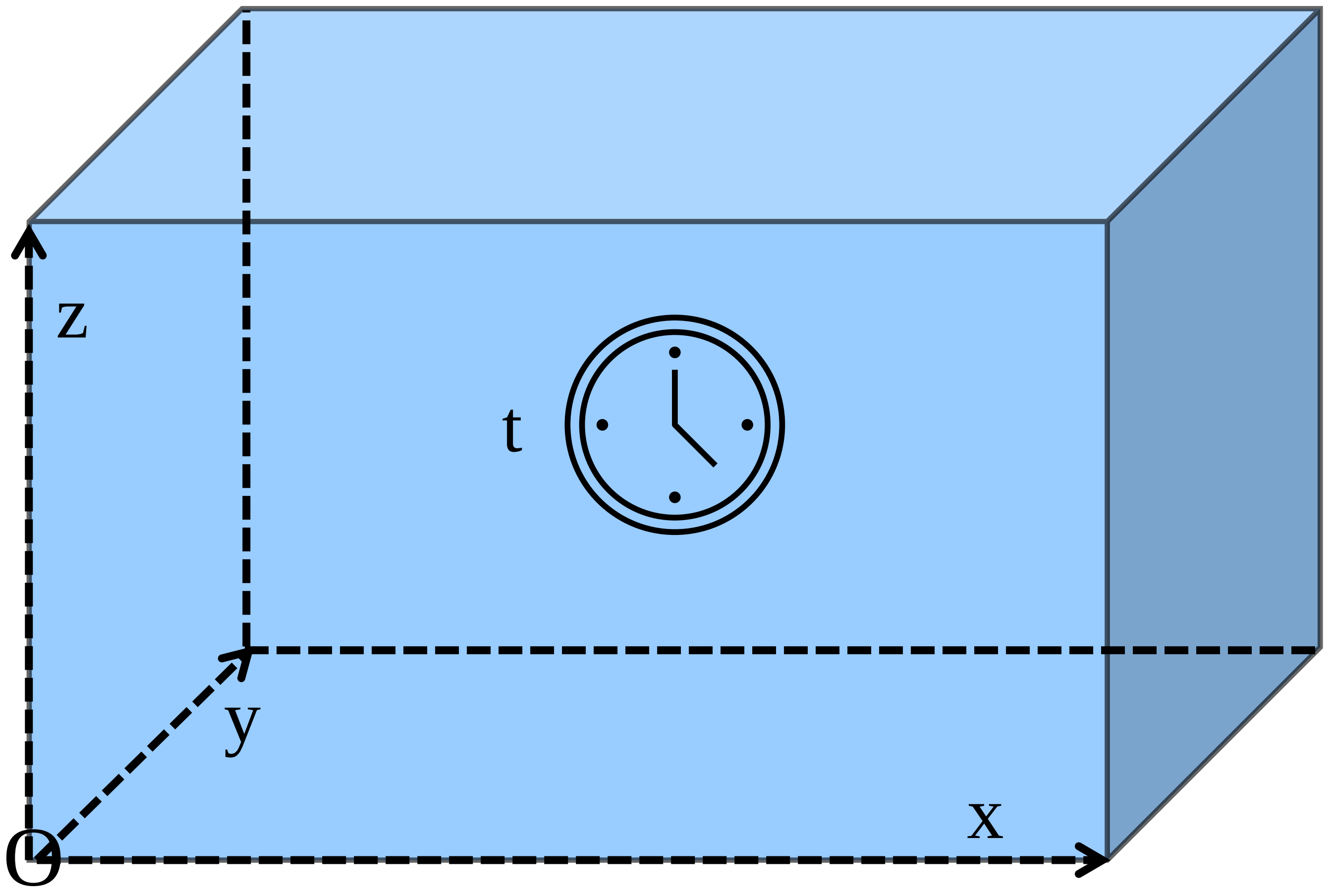
- La fisica non fa filosofia, non assumiamo risposte a priori. Dobbiamo dare risposte basandoci sulle nostre osservazioni, anche sulla domanda se spazio e tempo sono descritti da numeri reali.
- Apparentemente, non potremo mai sapere se le grandezze necessarie per descrivere la posizione di un oggetto e l'istante di tempo in cui si trova in quella posizione **sono descrivibili con numeri reali**.
- Tuttavia, con grado di approssimazione **legato al buon senso fisico**, possiamo fare qualche assunzione.
- Infatti, dal punto di vista sperimentale (pagando molto!) potremmo conoscere la posizione di un oggetto con una precisione spaziale migliore del micrometro (10^{-6} m) e temporale migliore del nanosecondo (10^{-9} s)
- L'oggetto che si muove non è «puntiforme» ma avrà una estensione (almeno) millimetrica, se vogliamo fotografarlo. Ma, rispetto al tratto percorso, possiamo considerarlo «puntiforme».
- Quindi la risposta va data sempre riferendosi alla «granularità» dello spazio e del tempo in base alle dimensioni reali dell'oggetto che studiate. **Nell'approssimazione della fisica classica, possiamo considerare la posizione di un oggetto in un certo istante di tempo come espresso da numero reale**.
- La cosa potrà essere rivista quando entreremo nel dominio delle particelle:
  - un protone ha dimensioni di 10^{-13} m
  - il limite superiore alle dimensioni dell'elettrone è $<10^{-16}$ m

Spazio e tempo in fisica Newtoniana

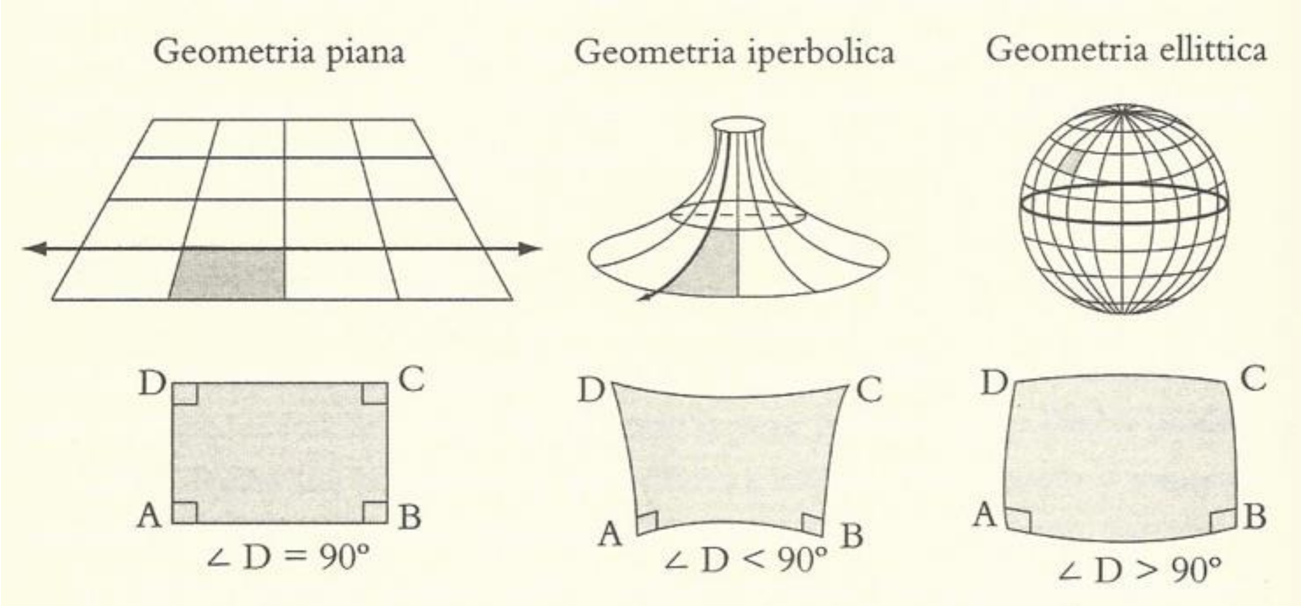
- Newton nei «*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*» (1687) non ha strumenti per poter affermate che spazio e tempo sono descritti da numeri reali. Fa una assunzione che dovrà essere confermata a posteriori (e che si dimostrerà fondata in tutta la **meccanica classica**)

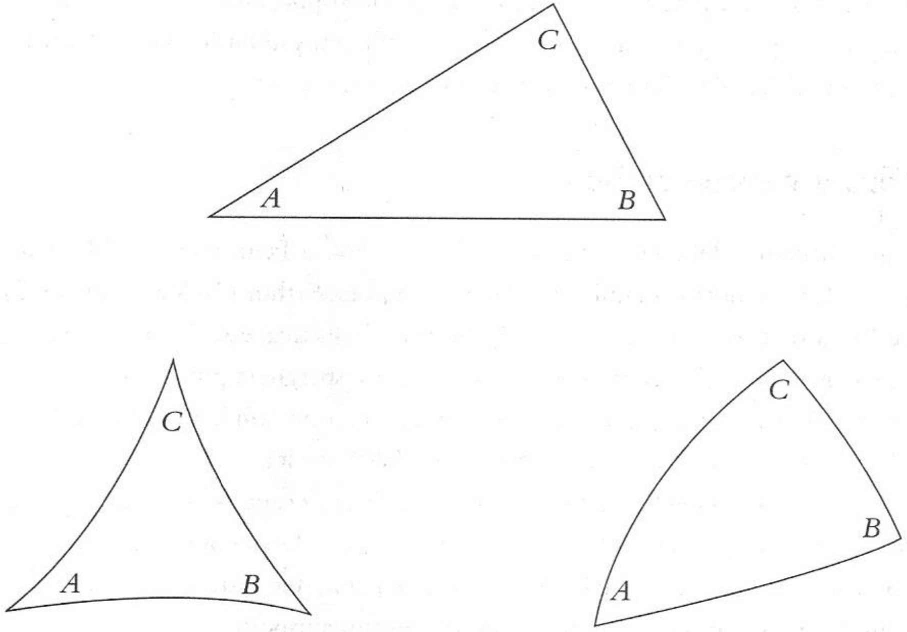
- Newton assume l'universo come una sorta di «scatola» in cui la posizione di un oggetto può essere data attraverso **tre numeri reali**: ad es., (x,y,z)
- Il tempo (t) è un parametro che scorre come un **numero reale** uguale in tutte le regioni dello spazio
- I fenomeni fisici avvengono nello spazio e nel tempo, e vengono (in buona parte) descritti come **variazioni di alcune grandezze al variare di spazio e/o tempo** in base a fenomeni dinamici

$$\frac{\text{variazioni grandezze dipendente}}{\text{variazioni grandezze indipendente}}$$



Inoltre, si assume che lo spazio sia Euclideo





- La fisica **classica** assume che lo spazio sia Euclideo
- La matematica della relatività generale permette che la geometria dell'Universo possa essere anche non-euclidea
- Se la geometria dell'Universo sia o meno Euclidea, è un fatto di natura sperimentale, accessibile con esperimenti a partire dal 1998!

Vettori

- Per definire la posizione di un oggetto in un sistema di riferimento Newtoniano, occorrono tre numeri
- Spesso, viene utilizzato un **sistema di riferimento cartesiano ortogonale,** come quello mostrato nel disegno della pagina precedente, in cui i tre assi sono ortogonali uno all'altro. La posizione di un corpo «puntiforme» è data da **tre numeri reali** che rappresentano le coordinate cartesiane (x,y,z) .
- Altri sistemi di riferimento che utilizzerete sono quelli con le **coordinate sferiche** e quelli con **coordinate cilindriche**. Esistono delle regole di trasformazione (talvolta, non semplici) per passare da un sistema di coordinate a un altro.
- La posizione di un corpo in un sistema di riferimento (ad es., cartesiano) è indicato simbolicamente come una grandezza con una freccia sopra o, nei testi, col carattere **grassetto**:

$$\vec{r} = \boldsymbol{r} = (x; y; z)$$

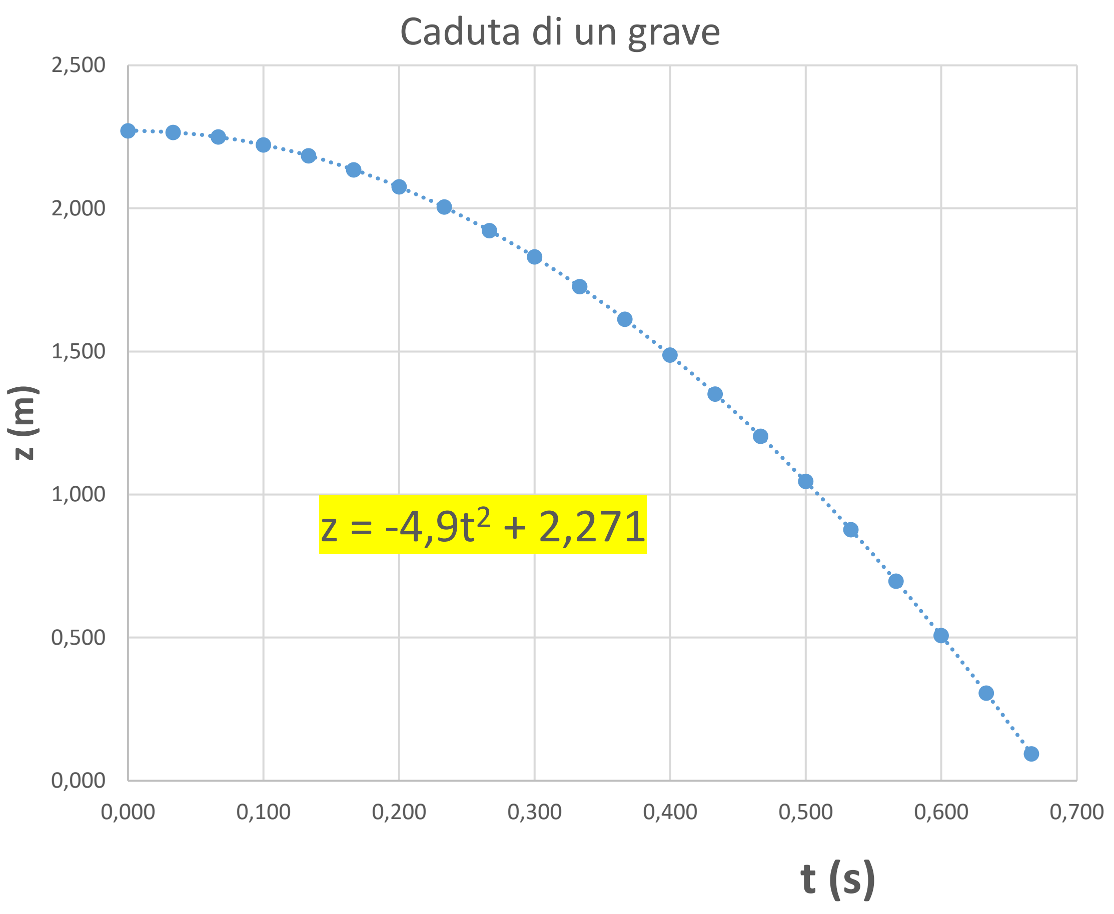
- Tali grandezze che hanno **3 componenti** prendono il nome di **grandezze vettoriali**. Ma non tutti gli oggetti con 3 componenti sono grandezze vettoriali
- Le grandezze vettoriali hanno precise regole di trasformazione quando cambiamo l'origine del sistema di riferimento, ruotiamo rigidamente gli assi, o scegliamo un SR con uno degli assi «riflesso».
- Studieremo e interpreteremo in senso fisico queste regole di trasformazione nel corso di Meccanica.

Funzioni di una variabile **reale**

Torniamo all'esempio della caduta del «grave»

- Noi abbiamo misurato alcune posizioni in alcuni istanti di tempo (grazie ad una fotocamera)
- Negli istanti di tempo intermedi tra due foto, assumiamo che l'oggetto **assuma con continuità** posizione attigue a quelle tra foto successive
- Possiamo immaginare quindi l'esistenza di una **funzione matematica** che descrive la posizione del corpo (z) per ogni possibile istante di tempo t : $z(t)$
- Esistono delle tecniche (che studierete nel corso di laboratorio) per ottenere la funzione matematica che meglio descrive una serie di dati.
- Nel caso di caduta libera studiato, l'espressione matematica è una polinomiale di secondo grado, le cui costanti sono espresse nella figura.
- Ciascuna costante ha un **preciso significato fisico**

Dal [foglio elettronico]



Tipi di funzione di variabile reale

- Le funzioni **algebriche** (o polinomiali) di una variabile sono funzioni costruite attraverso le quattro operazioni dell'aritmetica, dell'elevamento a potenza e dell'estrazione della radice n-esima
- Le funzioni **trascendenti** sono le funzione di variabile reale non esprimibile a partire dalla sua variabile indipendente tramite semplici operazioni aritmetiche o di estrazione di radice. Esempi di funzioni reali (di variabile reale) trascendenti sono le **funzioni goniometriche** (esempio $\sin\theta, \cos\theta, ..$)**, le funzioni esponenziali (**esempio: e^x)**, le logaritmiche (**esempio: $\ln x$).

- In fisica, le equazioni polinomiali con diversi esponenti devono essere moltiplicate per termini costanti che ne rispettino le dimensioni fisiche. Ad es. se z è una posizione e t il tempo l'equazione

$\boldsymbol{z(t) = t^2 + 2t - 4}$ è ambigua e inaccurata!

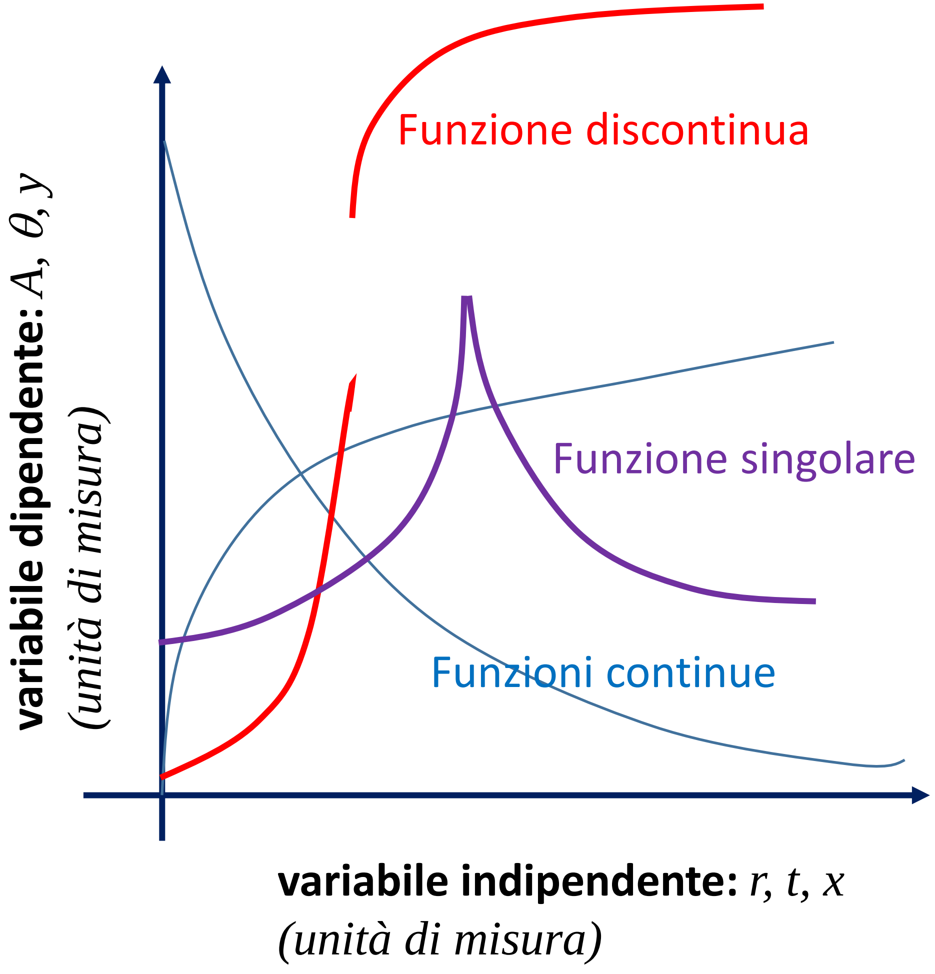
$\boldsymbol{z(t) = at^2 + 2bt - c}$ è corretta! Quali sono le dimensioni fisiche di a, b, c?

- Gli argomenti delle funzioni trascendenti devono essere **adimensionali**. In particolare, **gli angoli nelle equazioni goniometriche devono sempre essere misurati in radianti**.

$$\theta(\mathrm{rad}) = \frac{\text{arco circonferenza (m)}}{\text{raggio (m)}}$$

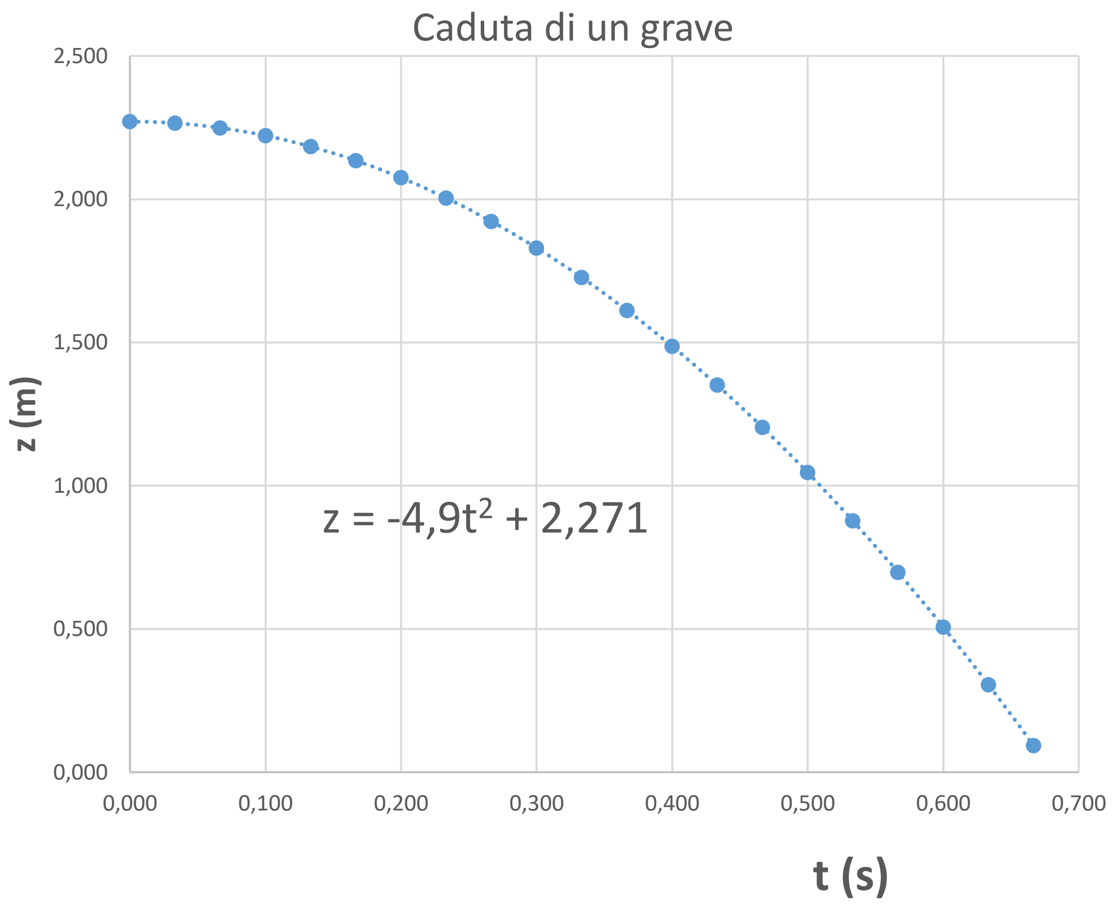
Funzioni continue, discontinue, singolari

- Nella stragrande maggioranza dei casi, avremo a che fare con funzioni che sono **continue e definite** entro un certo intervallo di valori della variabile dipendente **(=dominio**)
- Potrete (raramente) trovare anche delle funzioni che presentano una **discontinuità** nell'intervallo
- In altri casi, potrete trovarvi con funzioni che presentano una **singolarità** in un certo punto del dominio
- Ovviamente, **occorre un modo formale per definire una discontinuità o una singolarità**
- Per fini pratici, conviene chiamare le variabili con lettere che ci ricordano la variabile fisica rappresentata (e ricordarsi le unità di misura sugli assi!)
- Normalmente, quando il tempo t compare come variabile indipendente, e le coordinate come variabile dipendente, l'equazione si chiama **legge oraria**.



Attenzione al dominio

- **Importante**: Le leggi fisiche sono valide in un certo intervalli di valori (dominio) della variabile indipendente
- Fuori dal dominio, la **legge fisica potrebbe non avere senso** (mentre lo ha dal punto di vista matematico!)
- Ad esempio, nella caduta del grave fuori dal dominio <u>**fisico**</u> (ad es. t=1 s) la posizione data dalle legge «matematica» è z=-2,629 m mentre la posizione «fisica» è z=0 ! (il corpo non sprofonda all'inferno come Don Giovanni nel finale dell'opera di Mozart)
- Il fatto di considerare leggi matematiche come leggi fisiche fuori dai valori permessi (del dominio, o di altri parametri fisici) è **all'origine di molti articoli di «fanta»scienza** (i fenomeni sono descritti da buone leggi matematiche, ma non danno predizioni reali)
- Non parliamo di come questo errore viene usato in libri e film!



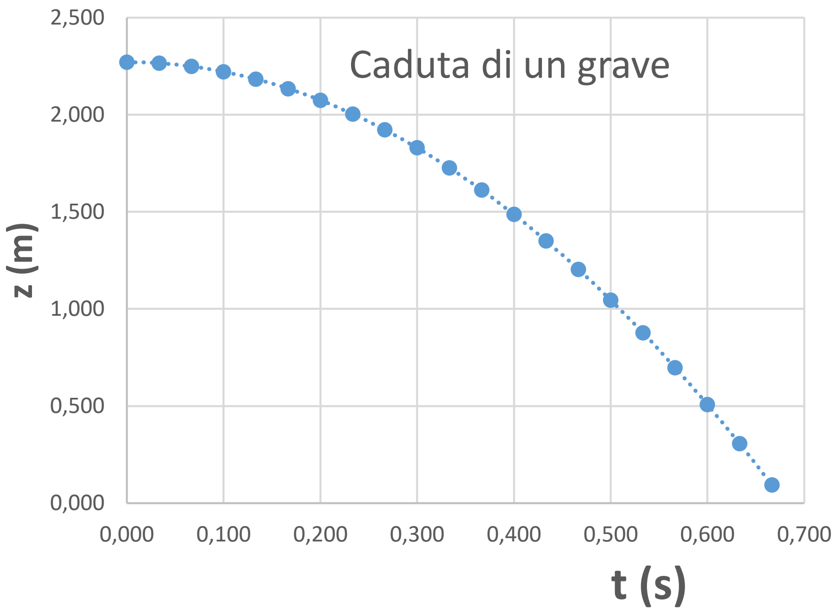
Rappresentazioni

Esperimento

Tabella

Foto#	t	z
0	0,000	2,271
1	0,033	2,266
2	0,067	2,249
3	0,100	2,222
4	0,133	2,184
5	0,167	2,135
6	0,200	2,075
7	0,233	2,004
8	0,267	1,923
9	0,300	1,830
10	0,333	1,727
11	0,367	1,612
12	0,400	1,487
13	0,433	1,351
14	0,467	1,204
15	0,500	1,046
16	0,533	0,877
17	0,567	0,698
18	0,600	0,507
19	0,633	0,306
20	0,667	0,093

Grafico



Espressione matematica

$z(t) = -4{,}9t^2 + 2{,}271$

Testo

Un corpo in caduta libera in assenza di attrito occupa una posizione bla bla bla…

- Diversi modi di **rappresentare** lo stesso processo fisico
- Ciascuna **rappresentazione** ha delle caratteristiche specifiche, che ci agevola (o meno) la comprensione del fenomeno
- Avanzando nella fisica, vedrete (meccanica quantistica) che esistono diverse rappresentazioni matematiche per descrivere uno stesso fenomeno

Legge fisica

- Quello che venne scoperto a partire da Galileo è che, **se trascuriamo il fenomeno degli attriti**, qualsiasi corpo cade descritto da un polinomio del II ordine e con **<u>lo stesso valore del coefficiente quadratico del polinomio</u>**, indipendentemente dal materiale, massa, forma, dimensioni, colore,….
- [o almeno, entro un ragionevole valore di intervalli]
- Avendo preso l'asse verticale orientato dal basso verso l'alto, possiamo scrivere una sorta di «legge universale» di caduta come

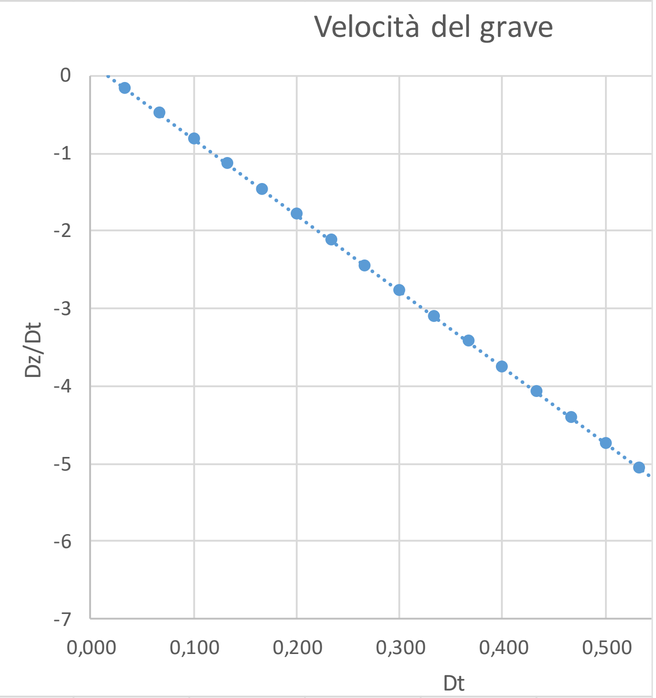
$$\mathrm{z}(t) = -\frac{1}{2}g \cdot t^2 + v_o t + z_o$$

- Il coefficiente quadratico viene scritto $-\frac{1}{2}g$, con g =9.80 m/s^2
- v_o, z_o sono costanti iniziali che possono variare caso per caso (come discuteremo avanti)
- La «legge fisica» è legata al fatto che il valore di «g» sia universale (anche se studieremo via via piccole e grandi «violazioni» di questa regola).
- Per la matematica, qualsiasi valore di g può andar bene. Anche valori negativi. Per la fisica (mantenendo fisso il sistema di riferimento usato) valori negativi di g sarebbero assurdi. Perché?

2) La rapidità di caduta del grave

- Apriamo ora il foglio elettronico dove sono contenuti i dati di caduta libera del corpo
- Guardando il grafico z(t) in cui i punti sono presi ad intervalli di tempo Δt regolari, notiamo che in tempi uguali vengono percorsi spazi Δz diversi
- C'è una regolarità in questi valori? Interessa valutare il rapporto $\frac{\Delta z}{\Delta t}$, la «rapidità di caduta», in [m/s]
- La grandezza $\frac{\Delta z}{\Delta t}$ è **una grandezza calcolabile** viene chiamata «velocità media» nell'intervallo
- E' una **grandezza misurabile e di interesse fisico**
- Che grafico/legge matematica deriva da questa operazione?
- Nota: anche i segni «+» e «-» hanno senso fisico

Foto #	t	z	Δz/Δt	a
0	0,000	2,271		
1	0,033	2,266	-0,1634	
2	0,067	2,249	-0,4902	
3	0,100	2,222	-0,817	
4	0,133	2,184	-1,1438	
5	0,167	2,135	-1,4706	
6	0,200	2,075	-1,7974	
7	0,233	2,004	-2,1242	
8	0,267	1,922	-2,451	
9	0,300	1,830	-2,7778	
10	0,333	1,726	-3,1046	
11	0,367	1,612	-3,4314	
12	0,400	1,487	-3,7582	
13	0,433	1,351	-4,085	
14	0,467	1,203	-4,4118	
15	0,500	1,046	-4,7386	
16	0,533	0,877	-5,0654	
17	0,567	0,697	-5,3922	
18	0,600	0,506	-5,719	
19	0,633	0,305	-6,0458	
20	0,667	0,092	-6,3726	

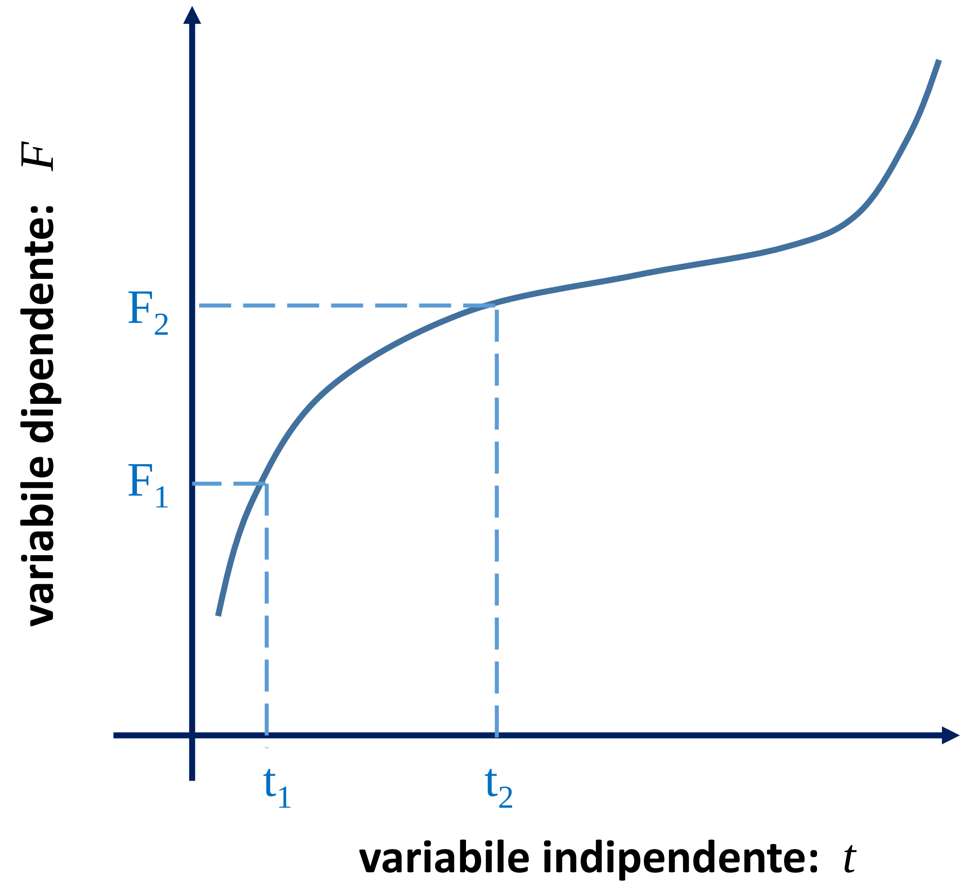


- Imparerete a usare i fogli elettronici, e strumenti simili che servono a maneggiare i dati, nei vari corsi di Laboratorio
- Se non siete interessati a maneggiare i dati, o a «sporcarvi le mani», avete sbagliato corso di Laurea.

Il rapporto incrementale

- La rappresentazione grafica di una legge fisica è normalmente molto utile (es.: legge oraria)
- Per generalità chiamiamo F la variabile dipendente e t quella indipendente; $F(t)$ rappresenta la funzione definita in un certo intervallo
- Come abbiamo visto, spesso è utile studiare quello che in matematica si chiama **rapporto incrementale**, ossia:

$$\boxed{\frac{\text{variazione grandezza dipendente}}{\text{variazione grandezza indipendente}}} \quad \boxed{= \frac{\Delta F}{\Delta t}}$$



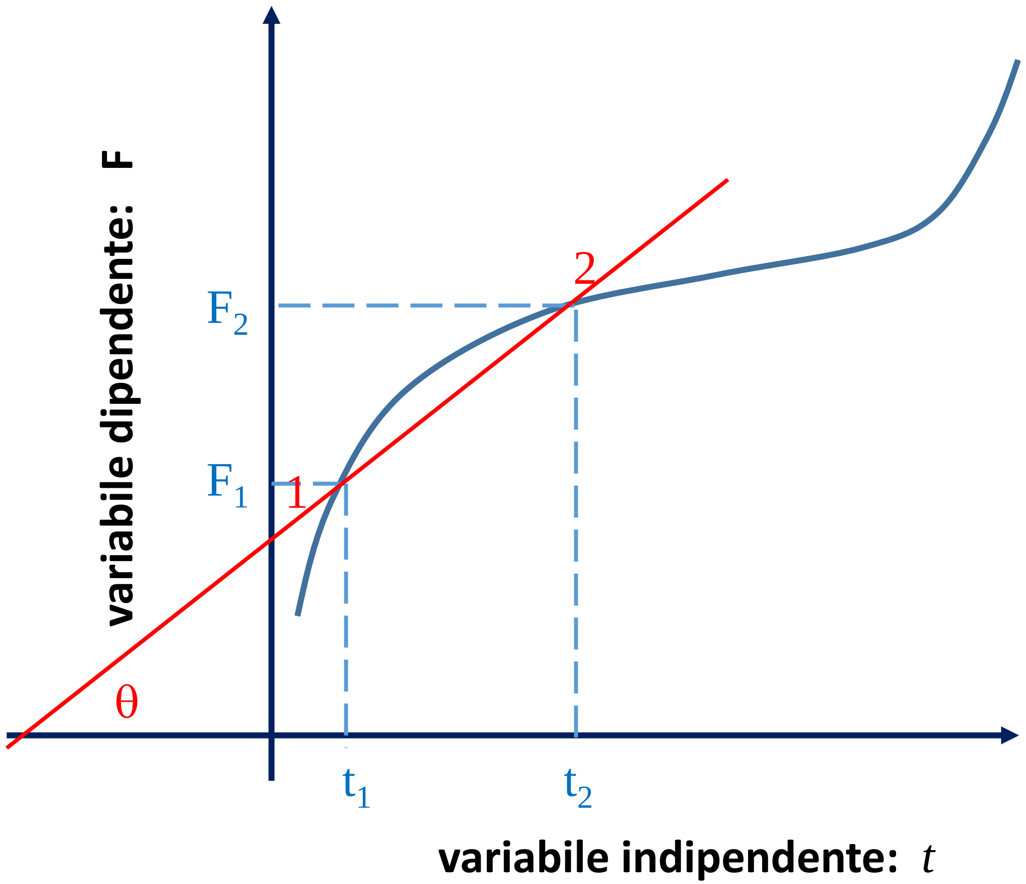
- Variazione della variabile indipendente: $\Delta t = t_2 - t_1$
- Variazione della variabile dipendente: $\Delta F = F_2 - F_1$

Significato geometrico del rapporto incrementale

- Ho definito **rapporto incrementale** la grandezza:

$$\frac{\Delta F}{\Delta t} \equiv \frac{F(t_2)-F(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{F_2-F_1}{t_2-t_1}$$

- N.B. Quando c'è una definizione, io uso il simbolo di «uguale con tre linee», ≡
- Visto che fa funzione ha una rappresentazione grafica, esiste un **significato grafico** del rapporto incrementale?
- Il grafico mostra che esiste una retta (detta **secante**) che attraversa il punto 1 e 2



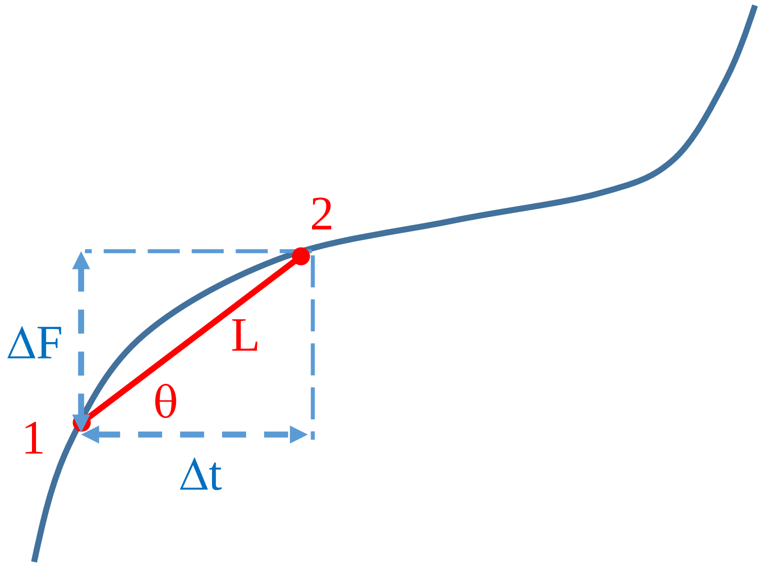
Significato geometrico del rapporto incrementale

- Cosa rappresenta geometricamente $\frac{\Delta F}{\Delta t} \equiv \frac{F(t_2)-F(t_1)}{t_2-t_1}$
- Se L è la «distanza» tra i punti 1 e 2, allora

$$\Delta F = L \sin\theta$$
$$\Delta t = L \cos\theta$$

- Quindi: **il rapporto incrementale rappresenta il valore della tangente dell'angolo θ che la retta che passa tra i punti 1 e 2 forma con l'asse orizzontale**:

$$\frac{\Delta F}{\Delta t} = \frac{L \sin\theta}{L \cos\theta} = \tan\theta$$



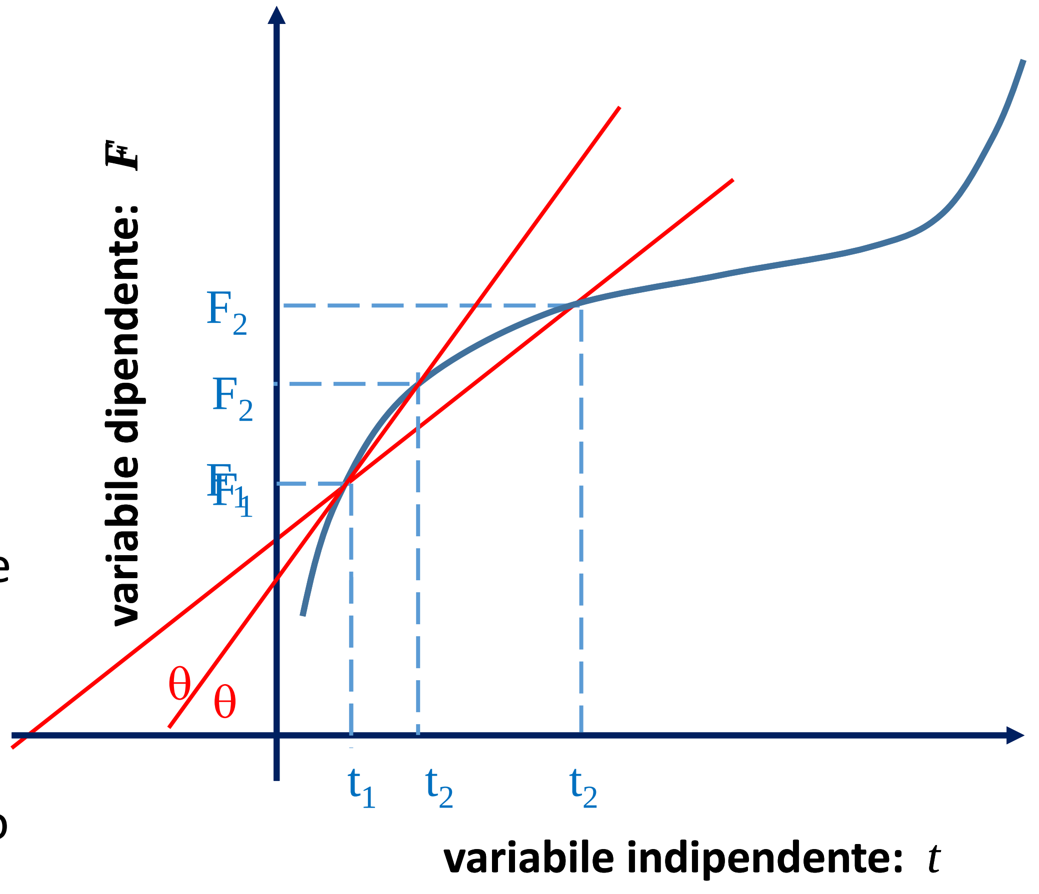
- Domanda: è corretta la relazione che abbiamo appena scritto?
- **Sì**, dal punto di vista matematico
- **No**, dal punto di vista fisico. Dal punto di vista fisico, dovrebbe essere presente una costante k numericamente uguale a 1 e con dimensioni fisiche pari a [dimensioni F]/[dimensioni t]:

$$\frac{\Delta F}{\Delta t} = k \cdot \tan\theta$$

- Spesso, ometteremo il termine «k» quando facciamo matematica

Passaggio al limite

- Cosa succede se considero il punto 2 più vicino a 1?
- Cambia la pendenza (=tangente dell'angolo) della retta secante, ma non sembra avvenire nulla di drammatico
- Cosa avviene se però facciamo tendere $\Delta t \ \rightarrow 0\ $?
- Ovviamente, anche $\Delta F \ \rightarrow 0$
- Per molto tempo, il rapporto «$\frac{0}{0}$» ha rappresentato un serio problema matematico, risolto col **calcolo differenziale** (Newton, Leibnitz)
- Voi capite immediatamente che dal punto di vista geometrico, non accade nulla di drammatico: nel caso che il punto $2 \ \rightarrow 1$, allora la **retta secante** diventa la **retta tangente** alla curva nel punto 1.
- La retta tangente è una retta come le altre: avrà anche essa una pendenza data da un angolo $\theta = \vartheta$ (ho cambiato leggermente il simbolo, notate) e la $\tan\vartheta$ assume (se non in casi particolari) un **valore finito**.



Limite del rapporto incrementale

- Se facciamo il limite del **rapporto incrementale**

$$\lim_{t_2 \to t_1} \left(\frac{F(t_2)-F(t_1)}{t_2-t_1} \right) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{F_2-F_1}{t_2-t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta t}$$

- Otteniamo la grandezza

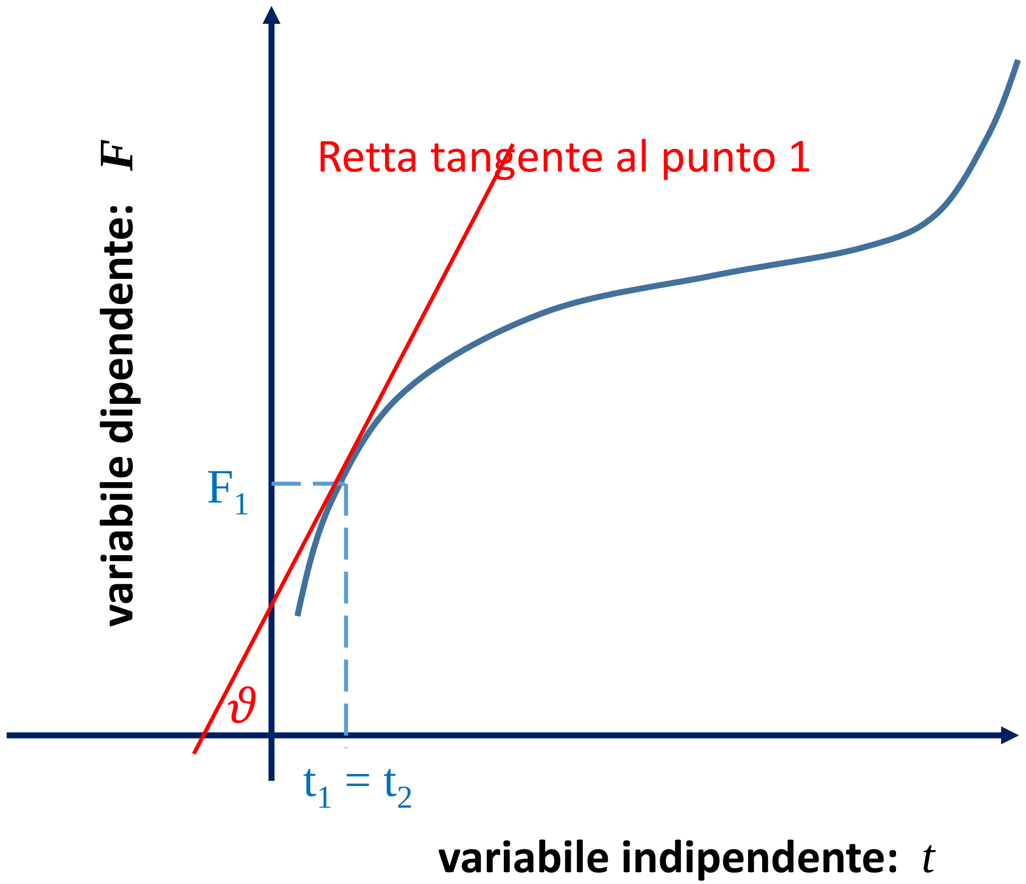
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta t} = k \cdot \tan \vartheta$$

- (ricordare: $k=1$ ma ha le dimensioni fisiche appropriate)

- Per abbreviare, chiamiamo «**il limite del rapporto incrementale $\frac{\Delta F}{\Delta t}$ nel punto 1 per Δt tendente a 0**» come **la derivata della funzione F nel punto 1.** In notazione:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta t} \equiv \frac{dF}{dt}$$

- Il significato geometrico della derivata della funzione nel punto 1 è che essa rappresenta la pendenza della retta tangente la curva nel punto.

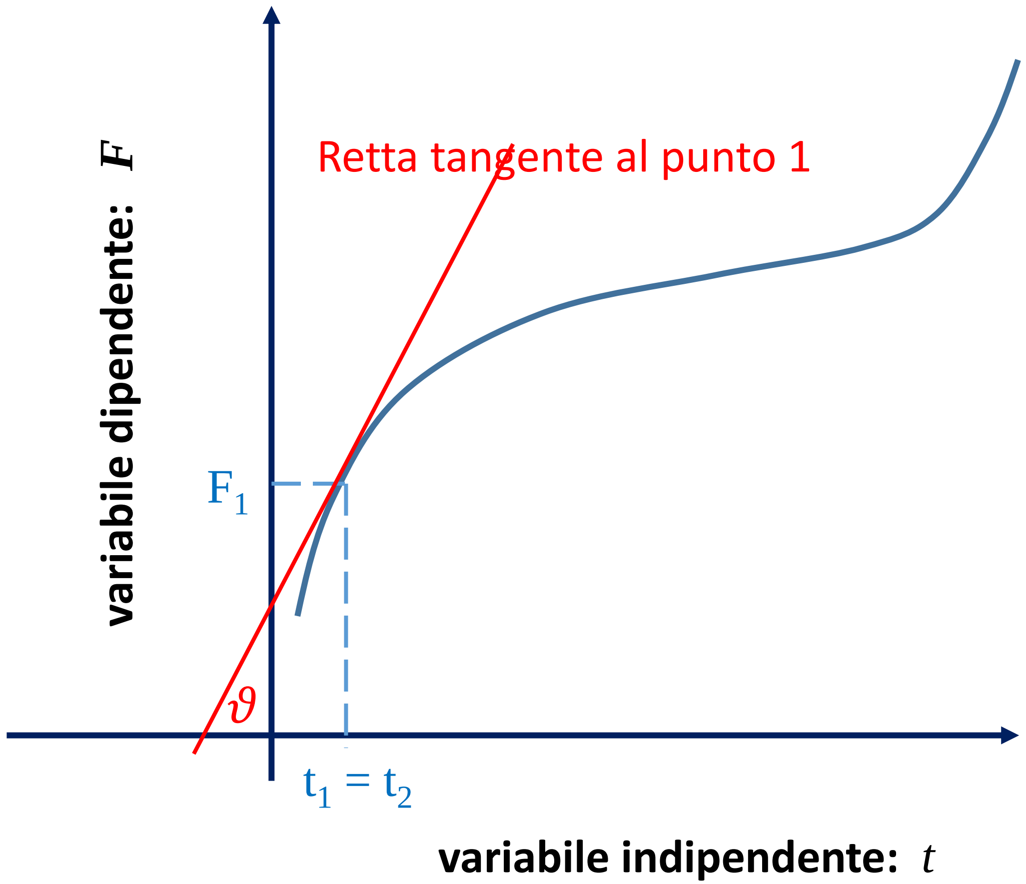


Limite del rapporto incrementale =derivata nel punto

- Anche se la notazione lo nasconde, noi abbiamo calcolato la derivata della funzione F in un punto specifico.
- Il significato è infatti: $\Delta t = \lim_{t_2 \to t_1} t_2 - t_1$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta t} \equiv \frac{dF}{dt}$$

- Talvolta, per pedanteria, per ricordare che siamo nel punto 1 possiamo scrivere $\left(\frac{dF}{dt}\right)_1$
- Ricordate: come il valore della funzione in un punto è un numero, il valore della derivata della funzione calcolata in un punto è un numero.
- Tuttavia, se la **funzione è derivabile nel dominio**, la derivata della funzione **è una nuova funzione**: la sua **funzione derivata**.



La rapidità di caduta del grave = velocità

- Dall [foglio elettronico](#) (rappresentazione grafica) avevamo verificato che la rapidità $\frac{\Delta z}{\Delta t}$ varia seguendo una linea retta
- La nuova grandezza misura in [m/s] assume il nome di velocità media nell'intervallo.
- Possiamo determinare in via analitica l'equazione che rappresenta questa grandezza in tutto il dominio?
- Occorre fare il limite del rapporto incrementale della legge oraria in ogni punto del dominio

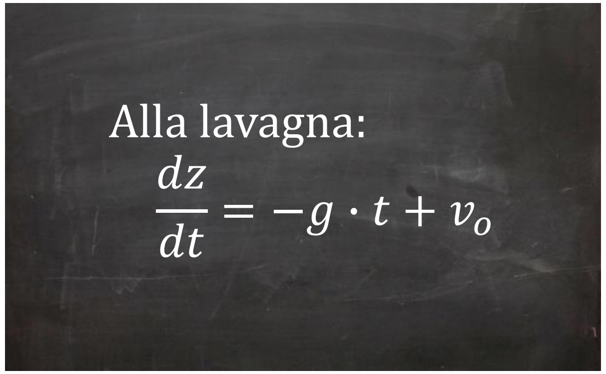
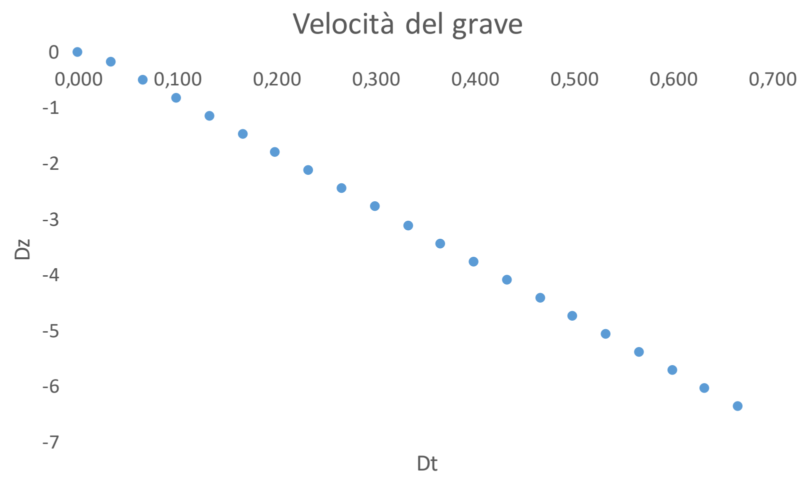


Foto #	t	z	Δz/Δt
0	0,000	2,271	0
1	0,033	2,266	-0,1634
2	0,067	2,249	-0,4902
3	0,100	2,222	-0,817
4	0,133	2,184	-1,1438
5	0,167	2,135	-1,4706
6	0,200	2,075	-1,7974
7	0,233	2,004	-2,1242
8	0,267	1,922	-2,451
9	0,300	1,830	-2,7778
10	0,333	1,726	-3,1046
11	0,367	1,612	-3,4314
12	0,400	1,487	-3,7582
13	0,433	1,351	-4,085
14	0,467	1,203	-4,4118
15	0,500	1,046	-4,7386
16	0,533	0,877	-5,0654
17	0,567	0,697	-5,3922
18	0,600	0,506	-5,719
19	0,633	0,305	-6,0458
20	0,667	0,092	-6,3726



La velocità

- La derivata della legge oraria (nell'esempio, lungo l'asse z) è definita **velocità**

$$v_z(t) \equiv \frac{dz}{dt}$$

- In realtà, ricordiamo che il moto avviene nello spazio 3-dimensionale. La variazione di posizione avviene talvolta lungo le tre coordinate (ad esempio, quelle cartesiane) contemporaneamente. Dunque, la grandezza che viene definita velocità è:

$$\vec{v} \equiv \boldsymbol{v} \equiv \begin{cases} v_x(t) \equiv \dfrac{dx}{dt} \\ v_y(t) \equiv \dfrac{dy}{dt} \\ v_z(t) \equiv \dfrac{dz}{dt} \end{cases}$$

- In maniera sintetica (vettoriale), il fatto che la velocità sia la derivata della legge oraria $\vec{r}(t)$

$$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt}$$

3) Derivata di una funzione

- Si è definito il limite del **rapporto incrementale** in un punto come la derivata della funzione in un punto

$$\lim_{t_2 \to t_1} \left(\frac{F(t_2) - F(t_1)}{t_2 - t_1} \right) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{F_2 - F_1}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta t} = \left(\frac{dF}{dt} \right)_1$$

- Nel caso in cui **esiste ed è finito il limite del rapporto incrementale** in tutti i punti del dominio della funzione, la **funzione si dice derivabile** (normalmente, le funzioni che usiamo in fisica sono derivabili).
- La derivata di una funzione varia con regolarità nel dominio: è quindi una nuova funzione (con dimensioni fisiche diverse da quelle di F) nel dominio della variabile t.
- SIMBOLO DI DERIVATA: Poiché la derivata di una funzione è una nuova funzione, dovremo trovare il modo di indicarla con un «nome». Troverete nei libri di Matematica diversi modi di indicare la derivata

$$DF(t)\ ;\ F'(t)\ ; \frac{dF}{dt}\ ; \ .....$$

- Io raccomando fortemente di **chiamare le derivate** come rapporto tra i simboli del rapporto incrementale infinitesimo:

$$\boxed{\frac{dF}{dt}}$$

Significato fisico delle funzioni derivate

- In fisica troviamo delle funzioni di variabile reali di cui vorremmo calcolare la variazione del rapporto incrementale rispetto la variabile dipendente
- Le derivate delle grandezze fisiche dipendenti da variabili reali sono nuove funzioni della variabile indipendente, che **rappresentano una diversa grandezza fisica**.
- Tali funzioni derivate le introduciamo non per fare un favore ai matematici, ma perché le funzioni derivate rappresentano nuove **grandezze fisiche osservabili**.
- Cosa sia una **grandezza fisica osservabile** lo vedrete in maniera approfondita nei corsi di Fisica.
- Ad esempio, se $z(t)$ rappresenta la posizione (in metri) di un oggetto che cade al variare del tempo (in secondi), la sua derivata $\frac{dz}{dt}$ rappresenta una nuova grandezza fisica che chiameremo velocità, $v_z\,(t)$, e misureremo in metri/secondo. La velocità è **osservabile** (per esempio, con un autovelox).
- La variazione della velocità $v_z\,(t)$ al variare del tempo è una nuova grandezza fisica che si chiama accelerazione, $a_z\,(t)$, si misura in metri/secondo^2 ed è una grandezza **osservabile**.
- La variazione dell'accelerazione è una grandezza che matematicamente si può calcolare, ma che non ha significato dal punto di vista della fisica (a meno di casi eccezionali, che vedrete nei corsi avanzati).
- Non perdiamo quindi tempo a calcolare derivate di accelerazioni.

Calcolo delle derivate delle funzioni fondamentali

- Il problema del calcolo delle derivate delle funzioni è un problema di matematica.
- Normalmente, il calcolo di una derivata è sempre possibile (oggi ci sono anche appositi programmi che lo fanno automaticamente
- Non dovete dunque preoccuparvi nel calcolare le derivate. E' una operazione puramente matematica e non ha nulla di interessante dal punto di vista della fisica.
- La cosa interessante è capire il significato fisico della nuova grandezza (la derivata)

$$z(t) = at^2 + 2bt \; - c$$

.....

.....

$$dz/dt = 2at \quad + 2b$$

Derivate delle funzioni fondamentali

- Le derivate delle funzioni più comuni sono le seguenti (le uniche che vi servono nel primo anno)
- Le formule sotto riportate verranno ricavate nel corso di Analisi Matematica
- Nelle formule sotto, $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \omega, .. n$ sono numeri reali costanti (non dipendono dalla variabile t)

$$F(t) = cost \qquad \frac{dF}{dt} = 0$$

$$F(t) = a \cdot t^n \qquad \frac{dF}{dt} = a \cdot n \cdot t^{n-1}$$

$$F(t) = a \cdot \cos \omega t \qquad \frac{dF}{dt} = -a\omega \cdot \sin \omega t$$

$$F(t) = a \cdot \mathrm{sen}\, \omega t \qquad \frac{dF}{dt} = a\omega \cdot \cos \omega t$$

$$F(t) = \mathrm{a}\, e^{bt} \qquad \frac{dF}{dt} = \mathrm{ab}\, e^{bt}$$

$$F(t) = \mathrm{a} \ln bt \qquad \frac{dF}{dt} = \frac{\mathrm{a}}{t}$$

- Non occorre impararle subito: tenete questo foglio (o altri simili) sotto mano
- Verificate che tutte le equazioni siano dimensionalmente corrette!

Alcune proprietà delle derivate

1. Una derivata di una funzione derivabile, $\frac{dF}{dt}$, è a sua volta una funzione derivabile e indicata come:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dF}{dt}\right) \equiv \frac{d^2F}{dt^2}$$

2. Nel caso in cui la funzione $F = g + h$ sia la somma di due funzioni g, h (omogenee dal punto di vista fisico) della stessa variabile t, allora:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dg}{dt} + \frac{dh}{dt}$$

3. Nel caso in cui la funzione F sia dato dal prodotto di due funzioni g, h (anche non omogenee), allora:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dg}{dt} \cdot h + g \cdot \frac{dh}{dt}$$

4. Derivata di funzione di funzione (funzione composta). Nel caso in cui abbiamo una funzione $x(t)$, e una seconda funzione che dipende da $F(x)$, avremo una funzione di funzione $F[x(t)]$ la cui derivata rispetto a (t) è data dall'espressione:

$$\frac{dF(x)}{dt} = \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

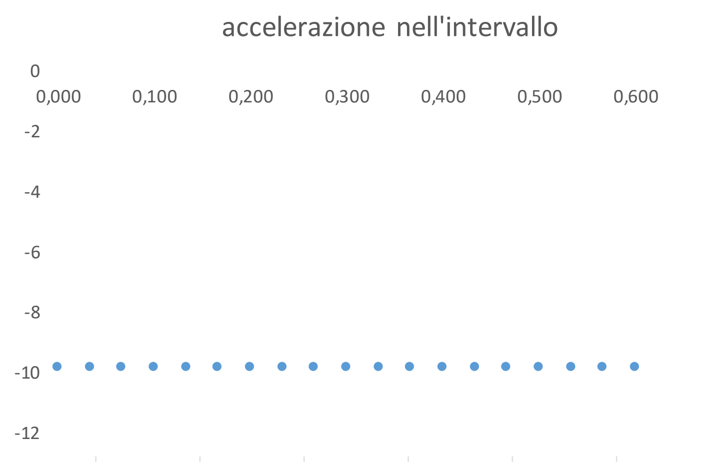
Anche queste proprietà (alcune usate nella pagina precedente) verranno mostrate nel corso di Analisi. Sono tuttavia relativamente semplici da ricavare, a partire dalla definizione di limite del rapporto incrementale.

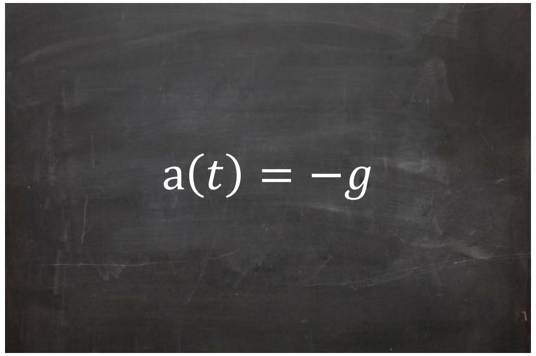
La rapidità della rapidità di caduta del grave

- Torniamo al foglio elettronico per vedere, usando 1), come calcolare la rapidità con cui varia la rapidità $\frac{\Delta z}{\Delta t}$.
- Anche in questo caso, notiamo una regolarità nei valori del rapporto $\frac{(\Delta z/\Delta t)}{\Delta t}$, la «rapidità della rapidità di caduta», misurata in [m/s^2]
- Tale grandezza viene chiamata «accelerazione media» nell'intervallo Δt.

- Nel passaggio al limite, **l'accelerazione** corrisponde alla derivata seconda della legge oraria.
- In meccanica classica, non è di alcuna utilità determinare una ulteriore rapidità (la derivata terza della legge oraria).

Foto #	t	z	Δz/Δt	a
0	0,000	2,271		
1	0,033	2,266	-0,1634	
2	0,067	2,249	-0,4902	-9,804
3	0,100	2,222	-0,817	-9,804
4	0,133	2,184	-1,1438	-9,804
5	0,167	2,135	-1,4706	-9,804
6	0,200	2,075	-1,7974	-9,804
7	0,233	2,004	-2,1242	-9,804
8	0,267	1,922	-2,451	-9,804
9	0,300	1,830	-2,7778	-9,804
10	0,333	1,726	-3,1046	-9,804
11	0,367	1,612	-3,4314	-9,804
12	0,400	1,487	-3,7582	-9,804
13	0,433	1,351	-4,085	-9,804
14	0,467	1,203	-4,4118	-9,804
15	0,500	1,046	-4,7386	-9,804
16	0,533	0,877	-5,0654	-9,804
17	0,567	0,697	-5,3922	-9,804
18	0,600	0,506	-5,719	-9,804
19	0,633	0,305	-6,0458	-9,804
20	0,667	0,092	-6,3726	-9,804





L’accelerazione

- La derivata della legge velocità (nell’esempio, lungo l’asse z) è definita **accelerazione**

$$a_z(t) \equiv \frac{dv_z}{dt}$$

- In realtà, ricordiamo che il moto avviene nello spazio 3-dimensionale. La variazione di velocità avviene talvolta lungo le tre coordinate (ad esempio, quelle cartesiane) contemporaneamente. Dunque, la grandezza che viene definita accelerazione è:

$$\vec{a} \equiv \boldsymbol{a} \equiv \begin{cases} a_x(t) \equiv \dfrac{dv_x}{dt} \\ a_y(t) \equiv \dfrac{dv_y}{dt} \\ a_z(t) \equiv \dfrac{dv_z}{dt} \end{cases}$$

- In maniera sintetica (vettoriale), il fatto che l’accelerazione sia la derivata della velocità $\vec{v}(t)$ o la derivata seconda della legge oraria $\vec{r}(t)$:

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} \quad ; \quad \vec{a} \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

Le derivate e il problema diretto della cinematica

- La **cinematica studia il moto dei corpi**, e intende ottenere la legge oraria, ossia le tre funzioni che descrivono il moto nello spazio in funzione del tempo;

$$\vec{r}(t) \equiv [x(t), y(t), z(t)]$$

- *Notate la definizione di una* ***grandezza fisica*** *composta da tre componenti*: **un vettore**
- Nota la legge oraria, si può ricavare il vettore velocità:

$$\vec{v}(t) \equiv \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \equiv \left[\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt}\right] = [v_x(t), v_y(t), v_z(t)]$$

- E dal vettore velocità si ricava il vettore accelerazione

$$\vec{a}(t) \equiv \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \equiv \left[\frac{dv_x(t)}{dt}, \frac{dv_y(t)}{dt}, \frac{dv_z(t)}{dt}\right]$$

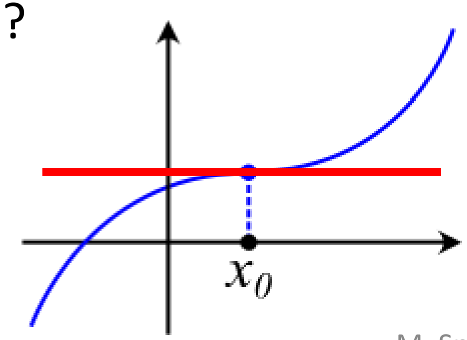
- Che corrisponde anche alla derivata seconda della legge oraria:

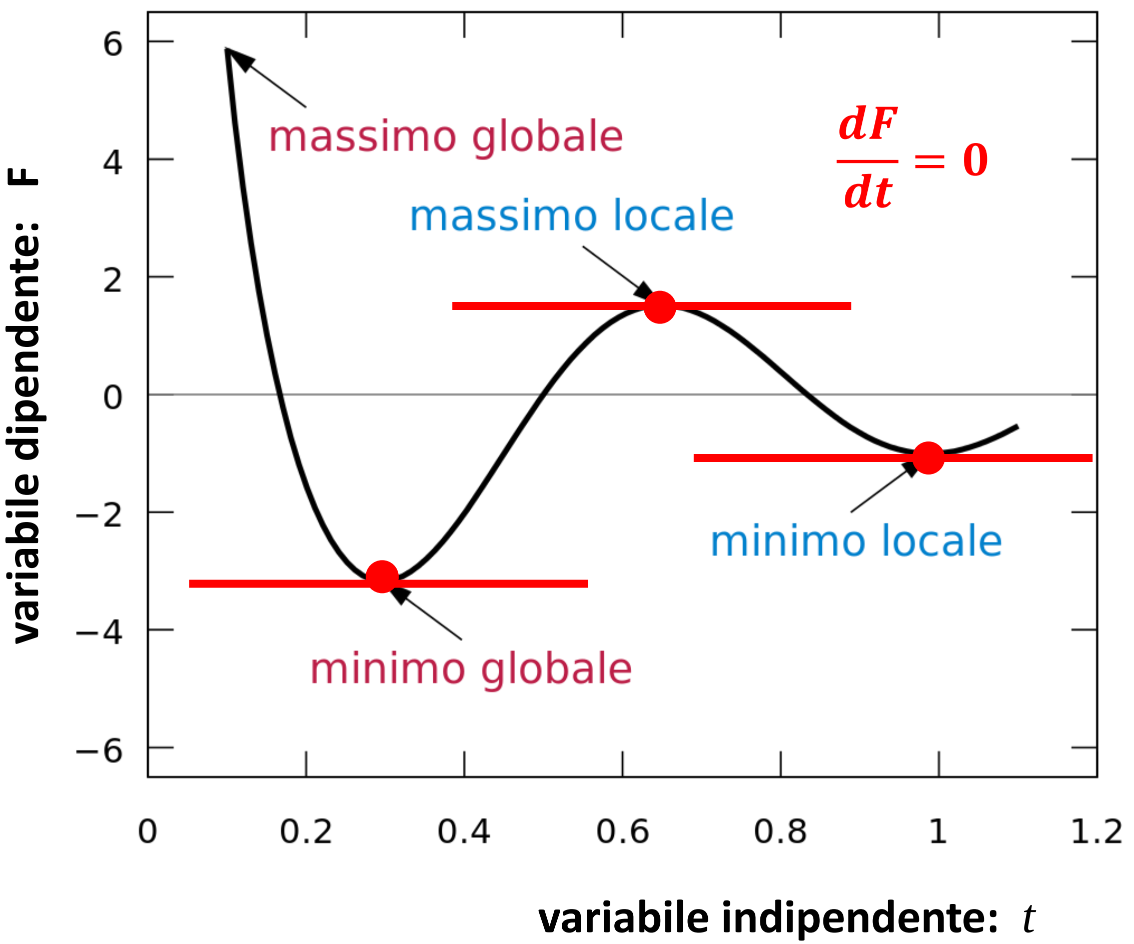
$$\vec{a}(t) \equiv \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} \equiv \left[\frac{d^2x(t)}{dt^2}, \frac{d^2y(t)}{dt^2}, \frac{d^2z(t)}{dt^2}\right]$$

- <u>**Il problema fisico è solo quello della determinazione sperimentale della legge oraria. Il resto è semplice matematica**</u>

4) Massimo e minimo di una funzione

- Se osserviamo una funzione, possiamo renderci conto che esistono dei punti particolari (a parte gli estremi) in cui la funzione può assumere massimo o minimo (locale o globale)
- Ricordando la definizione geometrica della tangente, potete verificare che **condizione necessaria perché la funzione presenti un punto di massimo o minimo** (escluso gli estremi) **è che la derivata della funzione nel punto di massimo (o minimo) sia nulla**.
- Avete idea perché la condizione è necessaria ma non sufficiente?





Problemi di massimo e minimo

- In fisica, sono molto frequenti problemi di massimo e minimo
- **Ad esempio**: supponiamo che la legge oraria di un oggetto lanciato verso l'alto dal suolo sia $z(t) = -\frac{1}{2}g \cdot t^2 + v_o t$ con $g = 9.80$ m/s² e v_o=3.12 m/s. Determinate quale è l'altezza massima raggiunta dall'oggetto.
- Usando brutalmente la matematica: il massimo si ha quando la derivata di $z(t)$ (ossia la sua velocità $v(t)$) si annulla, cioè a $t^* = v_o/g$; quindi il massimo della quota corrisponde a $z(t^*) = -\frac{1}{2}g \cdot t^{*2} + v_o t^*$

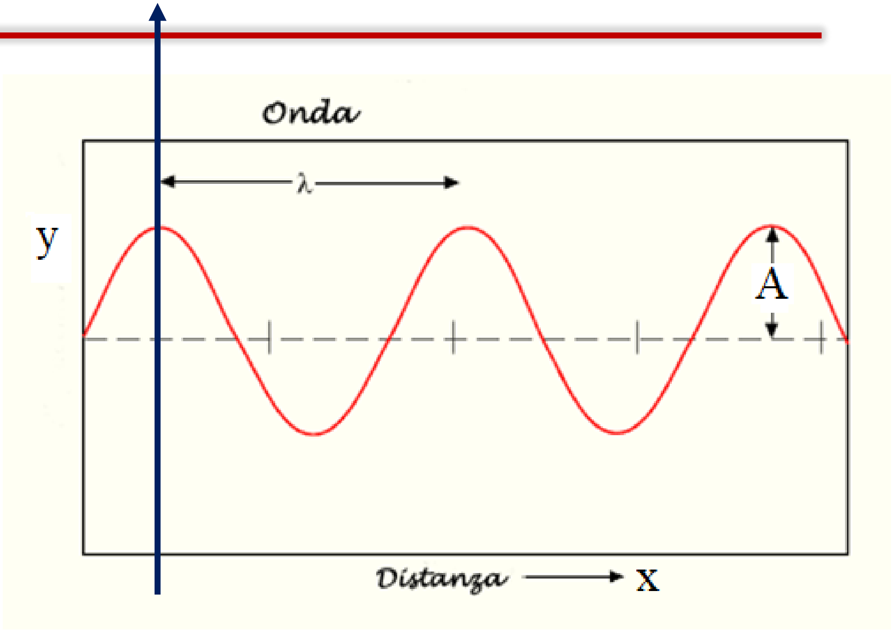
- Dal punto di vista fisico: quando raggiunge il punto più alto, la velocità (che decresceva) si annulla e inizia a crescere
- Troverete un numero elevatissimo di casi di «massimo e minimo» risolvibili annullando la derivata prima di una funzione.
- Troverete anche un modo diverso di affrontare la meccanica Newtoniana minimizzando una funzione (meccanica analitica)

5) Funzioni di più variabili

- Prendiamo in caso in cui avete un fenomeno fisico (ad esempio: **un'onda in un lago**) che può variare **sia** nello spazio **che** nel tempo.
- Se fate una fotografia (=istante di tempo fissato) del fenomeno potete ad esempio descrivere l'ampiezza dell'onda con la variabile y (in metri). L'ampiezza massima vale A (m).
- Due creste (massimi) si trovano a una distanza definita λ (in metri) lungo la direzione x, chiamata lunghezza d'onda
- Potrete facilmente convincervi che la funzione che descrive l'ampiezza dell'onda al variare della distanza x (a t fissato) è

$$y(x) = \mathrm{A} \cdot \cos \frac{2\pi x}{\lambda} = \mathrm{A} \cdot \cos kx$$

- qui ho usato la notazione $\mathrm{k} = \frac{2\pi}{\lambda}$
- Notate: la funzione coseno è una funzione pari per cui $\cos kx = \cos(-kx)$.



Studierete in dettaglio questo fenomeno nel corso di FENOMENI ONDULATORI

Funzioni di più variabili: tempo e spazio

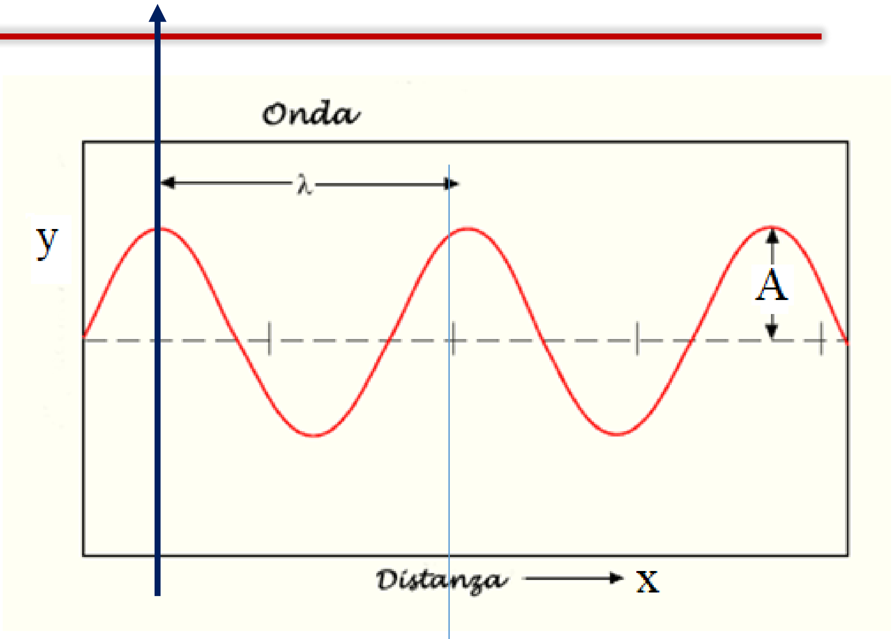
- Adesso, consideriamo un punto specifico nell'onda, e osserviamo come varia col tempo.
- Vediamo, che il punto ondeggia su e giù in un certo intervallo di tempo T (che occorre perché si ripresentino due massimi)
- Potrete facilmente convincervi che la funzione che descrive l'ampiezza dell'onda in una certa posizione x definita al variare del tempo t è dato da

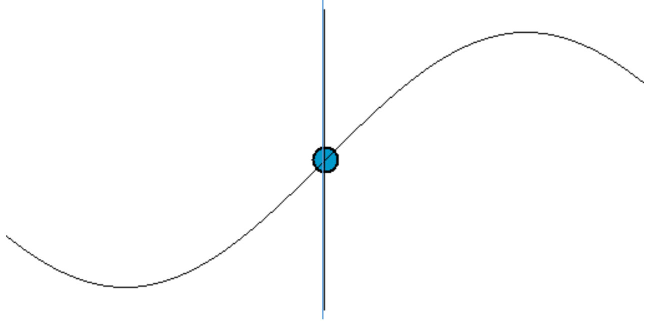
$$y(t) = \mathrm{A} \cdot \cos \frac{2\pi t}{T} = \mathrm{A} \cdot \cos \omega t$$

- qui ho usato la notazione $\omega = \frac{2\pi}{T}$
- Dunque, la funzione y varia sia con la distanza che col tempo.
- Possiamo riassumerla in una espressione compatta:

$$y(x,t) = \mathrm{A} \cdot \cos(\omega t - kx)$$

- Questa si chiama **equazione dell'onda progressiva** ed è un esempio di funzione di due variabili





6) Derivate parziali

- Di una funzione di due variabili $y(x,t) = \mathrm{A} \cdot \cos(\omega t - kx)$, si possono studiare le variazioni mantenendo il tempo fissato, oppure osservando il fenomeno a una determinata posizione.
- Possiamo quindi calcolarne la derivata mantenendo il tempo t (o la coordinata x) costante.
- Tenendo t fisso, posso calcolare:

$$\left(\frac{dy(x,t)}{dx}\right)_{t=costante} \equiv \frac{\partial y}{\partial x}$$

- Oppure, tenendo x fisso, posso calcolare:

$$\left(\frac{dy(x,t)}{dt}\right)_{x=costante} \equiv \frac{\partial y}{\partial t}$$

- Questa notazione con le «d» distorte (∂) viene chiamata «**derivata parziale**»
- Non spaventatevi: una derivata parziale non comporta nessuno sforzo aggiuntivo rispetto a una derivata «normale»: basta considerare «variabile» una sola grandezza.
- **Esercizio**: provare a determinare la derivata parziale rispetto a x (oppure, rispetto a t) della equazione dell'onda progressiva sopra riportata

Perché impaurirci ora con le «derivate parziali»?

- I casi in cui è importante applicare l'uso delle derivate parziali non si limitano solo a quelli in cui vogliamo studiare contemporaneamente una funzione di una coordinata e del tempo.
- Lo studio della cinematica e della dinamica a una sola variabile (come spesso avete fatto alle superiori) è puramente fittizio. Il moto avviene nello «spazio di Newton» 3-Dimensionale
- Normalmente quindi il moto avviene su una **traiettoria**, che rappresenta una equazione in funzione delle tre coordinate spaziali. Altre grandezze, come ad esempio **l'energia potenziale**, sono funzioni delle tre coordinate spaziali.
- Esistono quindi funzioni che dipendono dalle 3 coordinate: $F(x, y, z)$
- In tal caso, è spesso necessario calcolare le tre derivate parziali:

$$\frac{\partial F}{\partial x};\frac{\partial F}{\partial y};\frac{\partial F}{\partial z}$$

- Per avere una notazione compatta, questa «triplice operazione di derivazione» viene scritta:

$$\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x};\frac{\partial}{\partial y};\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

- Il nuovo oggetto $\vec{\nabla}$ è un **operatore**, e si chiama «nabla». Lo incontreremo nell'energia potenziale

Teorema di Schwarz

- Le funzioni di più variabili reali le studierete nel corso di Analisi Matematica 2
- Concettualmente, le derivate parziali non presentano difficoltà particolari
- Tuttavia, c'è un importante teorema (il teorema di Schwarz) il cui enunciato conviene anticipare.
- Il **teorema di Schwarz** afferma che (sotto opportune ipotesi, normalmente sempre rispettate da funzioni della fisica) **l'ordine con il quale vengono eseguite le derivate parziali in una derivata mista di una funzione a variabili reali è ininfluente.**
- Se $F = F(x, y)$, questo si traduce nella relazione:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

- Non daremo ovviamente la dimostrazione. Provate a verificarne la validità nel caso dell'onda progressiva
- **Il Teorema di Schwarz verrà utilizzato nel corso di Meccanica per determinate sotto quali condizioni una forza si può classificare come conservativa.**

7) Il problema inverso della «differenziazione»

- Abbiamo visto che se conosciamo una generica funzione $\mathrm{F}(t)$ possiamo sempre calcolarne la sua derivata prima

$$\left(\frac{dF}{dt}\right) \equiv f(t)$$

- Ad esempio, nel caso della funzione legge oraria $\mathrm{z}(t)$, la sua derivata prima $\frac{dz}{dt} = v_z(t)$ corrisponde alla funzione velocità (componente z) del corpo.

Possiamo ora chiederci:

1. Se conosciamo la funzione $f(t)$, **è possibile conoscere la funzione $\mathbf{F}(\boldsymbol{t})$ la cui derivazione darebbe proprio la funzione che conosciamo?** La funzione cercata $\mathrm{F}(t)$ verrebbe chiamata la **funzione integrale**.
2. Qual è il **significato geometrico** della funzione integrale? (ossia, l'analogo della «tangente» nel caso delle derivate)
3. Come si **possono ricavare** le funzioni integrali?

Forme differenziali

- Nella pagina precedente abbiamo ripresentato la nuova modalità suggerita per indicare le derivate

$$\left(\frac{dF}{dt}\right) \equiv f(t)$$

- Questo modo è estremamente utile perché ora, formalmente (* ossia verrà rigorosamente mostrato nel corso di Analisi matematica che le quantità differenziali possono essere maneggiate con le regole algebriche), possiamo scrivere:

$$dF = f(t) \cdot dt$$

- Le due grandezze dF e dt non hanno senso «reale», in quando sono grandezze infinitesime che si chiamano **forme differenziali**: essendo infinitesime, esse non hanno misura.
- Tuttavia, «***sommando un numero infinito di tali pezzettini***» si ottiene una grandezza finita.
- Occorre un modo di indicare simbolicamente la frase «***somm….ettini***». Questa notazione venne introdotta dal filosofo e matematico tedesco Leibnitz, contemporaneo di Newton:

$$\int dF \equiv \int f(t) \cdot dt$$

8) Integrali indefiniti

- La notazione $\int dF$ potrebbe essere letta «*somma dei termini che prima erano stati scomposti*»
- Cioè, l'operazione di integrazione (simboleggiata con « $\int$ ») è l'operazione inversa di derivazione d , in maniera analoga a «*fate il quadrato di una grandezza di cui avete estratto la radice quadrata*».
- Quindi, come possiamo scrivere: $F = \left(\sqrt{F}\right)^2$ (Nota: con alcune attenzioni), allo stesso modo:

$$F \equiv \int dF$$

- Per cui, definiamo l'**integrale indefinito** la grandezza

$$F(t) \equiv \int f(t)\, dt$$

- La funzione $F(t)$ viene anche chiamata «**la funzione primitiva**» di $f(t)$.
- Notate che se la funzione $F(t)$ è la funzione primitiva, **anche la funzione $\boldsymbol{F(t)+c}$ è primitiva, se $\boldsymbol{c}$ è una costante rispetto a $\boldsymbol{t}$** (sapreste mostrare il perché?).
- Quindi: **l'integrale indefinito è matematicamente determinato a meno di una costante additiva**

Quali sono alcune funzioni primitive?

- Per conoscere alcune funzioni primitive, basta ricordare alcune funzioni derivate
- Mentre in generale esiste una «macchina» per ottenere derivate, per gli integrali la situazione è leggermente più complessa. Esistono comunque dei metodi che imparerete nei corsi di analisi
- Le funzioni primitive di alcune funzioni le conoscete: basta tornare alla pag.

$$F(t) = cost \quad \leftarrow \quad f(t) = 0$$

$$F(t) = a \cdot t^n \quad \leftarrow \quad f(t) = a \cdot n \cdot t^{n-1}$$

$$F(t) = a \cdot \cos \omega t \quad \leftarrow \quad f(t) = -a\omega \cdot \sin \omega t$$

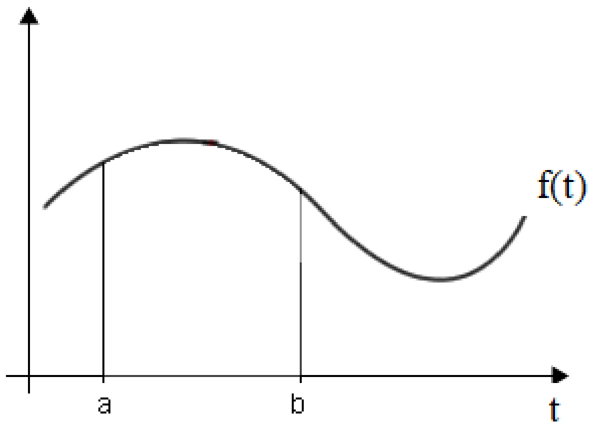
$$F(t) = a \cdot \operatorname{sen} \omega t \quad \leftarrow \quad f(t) = a\omega \cdot \cos \omega t$$

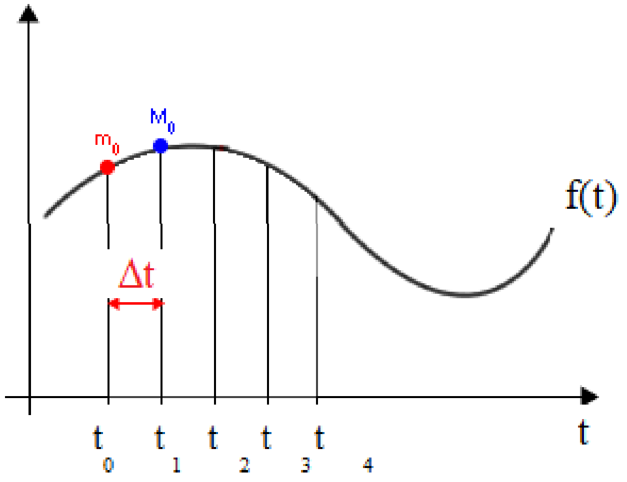
$$F(t) = \mathrm{a}\, e^{bt} \quad \leftarrow \quad f(t) = \mathrm{ab}\, e^{bt}$$

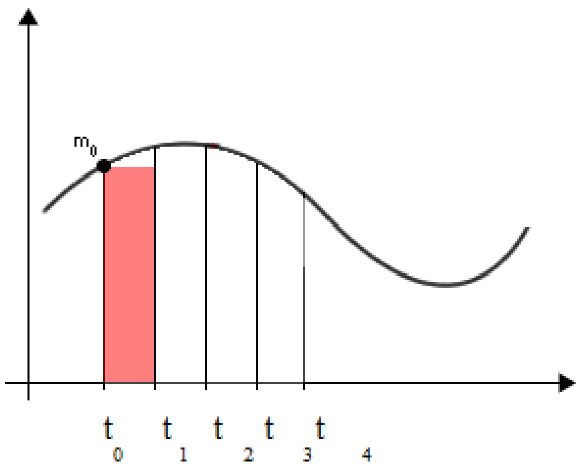
$$F(t) = \mathrm{a} \ln t \leftarrow \; f(t) = \frac{\mathrm{a}}{t}$$

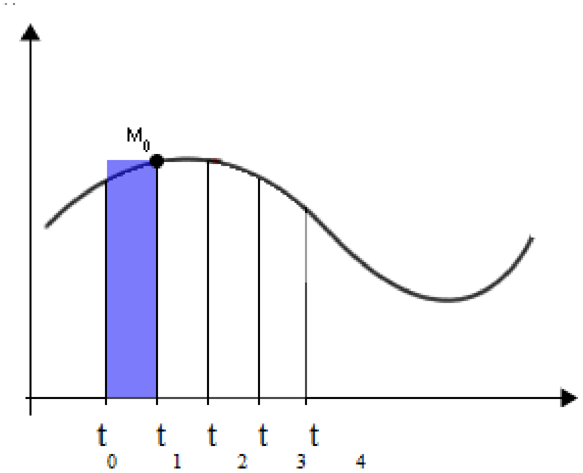
Significato geometrico della funzione integrale

- Consideriamo ora la funzione $f(t)$ in un intervallo tra «a» e «b», [a,b]
- Come possiamo calcolare l' «*area*» sottesa dalla curva tra [a,b] ?
- Suddividiamo la base in intervalli più piccoli $[t_i, t_{i+1}]$ di ampiezza costante Δt.
- In corrispondenza di ciascun intervallo la funzione ha un valore minimo m_i e un valore massimo M_i.
- Quindi, per ogni intervallo $[t_i, t_{i+1}]$ è possibile calcolare l'area minima= area del rettangolo fino al valore minimo $m_i\Delta t$ e l'area massima = area del rettangolo fino al valore massimo $M_i\Delta t$.



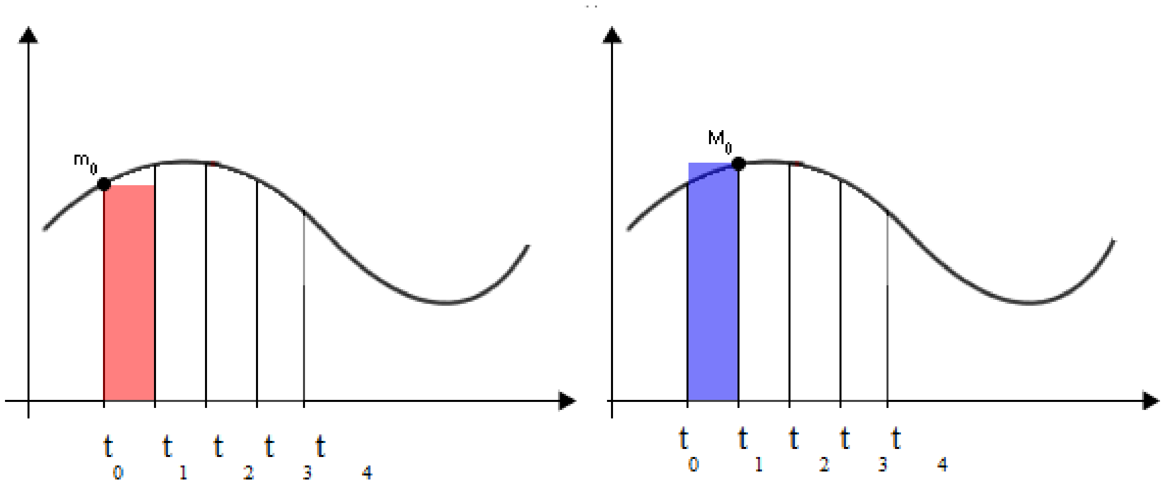






Significato geometrico della funzione integrale

- Consideriamo ora la grandezza $f(t_i) \cdot \Delta t$.
- Chiaramente, se approssimiamo $f(t_i)$ con m_i otteniamo l'area minima, mentre se approssimiamo con M_i otteniamo l'area massima
- Attenzione: l'***area*** di cui si parla è «l'area sottesa dalla curva rispetto alla variabile indipendente», e NON SI MISURA (generalmente) in m^2!



- Sommando tutte le aree parziali nell'intervallo [a,b] otterremo l'area sottesa dalla curva nell'intervallo,

$$A = \sum_{i=0}^{n} f(t_i) \cdot \Delta t$$

- approssimata al più piccolo valore o al valore più grande (a seconda se scegliamo m_i o M_i).
- Nel caso in cui prendiamo intervalli infinitesimi, cioè $\Delta t \to dt$ allora la differenza tra Area massima o minima tenderà a zero (poiché ovviamente la differenza tra m_i e M_i tende a zero. In simboli

$$A = \int_a^b f(t) \cdot dt$$

9) Integrale definito

- La grandezza che abbiamo appena costruito rappresenta **l'integrale definito** della grandezza $f(t)$

$$A = \int_a^b f(t) \cdot dt$$

- Il suo significato geometrico è l'area sottesa dalla curva $f(t)$ tra il punto a e b.
- Le dimensioni fisiche di A indicate con $[A]$ sono quelle di $[f] \cdot [t]$. Ad esempio, se la grandezza è l'accelerazione e t è il tempo, le dimensioni dell'integrale definito sono quelle di una velocità.
- In generale, l'integrale definito è un numero. Poiché il suo valore dipende dagli estremi di integrazione (ossia dalla scelta dei punti iniziali e finali [a,b]) in generale:

$$A = A(b) - A(a) = \int_{t_0=a}^{t_1=b} f(t) \cdot dt$$

- Questo significa che variando gli estremi d'integrazione variamo il valore dell'area sottesa dalla curva.
- Ricorda: abbiamo chiamato i punti «a» e «b» due valori arbitrari della variabile generica «t».
- Questo secondo modo di vedere gli integrali è legato allo sviluppo nato da Newton.
- (Newton e Leibnitz si scontrarono per vie legali per la paternità della scoperta. Avevano entrambi ragione, ma vinse Newton).

Rapporto tra integrale definito e funzione primitiva

- Abbiamo definito **integrale indefinito** (n.b. ricordate che possiamo aggiungere qualsiasi costante c)

$$F(t) + c \equiv \int f(t)\, dt$$

- Mentre abbiamo definito l'area sottesa dalla curva $f(t)$ tra [a,b] come integrale definito:

$$A = A(t) - A(t_o) = \int_{t_0}^{t} f(t) \cdot dt$$

- Supponiamo ora di aver fissato una volta per tutte il valore iniziale t_o, mentre il valore finale t è arbitrario. Allora possiamo dire che $A(t_o)$ non è che una costante (- c), mentre $A(t)$ può variare ed è una funzione di t.
- Quindi possiamo scrivere che

$$A(t) - A(t_o) = \int_{t_0}^{t} f(t) \cdot dt = F(t) + c$$

- In altri termini: se $F(t)$ è la funzione primitiva di $f(t)$, allora l'integrale definito è dato dalla variazione della primitiva tra gli estremi di integrazione

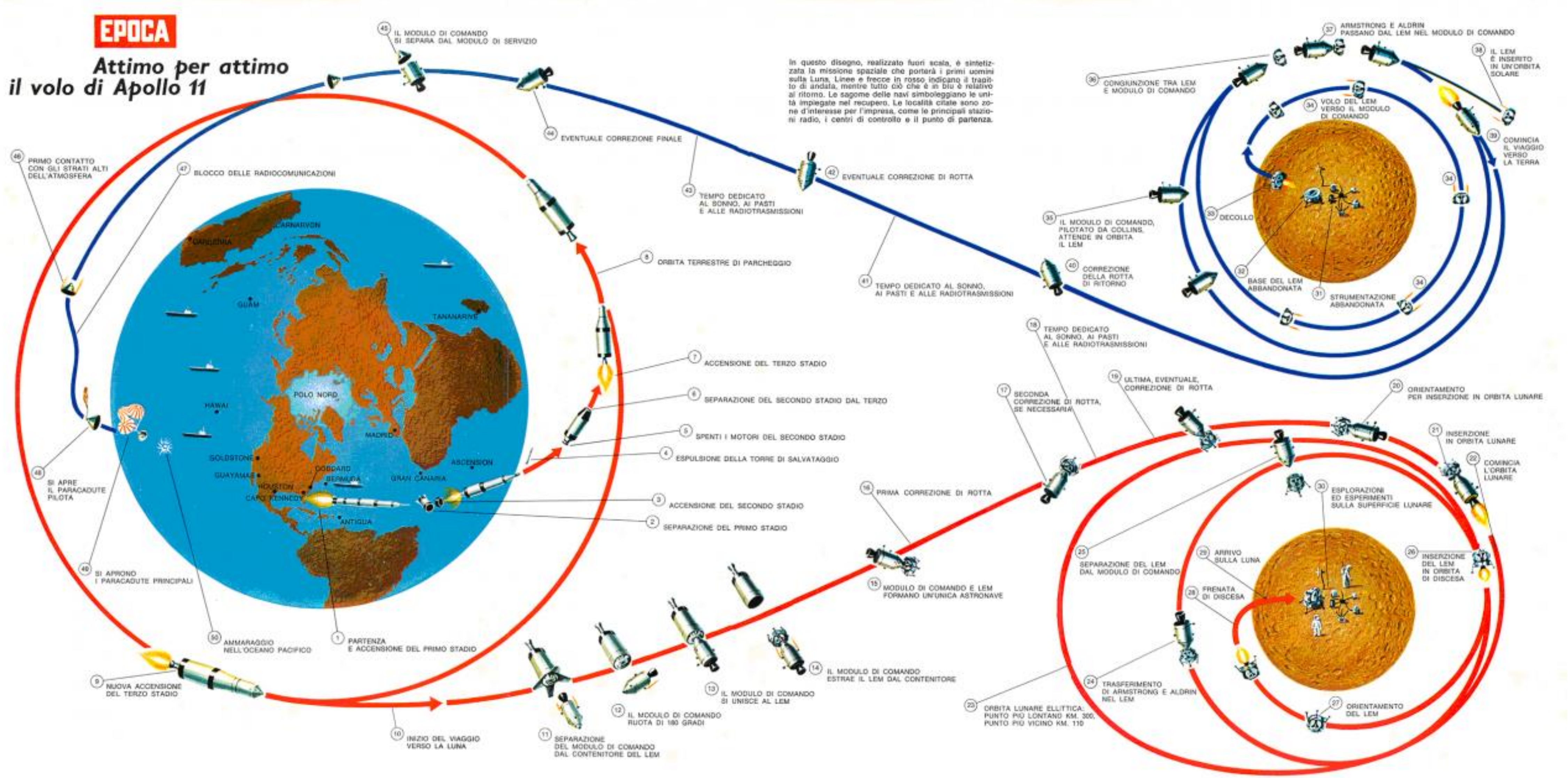
Significato fisico della funzione integrale

- L'operazione di derivazione è strettamente connesso col problema diretto della cinematica
- Una funzione primitiva di una grandezza fisica (rispetto a una certa variabile) è un'altra funzione (le dimensioni fisiche sono diverse) e ha un diverso significato fisico
- Ad esempio, la funzione primitiva della grandezza **accelerazione** è la grandezza **velocità** ;
- La funzione primitiva della grandezza **velocità** è la **legge oraria** ;

> - L'accelerazione $\vec{a}(t)$ è la derivata prima della velocità $\vec{v}(t)$. Quindi, $\boldsymbol{\vec{v}(t)}$ **è la funzione primitiva di** $\boldsymbol{\vec{a}(t)}$
> - La velocità $\vec{v}(t)$ è la derivata prima della legge oraria $\vec{r}(t)$. Quindi, $\boldsymbol{\vec{r}(t)}$ **è la funzione primitiva di** $\boldsymbol{\vec{v}(t)}$

- La funzione primitiva della legge oraria non ha significato fisico (non è una grandezza **osservabile**)
- Incontrerete per la prima volta gli integrali in fisica quando affronterete quello che si chiama **«il problema inverso della cinematica»,** **ossia ricavare la legge oraria quando è nota l'accelerazione**
- Se conoscete l'accelerazione, tramite due integrazioni potrete predire come si muove un corpo (come si è mosso nel passato o come si muoverà nel futuro)

Una applicazione del problema inverso della cinematica



Gli «integrali» e il problema inverso della cinematica

- Scopo della cinematica è la determinazione della legge oraria. Noto il vettore: $\vec{r}(t) \equiv [x(t), y(t), z(t)]$ possiamo ricavare la velocità $\vec{v}(t)$ [la derivata prima di $\vec{r}(t)$] e l'accelerazione $\vec{a}(t)$ [la derivata prima di $\vec{v}(t)$, ossia la derivata seconda di $\vec{r}(t)$].
- Supponiamo di conoscere l'accelerazione: allora

$$\vec{v}(t) - \vec{v}(t_o) = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t) \cdot dt$$

- Se **conosciamo la velocità ad un certo istante di tempo** (velocità iniziale), allora nota l'accelerazione conosciamo la velocità per ogni istante di tempo, se siamo in grado di calcolare un integrale!
- Se conosciamo la velocità $\vec{v}(t)$, allo stesso modo:

$$\vec{r}(t) - \vec{r}(t_o) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t) \cdot dt$$

- Se **conosciamo la posizione ad un certo istante di tempo** (iniziale), allora nota la velocità la posizione $\vec{r}(t)$ è nota per ogni istante di tempo, purché siamo in grado di calcolare un integrale!
- Il problema delle condizioni iniziali è un problema osservativo molto importante

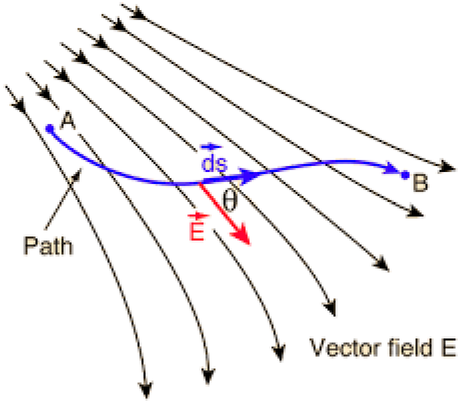
Altri «integrali» che vedrete

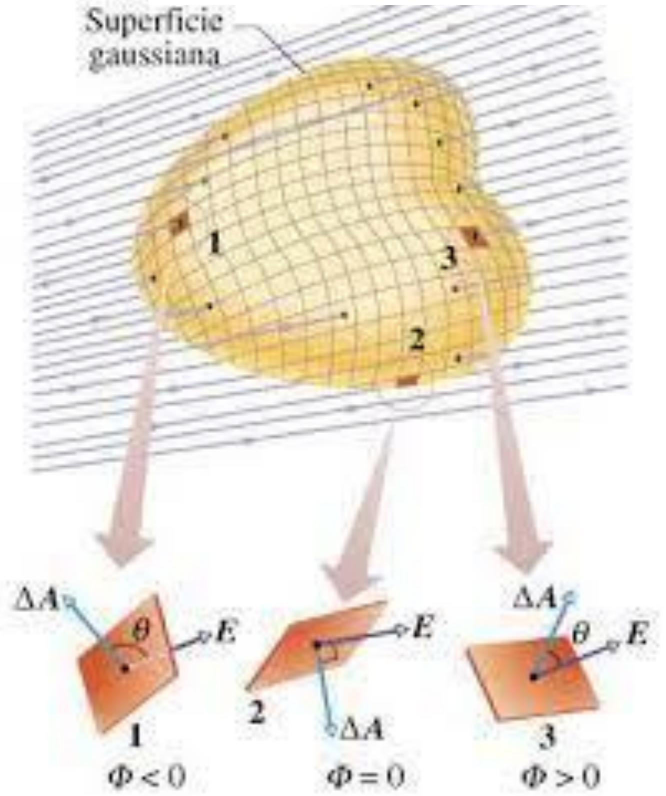
- Quello appena mostrato è appena l'inizio dell'uso che farete dell'integrale nei corsi di Fisica
- Troverete altri «integrali»: integrali di linea, di superficie e di volume
- Integrali che coinvolgono grandezze vettoriali: quello che serve a definire il lavoro di una forza

$$W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

- Il **flusso** attraverso una **superficie chiusa** (talvolta chiamata gaussiana) di una grandezza vettoriale

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{a}$$





10) Primo cenno sulle equazioni differenziali

- Avrete spesso sentito parlare di «leggi fisiche» e (correttamente) le immaginate come equazioni/ relazioni matematiche. Come nasce una «legge fisica», ossia come è possibile rendere in termini matematici delle osservazioni empiriche sul comportamento della natura?
- Ci sono (ovviamente) molti modi per ricavare una legge fisica, che imparerete nel corso degli studi.
- Alcune leggi fisiche sono **esatte**, altre **approssimano** la realtà in un certo dominio di valori
- Una legge fisica (anche se nasce da una intuizione) deve essere confermata sperimentalmente
- Molto spesso, una legge fisica nasce da una tecnica matematica basata sulle **equazioni differenziali**. Cosa sono le **equazioni differenziali?**
- Conoscete già da molti anni le **equazioni algebriche**: corrispondono ad un polinomio uguagliato a zero. Il grado di tale polinomio è anche il grado dell'equazione.
- In virtù del teorema fondamentale dell'algebra ogni equazione di grado n ammette esattamente n soluzioni nel **campo complesso**. (Ahi! Complicazione matematica dei numeri complessi!)
- Ad esempio, l'equazione $r^2 - 4 = 0$ ha due soluzioni reali: $r_1 = 2$ e $r_2 = -2$.

Primo cenno sulle equazioni differenziali a una variabile

- Un'**equazione differenziale** è un'equazione che lega una **funzione** (la variabile dipendente) alle sue derivate rispetto la variabile indipendente. Esempio di equazione differenziale è la seguente:

$$m\frac{dv}{dt} - \beta v = -mg$$

- Questa equazione definisce come si muove un oggetto che cade soggetto al suo peso e in presenza di attrito (meccanica). L'attrito è parametrizzato con una formula che dipende dalla velocità del corpo.
- In questo caso, quello che viene cercato non è un numero (reale o complesso, come nel caso di equazioni algebriche) ma una **funzione**: la funzione che soddisfa l'equazione differenziale
- Nell'esempio sopra riportato, viene cercata la funzione $v(t)$ tale che la sua derivata prima (moltiplicata per la costante m) meno la funzione moltiplicata per β, è uguale a una costante $(-g)$.
- Ovviamente, ci sono delle tecniche matematiche che dovrete imparare che servono per risolvere le equazioni differenziali.
- Un importantissimo aiuto è ricordare di scrivere le derivate come rapporti di forme differenziali (ad esempio, non ho scritto a (accelerazione) per $\mathrm{d}v/\mathrm{dt}$, anche se sono la stessa cosa.

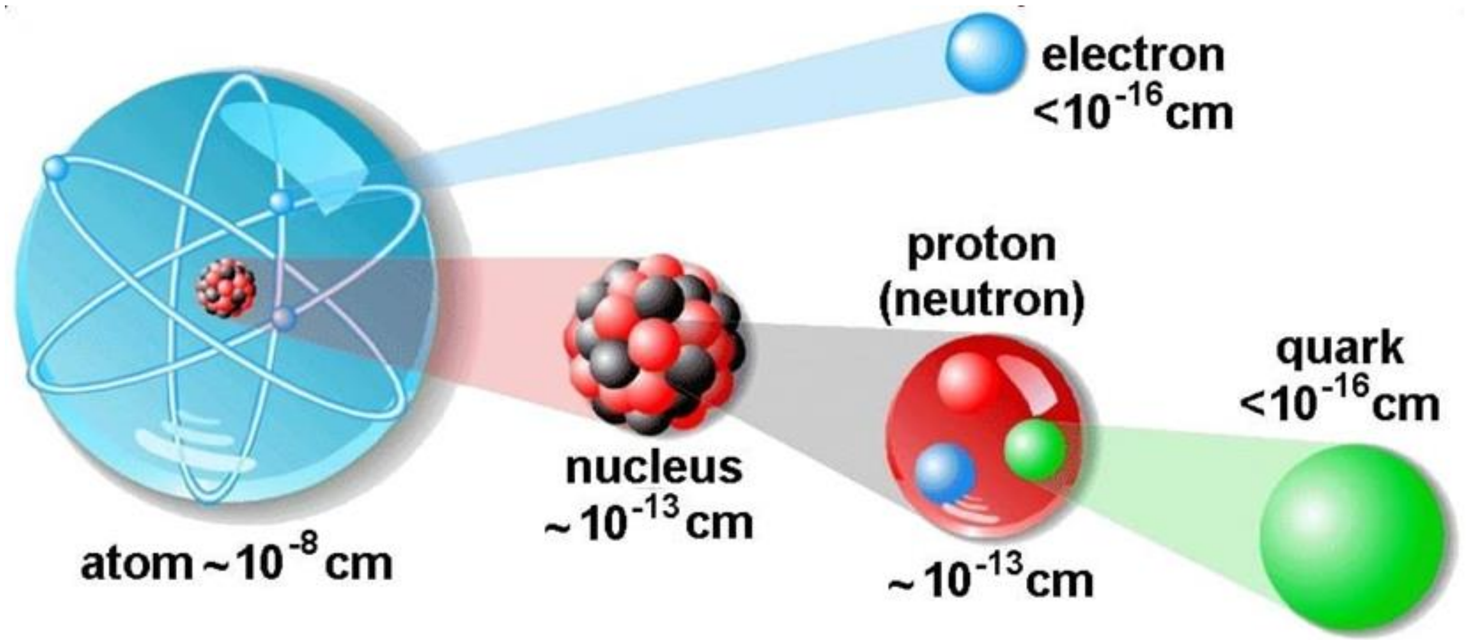
Un esempio di costruzione di legge fisica

- Una legge fisica importante è legata alla possibilità di misurare «il tempo che passa».
- Noi possiamo determinare solo «**intervalli di tempo**», tramite due operazioni di «**start**» e «**stop**»
- Per avere start e stop, occorre avere uno strumento, e qualcuno che fisicamente faccia l'operazione. Ma come possiamo affermare che «la Terra ha 4.543×10^9 anni» o che Lucy è vissuta 3.2×10^6 anni fa?
- Per questi scopi, si usa il processo di datazione, usando nuclei radioattivi. La radioattività (contrariamente a quello che molti pensano) è un processo completamente naturale.
- In un processo radioattivo, un nucleo si trasforma spontaneamente in un altro nucleo. Lo stato iniziale e finale si distinguono perché la carica elettrica del nucleo (misurabile) è cambiata.
- In natura, i nuclei stabili - ossia che non sono radioattivi- sono 264. Ciascuno di essi si differenzia per un diverso numero di neutroni o protoni
- I nuclei instabili- ossia, radioattivi- che siamo riusciti a misurare sono oltre 1500. Quelli non misurabili perché la loro vita media è inferiore a qualche ms possono essere diverse migliaia
- Un esempio famoso di nucleo radioattivo è un particolare isotopo del Carbonio, il ${}^{14}_{6}C$, che serve per la datazione di reperti storici e che si trasforma nel modo:

$$ {}^{14}_{6}C \rightarrow {}^{14}_{7}N + e^{-} + \bar{\nu}_e $$

[Molecole, atomi e nuclei]

- Attenzione alle scale! Tra le dimensioni atomiche e quelle nucleari ci sono 5 ordini di grandezza!
- Significa che se il nucleo ha le dimensioni della punta di una matita, l'atomo ha dimensioni di uno stadio da calcio.



- Ciascun elettrone che orbita attorno al nucleo ha dimensioni < 1000 volte più piccole del nucleo.
- Anche le scale di energia differiscono di un fattore 10^5 : le energie di legame nucleare sono 100000 volte maggiori di quelle atomiche.
- **Confondere nuclei con atomi è sbagliato (di 5 ordini di grandezza)**
- **Le proprietà chimiche della materia dipendono solo dagli elettroni (e quindi dal numero di protoni)**
- **Le proprietà fisiche dei nuclei dipendono dalla somma di protoni e neutroni (non dal numero di elettroni)**

Primo step: osservazione del fenomeno

- Quello che si trova prendendo un certo numero di nuclei radioattivi (un tipo qualsiasi tra gli oltre 1500 isotopi radioattivi noti) è che il loro numero decresce nel tempo a causa di trasformazioni.
- Indichiamo con $N(\mathrm{t})$ il numero di nuclei di una particolare specie radioattiva **in un certo luogo** e in un **preciso istante di tempo**. Si noti che:
  - La lettera N non rappresenta qui il particolare nucleo di Azoto della pagina precedente
  - L'istante di tempo t è assolutamente generico, così come il luogo in cui effettuate l'osservazione (potrebbero essere le 12:23'54'' a San Benedetto del Tronto, oppure le 07:54'21'' a Copacabana)
- Lasciando passare un certo intervallo di tempo Δt, troveremo che il numero di nuclei della specie N presenti nel campione (**Domanda**: avete idea di come è possibile controllare?) sarà:

$$N(t+\Delta t) = N(t) - \lambda \cdot \Delta t \cdot N(t)$$

- Ossia: il numero di nuclei rimasto al tempo $(t+\Delta t)$ è inferiore di quello iniziale di una quantità che
  - Dipende da quanto è lungo l'intervallo Δt di tempo (**misurato** - start e stop- con un orologio)
  - Dal numero di nuclei $N(t)$ presenti nell'istante di tempo iniziale t
  - Da una costante, λ, che dipende solo dal tipo di nucleo scelto (**Domanda**: che unità di misura ha?). La costante è **reale** e **positiva**.

Secondo step: Costruzione dell'equazione differenziale

- Manipoliamo quello che abbiamo osservato sperimentalmente:

$$N(t+\Delta t) = N(t) - \lambda \cdot \Delta t \cdot N(t)$$

- Possiamo ovviamente anche scrivere la relazione (tutte le quantità sono finite) come:

$$\frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = -\lambda \cdot N(t)$$

- E possiamo anche notare che tale relazione vale anche se prendiamo un intervallo di tempo infinitesimo:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = -\lambda \cdot N(t)$$

- (Domanda: perché non abbiamo scritto $\lim_{\Delta t \to 0}$ anche a destra?)
- Ormai conosciamo il significato matematico di passaggio al limite

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda \cdot N(t)$$

- Questa è la prima (semplice) equazione differenziale che abbiamo costruito.
- Quello che cerchiamo è la funzione $N(t)$ che in ogni tempo (non solo all'istante iniziale) verifica l'identità

Terzo step: soluzione dell’equazione differenziale

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda \cdot N(t)$$

- Per risolverla, dobbiamo fare la seguente operazione:

$$N(t) \equiv \int \frac{dN(t)}{dt} dt = \int -\lambda \cdot N(t)\ dt$$

- Tuttavia, per questa volta, c’è un modo più semplice. Dobbiamo trovare la funzione la cui derivata è pari alla funzione stessa, moltiplicata per la costante $-\lambda$. Qualche idea su quale sia questa funzione?

$$F(t) = \mathrm{a}\, e^{bt} \qquad\qquad \frac{dF}{dt} = \mathrm{ab}\, e^{bt}\,, \text{purchè b} = -\lambda$$

- Dunque, la soluzione cercata è la funzione:

$$N(t) = \mathrm{a}\, e^{-\lambda \cdot t}$$

- (Nota: durante il corso, per addestrarci meglio, troveremo un altro modo più formale di risolvere il problema con una tecnica che i matematici chiamano di **separazione delle variabili**).

Quarto step: le condizioni iniziali/contorno

- Siamo arrivati all'equazione: $N(t) = \mathrm{a}\, e^{-\lambda \cdot t}$.
- Attenzione però: che diamine significa la costante «a» rimasta nell'equazione? Dobbiamo trasformare questo oggetto matematico **in qualcosa che abbia significato fisico**.
- Rientra in gioco il problema delle condizioni iniziali, che abbiamo ogni volta che risolviamo un integrale primo, dobbiamo determinare una costante incognita (ricordate?)
- Chiamiamo $t \equiv t_0$ l'istante di tempo iniziale in cui faccio la misura (le 12:23'54'' a San Benedetto del Tronto, o le 07:54'21'' a Copacabana): il numero iniziale di nuclei era esattamente:

$$N(t = t_0) \equiv N_0$$

- Inoltre, in base all'assunzione fisica che il tempo scorra in maniera identica e non dipende dalla scelta dell'origine (e poi: t_0 =12:23'54' di quale anno? Misurato a partire da cosa? *Ab urbe condita*?), non perdiamo di generalità se definiamo: $t_0 \equiv 0$.
- Per soddisfare le condizioni iniziali, la nostra equazione dovrà essere:

$$\boldsymbol{N(t) = N_0\, e^{-\lambda \cdot t}}$$

Quinto step: capire la fisica relativa alla formula

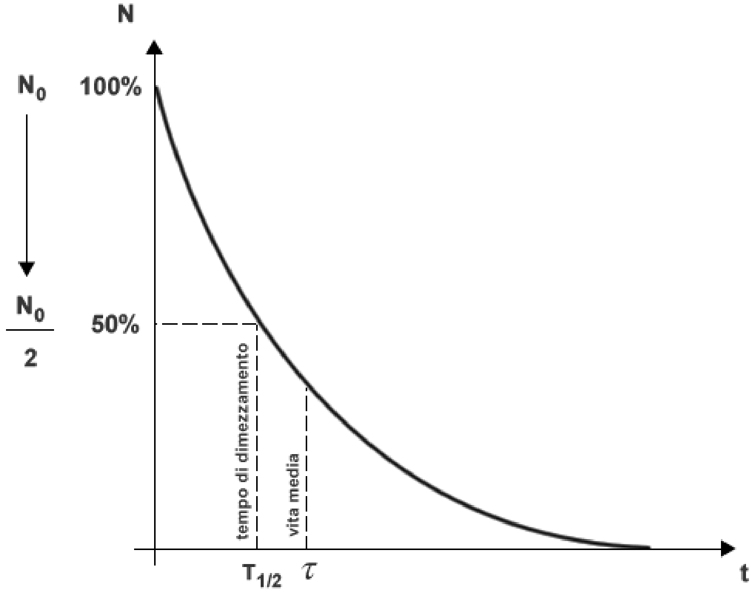
- Abbiamo risolto il problema di matematica determinando la funzione:

$$N(t) = N_0\, e^{-\lambda \cdot t}$$

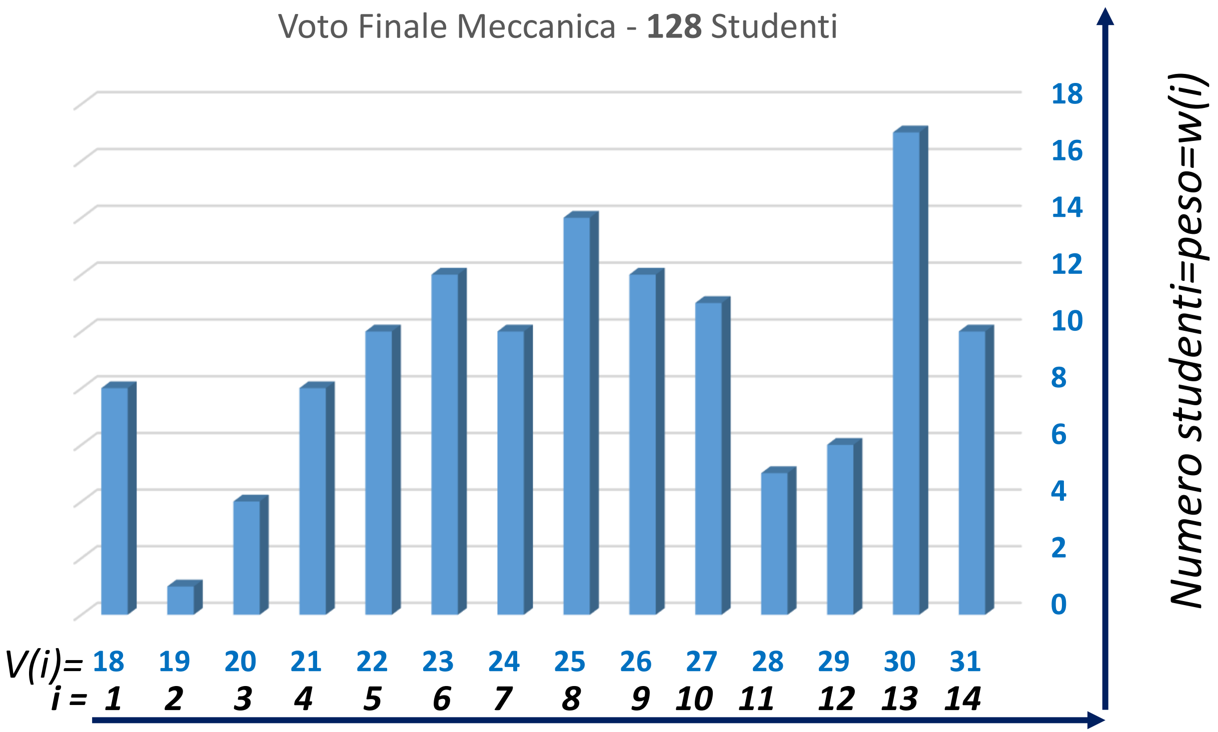
- Ma cosa significa dal punto di vista della fisica?
- Innanzitutto, è cambiata l'interpretazione di $N(t)$. Non è più il numero di nuclei in un certo momento iniziale (divenuto ora $t = t_0 = 0$), ma **rappresenta il numero di nuclei presenti in ogni istante di tempo** (ovviamente, dopo che i nuclei sono stati creati da qualche processo fisico).
- La costante λ (di cui abbiamo parlato poco) deve avere le dimensioni dell'inverso di un tempo.
- Il suo significato fisico è l'inverso della vita media, τ , che ha le dimensioni di un tempo:

$$\lambda = \frac{1}{\tau}$$

- Ma quale è il significato della «vita media»?
- Come si può determinare per una variabile continua?



[Media su una variabile discreta: il voto medio]



- Voto medio all'esame:
- 10 studenti hanno preso la lode (voto=31), 17 hanno preso 30, … 8 studenti hanno preso 18
- Quindi $\sum_{i=1}^{i=14} w(i) = \sum_{i=1}^{i=14} w(i) = 128$ è il numero totale di studenti che hanno passato l'esame
- Se volete calcolare il voto medio $\langle V \rangle$ dovete fare la seguente operazione;

$$voto\ medio \equiv \langle V \rangle \equiv \frac{\sum_{i=1}^{i=14} V(i) \cdot w(i)}{\sum_{i=1}^{i=14} w(i)}$$

- La stessa cosa se volete calcolare la vita media di una popolazione: sommate quanti muoiono entro 1 anno, quanti bambini entro 2 anni…., e dividete per il numero totale di persone morte.

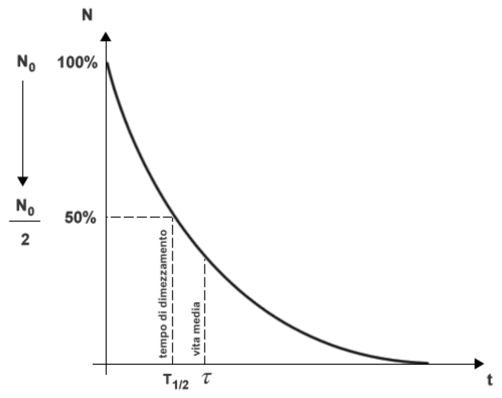
[Media su una variabile continua: la vita media]

- In generale, per una grandezza discreta la sua media è definita come

$$\langle V \rangle \equiv \frac{\sum_i V(i) \cdot w(i)}{\sum_i w(i)}$$

- Nel caso di una grandezza continua:
  - Sostituiamo la variabile discreta $V(i)$ con una variabile continua t (qui indica una generica variabile)
  - Sostituiamo i pesi discreti $w(i)$ con una funzione continua della variabile t, chiamiamola $\mathrm{F}(t)$
  - Il numero totale è dato dalla somma dei pesi, ossia: $\mathrm{A} = \int_a^b F(t) \cdot dt$
  - Rimpiazziamo la somma sulla variabile i in un integrale definito sul dominio di t:

$$\langle t \rangle \equiv \frac{\int_a^b F(t) \cdot t \cdot dt}{\int_a^b F(t) \cdot dt}$$



- Se la variabile t rappresenta il tempo, allora la media $\langle t \rangle$ rappresenta la vita media e viene indicata con τ.
- Esercizio con calcolo di integrali: Mostrare che se $F(t) = N_0 e^{-\lambda \cdot t}$ allora

$$\lambda = 1/\tau$$

Sesto step: fare fisica con la formula matematica

- Ora abbiamo una formula matematica che descrive come evolve al passare del tempo il numero di nuclei di una certa sostanza, quando conosciamo sperimentalmente il valore di λ

$$N(t) = N_0\, e^{-\lambda \cdot t}$$

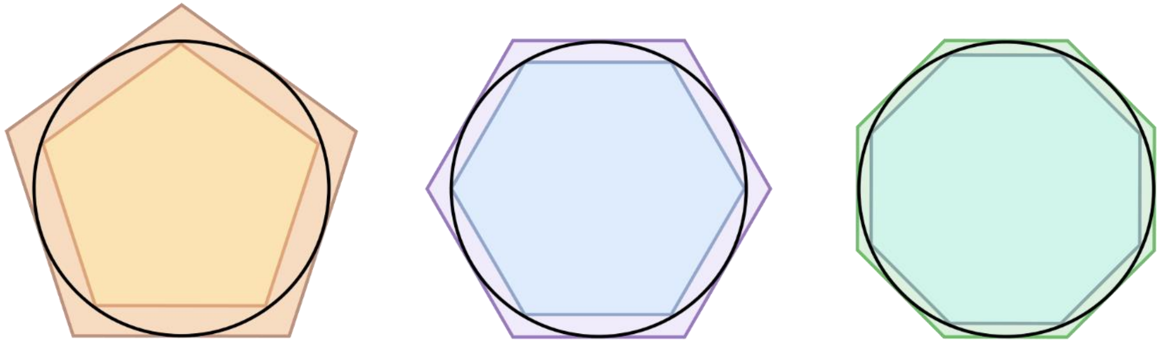
- Attenzione: λ (ovvero, $\tau = 1/\lambda$) è determinabile empiricamente per ogni tipo di nucleo osservabile.
- Scoprirete, proseguendo gli studi, che è possibile capire perché τ può variare da millesimi di secondo (o meno) a miliardi di anni (variando cioè per oltre 20 ordini di grandezza!). Occorre studiare la **teoria di Fermi delle interazioni deboli**.
- Ma come possiamo usare la formula per determinare l'età della Terra, di Lucy o di altri oggetti che vogliamo datare?
- Dobbiamo avere un modello, validato sperimentalmente, ad esempio di quanti nuclei di quell'isotopo radioattivo sono presenti quando l'oggetto che vogliamo datare si forma.
- Questo è il compito della fisica, e non della Matematica.
- E questo NON è il compito di questo modulo di «Introduzione alla Matematica». La parte interessante, la fisica, la vedrete nel corso di Fisica.
- E ricordate che **lo studio della matematica è strumentale alla fisica, e non è il suo scopo**.

11) Numeri reali in matematica e fisica: il caso del pi greco

- Nella geometria piana π, che come tutti sapete, è un numero **reale**, viene **definito** come il **rapporto** tra la lunghezza della circonferenza C e quella del suo diametro D. Quindi:

$$\pi \equiv \frac{C}{D}$$

- Il valore di π troncato alla centesima cifra decimale è: 3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679
- Come è possibile determinare il valore di π?
- Ad esempio, usando la geometria, partendo da una **circonferenza esattamente di raggio = 1**, π può essere stimato calcolando il perimetro di poligoni iscritti e circoscritti dalla circonferenza



- Archimede ottenne tramite un poligono con 96 lati il seguente limite superiore e inferiore a π:

  223/71 < π < 22/7 (cioè 3.1408 < π < 3.1429)

- Con metodi analoghi, l'olandese Willebrord Snellius determinò le prime 34 cifre di π nel 1621

Altre definizioni di pi greco

Ci sono molti altri metodi per definire π, ovviamente dimostrando che il numero ottenuto è lo stesso. Ad esempio:

- π corrisponde all'area di un cerchio di raggio 1.
- Corrisponde alla soluzione dell'integrale: $\pi = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
- È il più piccolo numero che, moltiplicato per 2, annulla la funzione coseno (i.e., $\cos 2\pi$=0).
- È il numero che corrisponde alla somma degli angoli interni (espressi in radianti) di un triangolo
- …

Misurare pi greco

- Ma davvero il rapporto il viene tra la lunghezza della circonferenza C e quella del suo diametro D vale π? **Possiamo dimostrarlo dal punto di vista fisico?**

$$\pi_{misurato} \equiv \frac{C}{D}$$

- Dobbiamo misurare la lunghezza della circonferenza $C \pm \Delta C$, quella del suo diametro $D \pm \Delta D$ e farne il rapporto. Per la fisica, non possiamo esprimere un numero senza la sua indeterminazione.
- Quindi, anche la grandezza $\pi_{misurato}$ avrà una sua indeterminazione (o incertezza)
- Troverete (corso di Laboratorio!) che $\Delta\pi_{misurato} = \left[\left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2 + \left(\frac{\Delta D}{D}\right)^2 \right] \pi_{misurato}$
- Ossia, se riuscissimo a misurare lunghezze di oggetti reali con una precisione di 10^{-5} (significa apprezzare 10 micrometri in un oggetto lungo 1 metro!), l'indeterminazione su $\pi_{misurato}$ sarebbe sulla quinta cifra dopo la virgola, ossia (ad esempio):

$$\pi_{misurato} = 3{,}1415\mathbf{6} \pm 0.00002$$

- Inserire alte cifre successive sarebbero senza senso
- **Ma perché cercare di misurare π** (con questo o altri metodi migliori) **quando ne «conosciamo» il valore (con moltissime cifre significative?)**

Numeri reali in matematica e fisica

- Qual è l'assunzione perché sia vero che $\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288 41971693993751058209749445923078164062862089986280348253421170679 \ldots. \equiv \frac{C}{D}$ o una delle altre definizioni equivalenti?
- Occorre assumere che la geometria dello spazio sia Euclidea.
- Ma la geometria del «nostro mondo»=«Universo» è davvero Euclidea?
- Ossia, la somma degli angoli interni di un triangolo misurata in radianti è davvero $\pi = 3{,}141592\ldots$?
- Vedrete che la dinamica dell'Universo può essere descritta nell'ambito della Teoria della Relatività Generale di Einstein. Questa ammette un numero infinito di possibili «universi», compreso uno per il quale la geometria è Euclidea. Per le altre soluzioni, sono richieste geometrie non euclidee: in queste, la somma degli angoli interni può essere < π (geometria iperbolica) oppure > π (geometria ellittica) .
- In quale dei possibili Universi viviamo? Risposta: dobbiamo **verificarlo sperimentalmente**.
- Solo nel caso trovassimo (come i dati ottenuti a partire dal 1998 indicano) che lo spazio dell'universo è Euclideo, il rapporto $\frac{C}{D}$ assume il valore sopra riportato.
- Anche se la matematica definisce una grandezza partendo da assiomi, la fisica deve sempre **investigare** se gli assunti corrispondono alla realtà dell'Universo in cui viviamo.

…con questo, possiamo iniziare