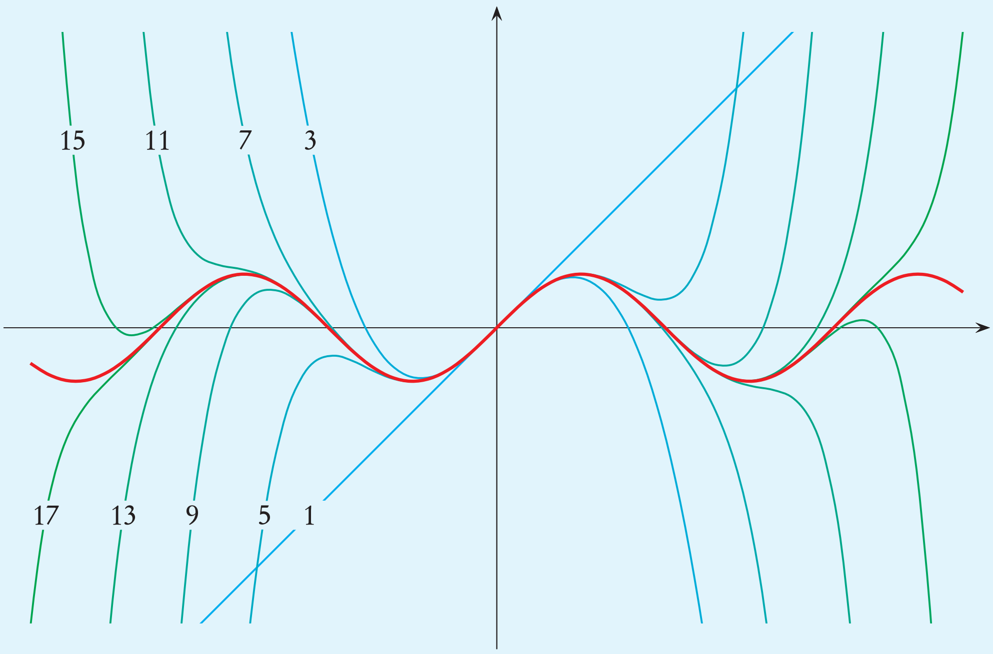
Giovanni Dore

Appunti del corso di

Analisi Matematica 1A

Teoria



Alma Mater Studiorum - Università di Bologna
Corso di Laurea in Matematica
Anno Accademico 2022/2023

In copertina: polinomi di Taylor di punto iniziale 0 della funzione seno.
Il numero riportato su ciascun grafico è il grado del polinomio.

Indice

1
Numeri reali

1.1 Assiomi dei numeri reali

Introduciamo anzitutto il sistema dei numeri reali, che è il fondamento dell'analisi matematica.

Parliamo di "sistema dei numeri reali" e non semplicemente di "insieme dei numeri reali", perché, oltre a un insieme (i cui elementi sono i numeri reali), abbiamo due operazioni e una relazione su di esso.

L'insieme dei numeri reali può essere costruito a partire dall'insieme dei numeri naturali mediante ampliamenti successivi, costruendo l'insieme dei numeri interi, poi quello dei numeri razionali e infine l'insieme dei numeri reali. Tuttavia, per evitare di allungare eccessivamente l'esposizione, non procediamo per allargamenti successivi, ma introduciamo direttamente il sistema dei numeri reali elencandone le proprietà fondamentali, dette, in termini rigorosi, **assiomi**.

Definizione di sistema dei numeri reali

Il **sistema dei numeri reali** è una quadrupla ordinata $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$, dove $\mathbb{R}$ è un insieme avente più di un elemento, $+$ e $\cdot$ sono due operazioni binarie su $\mathbb{R}$, cioè due funzioni da $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, chiamate rispettivamente **addizione** e **moltiplicazione**, $\leq$ è una relazione in $\mathbb{R}$, e sono soddisfatti gli assiomi elencati in seguito.

Gli assiomi possono essere divisi in tre gruppi: gli assiomi riguardanti le due operazioni, gli assiomi sulla relazione e un ulteriore assioma, detto "assioma di completezza".

Gli assiomi relativi alle operazioni stabiliscono le regole per fare i calcoli tra numeri reali; un insieme in cui sono definite due operazioni che verificano questi assiomi è detto **campo**.

Gli assiomi relativi alla relazione garantiscono che essa è di ordine lineare e descrivono il collegamento tra la relazione e le operazioni di addizione e di moltiplicazione; in generale un campo su cui è definita una relazione che soddisfa questi assiomi è detto **campo ordinato**.

Infine l'assioma di completezza assicura la validità delle proprietà dei numeri reali che consentono lo sviluppo dell'analisi, ad esempio l'esistenza della radice quadrata di ogni numero positivo. Tale assioma è quello che distingue il sistema dei numeri reali dal sistema dei numeri razionali. Un campo ordinato che soddisfa l'assioma di completezza è detto **campo ordinato completo**.

1.1.1 Assiomi delle operazioni

Enunciamo anzitutto gli assiomi relativi alle operazioni, elencando dapprima quelli relativi all'addizione (assiomi C1–C4), successivamente quelli relativi alla moltiplicazione (assiomi C5–C8) e infine un assioma che coinvolge sia l'addizione che la moltiplicazione (assioma C9).

Assioma C1: proprietà associativa dell'addizione

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x + (y + z) = (x + y) + z\,.$$

Questo assioma assicura che non è necessario distinguere tra $x + (y + z)$ e $(x + y) + z$, quindi si può usare la notazione $x + y + z$ per indicare la somma di tre numeri reali.

Assioma C2: proprietà commutativa dell'addizione

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x + y = y + x\,.$$

Assioma C3: esistenza dell'elemento neutro additivo

$$\exists a \in \mathbb{R} \colon \forall x \in \mathbb{R}, \quad x + a = a + x = x\,.$$

L'elemento la cui esistenza è assicurata da questo assioma è unico, cioè:

1.1.1 Teorema (unicità dell'elemento neutro additivo)

Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Se, $\forall x \in \mathbb{R}$, si ha

$$\begin{aligned} x + a &= a + x = x\,, \\ x + b &= b + x = x\,, \end{aligned}$$

allora $a = b$.

Dimostrazione. Dalla prima ipotesi, ponendo $x = b$, segue $a + b = b$, mentre dalla seconda, ponendo $x = a$, segue $a + b = a$; perciò $a = b$. ■

Poiché questo elemento è unico, introduciamo un simbolo per indicarlo.

Definizione di elemento neutro additivo

Chiamiamo **elemento neutro additivo** il numero reale a la cui esistenza è assicurata dall'assioma C3; lo indichiamo con $\mathtt{0}$.

Assioma C4: esistenza dell'opposto

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \colon \quad x + y = y + x = \mathtt{0}\,.$$

Poiché l'addizione è commutativa (assioma C2), se è verificata una delle due uguaglianze $x+y=0$ e $y+x=0$, allora è verificata anche l'altra.

Qualunque sia $x \in \mathbb{R}$, il numero reale y la cui esistenza è assicurata dall'assioma C4 è unico. Si ha cioè:

1.1.2 Teorema (unicità dell'opposto)

Sia $x \in \mathbb{R}$. Se $y, z \in \mathbb{R}$ sono tali che

$$x+y=y+x=0,$$
$$x+z=z+x=0,$$

allora $y=z$.

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned}
y &= y+0 && \text{proprietà di } 0 \text{ (C3)},\\
&= y+(x+z) && \text{ipotesi},\\
&= (y+x)+z && \text{proprietà associativa dell'addizione (C1)},\\
&= 0+z && \text{ipotesi},\\
&= z && \text{proprietà di } 0 \text{ (C3)}.
\end{aligned}$$

Pertanto $y=z$. ■

Definizione di opposto di un numero reale

Sia $x \in \mathbb{R}$. Chiamiamo **opposto** (o **inverso additivo**) di x l'unico numero reale y che verifica $x+y=y+x=0$; indichiamo tale opposto con $-x$.

Anziché scrivere $x+(-y)$ si usa la notazione $x-y$.

Assioma C5: proprietà associativa della moltiplicazione

$$\forall x,y,z \in \mathbb{R}, \quad x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z.$$

Questo assioma assicura che non è necessario distinguere tra $x\cdot(y\cdot z)$ e $(x\cdot y)\cdot z$, quindi si può usare la notazione $x\cdot y\cdot z$ per indicare il prodotto di tre numeri reali.

Assioma C6: proprietà commutativa della moltiplicazione

$$\forall x,y \in \mathbb{R}, \quad x\cdot y=y\cdot x.$$

Assioma C7: esistenza dell'elemento neutro moltiplicativo

$$\exists a \in \mathbb{R}\colon\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad x\cdot a=a\cdot x=x.$$

L'elemento neutro moltiplicativo è unico, cioè:

1.1.3 Teorema (unicità dell'elemento neutro moltiplicativo)

Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Se, $\forall x \in \mathbb{R}$, si ha

$$\begin{aligned} x \cdot a = a \cdot x = x\,, \\ x \cdot b = b \cdot x = x\,, \end{aligned}$$

allora $a = b$.

Dimostrazione. Dalla prima ipotesi, ponendo $x = b$, segue $a \cdot b = b$, mentre dalla seconda, ponendo $x = a$, segue $a \cdot b = a$; perciò $a = b$. ■

Poiché questo elemento è unico, introduciamo un simbolo per indicarlo.

Definizione di elemento neutro moltiplicativo

Chiamiamo **elemento neutro moltiplicativo** il numero reale a la cui esistenza è assicurata dall'assioma C7; lo indichiamo con 1.

Assioma C8: esistenza del reciproco

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \exists y \in \mathbb{R}: \quad x \cdot y = y \cdot x = 1\,.$$

Poiché la moltiplicazione è commutativa (assioma C6), se è verificata una delle due uguaglianze $x \cdot y = 1$ o $y \cdot x = 1$, allora è verificata anche l'altra.

Qualunque sia $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, il numero reale y la cui esistenza è assicurata dall'assioma C8 è unico. Si ha cioè:

1.1.4 Teorema (unicità del reciproco)

Sia $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Se $y, z \in \mathbb{R}$ sono tali che

$$\begin{aligned} x \cdot y = y \cdot x = 1\,, \\ x \cdot z = z \cdot x = 1\,, \end{aligned}$$

allora $y = z$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned} y &= y \cdot 1 && \text{proprietà di 1 (C7),} \\ &= y \cdot (x \cdot z) && \text{ipotesi,} \\ &= (y \cdot x) \cdot z && \text{proprietà associativa della moltiplicazione (C5),} \\ &= 1 \cdot z && \text{ipotesi,} \\ &= z && \text{proprietà di 1 (C7).} \end{aligned}$$

Pertanto $y = z$. ■

Definizione di reciproco di un numero reale non nullo

Sia $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Chiamiamo **reciproco** (o **inverso moltiplicativo**) di x l'unico numero reale y che verifica $x \cdot y = y \cdot x = 1$; indichiamo tale reciproco con x^{-1} o con $1/x$.

Anziché scrivere $x \cdot (1/y)$ si usa la notazione x/y.

Enunciamo ora un assioma che collega addizione e moltiplicazione.

Assioma C9: proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z\,.$$

Nell'enunciato di questo assioma, come sempre in seguito, si adotta la convenzione che, in assenza di parentesi, la moltiplicazione viene eseguito prima dell'addizione, perciò la scrittura $x \cdot y + x \cdot z$ è un'abbreviazione di $(x \cdot y) + (x \cdot z)$.

Per la proprietà commutativa della moltiplicazione, la proprietà distributiva vale anche nella forma

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z\,.$$

Un insieme in cui sono definite due operazioni che verificano gli assiomi C1–C9 è detto **campo**.

1.1.2 Assiomi della relazione

Riportiamo ora gli assiomi relativi alla relazione; anzitutto quelli che stabiliscono che la relazione è di ordine lineare (assiomi O1–O4), poi gli assiomi che stabiliscono un collegamento tra la relazione e l'addizione (assioma O5) e tra la relazione e la moltiplicazione (assioma O6).

Assioma O1: proprietà riflessiva della relazione

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \leq x\,.$$

Assioma O2: proprietà antisimmetrica della relazione

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (x \leq y \wedge y \leq x) \implies x = y\,.$$

Assioma O3: proprietà transitiva della relazione

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad (x \leq y \wedge y \leq z) \implies x \leq z\,.$$

Una relazione da un insieme in sé che verifica gli assiomi O1–O3 è detta **relazione d'ordine**.

Assioma O4: linearità della relazione d'ordine

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\quad x\leq y\ \vee\ y\leq x\,.$$

Una relazione d'ordine che verifica questo assioma è detta **relazione d'ordine lineare** o **relazione d'ordine totale**.

Osserviamo che la proprietà riflessiva della relazione di $\leq$ è una conseguenza dell'assioma di linearità. Infatti se $x,y\in\mathbb{R}$, allora si ha $x\leq y$ oppure $y\leq x$; in particolare se $x\in\mathbb{R}$, posto $y=x$, si ottiene comunque $x\leq x$.

Enunciamo infine gli assiomi che stabiliscono un collegamento tra la relazione e le operazioni.

Assioma O5: compatibilità tra relazione e addizione

$$\forall x,y,z\in\mathbb{R},\quad x\leq y\implies x+z\leq y+z\,.$$

Assioma O6: compatibilità tra relazione e moltiplicazione

$$\forall x,y,z\in\mathbb{R},\quad (x\leq y\ \wedge\ 0\leq z)\implies x\cdot z\leq y\cdot z\,.$$

Un campo in cui è definita una relazione che verifica gli assiomi O1–O6 è detto **campo ordinato**.

1.1.3 Assioma di completezza

Esistono numerosi campi ordinati. Ad esempio, l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali è un campo ordinato. Per caratterizzare univocamente il sistema dei numeri reali tra i campi ordinati è necessario un ulteriore assioma, che, a differenza degli altri, non riguarda le proprietà fondamentali delle operazioni e della relazione, ma proprietà più raffinate del sistema numerico. Può essere espresso in diverse forme equivalenti tra loro, scegliamo una forma semplice di enunciarlo.

Assioma di completezza

Siano $A,B\subseteq\mathbb{R}$ non vuoti. Se

$$\forall a\in A,\ \forall b\in B,\quad a\leq b\,,$$

allora esiste $c\in\mathbb{R}$ tale che

$$\forall a\in A,\ \forall b\in B,\quad a\leq c\leq b\,.$$

Due insiemi che godono della proprietà che ogni elemento del primo è minore o uguale a ogni elemento del secondo sono detti **insiemi separati**. L'elemento c la cui esistenza è assicurata dall'assioma di completezza è detto **elemento di separazione** tra A e B.

Un campo ordinato che verifica l'assioma di completezza è detto **campo ordinato completo**.

Essenzialmente esiste un unico campo ordinato completo. In linguaggio tecnico questo fatto viene enunciato dicendo che: "due campi ordinati completi sono isomorfi". Questo significa che dati due campi ordinati completi esiste una funzione biunivoca dall'uno all'altro che rispetta le operazioni e la relazione. Tale funzione è detta **isomorfismo di campi ordinati**.

Per essere più precisi, si può dimostrare che se $(\mathbb{H},+_{\mathbb{H}},\cdot_{\mathbb{H}},\leq_{\mathbb{H}})$ e $(\mathbb{K},+_{\mathbb{K}},\cdot_{\mathbb{K}},\leq_{\mathbb{K}})$ sono campi ordinati completi, allora esiste $F\colon \mathbb{H}\to\mathbb{K}$ biunivoca e tale che, $\forall x,y\in\mathbb{H}$, si ha $F(x+_{\mathbb{H}}y)=F(x)+_{\mathbb{K}}F(y)$, $F(x\cdot_{\mathbb{H}}y)=F(x)\cdot_{\mathbb{K}}F(y)$ e $x\leq_{\mathbb{H}}y$ se e solo se $F(x)\leq_{\mathbb{K}}F(y)$.

1.2 Prime conseguenze degli assiomi

Studiamo ora alcune conseguenze quasi immediate degli assiomi del sistema dei numeri reali. Elenchiamo per prime le conseguenze dei soli assiomi delle operazioni, cioè le proprietà di addizione e moltiplicazione, passiamo poi alle proprietà della relazione di $\leq$, ricavate dagli assiomi delle operazioni e da quelli della relazione, infine vediamo le conseguenze della completezza.

Quando non vi possono essere equivoci il prodotto $x\cdot y$ viene indicato con xy. Inoltre scriviamo $x<y$ per indicare che si ha $x\leq y$ e $x\neq y$, mentre $x\geq y$ equivale a $y\leq x$ e $x>y$ equivale a $y<x$.

Definizione di numero non negativo, non positivo, positivo, negativo

Sia $x\in\mathbb{R}$.
Diciamo che x è **non negativo** quando $x\geq 0$.
Diciamo che x è **non positivo** quando $x\leq 0$.
Diciamo che x è **positivo** quando $x>0$.
Diciamo che x è **negativo** quando $x<0$.

Ogni numero positivo è anche non negativo, mentre ogni numero negativo è anche non positivo; 0 è sia non positivo che non negativo.

Utilizziamo le seguenti notazioni per indicare alcuni sottoinsiemi notevoli di $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R}^+=\{x\in\mathbb{R}\mid x>0\},\qquad \mathbb{R}^-=\{x\in\mathbb{R}\mid x<0\},\qquad \mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

1.2.1 Conseguenze degli assiomi delle operazioni

Dagli assiomi di campo deduciamo le proprietà fondamentali delle operazioni di addizione e di moltiplicazione.

1.2.1 Teorema (legge di cancellazione per l'addizione)

Siano $x,y,z\in\mathbb{R}$. Allora

$$x+z=y+z\implies x=y.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned}
x+z=y+z &\implies (x+z)-z=(y+z)-z && \text{esistenza dell'opposto (C4),}\\
&\implies x+(z-z)=y+(z-z) && \text{proprietà associativa dell'addizione (C1),}\\
&\implies x+0=y+0 && \text{esistenza dell'opposto (C4),}\\
&\implies x=y && \text{proprietà di } 0 \text{ (C3).}
\end{aligned}$$

■

In modo del tutto analogo si dimostra il teorema seguente.

1.2.2 Teorema (legge di cancellazione per la moltiplicazione)

Siano $x, y \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{R}^*$. Allora

$$x \cdot z = y \cdot z \implies x = y.$$

Notiamo che per poter cancellare un fattore moltiplicativo in una uguaglianza bisogna che esso sia diverso da 0. Questo perché la cancellazione richiede di moltiplicare entrambi i membri dell'uguaglianza per il reciproco del numero da cancellare, quindi non si può cancellare 0 che non ha reciproco.

1.2.3 Teorema

Sia $x \in \mathbb{R}$. Allora

$$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned}
0 + x\cdot 0 &= x \cdot 0 && \text{proprietà di } 0 \text{ (C3),}\\
&= x\cdot(0+0) && \text{proprietà di } 0 \text{ (C3),}\\
&= x\cdot 0 + x \cdot 0 && \text{proprietà distributiva (C9).}
\end{aligned}$$

Dall'uguaglianza $0 + x\cdot 0 = x\cdot 0 + x\cdot 0$, per la legge di cancellazione per l'addizione 1.2.1, segue $0 = x \cdot 0$.

Per la proprietà commutativa della moltiplicazione (assioma C6) si ha anche $0 \cdot x = 0$.

■

1.2.4 Teorema

$$0 \neq 1.$$

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema per assurdo. Se fosse $0 = 1$ allora, $\forall x \in \mathbb{R}$, sarebbe $x \cdot 0 = x \cdot 1$. Per il teorema 1.2.3 si ha $x \cdot 0 = 0$, per le proprietà di 1 (assioma C7) si ha $x \cdot 1 = x$; quindi $x = 0$. Perciò ogni elemento di $\mathbb{R}$ è uguale a 0; ciò è assurdo perché $\mathbb{R}$ ha più di un elemento.

■

Dagli ultimi due teoremi segue che, moltiplicando 0 per un qualunque numero reale, non si può ottenere 1; questo è il motivo per cui nell'assioma C8 si richiede l'esistenza del reciproco solo per i numeri reali non nulli.

1.2.5 Teorema (legge di annullamento del prodotto)

Siano $x, y \in \mathbb{R}$.

$$x \cdot y = 0 \iff (x = 0 \lor y = 0).$$

Dimostrazione. Supponiamo $x \cdot y = 0$. Dimostriamo che se $x \neq 0$, allora $y = 0$, quindi almeno uno dei due fattori è nullo. Infatti, se $x \neq 0$, allora

$$\begin{aligned} y &= 1 \cdot y && \text{esistenza di 1 (C7),} \\ &= (x^{-1} \cdot x) \cdot y && \text{esistenza del reciproco (C8),} \\ &= x^{-1} \cdot (x \cdot y) && \text{proprietà associativa della moltiplicazione (C5),} \\ &= x^{-1} \cdot 0 && \text{ipotesi,} \\ &= 0 && \text{teorema 1.2.3.} \end{aligned}$$

Viceversa, se almeno uno tra x e y è nullo, allora, per il teorema 1.2.3, si ha $x \cdot y = 0$. ∎

Conseguenza immediata di questo teorema è il seguente:

1.2.6 Teorema

Siano $x, y \in \mathbb{R}$.

$$x \cdot y \neq 0 \iff (x \neq 0 \land y \neq 0).$$

Studiamo le proprietà dell'opposto e del reciproco di numeri reali.

1.2.7 Teorema (opposto di zero)

$$-0 = 0.$$

Dimostrazione. La proprietà di 0 (assioma C3) assicura che $0 + 0 = 0$, quindi 0 è l'opposto di 0. ∎

1.2.8 Teorema (reciproco di uno)

$$1^{-1} = 1.$$

Dimostrazione. La proprietà di 1 (assioma C7) assicura che $1 \cdot 1 = 1$, quindi 1 è il reciproco di 1. ∎

1.2.9 Teorema (opposto dell'opposto)

Sia $x \in \mathbb{R}$. Allora

$$-(-x) = x.$$

Dimostrazione. Per la definizione di opposto $x + (-x) = 0$, quindi l'opposto di $-x$ è x. ∎

1.2.10 Teorema (reciproco del reciproco)

Sia $x \in \mathbb{R}^*$. Allora $x^{-1} \neq 0$ e

$$\left(x^{-1}\right)^{-1} = x\,.$$

Dimostrazione. Poiché $x \cdot x^{-1} = 1 \neq 0$, per il teorema 1.2.6 $x^{-1} \neq 0$.
Per la definizione di reciproco $x \cdot x^{-1} = 1$, quindi il reciproco di x^{-1} è x. ■

Da ora in avanti, per evitare di appesantire troppo le dimostrazioni, applichiamo le proprietà associativa e commutativa di addizione e moltiplicazione senza menzionarle.

1.2.11 Teorema (opposto della somma)

Siano $x, y \in \mathbb{R}$. Allora
$$-(x+y) = -x-y\,.$$

Dimostrazione. Si ha
$$(-x-y)+(x+y) = (-x+x)+(-y+y) = 0+0 = 0;$$
pertanto l'opposto di $x+y$ è $-x-y$. ■

1.2.12 Teorema (reciproco del prodotto)

Siano $x, y \in \mathbb{R}^*$. Allora $x \cdot y \neq 0$ e

$$(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}\,.$$

Dimostrazione. Siano $x, y \in \mathbb{R}^*$. Per il teorema 1.2.6, si ha $x \cdot y \neq 0$ e
$$(x^{-1} \cdot y^{-1}) \cdot (x \cdot y) = (x^{-1} \cdot x) \cdot (y^{-1} \cdot y) = 1 \cdot 1 = 1;$$
pertanto $x^{-1} \cdot y^{-1}$ è il reciproco di $x \cdot y$. ■

Studiamo ora il prodotto di un numero reale per l'opposto di 1.

1.2.13 Teorema

Sia $x \in \mathbb{R}$. Allora
$$(-1) \cdot x = x \cdot (-1) = -x\,.$$

Dimostrazione. Si ha
$$\begin{aligned}
x+(-1)\cdot x &= 1 \cdot x + (-1) \cdot x && \text{proprietà di 1 (C7),}\\
&= (1-1) \cdot x && \text{proprietà distributiva (C9),}\\
&= 0 \cdot x && \text{proprietà dell'opposto (C4),}\\
&= 0 && \text{teorema 1.2.3.}
\end{aligned}$$

Pertanto $(-1) \cdot x$ è l'opposto di x. ■

Da questo teorema segue:

1.2.14 Teorema

Siano $x, y \in \mathbb{R}$. Allora

$$(-x)\cdot y = x\cdot(-y) = -(x\cdot y),$$
$$(-x)\cdot(-y) = x\cdot y.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned}
(-x)\cdot y &= \big((-1)\cdot x\big)\cdot y && \text{teorema 1.2.13,}\\
&= (-1)\cdot(x\cdot y) && \text{proprietà associativa della moltiplicazione (C5),}\\
&= -(x\cdot y) && \text{teorema 1.2.13.}
\end{aligned}$$

In modo analogo si ottiene $x\cdot(-y) = -(x\cdot y)$.

Si ha

$$\begin{aligned}
(-x)\cdot(-y) &= (-x)\cdot\big((-1)\cdot y\big) && \text{teorema 1.2.13,}\\
&= \big((-x)\cdot(-1)\big)\cdot y && \text{proprietà associativa della moltiplicazione (C5),}\\
&= \big(-(-x)\big)\cdot y && \text{teorema 1.2.13,}\\
&= x\cdot y && \text{teorema 1.2.9.}
\end{aligned}$$
■

Questo teorema consente di utilizzare la notazione $-x\cdot y$ senza ambiguità: essa indica indifferentemente l'opposto di $x\cdot y$ oppure $-x$ moltiplicato per y.

1.2.2 Conseguenze degli assiomi della relazione

Dagli assiomi della relazione d'ordine deduciamo le regole fondamentali per manipolare le disuguaglianze.

1.2.15 Teorema

Siano $x, y \in \mathbb{R}$. Allora

$$x \le y \iff 0 \le y - x.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned}
x \le y &\implies x - x \le y - x && \text{compatibilità tra relazione e addizione (O5),}\\
&\implies 0 \le y - x && \text{proprietà dell'opposto (C4).}
\end{aligned}$$

Viceversa

$$\begin{aligned}
0 \le y - x &\implies 0 + x \le y - x + x && \text{compatibilità tra relazione e addizione (O5),}\\
&\implies x \le y - x + x && \text{proprietà di } 0 \text{ (C3),}\\
&\implies x \le y && \text{proprietà dell'opposto (C4).}
\end{aligned}$$
■

Da questo teorema segue:

1.2.16 Teorema

Siano $x, y \in \mathbb{R}$. Allora
$$x \leq y \iff -y \leq -x \,.$$

Dimostrazione. Per il teorema 1.2.15 si ha $x \leq y \iff 0 \leq y - x$. Per il teorema 1.2.9 si ha
$$y - x = -(-y) + (-x) = (-x) - (-y)\,,$$
pertanto, applicando nuovamente il teorema 1.2.15, risulta
$$x \leq y \iff 0 \leq (-x) - (-y) \iff -y \leq -x \,.$$
■

In particolare, ponendo $y = 0$, da questo teorema segue:

1.2.17 Teorema

Siano $x, y \in \mathbb{R}$. Allora
$$x \leq 0 \iff -x \geq 0 \,.$$

L'assioma di compatibilità tra relazione e addizione (assioma O5) assicura che sommando lo stesso numero reale a entrambi i membri di una disuguaglianza questa si conserva. Vediamo una generalizzazione di questo fatto.

1.2.18 Teorema

Siano $x, y, z, w \in \mathbb{R}$. Allora
$$(x \leq y \ \wedge \ z \leq w) \implies x + z \leq y + w \,.$$

Dimostrazione. Si ha

$(x \leq y \ \wedge \ z \leq w) \implies$

$\implies (x + z \leq y + z \ \wedge \ y + z \leq y + w)$ compatibilità tra relazione e addizione (O5),

$\implies x + z \leq y + w$ proprietà transitiva della relazione (O3). ■

Da questo teorema segue immediatamente:

1.2.19 Teorema

Siano $x, y \in \mathbb{R}$. Allora
$$(x \geq 0 \wedge y \geq 0) \implies x + y \geq 0 \,.$$

Vediamo ora le proprietà delle disuguaglianze che coinvolgono il prodotto di due numeri reali.

1.2.20 Teorema

Sia $x \in \mathbb{R}$. Allora
$$x \cdot x \geq 0.$$

Dimostrazione. Distinguiamo secondo che sia $x \geq 0$ o $x \leq 0$. Si ha

$$\begin{aligned}
x \geq 0 &\implies x \cdot x \geq 0 \cdot x && \text{compatibilità tra relazione e moltiplicazione (O6),}\\
&\implies x \cdot x \geq 0 && \text{teorema 1.2.3;}\\
x \leq 0 &\implies -x \geq 0 && \text{teorema 1.2.17,}\\
&\implies (-x) \cdot (-x) \geq 0 \cdot (-x) && \text{compatibilità tra relazione e moltiplicazione (O6),}\\
&\implies x \cdot x \geq 0 && \text{teoremi 1.2.14 e 1.2.3.}
\end{aligned}$$

Quindi, in ogni caso, $x \cdot x \geq 0$. ■

Da questo teorema segue:

1.2.21 Teorema

$$1 > 0.$$

Dimostrazione. Poiché $1 = 1 \cdot 1$, il teorema precedente assicura che $1 \geq 0$; per il teorema 1.2.4 $1 \neq 0$, quindi $1 > 0$. ■

Dagli ultimi due teoremi segue che non esiste un numero reale x tale che $x \cdot x = -1$, perché il primo membro è non negativo e il secondo è negativo.

1.2.22 Teorema

Sia $x \in \mathbb{R}$. Allora
$$x > 0 \iff x^{-1} > 0.$$

Dimostrazione. Sia $x > 0$. Si ha

$$\begin{aligned}
x^{-1} &= x^{-1} \cdot 1 && \text{proprietà di 1 (C7),}\\
&= x^{-1} \cdot \left(x^{-1} \cdot x\right) && \text{esistenza del reciproco (C8),}\\
&= \left(x^{-1} \cdot x^{-1}\right) \cdot x && \text{proprietà associativa della moltiplicazione (C5).}
\end{aligned}$$

Per il teorema 1.2.20 $x^{-1} \cdot x^{-1} \geq 0$, mentre $x > 0$ per ipotesi, pertanto, per la compatibilità tra relazione e moltiplicazione (assioma O6), risulta $\left(x^{-1} \cdot x^{-1}\right) \cdot x \geq 0$, quindi $x^{-1} \geq 0$; per il teorema 1.2.10 $x^{-1} \neq 0$, quindi si ha $x^{-1} > 0$.

Viceversa sia $x^{-1} > 0$. Poiché, per il teorema 1.2.10, $x = \left(x^{-1}\right)^{-1}$, x è reciproco di un numero positivo, quindi, per ciò che si è appena dimostrato, è positivo. ■

1.2.23 Teorema

Siano $x, y, z \in \mathbb{R}$. Allora

$$(x \leq y \ \land \ z \leq 0) \implies x \cdot z \geq y \cdot z\,.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned}
&(x \leq y \ \land \ z \leq 0) \implies \\
&\qquad \implies (x \leq y \ \land \ -z \geq 0) && \text{teorema 1.2.17,} \\
&\qquad \implies x \cdot (-z) \leq y \cdot (-z) && \text{compatibilità tra relazione e moltiplicazione (O6),} \\
&\qquad \implies -x \cdot z \leq -y \cdot z && \text{teorema 1.2.14,} \\
&\qquad \implies x \cdot z \geq y \cdot z && \text{teorema 1.2.16.}
\end{aligned}$$

■

1.2.24 Teorema

Siano $x, y \in \mathbb{R}$. Allora

$$0 < x \leq y \implies y^{-1} \leq x^{-1}\,.$$

Dimostrazione. Sia $0 < x \leq y$. Per il teorema 1.2.22 risulta $x^{-1} > 0$ e $y^{-1} > 0$. Si ha

$$\begin{aligned}
x \cdot x^{-1} &\leq y \cdot x^{-1}, && \text{compatibilità tra relazione e moltiplicazione (O6),} \\
y^{-1} \cdot x \cdot x^{-1} &\leq y^{-1} \cdot y \cdot x^{-1}, && \text{compatibilità tra relazione e moltiplicazione (O6),} \\
y^{-1} \cdot 1 &\leq 1 \cdot x^{-1}, && \text{proprietà del reciproco (C8),} \\
y^{-1} &\leq x^{-1}, && \text{proprietà di 1 (C7).}
\end{aligned}$$

■

1.2.25 Teorema

Siano $x, y, z, w \in \mathbb{R}$. Allora

$$(0 \leq x \leq y \land 0 \leq z \leq w) \implies x \cdot z \leq y \cdot w\,.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned}
&(0 \leq x \leq y \ \land \ 0 \leq z \leq w) \implies \\
&\implies (x \cdot z \leq y \cdot z \ \land \ y \cdot z \leq y \cdot w) && \text{compatibilità tra relazione e moltiplicazione (O6),} \\
&\implies x \cdot z \leq y \cdot w && \text{proprietà transitiva della relazione (O3).}
\end{aligned}$$

■

Studiamo il segno (cioè la positività o negatività) del prodotto di due numeri reali. Per la compatibilità tra relazione e moltiplicazione (assioma O6) il prodotto di due numeri non negativi è non negativo. Vediamo gli altri casi.

1.2.26 Teorema

Siano $x, y \in \mathbb{R}$. Allora

$$(x \leq 0 \land y \leq 0) \implies x \cdot y \geq 0.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned}
&(x \leq 0 \land y \leq 0) \implies \\
&\qquad \implies (-x \geq 0 \land -y \geq 0) && \text{teorema 1.2.17,} \\
&\qquad \implies (-x)\cdot(-y) \geq 0 && \text{compatibilità tra relazione e moltiplicazione (O6),} \\
&\qquad \implies x \cdot y \geq 0 && \text{teorema 1.2.14.}
\end{aligned}$$

■

1.2.27 Teorema

Siano $x, y \in \mathbb{R}$. Allora

$$(x \leq 0 \land y \geq 0) \implies x \cdot y \leq 0.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned}
&(x \leq 0 \land y \geq 0) \implies \\
&\qquad \implies (-x \geq 0 \land y \geq 0) && \text{teorema 1.2.17,} \\
&\qquad \implies (-x)\cdot y \geq 0 && \text{compatibilità tra relazione e moltiplicazione (O6),} \\
&\qquad \implies -x \cdot y \geq 0 && \text{teorema 1.2.14,} \\
&\qquad \implies x \cdot y \leq 0 && \text{teorema 1.2.17.}
\end{aligned}$$

■

1.2.3 La funzione valore assoluto

Prima di studiare le conseguenze dell'assioma di completezza definiamo e studiamo la funzione valore assoluto, che risulterà utile in seguito.

Definizione di valore assoluto di un numero reale

Sia $x \in \mathbb{R}$. Chiamiamo **valore assoluto** di x e indichiamo con $|x|$ il numero reale

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Abbiamo così definito una funzione da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, che è detta **funzione valore assoluto**.

1.2.28 Osservazione. Abitualmente i numeri reali sono rappresentati come punti di una retta. Ciò significa che si costruisce una funzione biunivoca da $\mathbb{R}$ ad una retta, pensata come insieme di punti. Non entriamo nel dettaglio della costruzione di questa funzione, ricordiamo solo che per determinarla occorre fissare sulla retta un'origine, un segmento di

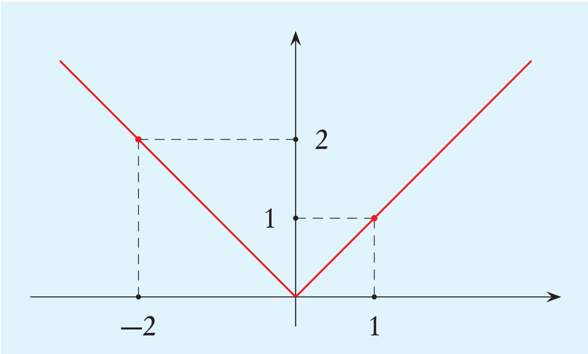


Figura 1.2.1
Grafico della funzione valore assoluto.

lunghezza unitaria e un verso positivo. Parleremo quindi indifferentemente di numeri reali e di punti.

Questa rappresentazione consente di dare alla funzione valore assoluto il seguente significato geometrico. Sia che x sia positivo, sia che esso sia negativo, $|x|$ è la lunghezza del segmento di estremi 0 e x, cioè è la distanza di x dall'origine. Più in generale, se $x, y \in \mathbb{R}$, allora la lunghezza del segmento di estremi x e y è $x - y$ se $x \geq y$, mentre è $y - x$ in caso contrario. In ogni caso la lunghezza di tale segmento, cioè la distanza di x da y, è $|x - y|$. ◀

Da questa definizione si ottiene facilmente il teorema seguente:

1.2.29 Teorema

Sia $x \in \mathbb{R}$. Allora:

I) $|x| \geq 0$;

II) $|x| = 0 \iff x = 0$;

III) $|x|^2 = x^2$;

IV) $-|x| \leq x \leq |x|$.

Per studiare le proprietà del valore assoluto risulta utile il seguente teorema.

1.2.30 Teorema

Siano $x, y \in \mathbb{R}$, tali che $x, y \geq 0$. Allora:

I) $x^2 = y^2 \iff x = y$;

II) $x^2 \leq y^2 \iff x \leq y$;

III) $x^2 < y^2 \iff x < y$.

Dimostrazione. I) Se $x = y$, ovviamente $x^2 = y^2$.

Viceversa, se $x^2 = y^2$, allora si ha $0 = x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$. Per la legge di annullamento del prodotto 1.2.5, si ha $x - y = 0$ oppure $x + y = 0$. Nel primo caso risulta $x = y$. Nel secondo caso si ha $x = -y \leq 0$, quindi risulta sia $x \geq 0$ che $x \leq 0$, pertanto, per la proprietà antisimmetrica della relazione (assioma O2), $x = 0$; perciò è anche $y = -x = 0$. Pertanto, anche in questo caso, $x = y$.

II) Si ha $x^2 \leq y^2$ se e solo se $y^2 - x^2 \geq 0$, cioè $(y-x)(y+x) \geq 0$.

Supponiamo $(y-x)(y+x) \geq 0$. Si ha $x+y \geq 0$, quindi se $y+x > 0$ per il teorema 1.2.22 si ha $(y+x)^{-1} > 0$, pertanto

$$y - x = \big((y-x)(y+x)\big)(y+x)^{-1} \geq 0$$

quindi $x \leq y$. Se invece $y+x=0$, abbiamo visto, nella dimostrazione dell'affermazione I, che si ha $x=y=0$ e quindi $x \leq y$.

Viceversa, se $x \leq y$, allora $y - x \geq 0$; poiché $x+y \geq 0$, risulta $(y-x)(y+x) \geq 0$.

III) Sia $x^2 < y^2$; se fosse $x \geq y$, allora, per l'affermazione II, sarebbe $x^2 \geq y^2$, contrariamente all'ipotesi. Pertanto, $x < y$.

Viceversa, sia $x < y$; se fosse $x^2 \geq y^2$, allora, per l'affermazione II, sarebbe $x \geq y$, contrariamente all'ipotesi. Pertanto, $x^2 < y^2$. ■

1.2.31 Teorema (proprietà del valore assoluto)

Siano $x, y \in \mathbb{R}$. Allora:

I) $|x| \leq y \iff -y \leq x \leq y$;

II) $|x| \geq y \iff (x \geq y \vee x \leq -y)$;

III) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;

IV) $|x+y| \leq |x| + |y|$;

V) $\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$.

Dimostrazione. I) Se $|x| \leq y$, per il teorema 1.2.29, affermazione IV, risulta $x \leq |x| \leq y$ e $x \geq -|x| \geq -y$.

Viceversa se $-y \leq x \leq y$, allora si ha $-x \leq y$; poiché $|x| = x$, oppure $|x| = -x$ in ogni caso risulta $|x| \leq y$.

II) Sia $|x| \geq y$. Poiché $|x| = x$ oppure $|x| = -x$, si ha $x \geq y$ oppure $-x \geq y$; quindi $x \geq y$ oppure $x \leq -y$.

Viceversa, sia $x \geq y$ oppure $x \leq -y$. Per il teorema 1.2.29, affermazione IV, nel primo caso risulta $|x| \geq x \geq y$, nel secondo $-|x| \leq x \leq -y$; in ognuno dei casi si ha $|x| \geq y$.

III) I due membri dell'uguaglianza sono non negativi, pertanto, per il teorema 1.2.30, affermazione I, essa è verificata se e solo se si ha uguaglianza tra i quadrati. Per il teorema 1.2.29, affermazione III si ha

$$|xy|^2 = (xy)^2 = x^2 y^2 = |x|^2 |y|^2 = \big(|x||y|\big)^2 .$$

IV) I due membri della disuguaglianza sono non negativi, pertanto, per il teorema 1.2.30, affermazione II, è verificata se e solo se vale la disuguaglianza tra i quadrati. Per il teorema 1.2.29, affermazioni III e IV, e per l'affermazione III di questo teorema si ha

$$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq |x|^2 + 2|xy| + y^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = \big(|x| + |y|\big)^2 .$$

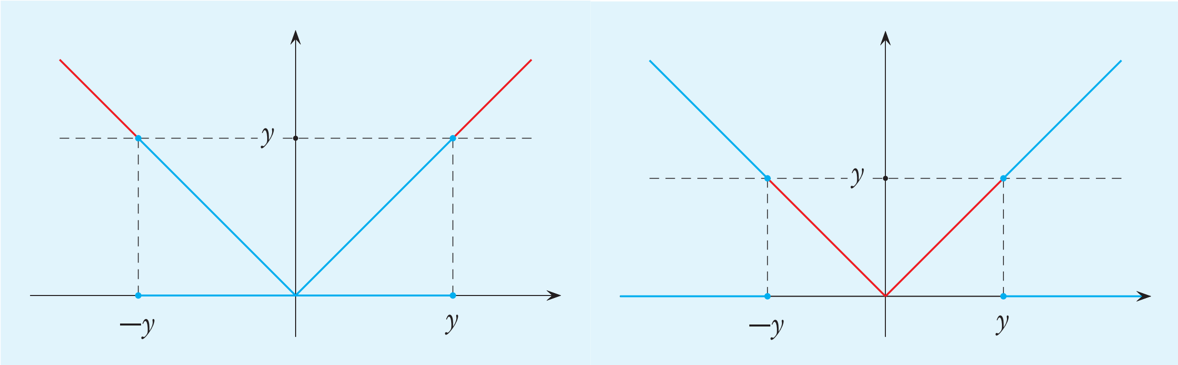


Figura 1.2.2
Prova geometrica delle affermazioni I (a sinistra) e II (a destra) del teorema 1.2.31.
Per determinare i numeri reali x tali che $|x| \leq y$ consideriamo i punti del grafico della funzione valore assoluto al di sotto della retta orizzontale individuata dall'ordinata y e li proiettiamo sull'asse delle ascisse, ottenendo il segmento di estremi $-y$ e y.
Per determinare i numeri reali x tali che $|x| \geq y$ consideriamo i punti del grafico della funzione valore assoluto al di sopra della retta orizzontale individuata dall'ordinata y e li proiettiamo sull'asse delle ascisse, ottenendo la semiretta orientata negativamente di origine $-y$ e la semiretta orientata positivamente di origine y.

V) I due membri della disuguaglianza sono non negativi, pertanto, per il teorema 1.2.30, affermazione II, è verificata se e solo se vale la disuguaglianza tra i quadrati. Per il teorema 1.2.29, affermazioni III e IV, e per l'affermazione III di questo teorema si ha

$$\begin{aligned}\big||x|-|y|\big|^2 &= \big(|x|-|y|\big)^2 = |x|^2 - 2|x||y| + |y|^2 = |x|^2 - 2|xy| + |y|^2 \leq \\ &\leq x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 = |x-y|^2 .\end{aligned}$$ ■

La disuguaglianza IV è detta **disuguaglianza triangolare**. Il nome deriva dall'interpretazione geometrica del valore assoluto (v. osservazione 1.2.28). Infatti, se $x, y \in \mathbb{R}$, allora $|x+y|$ è la distanza del punto x dal punto $-y$, $|x|$ è la distanza del punto x dall'origine e $|y|$ è la distanza del punto $-y$ dall'origine. Pertanto la disuguaglianza $|x+y| \leq |x| + |y|$ esprime il fatto che la distanza tra i due punti x e $-y$ di una retta non può essere maggiore della somma delle distanze dei due punti da un terzo punto (l'origine). Nel piano a questa disuguaglianza corrisponde il fatto che la lunghezza di un lato di un triangolo non può essere maggiore della somma delle lunghezze degli altri due.

1.2.4 Estremi di insiemi di numeri reali

Nel seguito è sottinteso che tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ considerati sono non vuoti.

Definizione di massimo e minimo di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $b, c \in \mathbb{R}$.
Diciamo che b è **massimo** di A quando $b \in A$ e, $\forall a \in A$, si ha $a \leq b$.
Diciamo che c è **minimo** di A quando $c \in A$ e, $\forall a \in A$, si ha $a \geq c$.

1.2.32 Teorema (unicità del massimo e del minimo)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

I) Se b_1 e b_2 sono massimo di A, allora $b_1 = b_2$.

II) Se c_1 e c_2 sono minimo di A, allora $c_1 = c_2$.

Dimostrazione. I) Se b_1 e b_2 sono massimo di A, allora, per la definizione di massimo, $b_1, b_2 \in A$. Inoltre $\forall a \in A$ si ha $a \leq b_1$, in particolare, ponendo $a = b_2$ si ha $b_2 \leq b_1$. Ripetendo il ragionamento con b_1 e b_2 scambiati tra loro si ottiene anche $b_1 \leq b_2$. Perciò $b_1 = b_2$.

II) La dimostrazione è analoga. ■

Il massimo di un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$, se esiste, è indicato con $\max A$, il minimo è indicato con $\min A$.

1.2.33 Teorema

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Se esistono $\min A$ e $\max A$, allora

$$\min A \leq \max A.$$

Dimostrazione. Per definizione di massimo $\max A \in A$ e $\min A$ è minore o uguale a ogni elemento di A, in particolare $\min A \leq \max A$. ■

1.2.34 Esempio. Siano

$$A_1 = \{-1\}, \qquad A_2 = \{0, 2, 3, 4\}, \qquad A_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\},$$
$$A_4 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}, \quad A_5 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}, \quad A_6 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}.$$

È facile verificare che $\min A_1 = \max A_1 = -1$, $\min A_2 = 0$, $\max A_2 = 4$, $\min A_3 = 1$, $\max A_3 = 3$.

L'insieme A_4 non ha minimo. Infatti sia $a \in A_4$ e indichiamo con b il punto medio tra a e 1, cioè $b = (a+1)/2$. Evidentemente da $1 < a$ segue $2 < a + 1 < 2a$, quindi $1 < b < a$; poiché $a < 3$ è anche $b < 3$, quindi $b \in A_4$. Perciò b è un elemento di A_4 minore di a, quindi a non è minimo di A_4. Abbiamo così provato che nessun elemento di A_4 è il minimo dell'insieme. In modo analogo, considerando $c = (a+3)/2$, si prova che ciascun elemento a di A_4 non è massimo. Pertanto A_4 non ha né massimo né minimo.

Si ha $\max A_5 = 2$, mentre A_5 non ha minimo. Infatti, qualunque sia $a \in A_5$, $a - 1$ è un elemento di A_5 minore di a, quindi a non è il minimo di A_5.

L'insieme A_6 non ha né massimo né minimo. Infatti, se $a \in A_6$, allora o $a \leq 0$, quindi $4 > a$ e $4 \in A_6$, oppure $a > 3$, quindi $a + 1 \in A_6$ e $a + 1 > a$. In ogni caso, esiste un elemento di A_6 maggiore di a. In modo analogo si dimostra che A_6 non ha minimo. ◀

È evidente da questi esempi che un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ può non avere massimo, o non avere minimo, o non avere né massimo né minimo.

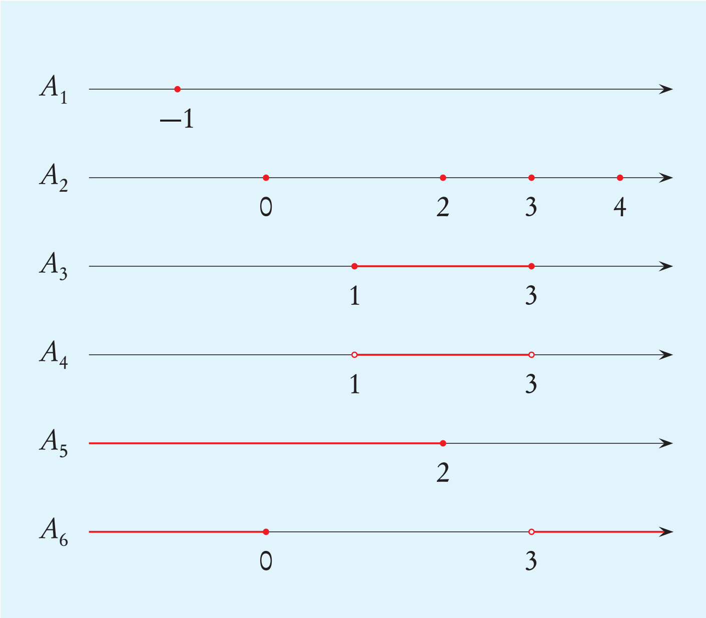


Figura 1.2.3
Gli insiemi studiati nell'esempio 1.2.34

1.2.35 Osservazione. Se $A \subseteq \mathbb{R}$ ha un numero finito di elementi, allora esistono massimo e minimo di A.

Questo fatto è evidente; una dimostrazione rigorosa richiede l'utilizzo del principio di induzione che vedremo nella sottosezione 1.3.1. ◀

Gli insiemi A_4 e A_6 dell'esempio 1.2.34 non hanno né massimo né minimo, ma c'è una differenza tra le due situazioni. Non esistono numeri reali maggiori o uguali a ogni elemento di A_6, mentre esistono numeri reali, ad esempio 4, maggiori o uguali a ogni elemento di A_4.

Per distinguere queste due situazioni diamo le seguenti definizioni.

Definizione di maggiorante e minorante di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$.
Diciamo che x è un **maggiorante** di A quando $\forall a \in A$ si ha $a \leq x$.
Diciamo che x è un **minorante** di A quando $\forall a \in A$ si ha $a \geq x$.

1.2.36 Esempio. Consideriamo gli insiemi studiati nell'esempio 1.2.34.

Qualunque numero maggiore o uguale a -1 è maggiorante per A_1; qualunque numero minore o uguale a -1 è minorante per A_1.

I maggioranti di A_2 sono tutti e soli i numeri maggiori o uguale a 4, mentre i minoranti sono tutti e soli i numeri minori o uguali a 0.

I maggioranti di A_3 sono tutti e soli i numeri maggiori o uguale a 3, mentre i minoranti sono tutti e soli i numeri minori o uguali a 1. Lo stesso vale per A_4.

L'insieme A_5 non ha minoranti. Infatti se $x \in \mathbb{R}$ è tale che $x > 2$, allora evidentemente non è un minorante, mentre se $x \leq 2$, allora $x - 1$ è un elemento di A_5 minore di x. I maggioranti di A_5 sono tutti e soli i numeri maggiori o uguali a 2.

Con ragionamenti analoghi a quelli fatti per dimostrare che A_5 non ha minoranti, si dimostra che A_6 non ha né maggioranti né minoranti. ◀

Definizione di insieme limitato superiormente, limitato inferiormente, limitato

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$.

Diciamo che A è **superiormente limitato** quando l'insieme dei maggioranti di A è non vuoto, in caso contrario diciamo che A è **superiormente illimitato**.

Diciamo che A è **inferiormente limitato** quando l'insieme dei minoranti di A è non vuoto, in caso contrario diciamo che A è **inferiormente illimitato**.

Diciamo che A è **limitato** quando A è sia superiormente limitato che inferiormente limitato, in caso contrario diciamo che A è **illimitato**.

1.2.37 Osservazione. Talvolta risulta utile l'osservazione che un insieme A è limitato se e solo se $\{|a| \mid a \in A\}$ è superiormente limitato. Ovviamente 0 è in ogni caso un minorante di $\{|a| \mid a \in A\}$, quindi tale insieme è superiormente limitato se e solo se è limitato.

Infatti, se esiste x maggiorante di $\{|a| \mid a \in A\}$, allora, $\forall a \in A$, si ha $|a| \leq x$, quindi, per le proprietà del valore assoluto 1.2.31, affermazione I, risulta $-x \leq a \leq x$; perciò $-x$ è un minorante e x è un maggiorante di A.

Viceversa, se esistono x minorante e y maggiorante di A, allora, $\forall a \in A$, si ha $a \leq y$ e $-a \leq -x$; poiché o $|a| = a$, oppure $|a| = -a$, risulta $|a| \leq \max\{-x, y\}$. Quindi $\max\{-x, y\}$ è un maggiorante di $\{|a| \mid a \in A\}$. ◀

1.2.38 Esempio. Consideriamo gli insiemi studiati nell'esempio 1.2.34.

Nell'esempio 1.2.36 abbiamo determinato i maggioranti e i minoranti di tali insiemi. Da ciò segue che gli insiemi A_1, A_2, A_3 e A_4 sono superiormente limitati e inferiormente limitati, quindi sono limitati. L'insieme A_5 è superiormente limitato e inferiormente illimitato, mentre A_6 è superiormente e inferiormente illimitato; quindi A_5 e A_6 sono illimitati. ◀

Dalle definizioni si ottiene immediatamente il seguente teorema.

1.2.39 Teorema

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$.

Si ha $x = \max A$ se e solo se $x \in A$ e x è maggiorante di A.

Si ha $x = \min A$ se e solo se $x \in A$ e x è minorante di A.

Definizione di estremo superiore e estremo inferiore di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$.

Se A è superiormente limitato chiamiamo **estremo superiore** di A il minimo dell'insieme dei maggioranti.

Se A è inferiormente limitato chiamiamo **estremo inferiore** di A il massimo dell'insieme dei minoranti.

L'esempio 1.2.34 mostra che vi sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ privi di minimo, quindi non è garantito che un insieme superiormente limitato abbia estremo superiore; tuttavia, per la completezza di $\mathbb{R}$, l'insieme dei maggioranti di ogni insieme superiormente limitato ha minimo. Analogamente l'insieme dei minoranti di ogni insieme inferiormente limitato ha massimo.

Vale cioè il seguente teorema.

1.2.40 Teorema (esistenza dell'estremo superiore)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Se A è superiormente limitato, allora l'insieme dei maggioranti di A ha minimo.

Dimostrazione. Indichiamo con B l'insieme dei maggioranti di A.

Per la definizione di maggiorante, qualunque siano $x \in A$ e $y \in B$ risulta $x \leq y$. Perciò, per l'assioma di completezza, esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $\forall x \in A$, $x \leq c$ e $\forall y \in B$, $y \geq c$. La prima disuguaglianza significa che c è un maggiorante di A, la seconda che c è minore o uguale a ogni maggiorante di A, pertanto c è il minimo dell'insieme dei maggioranti. ■

Un teorema analogo vale per l'estremo inferiore.

Per il teorema appena dimostrato, l'estremo superiore di un insieme superiormente limitato esiste sempre; esso è unico perché è unico il minimo di qualunque insieme. Tale estremo superiore è indicato con $\sup A$.

Nel caso che A sia superiormente illimitato si pone inoltre $\sup A = +\infty$.

In modo del tutto analogo l'estremo inferiore di un insieme A inferiormente limitato si indica con $\inf A$, mentre se A è inferiormente illimitato si pone $\inf A = -\infty$.

1.2.41 Esempio. Consideriamo gli insiemi studiati negll'esempio 1.2.34.

Nell'esempio 1.2.36 abbiamo determinato i maggioranti e i minoranti di tali insiemi. Da quanto visto segue facilmente che $\inf A_1 = \sup A_1 = -1$, $\inf A_2 = 0$, $\sup A_2 = 4$, $\inf A_3 = \inf A_4 = 1$, $\sup A_3 = \sup A_4 = 3$, $\sup A_5 = 2$. Poiché A_5 è inferiormente illimitato si ha $\inf A_5 = -\infty$; poiché A_6 è inferiormente e superiormente illimitato risulta $\inf A_6 = -\infty$ e $\sup A_6 = +\infty$. ◀

1.2.42 Teorema (caratterizzazione dell'estremo superiore)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ superiormente limitato e $a \in \mathbb{R}$. Il numero a è estremo superiore di A se e solo se sono verificate le condizioni:

a) $\forall x \in A$, $x \leq a$,

b) $\forall y \in \mathbb{R}$ tale che $y < a$, esiste $z \in A$ tale che $z > y$.

Dimostrazione. Si ha $a = \sup A$ se e solo se a è un maggiorante di A e a è minore o uguale a ogni maggiorante.

La condizione che a sia un maggiorante è la a).

Il numero a è minore o uguale a ogni maggiorante se e solo se ogni $y \in \mathbb{R}$ tale che $y < a$ non è maggiorante, cioè esiste $z \in A$ tale che $z > y$. Quindi la condizione che a è minore o uguale a ogni maggiorante è equivalente alla (b). ■

Il teorema seguente è l'analogo per l'estremo inferiore.

1.2.43 Teorema (caratterizzazione dell'estremo inferiore)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ inferiormente limitato e $a \in \mathbb{R}$. Il numero a è estremo inferiore di A se e solo se sono verificate le condizioni:

a) $\forall x \in A,\ x \geq a$,

b) $\forall y \in \mathbb{R}$ tale che $y > a$, esiste $z \in A$ tale che $z < y$.

Il seguente teorema stabilisce la relazione tra massimo ed estremo superiore di un insieme.

1.2.44 Teorema

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$.

I) Se A ha massimo, allora è superiormente limitato e $\max A = \sup A$.

II) Se A è superiormente limitato e $\sup A \in A$, allora ha massimo e $\max A = \sup A$.

Dimostrazione. I) Se esiste $\max A$, allora esso è maggiorante di A, che quindi è superiormente limitato; inoltre $\max A$ è un elemento di A, per cui è minore o uguale a ogni maggiorante, perciò è è l'estremo superiore.

II) Se A è superiormente limitato e $\sup A \in A$, allora $\sup A$ è un maggiorante di A che appartiene ad A, per il teorema 1.2.39 esso è il massimo di A. ■

Un teorema analogo lega minimo ed estremo inferiore.

1.2.45 Teorema

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ limitato. Allora:

$$\inf A \leq \sup A.$$

Dimostrazione. Sia $x \in A$. Poiché $\inf A$ è un minorante di A e $\sup A$ è un maggiorante di A, si ha $\inf A \leq x \leq \sup A$. ■

1.3 Numeri naturali, interi, razionali

Studiamo ora i sistemi dei numeri naturali, dei numeri interi e dei numeri razionali; tali sistemi numerici sono introdotti come sottoinsiemi dell'insieme dei numeri reali, le operazioni e la relazione d'ordine su di essi sono ereditate da quelle sui numeri reali.

1.3.1 Numeri naturali

Introduciamo l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali come sottoinsieme di $\mathbb{R}$. L'idea di base per introdurre il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ costituito dai numeri naturali è che tale insieme è individuato dalle seguenti proprietà:

1. $0 \in \mathbb{N}$;
2. se $n \in \mathbb{N}$, allora $n + 1 \in \mathbb{N}$;
3. un numero reale appartiene a $\mathbb{N}$ solo se si ottiene a partire da 0 applicando la regola 2.

La proprietà 3. ci dice che l'insieme che vogliamo definire è il più piccolo sottoinsieme di $\mathbb{R}$ per cui valgono le proprietà 1. e 2., tale insieme può essere ottenuto intersecando tutti gli insiemi che godono di tali proprietà. Quindi traduciamo in termini rigorosi questa idea con le seguenti definizioni.

Definizione di insieme induttivo

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Diciamo che A è un **insieme induttivo** quando A verifica:

a) $0 \in A$,

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ x \in A \implies x+1 \in A$.

1.3.1 Esempio. Si verifica facilmente che sono insiemi induttivi $\mathbb{R}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$ e $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

Non è invece induttivo l'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \cup \{-2\}$, perché $-2 \in A$, ma $-2+1=-1 \notin A$; quindi non è verificata la condizione b) della definizione. ◀

Definizione di insieme dei numeri naturali

Chiamiamo **insieme dei numeri naturali** e indichiamo con $\mathbb{N}$ l'intersezione di tutti gli insiemi induttivi di numeri reali.

Analogamente a quanto definito nel caso dei numeri reali, indichiamo con $\mathbb{N}^*$ l'insieme $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1.3.2 Teorema

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Se A è induttivo, allora $\mathbb{N} \subseteq A$.

Dimostrazione. L'intersezione di una famiglia di insiemi è inclusa in ciascuno degli insiemi che si intersecano, quindi $\mathbb{N}$, intersezione di tutti gli insiemi induttivi, è incluso in ogni insieme induttivo. ■

1.3.3 Teorema

L'insieme $\mathbb{N}$ è induttivo.

Dimostrazione. Il numero 0 appartiene a ogni insieme induttivo, quindi appartiene all'intersezione di tutti gli insiemi induttivi, cioè a $\mathbb{N}$.

Se $x \in \mathbb{N}$, allora, qualunque sia $A \subseteq \mathbb{R}$ induttivo, si ha $x \in A$, quindi $x+1 \in A$; pertanto $x+1$ appartiene a ogni insieme induttivo, cioè $x+1 \in \mathbb{N}$.

Pertanto $\mathbb{N}$ soddisfa entrambe le condizioni della definizione di insieme induttivo. ■

La proprietà di $\mathbb{N}$ di essere il più piccolo insieme induttivo si traduce facilmente nel teorema seguente, che viene utilizzato frequentemente per dimostrare affermazioni relative ai numeri naturali.

1.3.4 Teorema (principio di induzione)

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $\mathscr{P}(n)$ una proposizione. Se sono verificate le condizioni:

a) $\mathscr{P}(0)$ è vera,

b) $\forall n \in \mathbb{N}, \mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$,

allora $\mathscr{P}(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. Posto $A = \{n \in \mathbb{N} \,|\, \mathscr{P}(n) \text{ è vera}\}$, dobbiamo dimostrare che $A = \mathbb{N}$. Per la definizione di A, si ha $A \subseteq \mathbb{N}$, quindi resta da dimostrare che $\mathbb{N} \subseteq A$; poiché ogni insieme induttivo contiene $\mathbb{N}$ (v. teorema 1.3.2), è sufficiente dimostrare che A è induttivo.

Dalla condizione a) segue $0 \in A$. Inoltre, se $n \in A$, allora $\mathscr{P}(n)$ è vera, per la condizione b) anche $\mathscr{P}(n+1)$ è vera, perciò $n+1 \in A$. Questo prova che A è induttivo.

Il teorema è così provato. ■

Studiamo la struttura dell'insieme $\mathbb{N}$. Anzitutto determiniamone gli estremi.

1.3.5 Teorema

$$\min \mathbb{N} = 0.$$

Dimostrazione. Poiché $0 \in \mathbb{N}$, per dimostrare che $0 = \min A$ è sufficiente provare che ogni elemento di $\mathbb{N}$ è maggiore o uguale a 0; ciò significa che, posto $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}$, occorre provare che $\mathbb{N} \subseteq A$. Per il teorema 1.3.2 ciò è vero se A è induttivo.

Si ha $0 \geq 0$, quindi $0 \in A$; se $x \in A$, allora $x+1 > x \geq 0$, pertanto anche $x+1 \in A$. Pertanto A è induttivo. ■

1.3.6 Teorema

$$\sup \mathbb{N} = +\infty.$$

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo che $\mathbb{N}$ sia superiormente limitato.

Poniamo $M = \sup \mathbb{N}$. Se $n \in \mathbb{N}$, allora $n+1 \in \mathbb{N}$, perciò $n+1 \leq M$; pertanto, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $n \leq M-1$, quindi $M-1$ è maggiorante di $\mathbb{N}$. Perciò M non è il più piccolo dei maggioranti di $\mathbb{N}$ e ciò è assurdo. ■

Dall'idea intuitiva di insieme dei numeri naturali, sappiamo che tra un numero naturale n e $n+1$ non vi sono altri numeri naturali. Dimostriamo rigorosamente questo fatto.

1.3.7 Teorema

Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Allora $n-1 \in \mathbb{N}$.

DIMOSTRAZIONE. Dobbiamo dimostrare che si ha $\mathbb{N}^* \subseteq \{n \in \mathbb{N}^* \mid n-1 \in \mathbb{N}\}$, che equivale a $\mathbb{N} \subseteq \{0\} \cup \{n \in \mathbb{N}^* \mid n-1 \in \mathbb{N}\}$. Per il teorema 1.3.2, posto

$$A = \{0\} \cup \{n \in \mathbb{N}^* \mid n-1 \in \mathbb{N}\},$$

è sufficiente dimostrare che A è induttivo.

Evidentemente $0 \in A$.

Sia $n \in A$. Allora $n \in \mathbb{N}$, quindi, per il teorema 1.3.5, $n \geq 0$, pertanto $n+1 \geq 1$, quindi $n+1 \in \mathbb{N}^*$; inoltre $(n+1)-1 = n \in \mathbb{N}$. Pertanto $n+1 \in A$. ■

Una conseguenza di questo teorema è il seguente.

1.3.8 Teorema

$$\min\bigl(\mathbb{N} \setminus \{0\}\bigr) = 1.$$

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema 1.3.7 se $n \in \mathbb{N}^*$, allora $n-1 \in \mathbb{N}$, pertanto, per il teorema 1.3.5, $n-1 \geq 0$, cioè $n \geq 1$. Pertanto 1 è il più piccolo elemento di $\mathbb{N}^*$. ■

Generalizziamo il teorema 1.3.7, considerando la differenza di due numeri naturali.

1.3.9 Teorema

Siano $m, n \in \mathbb{N}$. Se $m \leq n$, allora $n - m \in \mathbb{N}$.

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo il teorema per induzione su n, cioè consideriamo l'affermazione

$$\mathscr{P}(n): \qquad \forall m \in \mathbb{N}, \quad m \leq n \implies n-m \in \mathbb{N}.$$

Se $n = 0$ e $m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$, allora $m = 0$, quindi $n - m = 0 \in \mathbb{N}$. Pertanto $\mathscr{P}(0)$ è vera.

Supponiamo vera $\mathscr{P}(n)$ e sia $m \in \mathbb{N}$ tale che $m \leq n+1$. Se $m = 0$, allora si ha $(n+1) - m = n+1 \in \mathbb{N}$. Se $m \neq 0$, allora, per il teorema 1.3.7, risulta $m-1 \in \mathbb{N}$ e

$$m - 1 \leq (n+1) - 1 = n,$$

quindi, per ipotesi induttiva, $n-(m-1) \in \mathbb{N}$, cioè $(n+1) - m \in \mathbb{N}$. Pertanto $\mathscr{P}(n+1)$ è vera.

Per il principio di induzione 1.3.4 $\mathscr{P}(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$. ■

1.3.10 Teorema

Siano $m, n \in \mathbb{N}$. Se $m < n$, allora $m + 1 \leq n$.

DIMOSTRAZIONE. Se $m < n$, allora, per il teorema 1.3.9, risulta $n - m \in \mathbb{N}$, inoltre si ha $n - m \neq 0$, quindi $n - m \in \mathbb{N}^*$. Allora, per il teorema 1.3.8, $n - m \geq 1$, quindi $n \geq m + 1$. ■

Questi teoremi consentono di ottenere informazioni sull'esistenza di minimo e massimo per sottoinsiemi di $\mathbb{N}$.

1.3.11 Teorema

Sia $A \subseteq \mathbb{N}$. Allora:

I) A ha minimo;

II) se A è superiormente limitato, allora ha massimo.

Dimostrazione. I) Per il teorema 1.3.5 $\mathbb{N}$ è limitato inferiormente, quindi anche A è limitato inferiormente. Per l'analogo del teorema 1.2.44 per il minimo, è sufficiente dimostrare che $\inf A \in A$.

Posto $m = \inf A$, dimostriamo per assurdo che $m \in A$. Supponiamo quindi che sia $m \notin A$. Per la caratterizzazione dell'estremo inferiore 1.2.42 esiste $z \in A$ tale che $z < m+1$; poiché abbiamo supposto $m \notin A$, si ha $z \neq m$, perciò $m < z$. Ancora per il teorema 1.2.42, esiste $w \in A$ tale che $m \leq w < z$. Pertanto $0 < z - w < (m+1) - m = 1$. Per il teorema 1.3.9 $w - z \in \mathbb{N}$, ma ciò è assurdo, perché per il teorema 1.3.8 non esistono numeri naturali compresi tra 0 e 1.

II) La dimostrazione è analoga a quella dell'affermazione precedente. ■

Le operazioni di addizione e moltiplicazione tra numeri naturali danno come risultato un numero naturale. Si ha cioè:

1.3.12 Teorema

Siano $m, n \in \mathbb{N}$. Allora:

I) $m + n \in \mathbb{N}$,

II) $m \cdot n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. I) Fissato $m \in \mathbb{N}$, dimostriamo l'affermazione applicando il principio di induzione 1.3.4 alla proposizione $\mathscr{P}(n)$: $m + n \in \mathbb{N}$.

Poiché $m + 0 = m$, $\mathscr{P}(0)$ è vera.

Supponiamo vera $\mathscr{P}(n)$. Allora $m + (n+1) = (m+n) + 1$, ma $m + n \in \mathbb{N}$ per ipotesi induttiva, quindi anche $(m+n)+1 \in \mathbb{N}$. Pertanto $\mathscr{P}(n+1)$ è vera.

II) Fissato $m \in \mathbb{N}$, dimostriamo l'affermazione applicando il principio di induzione 1.3.4 alla proposizione $\mathscr{P}(n)$: $m \cdot n \in \mathbb{N}$.

Si ha $m \cdot 0 = 0 \in \mathbb{N}$, quindi $\mathscr{P}(0)$ è vera.

Supponiamo vera $\mathscr{P}(n)$. Allora $m \cdot (n+1) = m \cdot n + m$ è somma di due numeri naturali, quindi, per l'affermazione I, è naturale. Perciò $\mathscr{P}(n+1)$ è vera. ■

Per questo teorema addizione e moltiplicazione possono essere considerate come operazioni tra numeri naturali. Continuando a usare i simboli $+$ e $\cdot$ per indicare la restrizione ai naturali di addizione e moltiplicazione, abbiamo le seguenti proprietà.

1.3.13 Teorema

L'insieme $\mathbb{N}$ con le operazioni $+$ e $\cdot$ verifica gli assiomi C1–C3, C5–C7 e C9, non verifica gli assiomi C4 e C8.

DIMOSTRAZIONE. È evidente che, poiché le proprietà associativa, commutativa e distributiva valgono in $\mathbb{R}$, esse valgono anche in sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, in particolare in $\mathbb{N}$. Pertanto gli assiomi C1, C2, C5, C6 e C9 sono verificati in $\mathbb{N}$.

Per la definizione di insieme induttivo $0 \in \mathbb{N}$ e $1 = 0+1 \in \mathbb{N}$, quindi sono verificati gli assiomi C3 e C7.

Se $n \in \mathbb{N}^*$, allora, per il teorema 1.3.5, $n > 0$, quindi $-n < 0$ (v. teorema 1.2.17), pertanto $-n \notin \mathbb{N}$. Perciò non è verificato l'assioma C4.

Se $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$, allora, per il teorema 1.2.22, $0 < 1/n$ e, per il teorema 1.2.24, $1/n < 1$; per il teorema 1.3.8 non esistono naturali compresi tra 0 e 1, quindi $1/n \notin \mathbb{N}$. Perciò non è verificato l'assioma C8. ■

1.3.2 APPLICAZIONI DEL PRINCIPIO DI INDUZIONE

In questa sottosezione utilizziamo il principio di induzione 1.3.4 per giustificare alcune definizioni e per dimostrare alcune formule che risulteranno utili in seguito.

Studiamo anzitutto le cosiddette **definizioni per induzione**. Per definire un concetto che dipende da $n \in \mathbb{N}$, possiamo anzitutto definirlo per $n = 0$ e inoltre dare la definizione per $n+1$ sulla base della definizione data per n. Il principio di induzione assicura che con questo procedimento il concetto è definito $\forall n \in \mathbb{N}$.

Utilizziamo questa modalità di dare una definizione per definire rigorosamente la potenza di un numero reale. L'idea intuitiva è che se $n \in \mathbb{N}^*$ e $x \in \mathbb{R}^*$, allora la potenza n-sima di x, indicata con x^n, è il prodotto di n fattori uguali a x. Pensando che il prodotto di 0 fattori sia l'elemento neutro moltiplicativo, cioè 1, risulta naturale dare la seguente definizione per induzione.

Definizione di potenza di un numero reale

Siano $x \in \mathbb{R}^*$ e $n \in \mathbb{N}$. Definiamo x^n ponendo:

a) $x^0 = 1$,

b) $x^{n+1} = x \cdot x^n$.

Poniamo inoltre, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0^n = 0$.

Chiamiamo **potenza n-esima** di x il numero reale x^n.

Un'altra definizione che è naturale dare per induzione è quella di prodotto dei primi n numeri naturali non nulli., che è chiamato fattoriale di n. Come vedremo, risulta utile definire anche il fattoriale di 0.

Definizione di fattoriale

Sia $n \in \mathbb{N}$. Chiamiamo **fattoriale** di n il numero naturale $n!$ definito ponendo:

a) $0! = 1$,

b) $(n+1)! = (n+1)\,n!$.

Risulta quindi $0! = 0$, $1! = 1 \cdot 0! = 1$, $2! = 2 \cdot 1 = 2$, $3! = 3 \cdot 2 = 6$, $4! = 4 \cdot 6 = 24$.

1.3.14 Esempio (disuguaglianza di Bernoulli[1]). Proviamo per induzione che $\forall x \in \mathbb{R}$ tale che $x > -1$ e $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha

$$(1+x)^n \geq 1+nx\,.$$

Fissato $x > -1$, la proposizione che vogliamo provare, $\forall n \in \mathbb{N}$, è

$$\mathscr{P}(n): \qquad (1+x)^n \geq 1+nx\,.$$

Per $n = 0$ la disuguaglianza è $(1+x)^0 \geq 1+0\cdot x$, cioè $1 \geq 1$ che è vera.

Supponiamo ora vera $\mathscr{P}(n)$ e dimostriamo $\mathscr{P}(n+1)$. Si ha

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n\,,$$

poiché $1+x > 0$, da $\mathscr{P}(n)$ otteniamo

$$(1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x+x^2 \geq 1+(n+1)x\,,$$

nell'ultimo passaggio si è utilizzato il fatto che $x^2 \geq 0$. Pertanto $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$, cioè vale $\mathscr{P}(n+1)$.

Per il principio di induzione 1.3.4 la disuguaglianza vale $\forall n \in \mathbb{N}$. ◀

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^*$. Studiamo la potenza $(a+b)^n$. Si ha

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= aa+ab+ba+bb = a^2+2ab+b^2\,,\\
(a+b)^3 &= (a+b)(aa+ab+ba+bb) =\\
&= aaa+aab+aba+abb+baa+bab+bba+bbb =\\
&= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\,.
\end{aligned}$$

Risulta evidente che in generale $(a+b)^n$ può essere scritto come somma di tutti i termini che si ottengono moltiplicando n fattori, ciascuno dei quali è uguale ad a o a b. Quindi ciascun addendo è del tipo $a^{n-k}b^k$, con $k = 0, 1, \ldots, n$, dove si intende che $a^0 = b^0 = 1$ anche quando $a = 0$ o $b = 0$. Generalmente per ciascun k vi sono più addendi del tipo $a^{n-k}b^k$. Risulta quindi

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_{n,k}\,a^{n-k}b^k\,,$$

con opportuni coefficienti $C_{n,k} \in \mathbb{N}^*$.

Per determinare questi coefficienti, osserviamo anzitutto che $C_{n,k}$ è il numero di stringhe diverse formate da n caratteri, $n-k$ dei quali sono a e k sono b. Esiste una sola stringa di n caratteri a, quindi $C_{n,0} = 1$. Vi sono n stringhe con un b, perché b può comparire in una qualunque delle n posizioni, quindi $C_{n,1} = n$. Da ciascuna stringa con

[1] La disuguaglianza prende il nome da Jakob Bernoulli (Basilea, 1655 - Basilea, 1705) che la dimostrò e la utilizzò più volte in un trattato del 1689, ma era già stata trovata nel 1668 da René François Walter de Sluze (Visé, Belgio, 1622 - Liège, Belgio, 1685).
Bernoulli ha dato fondamentali contributi al calcolo differenziale e alla teoria della probabilità.
De Sluze è stato tra i primi studiosi del calcolo differenziale.

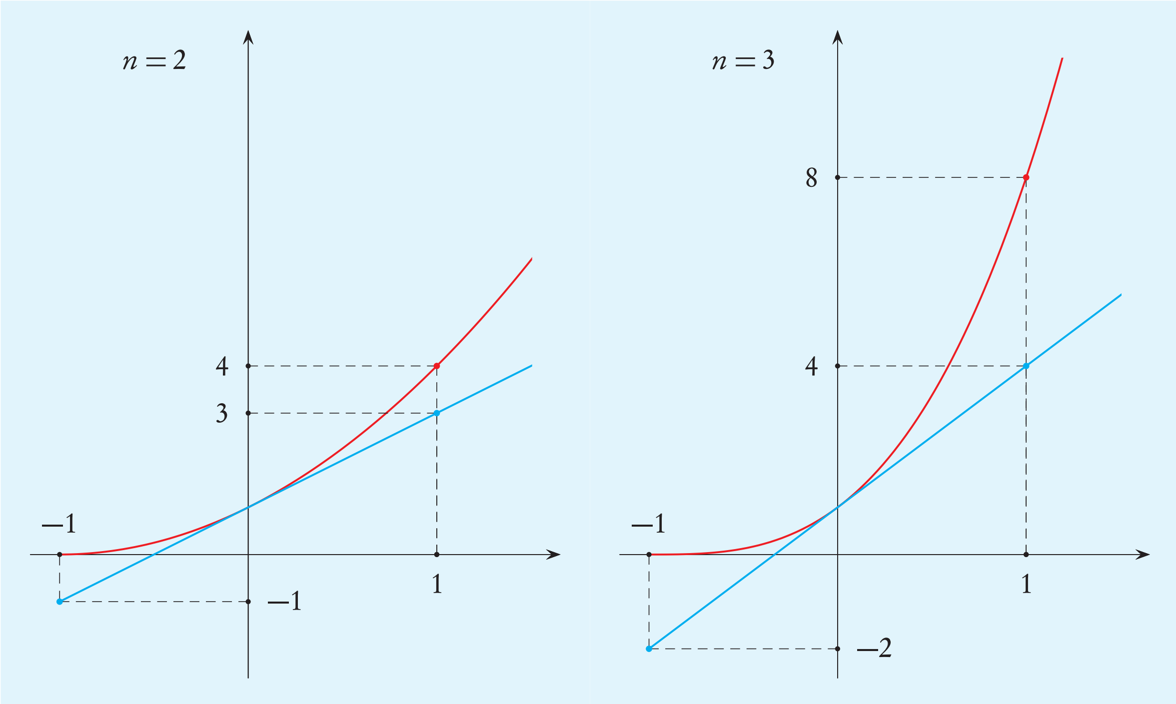


Figura 1.3.1
Grafici delle funzioni $x \mapsto 1+nx$ (in blu) e $x \mapsto (1+x)^n$ (in rosso) per $n=2$ (a sinistra) e $n=3$ (a destra). Per la disuguaglianza di Bernoulli, se $x > -1$, la prima delle due funzioni in x ha valore minore o uguale a quello dalla seconda nello stesso punto.

$n-1$ a e un b, sostituendo b a uno degli a, si ottiene una stringa con $n-2$ a e 2 b; ogni stringa di questo tipo si ottiene in tale modo, quindi per ogni stringa con $n-1$ a e un b otteniamo $n-1$ stringhe con $n-2$ a e 2 b; però ciascuna di queste viene ottenuta 2 volte. Infatti, ad esempio, la stringa $bba\dots a$ si ottiene sia da $aba\dots a$, sostituendo b alla a in prima posizione, sia da $baa\dots a$, sostituendo b alla a in seconda posizione. Pertanto

$$C_{n,2} = \frac{n-1}{2} C_{n,1} = \frac{n(n-1)}{2} .$$

In modo analogo, data una stringa con $n-k$ a e k b, sostituendo b a uno degli a si ottiene una stringa con $n-(k+1)$ a e $k+1$ b; quindi da ognuna di tali stringhe si ottengono $n-k$ stringhe con $n-(k+1)$ a e $k+1$ b, ma ciascuna si ottiene $k+1$ volte; pertanto $C_{n,k+1} = \big((n-k)/(k+1)\big)C_{n,k}$.

Abbiamo quindi

$$C_{n,k} = \frac{n-k+1}{k} C_{n,k-1} = \frac{(n-k+1)(n-k+2)}{k(k-1)} C_{n,k-2} = \dots =$$
$$= \frac{(n-k+1)(n-k+2)\cdots n}{k(k-1)\cdots 1} C_{n,0} = \frac{(n-k)!\,(n-k+1)(n-k+2)\cdots n}{(n-k)!\,k(k-1)\cdots 1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} .$$

Formalizziamo il ragionamento fatto.

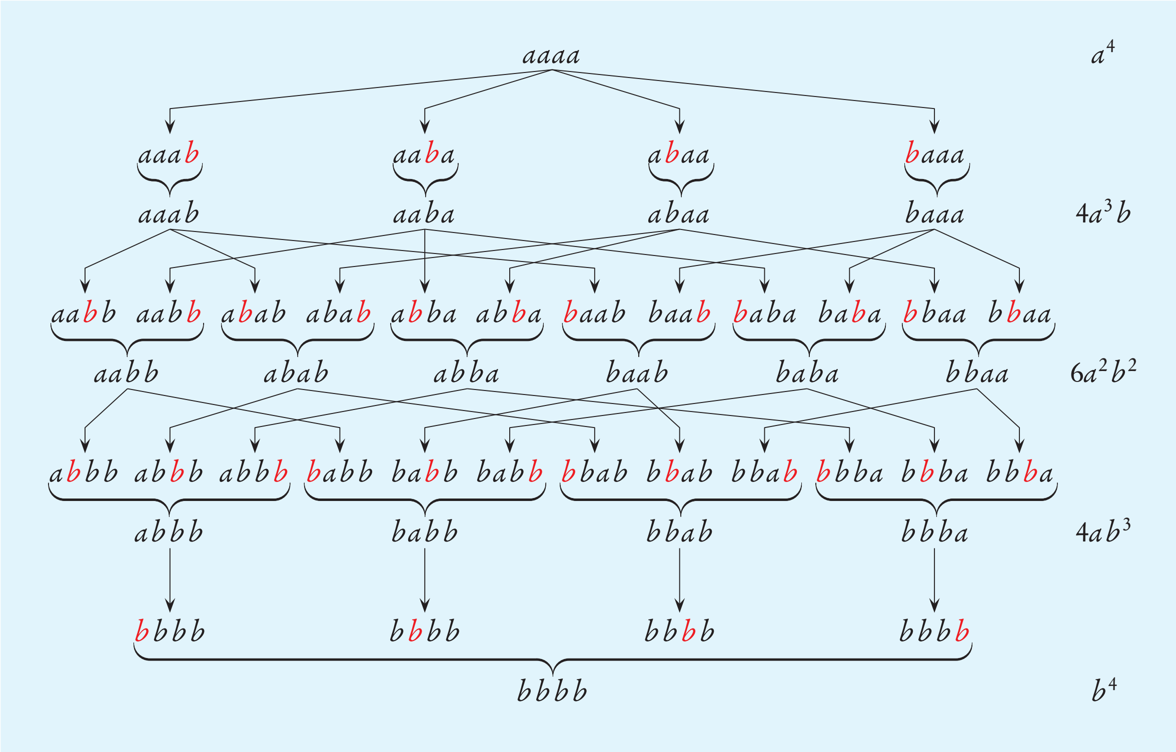


Figura 1.3.2
La procedura illustrata sopra per contare il numero di stringhe formate da un numero fissato di a e un numero fissato di b, nel caso di stringhe di 4 lettere. A ogni passo si sostituisce una a con una b, questo può essere fatto in tanti modi diversi quante sono le a; ogni nuova stringa si ottiene tante volte quante sono le b.

Definizione di coefficiente binomiale

Siano $n \in \mathbb{N}$ e $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Chiamiamo **coefficiente binomiale** di n e k il numero naturale

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

(si legge "n su k").

Ogni coefficiente binomiale è quoziente di due numeri naturali ed è un numero naturale. Questo è evidente dal ragionamento fatto per definirlo, può essere dimostrato rigorosamente utilizzando le seguenti proprietà dei coefficienti binomiali.

1.3.15 Teorema (proprietà dei coefficienti binomiali)

Siano $n \in \mathbb{N}$ e $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Allora:

I)

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1;$$

II)

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k};$$

III) se inoltre $n \neq 0$ e $k \neq 0$, si ha

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

DIMOSTRAZIONE. I) Si ha

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1,$$
$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \frac{n!}{n!} = 1.$$

II) Si ha

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\big(n-(n-k)\big)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}.$$

III) Si ha

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} = \\ &= \frac{(n-1)!\,k}{(k-1)!\,k(n-k+1)!} + \frac{(n-1)!\,(n-k)}{k!\,(n-k-1)!\,(n-k)} = \\ &= \frac{n!\big(k+(n-k)\big)}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}.\end{aligned}$$

■

Risulta naturale disporre i coefficienti binomiali in forma di triangolo infinito (v. figura 1.3.3), mettendo nella n-sima riga gli n coefficienti $n-1$ su k al variare di k tra 0 e $n-1$. Le proprietà dei coefficienti binomiali consentono di calcolare facilmente gli elementi di una riga a partire dagli elementi della riga precedente. Tale triangolo è detto **triangolo di Tartaglia** o **triangolo di Pascal**[2].

Enunciamo infine la formula per il calcolo della potenza di un binomio.

In questa e in altre formule dello stesso tipo si utilizza la convenzione che la notazione a^0 indica sempre il numero 1, anche se a assume il valore 0.

[2]Il triangolo prende il nome da Nicolò Tartaglia (Brescia 1500 - Venezia 1577) e da Blaise Pascal (Clermont-Ferrand, Francia, 1623 - Parigi, 1662). Tartaglia descrisse il triangolo in un trattato del 1566, Pascal lo studiò approfonditamente nel "Traité du triangle arithmétique" del 1653, ma il triangolo era già noto da alcuni secoli ai matematici persiani e cinesi.

Tartaglia è noto per avere trovato la formula risolutiva delle equazioni di terzo grado.

Pascal ha dato fondamentali contributi in vari settori della matematica, tra cui la geometria e il calcolo delle probabilità; ha dato anche contributi allo studio della filosofia.

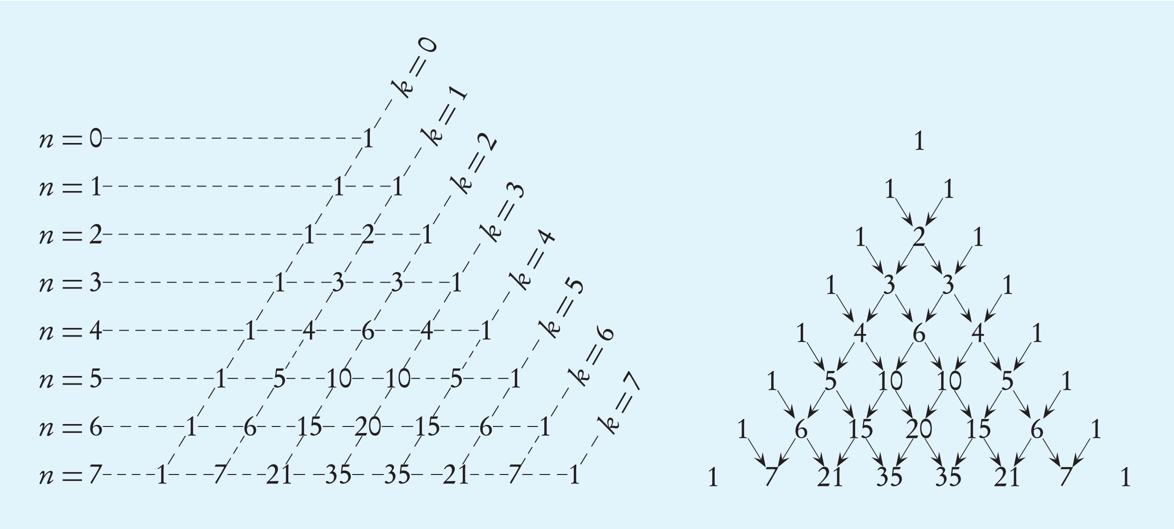


Figura 1.3.3
Le prime 8 righe del triangolo di Tartaglia. Il k-simo elemento della n-sima riga è il coefficiente binomiale $n-1$ su $k-1$. Per l'affermazione III del teorema 1.3.15, ogni elemento del triangolo che non sia su un lato è somma dei due elementi che stanno sopra.

1.3.16 Teorema (potenza di un binomio)

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^*$. Allora

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k .$$

Dimostrazione. Dimostriamo per induzione che, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, è vera

$$\mathscr{P}(n): \qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k .$$

Se $n=1$, per l'affermazione I del teorema 1.3.15, si ha

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a+b ;$$

pertanto $\mathscr{P}(1)$ è vera.

Supponiamo vera $\mathscr{P}(n)$. Per l'ipotesi induttiva si ha

$$(a+b)^{n+1} = (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^{n-(j-1)} b^j =$$

$$= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1} =$$

$$= \binom{n+1}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n+1-k} b^k + \binom{n+1}{n+1} a^0 b^{n+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k ,$$

dove si sono utilizzate le affermazioni I e III del teorema 1.3.15. Pertanto $\mathscr{P}(n+1)$ è vera.

Per il principio di induzione 1.3.4 l'uguaglianza vale $\forall n \in \mathbb{N}^*$. ■

La formula della potenza di un binomio può essere generalizzata per la potenza della somma di più di due addendi. Questo richiede di generalizzare il concetto di coefficiente binomiale.

Definizione di coefficiente multinomiale

Siano $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ e, per $j = 1,2,\dots,m$, $k_j \in \{0,1,\dots,n\}$, tali che si ha $\sum_{j=1}^{m} k_j = n$. Chiamiamo **coefficiente multinomiale** n su $k_1, k_2, \dots, k_m$ il numero naturale

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{\prod_{j=1}^{m} k_j!} .$$

Se $m = 2$, allora dalla condizione $k_1 + k_2 = n$ segue $k_2 = n - k_1$, quindi

$$\binom{n}{k_1, k_2} = \frac{n!}{k_1! k_2!} = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} = \binom{n}{k_1} ;$$

perciò i coefficienti binomiali sono un caso particolare dei coefficienti multinomiali.

Ogni coefficiente multinomiale è quoziente di due numeri naturali ed è un numero naturale, ciò è una semplice conseguenza delle seguenti proprietà dei coefficienti multinomiali.

1.3.17 Teorema (proprietà dei coefficienti multinomiali)

Siano $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ e, per $j = 1,2,\dots,m$, $k_j \in \{0,1,\dots,n\}$, tali che si ha $\sum_{j=1}^{m} k_j = n$. Allora:

I)

$$\binom{n}{0,\dots,0,n,0,\dots,0} = 1 ;$$

II)

$$\binom{n}{k_1,\dots,k_{l-1},0,k_{\ell+1},\dots,k_m} = \binom{n}{k_1,\dots,k_{l-1},k_{\ell+1},\dots,k_m} ;$$

III) se inoltre $n \neq 0$ e, per $j = 1,2,\dots,m$, $k_j \neq 0$, si ha

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \sum_{j=1}^{m} \binom{n-1}{k_1,\dots,k_{j-1},k_j - 1,k_{j+1},\dots,k_m} .$$

DIMOSTRAZIONE. I) Si ha

$$\binom{n}{0,\dots,0,n,0,\dots,0} = \frac{n!}{0!\cdots 0!\,n!\,0!\cdots 0!} = \frac{n!}{n!} = 1\,.$$

II) Si ha

$$\begin{aligned}\binom{n}{k_1,\dots,k_{l-1},0,k_{\ell+1},\dots,k_m} &= \frac{n!}{k_1!\cdots k_{\ell-1}!\,0!\,k_{\ell+1}!\cdots k_m!} = \\ &= \frac{n!}{k_1!\cdots k_{\ell-1}!\,k_{\ell+1}!\cdots k_m!} = \binom{n}{k_1,\dots,k_{l-1},k_{\ell+1},\dots,k_m}.\end{aligned}$$

III) Si ha

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{m}\binom{n-1}{k_1,\dots,k_{j-1},k_j-1,k_{j+1},\dots,k_m} = \sum_{j=1}^{m}\frac{(n-1)!}{k_1!\cdots k_{j-1}!(k_j-1)!\,k_{j+1}!\cdots k_m!} = \\ &= \sum_{j=1}^{m}\frac{(n-1)!\,k_j}{k_1!\cdots k_{j-1}!\,k_j!\,k_{j+1}!\cdots k_m!} = \frac{(n-1)!\,\sum_{j=1}^{m}k_j}{k_1!\,k_2!\cdots k_m!} = \frac{(n-1)!\,n}{k_1!\,k_2!\cdots k_m!} = \\ &= \binom{n}{k_1,k_2,\dots,k_m}.\end{aligned}$$

■

Possiamo ora generalizzare il teorema sulla potenza di un binomio 1.3.16.

1.3.18 Teorema (potenza di un polinomio)

Siano $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ e $a_1,a_2,\dots,a_m \in \mathbb{R}$. Allora, posto

$$I_{m,n} = \left\{(k_1,k_2,\dots,k_m) \in \mathbb{N}^m \,\middle|\, k_1+k_2+\cdots+k_m = n\right\},$$

si ha

$$(a_1+a_2+\cdots+a_m)^n = \sum_{(k_1,k_2,\dots,k_m)\in I_{m,n}} \binom{n}{k_1,k_2,\dots,k_m}\prod_{j=1}^{m} a_j^{k_j}\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo il teorema per induzione rispetto al numero m degli addendi.

Per $m = 2$ l'affermazione si riduce al teorema sulla potenza di un binomio.

Supponiamo che la formula valga per m. Allora si ha

$$\begin{aligned}&(a_1+a_2+\cdots+a_m+a_{m+1})^n = \left((a_1+a_2+\cdots+a_m)+a_{m+1}\right)^n = \\ &= \sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}(a_1+a_2+\cdots+a_m)^{\ell}\,a_{m+1}^{n-\ell} = \\ &= \sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}\sum_{(k_1,k_2,\dots,k_m)\in I_{\ell,m}}\binom{\ell}{k_1,k_2,\dots,k_m}\prod_{j=1}^{m}a_j^{k_j}\,a_{m+1}^{n-\ell} =\end{aligned}$$

$$=\sum_{\ell=0}^{n}\sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_m)\in I_{\ell,m}}\frac{n!}{\ell!(n-\ell)!}\frac{\ell!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}\prod_{j=1}^{m}a_j^{k_j}a_{m+1}^{n-\ell}=$$

$$=\sum_{\ell=0}^{n}\sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_m)\in I_{\ell,m}}\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!(n-\ell)!}\prod_{j=1}^{m}a_j^{k_j}a_{m+1}^{n-\ell}.$$

Se $(k_1,k_2,\ldots,k_m)\in I_{\ell,m}$, allora $k_1+k_2+\cdots+k_m=\ell$, quindi $k_1+k_2+\cdots+k_m+(n-\ell)=n$, pertanto $(k_1,k_2,\ldots,k_m,n-\ell)\in I_{n,m+1}$. Inoltre ogni elemento di $I_{n,m+1}$ può essere scritto nella forma $(k_1,k_2,\ldots,k_m,n-\ell)$ con $\ell=0,1,\ldots,n$ e $(k_1,k_2,\ldots,k_m)\in I_{\ell,m}$. Quindi

$$\sum_{\ell=0}^{n}\sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_m)\in I_{\ell,m}}\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!(n-\ell)!}\prod_{j=1}^{m}a_j^{k_j}a_{m+1}^{n-\ell}=$$

$$=\sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_m,k_{m+1})\in I_{n,m+1}}\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!k_{m+1}!}\prod_{j=1}^{m}a_j^{k_j}a_{m+1}^{k_{m+1}}=$$

$$=\sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_m,k_{m+1})\in I_{n,m+1}}\binom{n}{k_1,k_2,\ldots k_m,k_{m+1}}\prod_{j=1}^{m+1}a_j^{k_j}.$$

Pertanto la formula vale per $m+1$.

Per induzione vale $\forall m\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. ■

1.3.19 Teorema

Siano $a,b\in\mathbb{R}$ e $n\in\mathbb{N}^*$. Allora

$$a^n-b^n=(a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^k b^{n-k-1}.$$

In questo enunciato si richiede che sia $n\in\mathbb{N}^*$, perché per $n=0$ il secondo membro non ha senso. Infatti l'indice k nella sommatoria dovrebbe verificare contemporaneamente le disuguaglianze $k\geq 0$ e $k\leq -1$.

Dimostrazione. Per $n\in\mathbb{N}^*$ indichiamo con $\mathscr{P}(n)$ l'uguaglianza da dimostrare. Possiamo applicare il principio di induzione 1.3.4 in forma modificata. Infatti è evidente che se si dimostra che $\mathscr{P}(1)$ è vera e che $\mathscr{P}(n)\implies\mathscr{P}(n+1)$, possiamo concludere che $\mathscr{P}(n)$ è vera $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Se $n=1$, allora il primo membro è uguale a $a-b$, mentre il secondo è

$$(a-b)\sum_{k=0}^{0}a^k b^{-k}=(a-b)a^0b^0=a-b;$$

perciò l'uguaglianza è verificata per $n=1$.

Se $\mathscr{P}(n)$ è vera, allora si ha

$$a^{n+1}-b^{n+1}=a^{n+1}-a^n b+a^n b-b^{n+1}=(a-b)a^n+b(a^n-b^n)=$$

$$= (a-b)a^n + b(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1} = (a-b)a^n b^0 + (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} =$$
$$= (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k},$$

quindi $\mathscr{P}(n+1)$ è vera. ■

1.3.20 Osservazione. Abbiamo affermato (v. osservazione 1.2.35) che un sottoinsieme finito di $\mathbb{R}$ ha massimo e minimo. Vediamo come il principio di induzione consente di dare una dimostrazione rigorosa di questo fatto.

Dimostriamo l'affermazione che se un insieme ha n elementi, con $n \in \mathbb{N}^*$, allora ha massimo.

Se un insieme ha un elemento, allora questo è maggiore o uguale a ogni elemento dell'insieme, quindi è il massimo.

Supponiamo che ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ con n elementi abbia massimo e sia $A \subseteq \mathbb{R}$ con $n+1$ elementi. Scegliamo un arbitrario elemento a di A. Allora $A \setminus \{a\}$ ha n elementi, quindi ha massimo; sia $b = \max\bigl(A \setminus \{a\}\bigr)$. Se $b \geq a$, allora b è maggiore o uguale a ogni elemento di A, quindi b è il massimo di A. Se invece $b < a$, allora a è maggiore o uguale a ogni elemento di A, quindi a è il massimo di A.

Evidentemente per il minimo il ragionamento è analogo. ◀

1.3.3 Numeri interi

Una volta definito, come sottoinsieme di $\mathbb{R}$, l'insieme dei numeri naturali, è semplice definire l'insieme dei numeri interi e studiarne le proprietà.

Definizione di insieme dei numeri interi

Chiamiamo **insieme dei numeri interi** e indichiamo con $\mathbb{Z}$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ tale che
$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in \mathbb{N}\}.$$

Analogamente a quanto definito nel caso dei numeri reali, indichiamo con $\mathbb{Z}^*$ l'insieme $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

È evidente che $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.

È inoltre facile dimostrare che $n \in \mathbb{Z} \iff -n \in \mathbb{Z}$.

Come per i numeri naturali le operazioni tra numeri interi danno come risultato un numero intero.

1.3.21 Teorema

Siano $m, n \in \mathbb{Z}$. Allora:

I) $m + n \in \mathbb{Z}$,

II) $m \cdot n \in \mathbb{Z}$.

DIMOSTRAZIONE. I) Esaminiamo i vari casi possibili.

Se $m, n \in \mathbb{N}$, allora, per il teorema I), si ha $m + n \in \mathbb{N}$. Se $m \in \mathbb{N}$ e $-n \in \mathbb{N}$, allora o $m \geq -n$, oppure $m < -n$; dal teorema 1.3.9 segue che nel primo caso si ha $m + n = m - (-n) \in \mathbb{N}$, mentre nel secondo caso si ha $-(m + n) = (-n) - m \in \mathbb{N}$. Infine, se $-m, -n \in \mathbb{N}$, allora risulta $-(m + n) = (-m) + (-n) \in \mathbb{N}$.

In ogni caso o $m + n \in \mathbb{N}$, oppure $-(m + n) \in \mathbb{N}$, quindi $m + n \in \mathbb{Z}$.

II) Esaminiamo i vari casi possibili.

Se $m, n \in \mathbb{N}$, allora, per il teorema II), $m \cdot n \in \mathbb{N}$. Se $m \in \mathbb{N}$ e $-n \in \mathbb{N}$, allora $-(m \cdot n) = m \cdot (-n) \in \mathbb{N}$. Infine, se $-m, -n \in \mathbb{N}$, allora $m \cdot n = (-m) \cdot (-n) \in \mathbb{N}$.

In ogni caso o $m \cdot n \in \mathbb{N}$, oppure $-(m \cdot n) \in \mathbb{N}$, quindi $m \cdot n \in \mathbb{Z}$. ■

Questo teorema assicura che addizione e moltiplicazione possono essere considerate come operazioni tra numeri interi. Continuando a usare i simboli $+$ e $\cdot$ per indicare la restrizione ai naturali di addizione e moltiplicazione, abbiamo le seguenti proprietà.

1.3.22 Teorema

L'insieme $\mathbb{Z}$ con le operazioni $+$ e $\cdot$ verifica gli assiomi C1–C7 e C9, non verifica l'assioma C8.

DIMOSTRAZIONE. Per motivi analoghi a quelli relativi a $\mathbb{N}$, gli assiomi C1, C2, C5, C6 e C9 sono verificati in $\mathbb{Z}$. Inoltre sappiamo che $0, 1 \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, quindi sono verificati gli assiomi C3 e C7.

Se $n \in \mathbb{Z}$, allora o $n \in \mathbb{N}$, quindi $-(-n) \in \mathbb{N}$, pertanto $-n \in \mathbb{Z}$, oppure $-n \in \mathbb{N}$, quindi $-(-n) = n \in \mathbb{Z}$; quindi è verificato l'assioma C4

Come nel caso dei numeri naturali, se $n \in \mathbb{Z}$ e $n > 1$, allora, $1/n \notin \mathbb{Z}$. Perciò non è verificato l'assioma C8. ■

Studiamo gli estremi di $\mathbb{Z}$. Si ha:

1.3.23 Teorema

$$\inf \mathbb{Z} = -\infty, \qquad \sup \mathbb{Z} = +\infty.$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché $\mathbb{Z}$ contiene $\mathbb{N}$, che è superiormente illimitato (v. teorema 1.3.6, anche $\mathbb{Z}$ è superiormente illimitato.

Dimostriamo ora che $\mathbb{Z}$ è inferiormente illimitato. Poiché $\mathbb{N}$ è superiormente illimitato, $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x$ non è un maggiorante di $\mathbb{N}$, quindi esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > -x$, cioè $-n < x$; siccome $-n \in \mathbb{Z}$ questo prova che x non è minorante di $\mathbb{Z}$. Pertanto $\mathbb{Z}$ non ha minoranti. ■

Analogamente a quanto avviene per i numeri naturali si ha:

1.3.24 Teorema

Siano $m, n \in \mathbb{Z}$. Se $m \neq n$, allora $|n - m| \geq 1$.

DIMOSTRAZIONE. Poiché $n-m \in \mathbb{Z}$, $|n-m| \in \mathbb{Z}$, inoltre $|n-m| > 0$, quindi $|n-m| \in \mathbb{N}^*$ Pertanto, per il teorema 1.3.8 $|n-m| \geq 1$. ■

Infine vale il seguente teorema, la cui dimostrazione è simile a quella dell'analogo teorema per i sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ (v. teorema 1.3.11).

1.3.25 Teorema

Sia $A \subseteq \mathbb{Z}$.
Se A è superiormente limitato, allora ha massimo.
Se A è inferiormente limitato, allora ha minimo.

1.3.4 NUMERI RAZIONALI

A partire dall'insieme dei numeri interi, definiamo l'insieme dei numeri razionali.

Definizione di insieme dei numeri razionali

Chiamiamo **insieme dei numeri razionali** e indichiamo con $\mathbb{Q}$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ tale che

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \exists p \in \mathbb{Z} \colon \exists q \in \mathbb{Z}^* \colon \ x = \frac{p}{q} \right\}.$$

Analogamente a quanto definito nel caso dei numeri reali, indichiamo con $\mathbb{Q}^*$ l'insieme $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Poiché $1 \in \mathbb{Z}^*$, se $p \in \mathbb{Z}$, allora $p = p/1 \in \mathbb{Q}$, quindi $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.

1.3.26 Teorema

Siano $p, q \in \mathbb{Q}$. Allora:

I) $p + q \in \mathbb{Q}$,

II) $p \cdot q \in \mathbb{Q}$.

DIMOSTRAZIONE. I) Se $p = j/k$ e $q = m/n$, con $j, m \in \mathbb{Z}$ e $k, n \in \mathbb{N}^*$, si ha

$$p + q = \frac{j}{k} + \frac{m}{n} = \frac{j \cdot n}{k \cdot n} + \frac{m \cdot k}{n \cdot k} = \frac{j \cdot n + m \cdot k}{n \cdot k} \in \mathbb{Q}.$$

II) Se $p = j/k$ e $q = m/n$, con $j, m \in \mathbb{Z}$ e $k, n \in \mathbb{N}^*$, si ha

$$p \cdot q = \frac{j}{k} \cdot \frac{m}{n} = \frac{j \cdot m}{k \cdot n} \in \mathbb{Q}.$$ ■

1.3.27 Teorema

L'insieme $\mathbb{Q}$ con le operazioni $+$ e $\cdot$ verifica gli assiomi C1–C9 cioè è un campo.

DIMOSTRAZIONE. Per motivi analoghi a quelli relativi a $\mathbb{N}$, gli assiomi C1, C2, C5, C6 e C9 sono verificati in $\mathbb{Q}$. Inoltre sappiamo che $0, 1 \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$, quindi sono verificati gli assiomi C3 e C7.

Se $p/q \in \mathbb{Q}$, allora $-p/q = (-p)/q \in \mathbb{Q}$.

Se $p/q \in \mathbb{Q}^*$, allora $p \neq 0$, cioè $p \in \mathbb{Z}^*$, perciò $q/p \in \mathbb{Q}$. ■

Studiamo gli estremi di $\mathbb{Q}$. Si ha:

1.3.28 Teorema

$$\inf \mathbb{Q} = -\infty, \qquad \sup \mathbb{Q} = +\infty.$$

DIMOSTRAZIONE. L'insieme $\mathbb{Q}$ contiene $\mathbb{Z}$ che è superiormente e inferiormente illimitato, quindi anche $\mathbb{Q}$ è superiormente e inferiormente illimitato. ■

Il campo ordinato $\mathbb{Q}$ non è completo. Per provarlo dimostriamo anzitutto il seguente teorema.

1.3.29 Teorema

Non esiste $x \in \mathbb{Q}$ tale che $x^2 = 2$.

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo il teorema per assurdo. Supponiamo che esista $x \in \mathbb{Q}$ tale che $x^2 = 2$. Possiamo supporre $x > 0$, perché se fosse $x < 0$ sarebbe $-x > 0$ e $(-x)^2 = x^2 = 2$.

Pertanto esistono $m, n \in \mathbb{N}^*$ e tali che $(m/n)^2 = 2$. Possiamo supporre che la frazione sia ridotta ai minimi termini, cioè che m e n siano privi di fattori comuni. Si ha $m^2 = 2n^2$, quindi m^2 è pari. Poiché il quadrato di un numero dispari è dispari, m deve essere pari, quindi esiste $p \in \mathbb{N}^*$ tale che $m = 2p$. Allora risulta $4p^2 = 2n^2$, cioè $2p^2 = n^2$, quindi n^2 è pari, pertanto n è pari. Quindi sia m che n sono pari, ma questo è assurdo, perché tali numeri sono privi di fattori comuni. ■

1.3.30 Teorema

Il campo ordinato $\mathbb{Q}$ non è completo.

DIMOSTRAZIONE. Poniamo

$$A = \{x \in \mathbb{Q}^+ \mid x^2 < 2\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{Q}^+ \mid x^2 > 2\}.$$

Gli insiemi A e B sono separati, perché se $a \in A$ e $b \in B$, allora si ha $a^2 < b^2$, quindi, per il teorema 1.2.30, affermazione III, risulta $a < b$.

Dimostriamo che non esiste in $\mathbb{Q}$ un elemento di separazione tra A e B, quindi $\mathbb{Q}$ non verifica l'assioma di completezza.

Poiché $1 \in A$, un eventuale elemento di separazione è maggiore o uguale a 1, quindi è positivo.

Poniamo

$$f:\mathbb{Q}^+\to\mathbb{Q}^+,\qquad f(x)=x+\frac{2-x^2}{x+2}=\frac{2x+2}{x+2}.$$

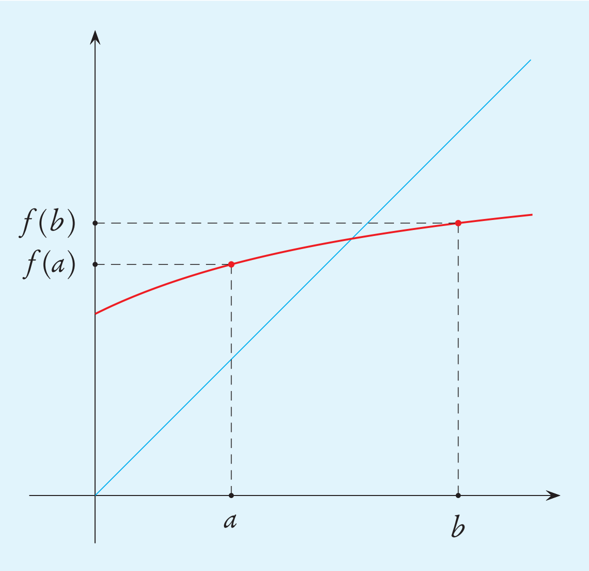


Figura 1.3.4
Grafico della funzione f utilizzata nella dimostrazione del teorema 1.3.30.
In blu la retta dei punti che hanno ordinata uguale all'ascissa.
Tale retta è più in basso del grafico di f nei punti di ascissa a con $a^2<2$ mentre è più in alto nei punti di ascissa b con $b^2>2$.

Evidentemente se $a\in A$, quindi $2-a^2>0$, si ha $f(a)>a$, mentre se $b\in B$ risulta $f(b)<b$. Inoltre, $\forall x\in\mathbb{Q}^+$, si ha

$$\big(f(x)\big)^2-2=\frac{4x^2+8x+4-2(x^2+4x+4)}{(x+2)^2}=\frac{2x^2-4}{(x+2)^2}.$$

Pertanto se $a\in A$, allora si ha $\big(f(a)\big)^2-2<0$, quindi $f(a)\in A$, se invece $b\in B$, allora si ha $\big(f(b)\big)^2-2>0$, quindi $f(b)\in B$.

Abbiamo così dimostrato che, se $a\in A$, allora $f(a)$ è un elemento di A maggiore di a, quindi a non è elemento di separazione. Analogamente, se $b\in B$, allora $f(b)$ è un elemento di B minore di b, quindi b non è elemento di separazione. Per il teorema 1.3.29, se $x\in\mathbb{Q}^+$, allora o $x^2<2$ o $x^2>2$, quindi $\mathbb{Q}^+=A\cup B$; poiché non esiste un elemento di separazione né in A né in B, non esiste un elemento di separazione in $\mathbb{Q}^+$. ■

1.4 Ulteriori proprietà dei numeri reali

Enunciamo anzitutto un teorema semplice, ma fondamentale per lo sviluppo dell'analisi.

1.4.1 Teorema

Sia $x\in\mathbb{R}$. Se $\forall y\in\mathbb{R}^+$ si ha $x\le y$, allora $x\le 0$.

Dimostrazione. Dimostriamo che se è vera la negazione della tesi, allora è vera la negazione dell'ipotesi. Quindi proviamo che, se $x>0$, allora esiste $y\in\mathbb{R}^+$ tale che $y<x$. Ciò è ovvio, possiamo scegliere $y=x/2$. ■

1.4.2 Teorema (proprietà di Archimede[3])

Siano $x, y \in \mathbb{R}$. Se $x > 0$ e $y > 0$, allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $y < nx$.

Dimostrazione. Siano $x, y > 0$. Poiché $\mathbb{N}$ è superiormente illimitato (v. teorema 1.3.6) y/x non è maggiorante di $\mathbb{N}$, perciò $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $n > y/x$; da questo segue $y < nx$. ■

1.4.3 Teorema

Sia $x \in \mathbb{R}$. Se $x > 0$, allora $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $1/n < x$.

Dimostrazione. Sia $x > 0$. Allora $1/x > 0$ e per la proprietà di Archimede 1.4.2, applicata ai numeri 1 e $1/x$, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $1/x < n \cdot 1$, quindi $1/n < x$. ■

Definizione di parte intera di un numero reale

Sia $x \in \mathbb{R}$. Chiamiamo **parte intera** di x e indichiamo con $[x]$, il numero intero

$$\max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}.$$

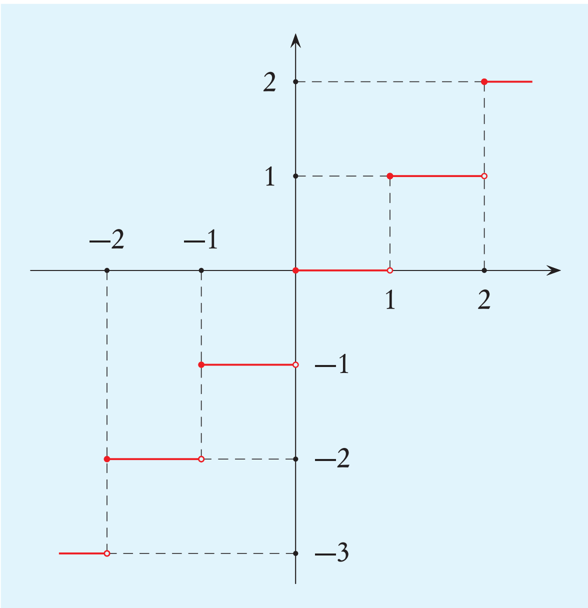


Figura 1.4.1
Grafico della funzione parte intera.

L'insieme $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{Z}$ superiormente limitato, perché x è un suo maggiorante; quindi per il teorema 1.3.25 tale insieme ha massimo. Perciò la definizione è corretta.

Abbiamo così definito una funzione da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Z}$, che è detta **funzione parte intera**.

[3] La prpoprietà prende il nome da Archimede di Siracusa (Siracusa, 287 a.C. - Siracusa, 212 a.C.), uno dei più grandi matematici della sua epoca, oltre che fisico e inventore.

La proprietà è riportata in un volume di Archimede del 225 a.C., riferita ai segmenti: dati due segmenti, è sempre possibile, ripetendo un numero sufficiente di volte uno dei due, ottenere un segmento più lungo dell'altro.

Archimede attribuisce la paternità della scoperta al matematico e astronomo Eudosso di Cnido (Cnido, Asia Minore, 408 a.C. - Cnido, 355 a.C.).

1.4.4 Osservazione. Dalla definizione segue immediatamente che $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha $[x] \in \mathbb{Z}$ e $[x] \leq x$. Inoltre $[x]+1$ è un intero più grande del più grande intero minore o uguale a x, quindi $[x]+1 > x$. ◀

1.4.5 Esempio. Risulta

$$[1]=1, \qquad [-2]=-2, \qquad \left[\frac{3}{2}\right]=1, \qquad \left[-\frac{3}{2}\right]=-2. \qquad ◀$$

Definizione di radice n-esima di un numero reale non negativo

Siano $a, x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ e $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Diciamo che x è **radice n-esima** di a quando

$$x^n = a.$$

1.4.6 Teorema (esistenza e unicità della radice n-esima)

Siano $a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ e $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Allora esiste uno e un solo $x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tale che $x^n = a$.

Dimostrazione. Sia $a = 0$. Poiché $0^n = 0$, 0 è radice n-esima di a. Se $x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ è tale che $x^n = 0$, allora si ha $x = 0$, perché un prodotto si annulla solo se almeno un fattore è nullo. Quindi 0 è l'unica radice n-esima di 0.

Consideriamo ora il caso $a > 0$.

Dimostriamo l'unicità della radice n-esima di a. Siano x_1 e x_2 radici n-esime di a. Poiché $a \neq 0$, si ha $x_1 \neq 0$ e $x_2 \neq 0$, quindi si ha $x_1 > 0$ e $x_2 > 0$. Per il teorema 1.3.19 risulta

$$0 = x_1^n - x_2^n = (x_1 - x_2) \sum_{k=0}^{n-1} x_1^k x_2^{n-k-1}.$$

Per la legge di annullamento del prodotto 1.2.5, uno dei due fattori deve essere nullo; si ha $\sum_{k=0}^{n-1} x_1^k x_2^{n-k-1} > 0$, perché ciascun addendo è positivo, quindi deve essere $x_1 - x_2 = 0$. Pertanto la radice n-esima di a è unica.

Per dimostrare l'esistenza della radice n-esima di a, posto $A = \{y \in \mathbb{R}^+ \,|\, y^n \leq a\}$, proviamo che A è superiormente limitato e il suo estremo superiore è la radice n-sima cercata.

Se $a \leq 1$, allora $a^n \leq a$, quindi $a \in A$; inoltre $\forall y \in \mathbb{R}$, se $y > 1$, allora $y^n > 1^n = 1 \geq a$, quindi $y \notin A$, perciò 1 è un maggiorante di A. Se invece $a > 1$, allora $1^n = 1 < a$, quindi $1 \in A$; inoltre $\forall y \in \mathbb{R}$, se $y > a$, allora $y^n > a^n \geq a$, quindi $y \notin A$, perciò a è un maggiorante di A. Pertanto A ha un elemento positivo ed è superiormente limitato, quindi ha estremo superiore positivo. Poniamo $x = \sup A$.

Dimostriamo che $x^n = a$. Sia $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, tale che $\varepsilon \leq x$. Poiché $x + \varepsilon > x = \sup A$, si ha $x + \varepsilon \notin A$, pertanto $(x+\varepsilon)^n > a$. Inoltre $x - \varepsilon < x$, perciò, per la caratterizzazione dell'estremo superiore, esiste $z \in A$ tale che $x - \varepsilon < z$, quindi $(x-\varepsilon)^n < z^n \leq a$; pertanto

$$(x-\varepsilon)^n < a < (x+\varepsilon)^n.$$

Poiché $0 \le x - \varepsilon < x < x + \varepsilon$, si ha
$$(x-\varepsilon)^n < x^n < (x+\varepsilon)^n,$$
cioè
$$-(x+\varepsilon)^n < -x^n < -(x-\varepsilon)^n.$$
Sommando membro a membro si ottiene
$$(x-\varepsilon)^n - (x+\varepsilon)^n < a - x^n < (x+\varepsilon)^n - (x-\varepsilon)^n;$$
per le proprietà del valore assoluto 1.2.31, affermazione I, queste disuguaglianze equivalgono a
$$|a - x^n| < (x+\varepsilon)^n - (x-\varepsilon)^n.$$
Per il teorema 1.3.19, tenuto conto che $\varepsilon \le x$, si ha
$$(x+\varepsilon)^n - (x-\varepsilon)^n = \big((x+\varepsilon)-(x-\varepsilon)\big)\sum_{k=0}^{n-1}(x+\varepsilon)^k(x-\varepsilon)^{n-k-1} \le 2\varepsilon\sum_{k=0}^{n-1}(2x)^k x^{n-k-1};$$
quindi, posto $M = 2\sum_{k=0}^{n-1}(2x)^k x^{n-k-1}$, risulta $|a - x^n| < M\varepsilon$, cioè $|a - x^n|/M < \varepsilon$. Questa disuguaglianza è vera per ogni ε compreso tra 0 ed x, quindi anche per ogni $\varepsilon > 0$. Per il teorema 1.4.1, risulta quindi $|a - x^n|/M \le 0$; poiché tale numero è non negativo, esso è uguale a 0. Pertanto $|a - x^n| = 0$, cioè $a = x^n$, quindi x è radice n-sima di a. ■

1.4.7 Teorema

Siano $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $x < y$.

I) Esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $x < q < y$.

II) Esiste $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tale che $x < z < y$.

La tesi del teorema viene espressa dicendo che $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sono **densi** in $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. I) Poiché $y - x > 0$, per il teorema 1.4.3 $\exists m \in \mathbb{N}$ tale che $y - x > 1/m$. Posto $n = [mx]$ e $q = (n+1)/m$, si ha $q \in \mathbb{Q}$; dimostriamo che q è compreso tra x e y.

Per l'osservazione 1.4.4 si ha $n \le mx < n+1$, quindi
$$\frac{n}{m} \le x < \frac{n+1}{m} = q,$$
pertanto $x < q$. Inoltre
$$y = x + (y - x) > \frac{n}{m} + \frac{1}{m} = q;$$
quindi q è il numero cercato.

II) Poiché $\sqrt{2}\,x < \sqrt{2}\,y$, per l'affermazione I esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $\sqrt{2}\,x < q < \sqrt{2}\,y$, da cui segue
$$x < \frac{q}{\sqrt{2}} < y.$$
Si ha $q/\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, perché in caso contrario sarebbe $\sqrt{2}/q \in \mathbb{Q}$, quindi $\sqrt{2} = q\big(\sqrt{2}/q\big) \in \mathbb{Q}$, contrariamente a quanto affermato dal teorema 1.3.29. ■

Definiamo una tipologia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ di particolare interesse. Sono gli insiemi che potremmo chiamare "senza buchi"; cioè tali che dati due punti dell'insieme, ogni punto compreso tra di essi appartiene ancora all'insieme. Formalizziamo questa idea nella seguente definizione.

Definizione di intervallo

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ avente più di un elemento. Diciamo che I è un **intervallo** quando

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad (x, y \in I \wedge x \leq z \leq y) \Longrightarrow z \in I\,.$$

Ovviamente un insieme con un solo elemento verifica la condizione scritta sopra. Per questo motivo un tale insieme viene detto **intervallo degenere**.

1.4.8 Esempio. Consideriamo gli insiemi studiati nell'esempio 1.2.34.

L'insieme $A_1 = \{-1\}$ ha un solo elemento, quindi è un intervallo degenere.

L'insieme $A_2 = \{0, 2, 3, 4\}$ non è un intervallo, perché $0, 2 \in A_2$ e $0 < 1 < 2$, ma $1 \notin A_2$.

L'insieme $A_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$ è un intervallo. Infatti se $x, y \in A_3$ e z è compreso tra x e y, allora $z \geq x \geq 1$ e $z \leq y \leq 3$, pertanto $z \in A_3$.

L'insieme $A_4 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$ è un intervallo, come si prova con ragionamenti simili a quelli relativi ad A_3.

L'insieme $A_5 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$ è un intervallo. Infatti se $x, y \in A_5$ e z è compreso tra x e y, allora $z \leq y \leq 2$, pertanto $z \in A_5$.

L'insieme $A_6 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$ non è un intervallo, perché $0, 4 \in A_6$ e $0 < 2 < 4$, ma $2 \notin A_6$. ◀

È facile rendersi conto che per conoscere un intervallo è sufficiente conoscerne gli estremi, inferiore e superiore, oltre a sapere se tali estremi, nel caso che siano reali, appartengono o meno all'intervallo. Esaminando i casi possibili otteniamo le seguenti tipologie di intervalli.

Definizione di intervallo aperto, chiuso, limitato, illimitato

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$.

Chiamiamo **intervallo chiuso e limitato** di estremi a e b, e indichiamo con $[a, b]$, l'insieme

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}\,.$$

Chiamiamo **intervallo chiuso a sinistra, aperto a destra, limitato** di estremi a e b, e indichiamo con $[a, b[$, l'insieme

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}\,.$$

Chiamiamo **intervallo aperto a sinistra, chiuso a destra, limitato** di estremi a e b, e indichiamo con $]a, b]$, l'insieme

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}\,.$$

Chiamiamo **intervallo aperto e limitato** di estremi a e b, e indichiamo con $]a,b[$, l'insieme
$$]a,b[=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a<x<b\}.$$

Chiamiamo **intervallo chiuso, superiormente illimitato e inferiormente limitato** di estremo a, e indichiamo con $[a,+\infty[$, l'insieme

$$[a,+\infty[=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\leq x\}.$$

Chiamiamo **intervallo aperto, superiormente illimitato e inferiormente limitato** di estremo a, e indichiamo con $]a,+\infty[$, l'insieme

$$]a,+\infty[=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a<x\}.$$

Chiamiamo **intervallo chiuso, inferiormente illimitato e superiormente limitato** di estremo b, e indichiamo con $]-\infty,b]$, l'insieme

$$]-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\leq b\}.$$

Chiamiamo **intervallo aperto, inferiormente illimitato e superiormente limitato** di estremo b, e indichiamo con $]-\infty,b[$, l'insieme

$$]-\infty,b[=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<b\}.$$

Inoltre, per coerenza con quanto definito sopra, poniamo:

$$]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}.$$

È evidente che ciascuno di questi insiemi è un intervallo. Viceversa si dimostra facilmente che ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che sia un intervallo rientra in una delle tipologie descritte sopra.

2
Successioni di numeri reali

2.1 Successioni

In questo capitolo studiamo le successioni: sono liste numerate di elementi di un certo insieme; possiamo indicare una successione con la scrittura

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots .$$

In questo modo a ogni numero naturale corrisponde un oggetto, pertanto una successione può essere vista come una funzione di dominio $\mathbb{N}$ e a valori in un determinato insieme, che solitamente è $\mathbb{R}$.

Le successioni costituiscono l'ambito più semplice in cui iniziare lo studio dei concetti fondamentali dell'analisi, in particolare il concetto di limite.

2.1.1 Terminologia

Definiamo anzitutto gli oggetti che studiamo.

Definizione di successione e di successione reale

Sia X un insieme non vuoto. Chiamiamo **successione** in X ogni funzione da $\mathbb{N}$ a X.

In particolare, chiamiamo **successione reale** ogni funzione da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$.

Una successione è una funzione con un particolare dominio: l'insieme dei numeri naturali. Tuttavia nello studio delle successioni il fatto che esse siano funzioni risulta marginale; pertanto c'è l'abitudine di utilizzare terminologie e notazioni diverse da quelle usate solitamente per le funzioni; le introduciamo con le seguenti definizioni.

Definizione di termine di una successione

Sia a una successione e $n \in \mathbb{N}$. Chiamiamo n-esimo **termine** (o **termine di indice** n) della successione a, e indichiamo con a_n, l'elemento $a(n)$.

Vista la notazione usata per indicarne i termini, indichiamo la successione a con la scrittura $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Con un abuso di linguaggio, chiamiamo successione anche una funzione di dominio $\mathbb{N}^*$, cioè una successione per cui non è definito il termine di indice 0. Questa viene indicata col simbolo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Definizione di insieme dei termini di una successione

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione. L'immagine di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cioè $\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$, è chiamato **insieme dei termini** della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

È essenziale non confondere una successione con l'insieme dei suoi termini: una funzione è diversa dalla sua immagine. Successioni diverse possono avere lo stesso insieme dei termini.

2.1.1 Esempio. Consideriamo le successioni reali con termine n-simo (v. figura 2.1.1):

$$
\begin{array}{llllllllll}
p_n=\dfrac{1}{n+1}, & 1 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{5} & \dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{7} & \dots; \\
q_n=\dfrac{n+(-1)^n}{n+1}, & 1 & 0 & 1 & \dfrac{1}{2} & 1 & \dfrac{2}{3} & 1 & \dots; \\
r_n=\dfrac{1}{5-2n}, & \dfrac{1}{5} & \dfrac{1}{3} & 1 & -1 & -\dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{5} & -\dfrac{1}{7} & \dots; \\
s_n=n, & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots; \\
t_n=\dfrac{2n+(-1)^n-1}{4}, & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & \dots; \\
u_n=3-n, & 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & \dots; \\
v_n=(-1)^n, & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \dots; \\
w_n=(-1)^n\dfrac{n+2}{n+1}, & 2 & -\dfrac{3}{2} & \dfrac{4}{3} & -\dfrac{5}{4} & \dfrac{6}{5} & -\dfrac{7}{6} & \dfrac{8}{7} & \dots; \\
z_n=(-1)^n n, & 0 & -1 & 2 & -3 & 4 & -5 & 6 & \dots.
\end{array}
$$

Si prova facilmente che si ha:

$$
\begin{aligned}
&\{p_n \mid n\in\mathbb{N}\}=\left\{\frac{1}{n+1}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\},\\
&\{q_n \mid n\in\mathbb{N}\}=\left\{\frac{n}{n+1}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{1\},\\
&\{r_n \mid n\in\mathbb{N}\}=\left\{-\frac{1}{2n+1}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}\cup\left\{1,\frac{1}{3},\frac{1}{5}\right\},\\
&\{s_n \mid n\in\mathbb{N}\}=\mathbb{N},\\
&\{t_n \mid n\in\mathbb{N}\}=\mathbb{N},\\
&\{u_n \mid n\in\mathbb{N}\}=\{n\in\mathbb{Z} \mid n\leq 3\},\\
&\{v_n \mid n\in\mathbb{N}\}=\{-1,1\},\\
&\{w_n \mid n\in\mathbb{N}\}=\left\{(-1)^n\frac{n+2}{n+1}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\},\\
&\{z_n \mid n\in\mathbb{N}\}=\{2n \mid n\in\mathbb{N}\}\cup\big\{-(2n+1)\,\big|\, n\in\mathbb{N}\big\}.
\end{aligned}
$$

Le successioni $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hanno lo stesso insieme dei termini: l'insieme dei numeri naturali. Tali successioni sono diverse, ad esempio $s_1=1$, mentre $t_1=0$. ◀

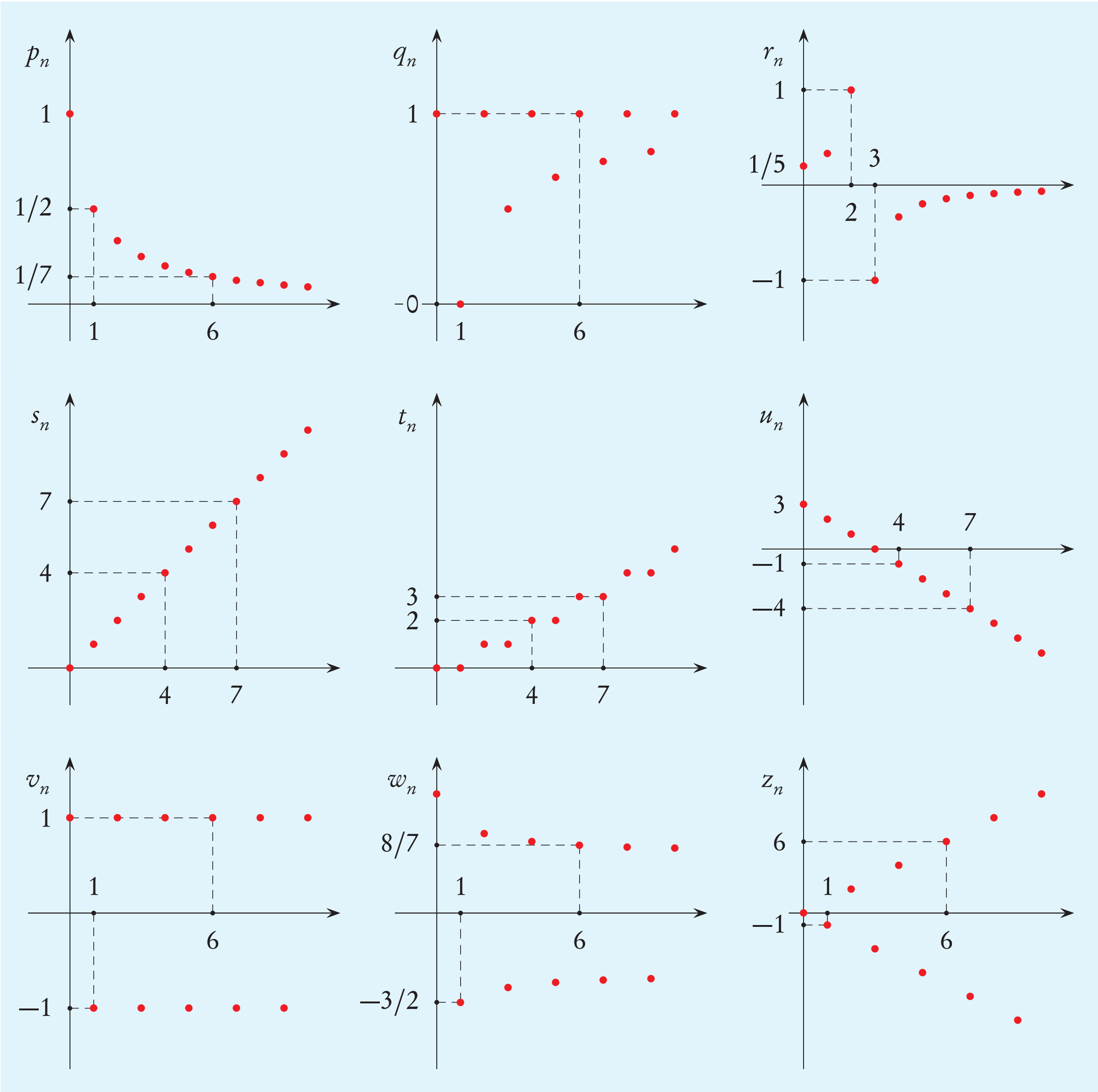


Figura 2.1.1
Le successioni definite nell'esempio 2.1.1.
Una successione reale è una funzione da $\mathbb{N}$, che è incluso in $\mathbb{R}$, a $\mathbb{R}$, quindi può essere rappresentata come sottoinsieme di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, cioè sottoinsieme del piano cartesiano. Perciò una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ viene rappresentata dai punti di coordinate (n, a_n), con $n \in \mathbb{N}$.

Nella sottosezione 1.3.1 abbiamo definito per induzione il fattoriale di un numero naturale; abbiamo posto $0! = 1$ e, $\forall n \in \mathbb{N}$, abbiamo posto $(n+1)! = (n+1)\,n!$. Questa procedura definisce una funzione da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$, cioè una successione.

Le successioni studiate nell'esempio 2.1.1 sono definite mediante una formula, che consente di determinare direttamente il termine n-simo; la successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (n!)_{n \in \mathbb{N}}$ è definita in modo diverso: si fissa a_0 e si stabilisce una "regola" che consente di determinare a_{n+1}, se si conosce a_n.

Le successioni definite in questo modo sono dette **successioni definite per ricorrenza** (o **per induzione**).

2.1.2 Esempio. Vediamo due esempi di successioni definite per ricorrenza.

Consideriamo la successione $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definita come segue:

$$\begin{cases} c_0 = 0\,, \\ c_{n+1} = \dfrac{2}{c_n + 2}\,, \quad \text{per } n \in \mathbb{N}\,. \end{cases}$$

Per essere certi che in questo modo risulta definita una successione occorre verificare che è sempre definito $2/(c_n+2)$, cioè che non si ottiene mai $c_n = -2$. Ciò segue dal fatto che si ha $c_0 \geq 0$ e, se $c_n \geq 0$, allora anche $c_{n+1} \geq 0$; quindi i termini sono non negativi, pertanto è sempre $c_n \neq -2$.

I primi termini della successione sono:

$$0 \quad \frac{2}{0+2} = 1 \quad \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3} \quad \frac{2}{(2/3)+2} = \frac{3}{4} \quad \frac{2}{(3/4)+2} = \frac{8}{11} \quad \frac{2}{(8/11)+2} = \frac{11}{15} \quad \ldots\,.$$

Consideriamo la successione $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definita come segue:

$$\begin{cases} d_0 = 1\,, \\ d_{n+1} = -d_n + n\,, \quad \text{per } n \in \mathbb{N}\,. \end{cases}$$

I primi termini della successione sono:

$$1 \quad -1+0=-1 \quad 1+1=2 \quad -2+2=0 \quad 0+3=3 \quad -3+4=1 \quad \ldots\,. \qquad ◀$$

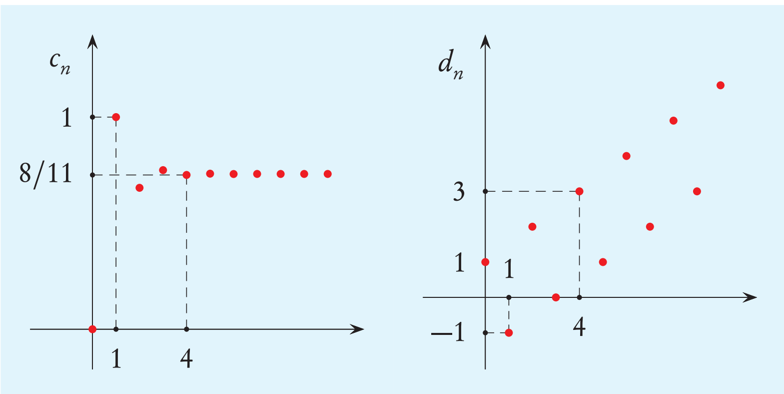


Figura 2.1.2
Le successioni definite nell'esempio 2.1.2.

2.1.2 Estremi e limitatezza di successioni

Nella sottosezione 1.2.4 abbiamo definito i concetti di limitatezza e di estremo (inferiore e superiore) per sottoinsiemi di $\mathbb{R}$; questi concetti possono essere definiti anche nell'ambito delle successioni reali. L'idea che guida la definizione di questi concetti per le successioni è che ogni affermazione è relativa all'insieme dei termini.

Quindi risultano naturali le seguenti definizioni.

Definizione di successione superiormente limitata, superiormente illimitata e di estremo superiore di una successione

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$.

Diciamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è **superiormente limitata** quando $\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ è superiormente limitato. In tal caso chiamiamo **estremo superiore** di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e indichiamo con $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$, l'estremo superiore dell'insieme dei termini della successione.

Diciamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è **superiormente illimitata** quando $\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ è superiormente illimitato. In tal caso poniamo $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = +\infty$.

Definizione di successione inferiormente limitata, inferiormente illimitata e di estremo inferiore di una successione

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$.

Diciamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è **inferiormente limitata** quando $\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ è inferiormente limitato. In tal caso chiamiamo **estremo inferiore** di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e indichiamo con $\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$, l'estremo inferiore dell'insieme dei termini della successione.

Diciamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è **inferiormente illimitata** quando $\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ è inferiormente illimitato. In tal caso poniamo $\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n = -\infty$.

Definizione di successione limitata e illimitata

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$.

Diciamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è **limitata** quando $\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ è limitato.

Diciamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è **illimitata** quando $\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ è illimitato.

Osserviamo che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è superiormente limitata se e solo se esiste $M\in\mathbb{R}$ tale che, $\forall n\in\mathbb{N}$, si ha $a_n \le M$. Analogamente inferiormente limitata se e solo se esiste $M\in\mathbb{R}$ tale che, $\forall n\in\mathbb{N}$, si ha $a_n \ge M$.

2.1.3 Esempio. Riprendiamo in esame le successioni introdotte nell'esempio 2.1.1.

La successione $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big(1/(n+1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata, perché ogni suo termine è compreso tra 0 e 1.

Evidentemente $\max\{1/(n+1) \mid n\in\mathbb{N}\} = p_0 = 1$.

Dimostriamo che $\inf_{n\in\mathbb{N}} p_n = 0$. Ogni termine è positivo, quindi 0 è un minorante. Dobbiamo dimostrare che 0 è il massimo dei minoranti, cioè che, se $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$, allora ε non è un minorante della successione; ciò significa che esiste un termine $1/(n+1)$ maggiore di ε. La disuguaglianza $1/(n+1) > \varepsilon$ equivale a $n+1 > 1/\varepsilon$. Per la proprietà di Archimede 1.4.2, esiste $n\in\mathbb{N}$ tale che $1/\varepsilon < n\cdot 1$, quindi per tale n si ha anche $n+1 > 1/\varepsilon$. Pertanto qualunque $\varepsilon > 0$ non è un maggiorante della successione, quindi $\inf_{n\in\mathbb{N}} p_n = 0$.

La successione $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} = \Big(\big(n+(-1)^n\big)/(n+1)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ è superiormente limitata, perché, $\forall n\in\mathbb{N}$, si ha

$$\frac{n+(-1)^n}{n+1} \le \frac{n+1}{n+1} = 1;$$

inoltre $n+(-1)^n \ge 0$, pertanto $q_n \ge 0$, quindi la successione è inferiormente limitata.

Poiché $q_0 = 1$, 1 è un maggiorante della successione che appartiene all'insieme dei termini, pertanto $\max\{q_n \mid n \in \mathbb{N}\} = 1$.

Inoltre $q_1 = 0$, quindi 0 è un minorante della successione che appartiene all'insieme dei termini, pertanto $\min\{q_n \mid n \in \mathbb{N}\} = 0$.

Consideriamo la successione $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big(1/(5-2n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta $5-2n \in \mathbb{Z}^*$, quindi $|5-2n| \geq 1$, pertanto $1/|5-2n| \leq 1$. Perciò $1/(5-2n)$ è compreso tra -1 e 1, quindi la successione è limitata.

Inoltre si ha $r_2 = 1$ e $r_3 = -1$, quindi risulta $\max\big\{1/(2n-5) \,\big|\, n \in \mathbb{N}\big\} = r_2 = 1$ e $\min\big\{1/(2n-5) \,\big|\, n \in \mathbb{N}\big\} = r_3 = -1$.

Poiché l'insieme dei termini della successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ è l'insieme dei numeri naturali, è evidente che è superiormente illimitata e inferiormente limitata; inoltre $\min\{s_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \min \mathbb{N} = 0$.

Poiché $\{t_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \Big\{\big(2n + (-1)^n - 1\big)/4 \,\Big|\, n \in \mathbb{N}\Big\} = \{s_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, quanto affermato relativamente a $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vale anche per $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

La successione $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (3-n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha tutti i termini minori o uguali a 3, pertanto $\max\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} = u_0 = 3$.

L'insieme dei termini contiene l'insieme degli interi negativi, quindi la successione è inferiormente illimitata.

Poiché l'insieme dei termini di $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ è $\{-1, 1\}$, tale successione è limitata. Evidentemente $\min\{v_n \mid n \in \mathbb{N}\} = -1$ e $\max\{v_n \mid n \in \mathbb{N}\} = 1$.

Consideriamo la successione $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((-1)^n(n+2)/(n+1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$|w_n| = \left|\frac{(-1)^n(n+2)}{n+1}\right| = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} \leq 2,$$

pertanto la successione $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata.

Si ha $w_0 = 2$, pertanto $2 = \max\{w_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Se n è pari, allora $w_n > 0$, mentre se n è dispari, allora w_n è negativo, quindi ogni termine di indice dispari è minore di ogni termine di indice pari. Inoltre, se n è dispari, allora

$$w_{n+2} - w_n = -\frac{n+4}{n+3} + \frac{n+2}{n+1} = \frac{-(n+4)(n+1) + (n+2)(n+3)}{(n+3)(n+1)} = \frac{2}{(n+3)(n+1)} > 0.$$

Pertanto al crescere dell'indice n dispari w_n cresce, quindi w_1 è minore di ogni altro termine di indice dispari. Inoltre, come già detto, ogni termine di indice dispari è minore di ogni termine di indice pari, pertanto $\min\{w_n \mid n \in \mathbb{N}\} = w_1 = -3/2$.

L'insieme dei termini della successione $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((-1)^n n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ è l'unione dell'insieme dei numeri naturali pari con l'insieme degli opposti dei numeri naturali dispari; il primo insieme è superiormente illimitato, il secondo è inferiormente illimitato, perciò la successione è illimitata sia superiormente che inferiormente. ◀

2.2 Limiti di successioni

2.2.1 Successioni convergenti

Può essere interessante conoscere il comportamento dei termini di una successione quando il loro indice diventa “grande”. L’idea è di verificare se per valori “grandi” dell’indice n il termine a_n si “avvicina” a un particolare numero reale.

Ad esempio, consideriamo la successione $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big(1/(n+1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, introdotta nell’esempio 2.1.1. È evidente che al crescere di n la distanza di p_n da 0 diventa arbitrariamente piccola. Cerchiamo di dare un significato preciso a questa affermazione. Ricordiamo anzitutto che la distanza di un numero da 0 è il valore assoluto del numero. Il fatto che la distanza diventi arbitrariamente piccola significa che, scelto un qualunque numero ε positivo, risulta $|p_n| < \varepsilon$, se n è grande. Resta da precisare cosa si intende dicendo che n è grande. Possiamo chiedere che esista un valore soglia tale che gli indici n oltre tale soglia sono considerati grandi e quindi per tali n risulta $|p_n| < \varepsilon$. Ovviamente tale valore soglia dipende da ε, più ε è piccolo, maggiore deve essere il valore soglia.

Il ragionamento relativo a una successione i cui termini si avvicinano a 0 può essere fatto anche quando i termini della successione si avvicinano a un qualunque numero reale ℓ; basta considerare la distanza del termine n-simo da ℓ, cioè il valore assoluto della differenza.

Queste considerazioni portano a dare la seguente definizione.

Definizione di limite reale di una successione

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$ e $\ell \in \mathbb{R}$. Diciamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha **limite** ℓ (o che a_n **tende** a ℓ) quando

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon\ \forall n \in \mathbb{N},\quad n > n_\varepsilon \implies |a_n - \ell| < \varepsilon;$$

in tal caso poniamo $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$.

Per indicare che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$ si usa anche la notazione $a_n \to \ell$.

La condizione $|a_n - \ell| < \varepsilon$ è tanto più restrittiva quanto più ε è piccolo, poiché, se è verificata per un certo valore di ε, allora è verificata anche per ogni valore più grande.

Per le proprietà del valore assoluto 1.2.31, affermazione I, la condizione $|a_n - \ell| < \varepsilon$ equivale a $\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$.

2.2.1 Osservazione. È immediato verificare che

$$a_n \to \ell \iff a_n - \ell \to 0. \qquad ◀$$

Questa osservazione mostra che le successioni che hanno limite 0 rivestono un particolare interesse, per questo motivo hanno una denominazione particolare: vengono chiamate **successioni infinitesime**.

Definizione di successione convergente

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$. Diciamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è **convergente** quando esiste $\ell \in \mathbb{R}$ tale che $a_n \to \ell$.

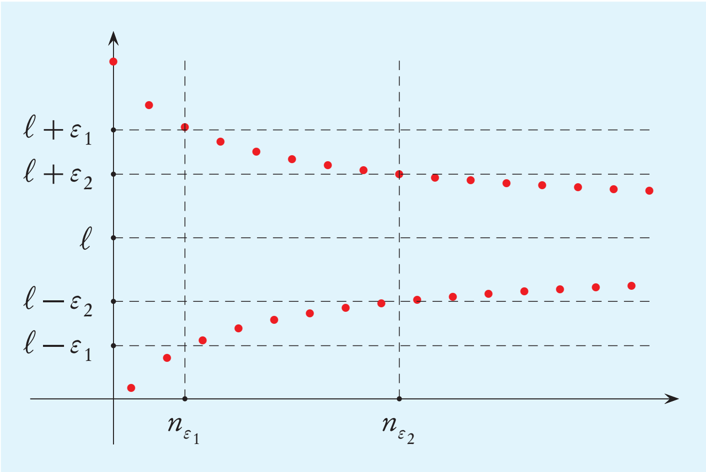


Figura 2.2.1
Definizione di limite ℓ.
I termini della successione di indice maggiore di n_{ε_1} distano dal limite ℓ meno di ε_1, cioè sono compresi tra $\ell-\varepsilon_1$ e $\ell+\varepsilon_1$. Lo stesso avviene se si sostituisce ε_2 a ε_1.

2.2.2 Osservazione. Le successioni costanti, cioè quelle con tutti i termini uguali, sono convergenti.

Infatti, se tutti i termini della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono uguali a m, allora, $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ e, $\forall n\in\mathbb{N}$, risulta $|a_n-m|=0<\varepsilon$; pertanto la definizione di limite è verificata scegliendo sempre $n_\varepsilon=0$. Quindi $\lim_{n\to+\infty}a_n=m$. ◀

2.2.3 Esempio. Studiamo i limiti di alcune delle successioni introdotte nell'esempio 2.1.1.

Consideriamo la successione $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}=\big(1/(n+1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, dimostriamo che ha limite 0.

Sia $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$. Si ha $|p_n-0|<\varepsilon$ se e solo se $1/(n+1)<\varepsilon$, cioè $n+1>1/\varepsilon$. Scelto $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tale che $n_\varepsilon\geq 1/\varepsilon$, se $n>n_\varepsilon$ si ha $n+1>1/\varepsilon$ da cui segue $|p_n-0|<\varepsilon$.

Quindi è verificata la definizione di $\lim_{n\to+\infty}p_n=0$.

Consideriamo la successione $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}=\Big(\big(n+(-1)^n\big)/(n+1)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$, dimostriamo che ha limite 1.

Sia $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$. Si ha, $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$|q_n-1|=\left|\frac{n+(-1)^n}{n+1}-1\right|=\left|\frac{n+(-1)^n-(n+1)}{n+1}\right|=\left|\frac{(-1)^n-1}{n+1}\right|\leq\frac{2}{n+1}.$$

Pertanto, se $2/(n+1)<\varepsilon$, allora si ha $|q_n-1|<\varepsilon$. Quindi, scelto $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tale che $n_\varepsilon\geq 2/\varepsilon$, cioè $\varepsilon\geq 2/n_\varepsilon$, se $n>n_\varepsilon$ risulta

$$\frac{2}{n+1}<\frac{2}{n_\varepsilon}\leq\varepsilon,$$

pertanto $|q_n-1|<\varepsilon$.

Quindi è verificata la definizione di $\lim_{n\to+\infty}q_n=1$.

Consideriamo la successione $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}=\big(1/(5-2n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, dimostriamo che ha limite 0.

Sia $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$. Si ha $|r_n-0|<\varepsilon$ se e solo se $1/|5-2n|<\varepsilon$, cioè $|2n-5|>1/\varepsilon$. Per le proprietà del valore assoluto 1.2.31, affermazione II, tale disuguaglianza è verificata se e solo se $2n-5>1/\varepsilon$, oppure $2n-5<-1/\varepsilon$. Dalla prima condizione segue che la disuguaglianza è verificata se $n>(5+1/\varepsilon)/2$. Perciò, qualunque sia $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tale che $n_\varepsilon\geq(5+1/\varepsilon)/2$, se $n>n_\varepsilon$, risulta $n>(5+1/\varepsilon)/2$, pertanto $|r_n-0|<\varepsilon$.

Quindi è verificata la definizione di $\lim_{n\to+\infty}r_n=0$. ◀

È intuitivamente evidente che i termini di una successione non possono, per valori grandi dell'indice, essere contemporaneamente vicini a due numeri reali distinti. Ciò significa che una successione non può avere due limiti distinti. Vale quindi il seguente teorema.

2.2.4 Teorema (di unicità del limite)

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$ e $\ell, m \in \mathbb{R}$. Se $a_n \to \ell$ e $a_n \to m$, allora $\ell = m$.

Dimostrazione. Poiché ℓ e m sono limiti della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si ha:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists j_\varepsilon \in \mathbb{N} \colon \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > j_\varepsilon \implies |a_n - \ell| < \varepsilon,$$
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N} \colon \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > k_\varepsilon \implies |a_n - m| < \varepsilon.$$

Scelto $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > \max\{j_\varepsilon, k_\varepsilon\}$; allora $n > j_\varepsilon$ e $n > k_\varepsilon$, quindi si ha sia $|a_n - \ell| < \varepsilon$ che $|a_n - m| < \varepsilon$, pertanto

$$|\ell - m| = \big|(\ell - a_n) + (a_n - m)\big| \le |\ell - a_n| + |a_n - m| < 2\varepsilon.$$

Pertanto, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, si ha $|\ell - m| < 2\varepsilon$. Poiché ogni numero reale positivo può essere scritto nella forma 2ε, con $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, per il teorema 1.4.1 si ha $|\ell - m| \le 0$, quindi $|\ell - m| = 0$, pertanto $\ell = m$. ■

È opportuno analizzare attentamente questa prima dimostrazione sui limiti di successioni, perché fa uso di alcune tecniche che ritroveremo in varie altre dimostrazioni.

Anzitutto osserviamo che nelle due definizioni di limite riportate abbiamo usato due simboli diversi per indicare il valore soglia che individua gli indici "grandi": j_ε nella definizione di $a_n \to \ell$ e k_ε nella definizione di $a_n \to m$. Questo perché le due definizioni sono indipendenti tra loro, quindi, fissato $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, la soglia che assicura che a_n è vicina a ℓ è indipendente da quella che assicura che a_n è vicino a m, dove "vicino" significa a distanza minore di ε. Per proseguire nella dimostrazione dobbiamo considerare un a_n che verifichi entrambe le condizioni, per questo scegliamo un indice n che superi entrambe le soglie, cioè $n > \max\{j_\varepsilon, k_\varepsilon\}$.

Utilizzando queste informazioni, e la disuguaglianza triangolare per il valore assoluto, otteniamo che la distanza tra ℓ e m è minore di 2ε. A questo punto sfruttiamo il fatto che, al variare di ε in $\mathbb{R}^+$, 2ε percorre tutto $\mathbb{R}^+$; in altre parole la metà di un numero reale positivo è positiva, quindi ogni $\delta \in \mathbb{R}^+$ può essere scritto come $2(\delta/2)$ con $\delta/2 \in \mathbb{R}^+$.

Abbiamo così ottenuto che la distanza tra ℓ e m è minore di ogni numero reale positivo, quindi è nulla. Perciò $\ell = m$.

Il teorema di unicità del limite assicura che la notazione $\lim_{n\to+\infty} a_n$ indica un numero ben preciso, non vi è quindi possibilità di ambiguità.

Enunciamo alcuni teoremi che illustrano come si comportano i limiti rispetto alla relazione d'ordine.

2.2.5 Teorema (del confronto)

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{R}$. Supponiamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ siano convergenti. Se, $\forall n\in\mathbb{N}$, si ha $a_n \le b_n$, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n \le \lim_{n\to+\infty} b_n$.

Dimostrazione. Posto $\ell = \lim_{n\to+\infty} a_n$ e $m = \lim_{n\to+\infty} b_n$, per definizione si ha:

$$\forall \varepsilon\in\mathbb{R}^+,\ \exists j_\varepsilon\in\mathbb{N}\colon\ \forall n\in\mathbb{N},\quad n>j_\varepsilon \implies \ell-\varepsilon<a_n<\ell+\varepsilon,$$
$$\forall \varepsilon\in\mathbb{R}^+,\ \exists k_\varepsilon\in\mathbb{N}\colon\ \forall n\in\mathbb{N},\quad n>k_\varepsilon \implies m-\varepsilon<b_n<m+\varepsilon.$$

Scelto $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$, sia $n\in\mathbb{N}$ tale che $n>\max\{j_\varepsilon,k_\varepsilon\}$; allora si ha $\ell-\varepsilon<a_n$ e $b_n<m+\varepsilon$, poiché $a_n\le b_n$, si ha anche $\ell-\varepsilon<m+\varepsilon$.

Quindi, $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+$, si ha $\ell-m<2\varepsilon$. Poiché ogni numero reale positivo può essere scritto nella forma 2ε, con $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$, per il teorema 1.4.1 risulta $\ell-m\le 0$, cioè $\ell\le m$. ■

In particolare, se in questo teorema si sceglie come $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione che vale costantemente b, si ottiene che se, $\forall n\in\mathbb{N}$, si ha $a_n\le b$, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n \le b$. Analogamente, se $\forall n\in\mathbb{N}$, si ha $a\le b_n$, allora $a\le\lim_{n\to+\infty} b_n$.

2.2.6 Osservazione. Se si rafforza l'ipotesi del teorema del confronto, chiedendo che sia, $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n<b_n$, non si può concludere che vale sempre la disuguaglianza stretta tra i limiti, essi possono essere uguali.

Consideriamo la successione $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big(1/(n+1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, introdotta nell'esempio 2.1.1. Nell'esempio 2.2.3 abbiamo stabilito che $1/(n+1)\to 0$. Per l'osservazione 2.2.2 la successione costante $(0)_{n\in\mathbb{N}}$ ha limite 0. Quindi, $\forall n\in\mathbb{N}$, risulta $0<1/(n+1)$, ma non è $\lim_{n\to+\infty} 0 < \lim_{n\to+\infty} 1/(n+1)$. ◀

2.2.7 Teorema (della permanenza del segno)

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$ e $m\in\mathbb{R}$. Supponiamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia convergente.

I) Se $\lim_{n\to+\infty} a_n > m$, allora esiste $\overline{n}\in\mathbb{N}$ tale che, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n>\overline{n} \implies a_n>m$.

II) Se $\lim_{n\to+\infty} a_n < m$, allora esiste $\overline{n}\in\mathbb{N}$ tale che, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n>\overline{n} \implies a_n<m$.

Dimostrazione. I) Posto $\ell=\lim_{n\to+\infty} a_n$, per definizione si ha:

$$\forall \varepsilon\in\mathbb{R}^+,\ \exists j_\varepsilon\in\mathbb{N}\colon\ \forall n\in\mathbb{N},\quad n>j_\varepsilon \implies \ell-\varepsilon<a_n<\ell+\varepsilon.$$

Scelto $\varepsilon=\ell-m$, se $n>n_{\ell-m}$ si ha $a_n>\ell-(\ell-m)=m$. Quindi la tesi è verificata ponendo $\overline{n}=n_{\ell-m}$.

II) La dimostrazione è analoga a quella dell'affermazione precedente. ■

Questo teorema afferma che la proprietà $a_n>m$ (o $a_n<m$) è verificata dai termini a_n il cui indice n è maggiore di una certa soglia (il numero $\overline{n}$ dell'enunciato). Nello studio delle successioni ci si trova spesso nella situazione in cui una determinata proprietà è verificata dai termini di una successione di indice "grande". Risulta quindi utile la seguente definizione.

Definizione di proprietà verificata definitivamente

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $\mathscr{P}(n)$ una proposizione. Diciamo che $\mathscr{P}(n)$ è verificata **definitivamente** quando

$$\exists m \in \mathbb{N} \colon \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > m \implies \mathscr{P}(n).$$

Questa terminologia verrà usata frequentemente quando la proposizione $\mathscr{P}(n)$ è un'affermazione riguardante il termine n-simo di una successione. Ad esempio, il teorema della permanenza del segno 2.2.7, affermazione I, può essere enunciato nella forma: "se $\lim_{n\to+\infty} a_n > m$, allora definitivamente risulta $a_n > m$".

2.2.8 Esempio. La successione $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big(1/(5-2n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, introdotta nell'esempio 2.1.1 ha sia termini positivi che negativi; ad esempio $a_0 = 1/5$ e $a_3 = -1$. Se $n > 2$, allora $5-2n < 0$, quindi $r_n < 0$. Pertanto i termini della successione non sono tutti negativi, ma sono definitivamente negativi.

Spesso questa affermazione viene abbreviata dicendo che la successione è definitivamente negativa. ◀

2.2.9 Osservazione. Siano, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ e $\mathscr{Q}(n)$ proposizioni. Se sia $\mathscr{P}(n)$ che $\mathscr{Q}(n)$ valgono definitivamente, allora anche $\mathscr{P}(n) \wedge \mathscr{Q}(n)$ vale definitivamente.

Infatti, se $m_P, m_Q \in \mathbb{N}$ sono tali che $n > m_P \implies \mathscr{P}(n)$ e $n > m_Q \implies \mathscr{Q}(n)$, allora $n > \max\{m_P, m_Q\} \implies \mathscr{P}(n) \wedge \mathscr{Q}(n)$. ◀

2.2.10 Esempio. Utilizziamo il teorema della permanenza del segno 2.2.7 per provare che alcune delle successioni introdotte nell'esempio 2.1.1 non hanno limite.

Consideriamo la successione $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, dimostriamo che non esiste $\ell \in \mathbb{R}$ tale che $v_n \to \ell$.

Se fosse $v_n \to \ell$, con $\ell > 0$, allora, per il teorema delle permanenza del segno 2.2.7, v_n sarebbe definitivamente positivo, ma questo non è vero perché la successione ha termini negativi di indice arbitrariamente grande. Poiché la successione ha anche termini positivi di indice arbitrariamente grande, non può neppure avere limite negativo. Infine non può essere $v_n \to 0$. Infatti, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $|v_n - 0| = \big|(-1)^n\big| = 1$. Pertanto, se nella definizione di limite scegliamo $\varepsilon = 1/2$, non si ha mai $|v_n - 0| < \varepsilon$.

Consideriamo la successione $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((-1)^n(n+2)/(n+1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, dimostriamo che non esiste $\ell \in \mathbb{R}$ tale che $w_n \to \ell$.

Come la successione $\big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, anche questa ha termini di indice arbitrariamente grande positivi e e termini di indice arbitrariamente grande negativi, quindi non può avere né limite negativo né limite positivo. Inoltre, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha

$$|w_n| = \left|\frac{(-1)^n(n+2)}{n+1}\right| = \frac{n+2}{n+1} > 1,$$

quindi $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non può convergere a 0. ◀

2.2.11 Teorema (dei due carabinieri)

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{R}$ tali che, $\forall n\in\mathbb{N}$, si ha $a_n \le b_n \le c_n$. Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono convergenti e

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n\,,$$

allora anche $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n\,.$$

Dimostrazione. Posto $\ell = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n$, per definizione si ha:

$$\begin{aligned}
&\forall \varepsilon\in\mathbb{R}^+,\ \exists j_\varepsilon\in\mathbb{N}\colon\ \forall n\in\mathbb{N},\quad n>j_\varepsilon \implies \ell-\varepsilon<a_n<\ell+\varepsilon\,,\\
&\forall \varepsilon\in\mathbb{R}^+,\ \exists k_\varepsilon\in\mathbb{N}\colon\ \forall n\in\mathbb{N},\quad n>k_\varepsilon \implies \ell-\varepsilon<c_n<\ell+\varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Scelto $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$, poniamo $n_\varepsilon = \max\{j_\varepsilon, k_\varepsilon\}$; se $n>n_\varepsilon$, allora si ha $n>j_\varepsilon$ e $n>k_\varepsilon$, quindi $\ell-\varepsilon<a_n$ e $c_n<\ell+\varepsilon$; poiché $a_n\le b_n\le c_n$, da qui segue $\ell-\varepsilon<b_n<\ell+\varepsilon$.

Quindi è verificata la definizione di $\lim_{n\to+\infty} b_n = \ell$. ■

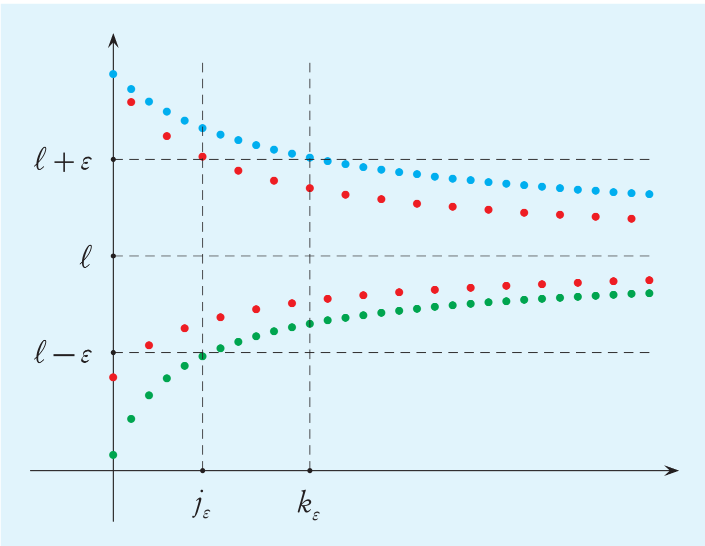


Figura 2.2.2
Dimostrazione del teorema dei due carabinieri 2.2.11.
In blu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, in rosso $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e in verde $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Se $n>j_\varepsilon$, allora $a_n>\ell-\varepsilon$, quindi si ha anche $b_n>\ell-\varepsilon$; se $n>k_\varepsilon$, allora $c_n<\ell+\varepsilon$, quindi si ha anche $b_n<\ell+\varepsilon$. I termini di $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di indice maggiore sia di j_ε che di k_ε sono compresi tra $\ell-\varepsilon$ e $\ell+\varepsilon$.

2.2.12 Esempio. Sia $k\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. Consideriamo le successioni $(0)_{n\in\mathbb{N}}$, $\big((n+1)^{-k}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((n+1)^{-1}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ (v. esempio 2.1.1). Poiché, $\forall n\in\mathbb{N}$, si ha $1+n\le(1+n)^k$, risulta $0<(n+1)^{-k}\le 1/(1+n)$. La successione $(0)_{n\in\mathbb{N}}$ ha limite 0 e nell'esempio 2.2.3 abbiamo provato che $1/(n+1)\to 0$. Pertanto, per il teorema dei due carabinieri 2.2.11, risulta $(n+1)^{-k}\to 0$.

Osserviamo che si ha anche $n^{-k}\to 0$. Infatti, fissato $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$, se n_ε è tale che per $n>n_\varepsilon$ si ha $(n+1)^{-k}<\varepsilon$, allora per $n>n_\varepsilon+1$ si ha $n^{-k}<\varepsilon$. ◀

2.2.2 Successioni divergenti

Vi sono successioni per cui i termini di indice grande non si “avvicinano” ad alcun numero reale, ma diventano essi stessi “grandi” in valore assoluto, con segno sempre positivo o sempre negativo. Nello stesso ordine di idee della definizione di limite reale di una successione, diamo due definizioni per individuare le successioni che hanno questo comportamento.

Definizione di limite $+\infty$ e $-\infty$ di una successione

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$.
Diciamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha **limite** $+\infty$ (o che a_n **tende** a $+\infty$) quando

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n_M \in \mathbb{N}\colon\ \forall n \in \mathbb{N},\quad n > n_M \implies a_n > M;$$

in tal caso poniamo $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.
Diciamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha **limite** $-\infty$ (o che a_n **tende** a $-\infty$) quando

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n_M \in \mathbb{N}\colon\ \forall n \in \mathbb{N},\quad n > n_M \implies a_n < M;$$

in tal caso poniamo $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

Osserviamo che nella definizione di limite $+\infty$, se la condizione $a_n > M$ è verificata per un certo numero M, allora è verificata per tutti gli M minori; di conseguenza, se la condizione è verificata per ogni $M \in \mathbb{R}^+$, allora è verificata per ogni $M \in \mathbb{R}$.

Nel caso di limite $-\infty$ si ha analogamente che è sufficiente chiedere che la condizione sia verificata per gli M appartenenti a $\mathbb{R}^-$.

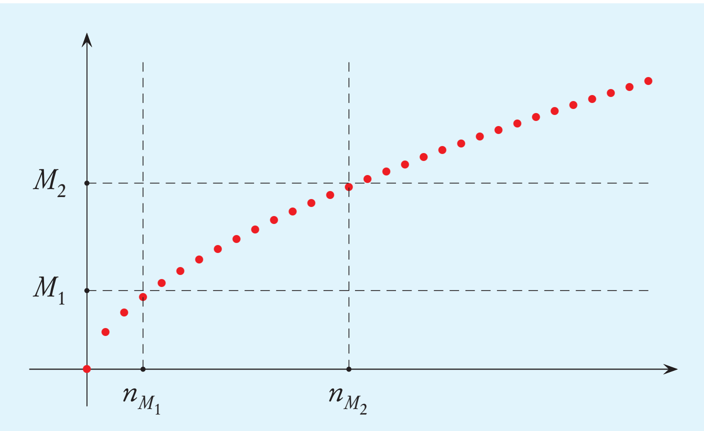


Figura 2.2.3
Definizione di limite $+\infty$.
I termini della successione di indice maggiore di n_{M_1} sono maggiori di M_1.
Lo stesso avviene se si sostituisce M_2 a M_1.

Definizione di successione divergente

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$.
Diciamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è **divergente** quando $a_n \to +\infty$ oppure $a_n \to -\infty$.
In particolare diciamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è **divergente positivamente** o **divergente a** $+\infty$ nel primo caso, **divergente negativamente** o **divergente a** $-\infty$ nel secondo caso.

2.2.13 Osservazione. È evidente che $a_n \to +\infty$ se e solo se $-a_n \to -\infty$. Infatti, per $M \in \mathbb{R}$, si ha definitivamente $a_n > M$, se e solo se definitivamente $-a_n < -M$ e ogni numero reale può essere scritto nella forma $-M$ per $M \in \mathbb{R}$ opportuno. ◀

È utile definire un termine per indicare tutte le successioni che hanno limite, sia esso reale o $\pm\infty$.

Definizione di successione regolare e successione oscillante

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$.

Diciamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è **regolare** quando è convergente o divergente, cioè quando ha limite.

In caso contrario diciamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è **oscillante**.

2.2.14 Esempio. Studiamo i limiti di alcune delle successioni introdotte nell'esempio 2.1.1.

Consideriamo la successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$, dimostriamo che ha limite $+\infty$.

Sia $M \in \mathbb{R}$. Scelto $n_M \in \mathbb{N}$ tale che $n_M \geq M$, se $n > n_M$, allora si ha $s_n = n > n_M \geq M$.

Quindi è verificata la definizione di $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$.

Consideriamo la successione $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((2n+(-1)^n-1)/4\big)_{n\in\mathbb{N}}$, dimostriamo che ha limite $+\infty$.

Sia $M \in \mathbb{R}$. Si ha, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$t_n = \frac{2n+(-1)^n-1}{4} \geq \frac{2n-2}{4} = \frac{n-1}{2};$$

Pertanto se $n-1 > 2M$, allora si ha $t_n > M$. Quindi, scelto $n_M \in \mathbb{N}$ tale che $n_M \geq 2M+1$, se $n > n_M$ risulta $t_n > M$.

Quindi è verificata la definizione di $\lim_{n\to+\infty} t_n = +\infty$.

Consideriamo la successione $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (3-n)_{n\in\mathbb{N}}$, dimostriamo che ha limite $-\infty$.

Sia $M \in \mathbb{R}$. Si ha $u_n < M$ se e solo se $3-n < M$, cioè $n > 3-M$. Pertanto qualunque sia $n_M \in \mathbb{N}$ tale che $n_M \geq 3-M$, se $n > n_M$ si ha $3-n < M$.

Quindi è verificata la definizione di $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$. ◀

Per provare la divergenza di una successione vale un teorema analogo al teorema dei due carabinieri 2.2.11.

2.2.15 Teorema

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{R}$ tali che, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $a_n \leq b_n$.

I) Se $a_n \to +\infty$, allora anche $b_n \to +\infty$.

II) Se $b_n \to -\infty$, allora anche $a_n \to -\infty$.

Dimostrazione. I) Per definizione si ha:

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_M \in \mathbb{N} \colon \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_M \implies a_n > M.$$

Qualunque sia $M \in \mathbb{R}$, se $n > n_M$ si ha $b_n \geq a_n > M$, cioè $b_n > M$, pertanto $b_n \to +\infty$.

II) La dimostrazione è analoga a quella dell'affermazione precedente. ■

Osserviamo che nel teorema dei due carabinieri 2.2.11, per provare la convergenza di una successione, si richiede l'esistenza di una successione che minora e di una che maggiora la successione studiata; in questo teorema, a seconda dei casi, è sufficiente l'esistenza di una successione che minora o di una successione che maggiora. Ciò è dovuto al fatto che la definizione di successione convergente richiede che, definitivamente, a_n verifichi due disuguaglianze, mentre la definizione di successione divergente richiede che a_n verifichi una sola disuguaglianza.

2.2.16 Esempio. Sia $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Si ha, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^k \geq n$ e $n \to +\infty$ (v. esempio 2.2.14). Pertanto, per il teorema 2.2.15, affermazione I, $n^k \to +\infty$. ◀

2.2.17 Esempio. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta $n! \geq n$. Questo vale evidentemente per $n = 0$. Se si pensa al fattoriale di n come al prodotto dei numeri da 1 a n, l'affermazione è evidente anche per $n > 0$. Infatti ogni fattore è maggiore o uguale a 1, quindi il prodotto è maggiore o uguale a ogni fattore, in particolare maggiore o uguale a n.

Una dimostrazione rigorosa della disuguaglianza $n! \geq n$ richiede il principio di induzione, che applichiamo a partire da 1, invece che da 0. Poiché $1! = 1$ l'affermazione vale per $n = 1$. Se vale per n, allora

$$(n+1)! = (n+1)\,n! \geq (n+1)n \geq n+1\,,$$

dove nella prima disuguaglianza abbiamo usato l'ipotesi induttiva. Quindi l'affermazione vale per $n+1$.

Poiché $n \to +\infty$ (v. esempio 2.2.14), per il teorema 2.2.15, affermazione I, si ha anche $n! \to +\infty$. ◀

2.2.3 Successioni regolari

Introduciamo alcune definizioni per unificare, per quanto possibile, i teoremi relativi alle successioni convergenti e quelli relativi alle successioni divergenti. Introduciamo anzitutto un insieme contenente tutti i possibili limiti di successioni.

Definizione di insieme dei numeri reali esteso

Chiamiamo **insieme dei numeri reali esteso** (o anche **retta reale estesa**) e indichiamo con $\overline{\mathbb{R}}$ l'insieme ottenuto aggiungendo ai numeri reali due oggetti che indichiamo con i simboli $-\infty$ e $+\infty$ (si leggono rispettivamente "meno infinito" e "più infinito").

Abbiamo quindi

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}\,.$$

La relazione di $\leq$ in $\mathbb{R}$ può essere estesa a una relazione in $\overline{\mathbb{R}}$, che è ancora di ordine lineare. È invece impossibile estendere le operazioni di addizione e di moltiplicazione a $\overline{\mathbb{R}}$ in modo che continuino a valere le abituali proprietà di tali operazioni (e in particolare gli assiomi di campo C1–C9). Per tale motivo i simboli $x+y$ e $x \cdot y$ non hanno significato nel caso che x o y siano $+\infty$ o $-\infty$. Utilizziamo però la notazione $-x$ quando $x = \pm\infty$, intendendo che $-(+\infty) = -\infty$ e $-(-\infty) = +\infty$; la notazione è impropria perché non essendo definita la somma non è possibile parlare di opposto.

Estendiamo la relazione di $\leq$ a $\overline{\mathbb{R}}$ considerando $+\infty$ maggiore di ogni numero reale e di $-\infty$ e $-\infty$ minore di ogni numero reale (e ovviamente di $+\infty$). Si ha quindi

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}}, \quad -\infty \leq x \leq +\infty\,.$$

Con questa definizione (intendendo come al solito che $x < y$ significa $x \leq y$, ma $x \neq y$) $x < +\infty$ è equivalente a $x \neq +\infty$ e analogamente $x > -\infty$ è equivalente a $x \neq -\infty$.

Si verifica facilmente che, anche in questo ambito, $\leq$ è una relazione d'ordine lineare. Si possono quindi definire per sottoinsiemi di $\overline{\mathbb{R}}$ minimo, massimo, minoranti, maggioranti, estremi, ripetendo le definizioni date per sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Non hanno interesse le definizioni relative alla limitatezza, perché in $\overline{\mathbb{R}}$ ogni insieme ha il maggiorante $+\infty$ e il minorante $-\infty$.

Si prova facilmente, esaminando i vari casi possibili e riconducendosi a ciò che sappiamo per sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, che anche in $\overline{\mathbb{R}}$ ogni insieme di maggioranti ha minimo e ogni insieme di minoranti ha massimo, quindi sono sempre definiti estremo inferiore ed estremo superiore.

Talvolta per esprimere il fatto che un elemento di $\overline{\mathbb{R}}$ appartiene a $\mathbb{R}$ (cioè non è né $+\infty$ né $-\infty$) diciamo che esso è "finito".

Nella definizione di successione che tende a $c \in \mathbb{R}$ compare la condizione $|a_n - c| < \varepsilon$, che equivale a $a_n \in \,]c-\varepsilon, c+\varepsilon[$. Se il limite è $+\infty$ gioca un ruolo analogo la condizione $a_n > M$, cioè $a_n \in \,]M, +\infty[$, mentre se il limite è $-\infty$ utilizziamo la condizione $a_n < M$, cioè $a_n \in \,]-\infty, M[$.

È utile dare un nome agli insiemi individuati sopra.

Definizione di intorno di un elemento di $\overline{\mathbb{R}}$

Sia $c \in \overline{\mathbb{R}}$.
Se $c \in \mathbb{R}$ chiamiamo **intorno** di c ogni insieme del tipo $]c-\varepsilon, c+\varepsilon[$ con $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$.
Se $c = +\infty$ chiamiamo **intorno** di c ogni insieme del tipo $]M, +\infty[$ con $M \in \mathbb{R}$.
Se $c = -\infty$ chiamiamo **intorno** di c ogni insieme del tipo $]-\infty, M[$ con $M \in \mathbb{R}$.
In ogni caso indichiamo con $\mathscr{I}_c$ l'insieme degli intorni di c.

Pertanto, $\forall c \in \mathbb{R}$, si ha

$$\mathscr{I}_c = \big\{]c-\varepsilon, c+\varepsilon[\,\big|\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \big\},$$

inoltre

$$\mathscr{I}_{+\infty} = \big\{]M, +\infty[\,\big|\, M \in \mathbb{R} \big\},$$
$$\mathscr{I}_{-\infty} = \big\{]-\infty, M[\,\big|\, M \in \mathbb{R} \big\}.$$

2.2.18 Osservazione. Utilizzando il concetto di intorno, le definizioni di limite reale, $+\infty$ e $-\infty$ possono essere unificate. Infatti è facile verificare che, se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in $\mathbb{R}$ e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, si ha $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$ se e solo se

$$\forall U \in \mathscr{I}_\ell,\ \exists n_U \in \mathbb{N}\colon \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_U \implies a_n \in U\,. \qquad \blacktriangleleft$$

I teoremi del confronto 2.2.5 e della permanenza del segno 2.2.7, visti per le successioni convergenti, valgono anche per le successioni divergenti e quindi, in generale, per le successioni regolari.

2.2.19 Teorema (del confronto)

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{R}$. Supponiamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ siano regolari. Se, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $a_n \leq b_n$, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n \leq \lim_{n\to+\infty} b_n$.

Dimostrazione. Poniamo $\ell = \lim_{n\to+\infty} a_n$ e $m = \lim_{n\to+\infty} b_n$.

Se $\ell = -\infty$, allora $\ell \leq m$; se invece $\ell = +\infty$, allora, per il teorema 2.2.15, affermazione I, anche $m = +\infty$.

Se $m = -\infty$, allora, per il teorema 2.2.15, affermazione II, anche $\ell = -\infty$; se invece $m = +\infty$, allora $\ell \leq m$.

Infine se $\ell, m \in \mathbb{R}$, allora, per il teorema 2.2.5, si ha $\ell \leq m$. ■

2.2.20 Teorema (della permanenza del segno)

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{R}$. Supponiamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia regolare.

I) Se $\lim_{n\to+\infty} a_n > m$, allora esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > \overline{n} \implies a_n > m$.

II) Se $\lim_{n\to+\infty} a_n < m$, allora esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > \overline{n} \implies a_n < m$.

Dimostrazione. I) Poniamo $\ell = \lim_{n\to+\infty} a_n$. Poiché $\ell > m \in \mathbb{R}$, risulta $\ell \neq -\infty$.

Se $\ell \in \mathbb{R}$, allora l'affermazione coincide con l'affermazione I del teorema della permanenza del segno 2.2.7, .

Se $\ell = +\infty$, allora la tesi segue immediatamente dalla definizione di limite $+\infty$.

II) La dimostrazione è analoga a quella dell'affermazione precedente. ■

Il teorema seguente fornisce un collegamento tra il fatto che una successione abbia limite e la sua limitatezza.

2.2.21 Teorema (sulla limitatezza delle successioni regolari)

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$.

I) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente, allora $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata.

II) Se $a_n \to +\infty$, allora $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è inferiormente limitata e superiormente illimitata.

III) Se $a_n \to -\infty$, allora $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è superiormente limitata e inferiormente illimitata.

Dimostrazione. I) Posto $\ell = \lim_{n\to+\infty} a_n$, per definizione si ha:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_\varepsilon \implies \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon\,.$$

Se $n > n_1$, allora $\ell - 1 < a_n < \ell + 1$. Dunque $\ell - 1$ e $\ell + 1$ sono rispettivamente un minorante e un maggiorante di $\{a_n \mid n > n_1\}$.

Poniamo $a = \min\big(\{a_n \mid n \le n_1\} \cup \{\ell - 1\}\big)$ e $b = \max\big(\{a_n \mid n \le n_1\} \cup \{\ell + 1\}\big)$. È evidente che a è un minorante di $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$; infatti se $n > n_1$, allora $a_n > \ell - 1 \ge a$, mentre se $n \le n_1$, allora $a_n \ge \min\{a_n \mid n \le n_1\} \ge a$. Analogamente b è un maggiorante di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, quindi la successione ha sia minoranti che maggioranti, perciò è limitata.

II) Per definizione si ha:

$$\forall M \in \mathbb{R},\, \exists n_M \in \mathbb{N}\colon\, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_M \implies a_n > M\,.$$

Pertanto $\forall M \in \mathbb{R}$ esistono termini della successione maggiori di M, quindi la successione non ammette maggioranti, cioè è superiormente illimitata.

Se $n > n_0$ si ha $a_n > 0$, perciò, posto $a = \min\big(\{a_n \mid n \le n_0\} \cup \{0\}\big)$, ragionando come al punto precedente si prova che a è un minorante di $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$; quindi la successione è inferiormente limitata.

III) La dimostrazione è analoga a quella dell'affermazione precedente. ■

Per questo teorema una successione convergente non può essere illimitata, né superiormente né inferiormente, quindi non può essere divergente; per motivi analoghi una successione divergente a $+\infty$ non può essere divergente a $-\infty$. Quindi il teorema di unicità del limite 2.2.4 vale considerando non solo limiti reali, ma anche limiti in $\overline{\mathbb{R}}$. Vale cioè il seguente teorema.

2.2.22 Teorema (di unicità del limite)

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$ e $\ell, m \in \overline{\mathbb{R}}$. Se $a_n \to \ell$ e $a_n \to m$, allora $\ell = m$.

Risulta evidente che il concetto di limite di una successione, sia nel caso di limite reale che di limite uguale a $\pm\infty$, dipende solo dai termini della successione di indice grande. In altre parole modificando un numero finito di termini di una successione il limite, se esiste, non cambia. Ciò è precisato dal seguente teorema.

2.2.23 Teorema

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{R}$. Supponiamo che esista $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che, $\forall n \in \mathbb{N}$, se $n > \overline{n}$ risulta $a_n = b_n$.

Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è regolare, allora anche $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è regolare e si ha

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n\,.$$

Dimostrazione. Posto $\ell = \lim_{n\to+\infty} a_n$, per definizione si ha:

$$\forall U \in \mathscr{I}_\ell,\, \exists n_U \in \mathbb{N}\colon\, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_U \implies a_n \in U\,.$$

Scelto $U \in \mathscr{I}_\ell$, poniamo $k_U = \max\{\overline{n}, n_U\}$. Se $n > k_U$, allora si ha $a_n \in U$ e $b_n = a_n$, quindi $n > k_U \implies b_n \in U$; perciò è verificata la definizione di $\lim_{n\to+\infty} b_n = \ell$. ■

2.2.24 Osservazione. L'ipotesi del teorema può essere espressa anche dicendo che le successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ differiscono al più per un numero finito di termini. Infatti può essere $a_n \neq b_n$ solo se $n \leq \overline{n}$, quindi le due successioni hanno al più $\overline{n}+1$ termini diversi. Viceversa se le due successioni hanno un numero finito di termini diversi, allora, indicato con $\overline{n}$ il più grande indice tale che $a_{\overline{n}} \neq b_{\overline{n}}$, evidentemente si ha $n > \overline{n} \implies a_n = b_n$.

Questa osservazione ha carattere generale: una proprietà vale definitivamente per una successione se e solo se è verificata da tutti i termini tranne, al più, un numero finito. ◀

2.2.25 Osservazione. Questo teorema ha una importante conseguenza: ogni proprietà del limite di una successione che vale se una determinata ipotesi è verificata da ogni termine della successione, vale anche se l'ipotesi è verificata solo definitamente.

Infatti se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifica l'ipotesi definitivamente, modificando opportunamente i termini a_n che non verificano l'ipotesi, si costruisce una successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definitivamente uguale a $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e avente tutti i termini che verificano l'ipotesi. Quindi $\lim_{n\to+\infty} b_n$ ha la proprietà considerata, per il teorema 2.2.23 $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n$, pertanto anche $\lim_{n\to+\infty} a_n$ ha la proprietà considerata.

Ad esempio, è una immediata conseguenza del teorema del confronto 2.2.19 il fatto che una successione regolare a termini non negativi ha limite non negativo. Il ragionamento appena fatto ci consente di concludere che anche le successioni regolari a termini definitivamente non negativi hanno limite non negativo. ◀

2.2.4 Operazioni sui limiti

Studiamo ora il limite di successioni ottenute, mediante le operazioni, da altre successioni. Iniziamo con le successioni espresse come somma di due successioni.

2.2.26 Teorema (sul limite della somma)

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{R}$.

I) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono convergenti, allora anche $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n + \lim_{n\to+\infty} b_n .$$

II) Se $a_n \to +\infty$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è inferiormente limitata, allora $a_n + b_n \to +\infty$.

III) Se $a_n \to +\infty$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha limite diverso da $-\infty$, allora $a_n + b_n \to +\infty$.

IV) Se $a_n \to -\infty$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è superiormente limitata, allora $a_n + b_n \to -\infty$.

V) Se $a_n \to -\infty$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha limite diverso da $+\infty$, allora $a_n + b_n \to -\infty$.

Dimostrazione. I) Posto $\ell = \lim_{n\to+\infty} a_n$ e $m = \lim_{n\to+\infty} b_n$, per definizione si ha:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists j_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > j_\varepsilon \implies |a_n - \ell| < \varepsilon ,$$
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > k_\varepsilon \implies |b_n - m| < \varepsilon .$$

Se $n > \max\{j_\varepsilon, k_\varepsilon\}$, allora si ha

$$\big|(a_n+b_n)-(\ell+m)\big| = \big|(a_n-\ell)+(b_n-m)\big| \leq |a_n-\ell|+|b_n-m| < 2\varepsilon .$$

Poiché ogni numero reale positivo può essere scritto nella forma 2ε, con $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, è verificata la definizione di $\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = \ell + m$.

II) Per definizione si ha:

$$\forall M \in \mathbb{R},\, \exists n_M \in \mathbb{N}\colon \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_M \implies a_n > M;$$

poiché $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è inferiormente limitata, esiste $b \in \mathbb{R}$ tale che, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $b_n \geq b$, quindi

$$n > n_M \implies a_n + b_n > M + b.$$

Poiché, scegliendo opportunamente M in $\mathbb{R}$, ogni numero reale può essere scritto nella forma $M + b$, risulta verificata la definizione di $a_n + b_n \to +\infty$.

III) Per il teorema sulla limitatezza delle successioni regolari 2.2.21, affermazioni I e II, le ipotesi dell'affermazione precedente sono verificate, quindi vale la tesi.

IV) La dimostrazione è analoga a quella dell'affermazione II.

V) La dimostrazione è analoga a quella dell'affermazione III. ■

Questo teorema consente di calcolare il limite della somma di due successioni quando si conosce il limite di ciascuno dei due addendi, con l'esclusione del caso in cui una delle successioni diverge a $+\infty$ e l'altra diverge a $-\infty$. In tal caso diciamo che si ha un limite in **forma indeterminata**.

Precisiamo che parlare di forma indeterminata non significa che il limite non esiste o che non è possibile calcolarlo, ma significa che la sola conoscenza del limite delle due successioni che si sommano non è sufficiente per trarre conclusioni sul limite della successione somma. Per il calcolo del limite occorre esprimere i termini della successione in una forma diversa.

2.2.27 Esempio. Vediamo alcuni esempi di successioni che mostrano che, sommando una successione divergente a $+\infty$ e una divergente a $-\infty$, la successione somma può avere qualunque comportamento.

Nella tabella seguente si ha sempre $a_n \to +\infty$ e $b_n \to -\infty$; la successione $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha un comportamento diverso a seconda della scelta di a_n e b_n. Con ℓ indichiamo un arbitrario numero reale.

a_n	$n+\ell$	$2n$	n	$n+(-1)^n$
b_n	$-n$	$-n$	$-2n$	$-n$
$a_n + b_n$	ℓ	n	$-n$	$(-1)^n$
$\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n + b_n)$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$\nexists$

Verifichiamo che in tutti i casi $a_n \to +\infty$. Sappiamo che $n \to +\infty$ (v. esempio 2.2.14). Per il teorema sul limite della somma, affermazione III, si ha $n + \ell \to +\infty$. Poiché, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $2n \geq n$, per il teorema 2.2.15, affermazione I, $2n \to +\infty$. Poiché la successione $\big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata, per il teorema sul limite della somma, affermazione II, $n + (-1)^n \to +\infty$.

Verifichiamo che in tutti i casi $b_n \to -\infty$. Si ha $-n \to -\infty$ e $-2n \to -\infty$, perché $n \to +\infty$ e $2n \to +\infty$ (v. osservazione 2.2.13). ◀

Studiamo il limite di successioni espresse come prodotto di due successioni.

2.2.28 Teorema (sul limite del prodotto)

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{R}$.

I) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono convergenti, allora anche $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n \lim_{n\to+\infty} b_n .$$

II) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è divergente e $\inf\{b_n \mid n\in\mathbb{N}\} > 0$, allora $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è divergente e

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n .$$

III) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è divergente e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha limite maggiore di 0, allora $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è divergente e

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n .$$

IV) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è divergente e $\sup\{b_n \mid n\in\mathbb{N}\} < 0$, allora $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è divergente e

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n b_n) = -\lim_{n\to+\infty} a_n .$$

V) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è divergente e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha limite minore di 0, allora $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è divergente e

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n b_n) = -\lim_{n\to+\infty} a_n .$$

VI) Se $a_n \to 0$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata, allora $a_n b_n \to 0$.

Dimostrazione. I) Posto $\ell = \lim_{n\to+\infty} a_n$ e $m = \lim_{n\to+\infty} b_n$, per definizione si ha

$$\begin{aligned}
&\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+,\ \exists j_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon\ \forall n\in\mathbb{N},\quad n > j_\varepsilon \implies |a_n - \ell| < \varepsilon ,\\
&\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+,\ \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon\ \forall n\in\mathbb{N},\quad n > k_\varepsilon \implies |b_n - m| < \varepsilon .
\end{aligned}$$

Posto $n_\varepsilon = \max\{j_\varepsilon, k_\varepsilon\}$, se $n > n_\varepsilon$ si ha:

$$\begin{aligned}
|a_n b_n - \ell m| &= \big|(a_n b_n - a_n m) + (a_n m - \ell m)\big| \le |a_n b_n - a_n m| + |a_n m - \ell m| =\\
&= |a_n|\,|b_n - m| + |a_n - \ell|\,|m| \le |a_n|\varepsilon + \varepsilon|m| .
\end{aligned}$$

Poiché la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente, essa è limitata per il teorema sulla limitatezza delle successioni regolari 2.2.21, affermazione I, perciò $\big\{|a_n| \,\big|\, n\in\mathbb{N}\big\}$ è superiormente limitato (v. osservazione 1.2.37); sia c un numero maggiore dell'estremo superiore di tale insieme. Allora si ha

$$n > n_\varepsilon \implies |a_n b_n - \ell m| \le \big(|a_n| + |m|\big)\varepsilon < \big(c + |m|\big)\varepsilon ;$$

poiché ogni numero reale positivo può essere scritto come $\big(c+|m|\big)\varepsilon$, con $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ opportuno, è verificata la definizione di $\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = \ell m$.

II) Supponiamo $a_n \to +\infty$, il caso $a_n \to -\infty$ si tratta in modo analogo. Poniamo $b = \inf\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$; per ipotesi $b > 0$. Per definizione si ha:

$$\forall M \in \mathbb{R},\, \exists n_M \in \mathbb{N}\colon\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_M \implies a_n > M\,;$$

se $M \in \mathbb{R}^+$ da qui segue

$$n > n_M \implies a_n b_n > M b_n \geq bM\,.$$

Pertanto, se $M \in \mathbb{R}^+$, allora si ha

$$n > n_{M/b} \implies a_n b_n > b\,\frac{M}{b} = M\,,$$

mentre se $M \in \mathbb{R}^- \cup \{0\}$, allora si ha

$$n > n_0 \implies a_n b_n > b \cdot 0 = 0 \geq M\,.$$

Quindi è verificata la definizione di $\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = +\infty$.

III) Sia $m \in \mathbb{R}^+$ tale che $m < \lim_{n\to+\infty} b_n$; allora, per il teorema della permanenza del segno 2.2.20, $\exists \overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che, per $n > \overline{n}$, si ha $b_n > m$, quindi

$$\inf\{b_n \mid n > \overline{n}\} \geq m > 0\,.$$

Pertanto $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifica definitivamente la condizione richiesta nell'affermazione II, allora (v. osservazione 2.2.25) vale la conclusione di tale affermazione, cioè $a_n b_n \to +\infty$.

IV) La dimostrazione è analoga a quella dell'affermazione II.

V) La dimostrazione è analoga a quella dell'affermazione III.

VI) Per definizione si ha:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+,\, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_\varepsilon \implies |a_n| < \varepsilon\,.$$

Poiché $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata anche $\big\{|b_n| \bigm| n \in \mathbb{N}\big\}$ è limitato (v. osservazione 1.2.37); scegliamo $b > \sup\big\{|b_n| \bigm| n \in \mathbb{N}\big\}$. Se $n > n_\varepsilon$ si ha $|a_n b_n| < b\varepsilon$; pertanto $a_n b_n \to 0$. ■

Questo teorema consente di calcolare il limite del prodotto di due successioni se si conosce il limite di ciascuno dei due fattori, con l'esclusione del caso in cui una delle successioni diverge e l'altra converge a 0. In tal caso diciamo che si ha un limite in **forma indeterminata**.

Vale anche per la forma indeterminata del prodotto quanto osservato per la forma indeterminata della somma.

2.2.29 Esempio. Vediamo alcuni esempi di successioni che mostrano che, moltiplicando una successione divergente a $+\infty$ e una infinitesima, la successione prodotto può avere qualunque comportamento.

Nella tabella seguente si ha sempre $a_n \to +\infty$ e $b_n \to 0$; la successione $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha un comportamento diverso a seconda della scelta di a_n e b_n. Con ℓ indichiamo un arbitrario numero reale non nullo.

a_n	$n+1$	$n+1$	$(n+1)^2$	$(n+1)^2$	$n+1$
b_n	$\dfrac{\ell}{n+1}$	$\dfrac{1}{(n+1)^2}$	$\dfrac{1}{n+1}$	$-\dfrac{1}{n+1}$	$\dfrac{(-1)^n}{n+1}$
$a_n b_n$	ℓ	$\dfrac{1}{n+1}$	$n+1$	$-n-1$	$(-1)^n$
$\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n b_n)$	ℓ	0	$+\infty$	$-\infty$	$\nexists$

Verifichiamo che in tutti i casi $a_n \to +\infty$. Sappiamo che $n+1 \to +\infty$ (v. esempio 2.2.27). Poiché, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $(n+1)^2 \geq n+1$, per il teorema 2.2.15, affermazione I, si ha $(n+1)^2 \to +\infty$.

Verifichiamo che in tutti i casi $b_n \to 0$. Sappiamo che $1/(n+1) \to 0$ (v. esempio 2.2.3). Per il teorema sul limite del prodotto, affermazione III, si ha $\ell/(n+1) \to 0$ e $1/(n+1)^2 \to 0$. La successione $\big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata, quindi, per il teorema sul limite del prodotto, affermazione VI, $(-1)^n/(n+1) \to 0$. ◀

2.2.30 Esempio. Sia $a \in \,]1,+\infty[$. Per la disuguaglianza di Bernoulli (v. esempio 1.3.14), si ha

$$a^n = \big(1+(a-1)\big)^n \geq 1+(a-1)n > (a-1)n\,.$$

Poiché $a-1>0$ e $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$, per il teorema sul limite del prodotto 2.2.28, affermazione III, risulta $(a-1)n \to +\infty$, pertanto, per il teorema 2.2.15, affermazione I, risulta $a^n \to +\infty$. ◀

2.2.31 Teorema (sul limite del reciproco)

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$ tale che, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $a_n \neq 0$.

I) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$, allora anche $(1/a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} a_n}\,.$$

II) Se $a_n \to 0$ e, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $a_n > 0$, allora $1/a_n \to +\infty$.

III) Se $a_n \to 0$ e, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $a_n < 0$, allora $1/a_n \to -\infty$.

IV) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è divergente, allora $1/a_n \to 0$.

Dimostrazione. I) Poniamo $\ell = \lim_{n\to+\infty} a_n$; sappiamo che $\ell \neq 0$. Per definizione si ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon\ \forall n \in \mathbb{N},\quad n > n_\varepsilon \implies |a_n - \ell| < \varepsilon\,.$$

Risulta

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \left|\frac{\ell - a_n}{a_n \ell}\right| = \frac{|\ell - a_n|}{|a_n|\,|\ell|}\,.$$

Se $\ell > 0$, allora $\ell > \ell/2$, quindi, per il teorema della permanenza del segno 2.2.20, $\exists \overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che se $n > \overline{n}$ allora $a_n > \ell/2$; se invece $\ell < 0$ allora $\ell < \ell/2$, per cui $\exists \overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che, se $n > \overline{n}$, allora $a_n < \ell/2$. In ciascuno dei due casi per $n > \overline{n}$ risulta $|a_n| > |\ell|/2$. Quindi, se $n > \max\{\overline{n}, n_\varepsilon\}$, si ha

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|\ell - a_n|}{|a_n||\ell|} < \frac{\varepsilon}{(|\ell|/2)|\ell|} = \frac{2}{|\ell|^2}\varepsilon\,.$$

Quindi $1/a_n \to 1/\ell$.

II) Se $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha $a_n > 0$, allora la definizione di $a_n \to 0$ diventa

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_\varepsilon \implies a_n < \varepsilon\,.$$

Se $n > n_\varepsilon$, si ha $1/a_n > 1/\varepsilon$; perciò, $\forall M \in \mathbb{R}^+$,

$$n > n_{1/M} \implies \frac{1}{a_n} > \frac{1}{1/M} = M\,.$$

Quindi $1/a_n \to +\infty$.

III) La dimostrazione è analoga a quella dell'affermazione precedente.

IV) Consideriamo il caso $a_n \to +\infty$. Per definizione si ha:

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n_M \in \mathbb{N}\colon\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_M \implies a_n > M\,.$$

In particolare se M è positivo, dalla disuguaglianza $a_n > M$, valida per ogni $n > n_M$, segue

$$0 < \frac{1}{a_n} < \frac{1}{M}\,.$$

Perciò, fissato $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, se $n > n_{1/\varepsilon}$, allora si ha

$$0 < \frac{1}{a_n} < \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1} = \varepsilon\,.$$

Quindi $1/a_n \to 0$.

Nel caso $a_n \to -\infty$ la dimostrazione è analoga. ■

Quando $a_n \to 0$, per applicare questo teorema deve essere verificata l'ulteriore ipotesi che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia a termini positivi o a termini negativi. Naturalmente il teorema si può applicare anche se la successione è a termini definitivamente positivi o definitivamente negativi. Consideriamo invece il caso in cui la successione non è né definitivamente positiva né definitivamente negativa, cioè, per ogni $\overline{n} \in \mathbb{N}$, esistono sia termini positivi che termini negativi con indice maggiore di $\overline{n}$. In tal caso, fissato ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, definitivamente si ha $|a_n| < \varepsilon$, cioè $1/|a_n| > 1/\varepsilon$, quindi vi sono indici n arbitrariamente grandi tali che $1/a_n > 1/\varepsilon$ e indici n arbitrariamente grandi tali che $1/a_n < -1/\varepsilon$. È chiaro che in questa situazione non può esistere $\lim_{n\to+\infty}(1/a_n)$.

Poiché $a_n/b_n = a_n(1/b_n)$, da questo teorema e da quello sul limite del prodotto 2.2.28, si possono ottenere informazioni sul limite del quoziente. Non sempre si può applicare il teorema sul limite del prodotto, perché questo non dà informazioni nel caso del prodotto tra una successione infinitesima e una successione divergente. Scrivendo a_n/b_n come $a_n(1/b_n)$ ci si trova in questa situazione in due casi: quando $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono entrambe infinitesime oppure quando entrambe sono divergenti. Abbiamo quindi, come per la somma e il prodotto, limiti che si presentano in **forma indeterminata**.

2.2.32 Esempio. Sia $a \in]0,1[$. Si ha

$$a^n = \frac{1}{(1/a)^n}$$

e $1/a > 1$; pertanto (v. esempio 2.2.30) $(1/a)^n \to +\infty$, quindi, per il teorema sul limite del reciproco 2.2.31, affermazione IV, risulta $a^n \to 0$. ◀

2.2.33 Teorema (sul limite del valore assoluto)

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$.

I) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente, allora $\big(|a_n|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = \Big|\lim_{n\to+\infty} a_n\Big| .$$

II) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è divergente, allora $|a_n| \to +\infty$.

III) Se $|a_n| \to 0$, allora $a_n \to 0$.

Dimostrazione. I) Posto $\ell = \lim_{n\to+\infty} a_n$, per definizione si ha:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon\ \forall n \in \mathbb{N},\quad n > n_\varepsilon \implies |a_n - \ell| < \varepsilon .$$

Fissato $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, se $n > n_\varepsilon$, per le proprietà del valore assoluto 1.2.31, affermazione V, si ha

$$\big||a_n| - |\ell|\big| \le |a_n - \ell| < \varepsilon ;$$

quindi è verificata la definizione di $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = |\ell|$.

II) Se $a_n \to +\infty$, poiché, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $|a_n| \ge a_n$, per il teorema 2.2.15, affermazione I, risulta $|a_n| \to +\infty$.

Se invece $a_n \to -\infty$, poiché, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $-|a_n| \le a_n$, per il teorema 2.2.15, affermazione II, risulta $-|a_n| \to -\infty$, quindi $|a_n| \to +\infty$.

III) Per definizione si ha:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon\ \forall n \in \mathbb{N},\quad n > n_\varepsilon \implies \big||a_n| - 0\big| < \varepsilon .$$

Poiché $\big||a_n| - 0\big| = |a_n| = |a_n - 0|$, questa coincide con la definizione di $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. ■

2.2.34 Esempio. Sia $a \in]-1,0[$. Si ha $|a| \in]0,1[$, pertanto $|a^n| = |a|^n \to 0$ (v. esempio 2.2.32), quindi, per il teorema sul limite del valore assoluto 2.2.33, affermazione III, si ha $a^n \to 0$. ◀

2.2.5 Criterio del rapporto

Sudiamo un criterio che consente di stabilire il limite di successioni a termini positivi. In vari casi applicando questo criterio possiamo determinare il limite di successioni che si presentano come quoziente in forma indeterminata, $0/0$ o ∞/∞, cioè possiamo confrontare tra loro due successioni infinitesime o due successioni divergenti.

2.2.35 Teorema (criterio del rapporto)

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}^+$ tale che esiste $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1}/a_n$.

I) Se $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1}/a_n < 1$, allora $a_n \to 0$.

II) Se $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1}/a_n > 1$, allora $a_n \to +\infty$.

Dimostrazione. Poniamo $\ell = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1}/a_n$. Poiché, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $a_{n+1}/a_n > 0$, per il teorema del confronto 2.2.19 risulta $\ell \geq 0$.

I) Se $\ell < 1$, poniamo $m = (\ell+1)/2$. Risulta $\ell < m < 1$, quindi per il teorema della permanenza del segno 2.2.20, affermazione II, esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che, se $n \geq \overline{n}$, allora $a_{n+1}/a_n < m$, cioè $a_{n+1} < ma_n$. Pertanto si ha

$$a_{\overline{n}+1} < ma_{\overline{n}},$$
$$a_{\overline{n}+2} < ma_{\overline{n}+1} < m^2 a_{\overline{n}},$$

ripetendo il ragionamento, per ogni $k \in \mathbb{N}$, risulta $a_{\overline{n}+k} < m^k a_{\overline{n}}$. Pertanto, se $n \geq \overline{n}$, allora $a_n < m^{n-\overline{n}} a_{\overline{n}}$. Poiché $m \in \,]0,1[$ si ha $m^n \to 0$ (v. esempio 2.2.32), quindi si ha anche $m^{n-\overline{n}} a_{\overline{n}} = m^n m^{-\overline{n}} a_{\overline{n}} \to 0$. Inoltre, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $a_n > 0$, pertanto, per il teorema dei due carabinieri 2.2.11, risulta $a_n \to 0$.

II) Se $\ell \in \,]1,+\infty[$, poniamo $m = (\ell+1)/2$, mentre, se $\ell = +\infty$, poniamo $m = 2$. In ogni caso risulta $\ell > m > 1$, quindi per il teorema della permanenza del segno 2.2.20, affermazione I, esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che, se $n \geq \overline{n}$, allora $a_{n+1}/a_n > m$, cioè $a_{n+1} > ma_n$. Pertanto si ha

$$a_{\overline{n}+1} > ma_{\overline{n}},$$
$$a_{\overline{n}+2} > ma_{\overline{n}+1} > m^2 a_{\overline{n}},$$

ripetendo il ragionamento, per ogni $k \in \mathbb{N}$, risulta $a_{\overline{n}+k} > m^k a_{\overline{n}}$. Pertanto, se $n \geq \overline{n}$, allora $a_n > m^{n-\overline{n}} a_{\overline{n}}$. Poiché $m \in \,]1,+\infty[$ si ha $m^n \to +\infty$ (v. esempio 2.2.30), quindi si ha anche $m^{n-\overline{n}} a_{\overline{n}} = m^n m^{-\overline{n}} a_{\overline{n}} \to +\infty$. Per il teorema 2.2.15, affermazione I, risulta $a_n \to +\infty$. ■

2.2.36 Osservazione. Se il limite che compare nell'enunciato di in questo teorema è 1, allora non si può concludere nulla sul limite di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Infatti si verifica facilmente che se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una delle successioni $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(1/(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$ o $(\ell)_{n\in\mathbb{N}}$ (con $\ell \in \mathbb{R}^+$), allora $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1}/a_n = 1$ e queste successioni hanno limiti diversi. Infatti $n \to +\infty$ (v. esempio 2.2.14), $1/(n+1) \to 0$ (v. esempio 2.2.3) e $\ell \to \ell$. ◀

2.2.37 Esempio. Siano $k \in \mathbb{N}^*$ e $a \in \,]1,+\infty[$. Si ha $n^k \to +\infty$ (v. esempio 2.2.16) e $a^n \to +\infty$ (v. esempio 2.2.30), pertanto $\lim_{n\to+\infty} n^k/a^n$ si presenta in forma indeterminata. La successione $(n^k/a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ è a termini positivi, applichiamo il criterio del rapporto 2.2.35. Si ha

$$\frac{(n+1)^k/a^{n+1}}{n^k/a^n} = \frac{(n+1)^k a^n}{a^{n+1} n^k} = \frac{1}{a}\left(\frac{n+1}{n}\right)^k = \frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{n}\right)^k \to \frac{1}{a}.$$

Poiché $1/a < 1$, per il criterio del rapporto 2.2.35 si ha $n^k/a^n \to 0$. ◀

2.2.38 Esempio. Sia $a \in\,]1,+\infty[$. Si ha $a^n \to +\infty$ (v. esempio 2.2.30) e $n! \to +\infty$ (v. esempio 2.2.17), pertanto $\lim_{n\to+\infty} a^n/n!$ si presenta in forma indeterminata. La successione $(a^n/n!)_{n\in\mathbb{N}}$ è a termini positivi, applichiamo il criterio del rapporto 2.2.35. Si ha

$$\frac{a^{n+1}/(n+1)!}{a^n/n!} = \frac{a^{n+1}n!}{a^n(n+1)!} = \frac{a}{n+1} \to 0.$$

Per il criterio del rapporto 2.2.35 si ha $a^n/n! \to 0$. ◀

2.2.6 Simboli di Landau

Introduciamo alcuni simboli utili per semplificare il calcolo dei limiti. Alla base dell'introduzione di questi simboli c'è l'osservazione che nel calcolo di un limite spesso non è necessario conoscere l'espressione precisa di una successione, ma interessa soltanto il suo "comportamento all'infinito". I simboli che introduciamo sono detti **simboli di Landau**[4].

Definizione di successione asintotica

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{R}$, tali che definitivamente $b_n \neq 0$. Diciamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è **asintotica** (o **equivalente**) a $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quando $\lim_{n\to+\infty} a_n/b_n = 1$. In tal caso scriviamo $a_n \sim b_n$.

L'asintoticità può essere vista come una relazione di equivalenza tra successioni definitivamente non nulle. Vale cioè il seguente teorema.

2.2.39 Teorema

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{R}$ definitivamente non nulle. Allora:

I) $a_n \sim a_n$;

II) $a_n \sim b_n \implies b_n \sim a_n$;

III) $(a_n \sim b_n \wedge b_n \sim c_n) \implies a_n \sim c_n$.

Dimostrazione. I) Si ha $a_n/a_n = 1 \to 1$, quindi $a_n \sim a_n$.

II)

$$\begin{aligned} a_n \sim b_n &\implies \frac{a_n}{b_n} \to 1 \\ &\implies \frac{b_n}{a_n} \to 1 \\ &\implies b_n \sim a_n. \end{aligned}$$

[4] I simboli prendono il nome da Edmund Landau (Berlino, 1877 - Berlino, 1938), studioso di teoria dei numeri, che li utilizzò in un trattato del 1909.
Il simbolo o grande era già stato introdotto da Paul Bachmann (Berlino, 1837 - Weimar, Germania, 1920), anch'egli studioso di teoria dei numeri, nel 1894.

III)

$$
\begin{aligned}
(a_n \sim b_n \wedge b_n \sim c_n) &\Longrightarrow \frac{a_n}{b_n} \to 1 \wedge \frac{b_n}{c_n} \to 1 \\
&\Longrightarrow \frac{a_n}{c_n} = \frac{a_n}{b_n}\frac{b_n}{c_n} \to 1 \\
&\Longrightarrow a_n \sim c_n .
\end{aligned}
$$

■

L'utilità del concetto di asintoticità di successioni nel calcolo dei limiti è dovuta al seguente teorema.

2.2.40 Teorema

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{R}$, tali che definitivamente $b_n \neq 0$. Supponiamo che sia $a_n \sim b_n$. La successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è regolare se e solo se $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è regolare e in tal caso si ha

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n .$$

Dimostrazione. Poniamo, $\forall n \in \mathbb{N}$, $h_n = a_n/b_n$. Per ipotesi $a_n \sim b_n$, quindi

$$\lim_{n\to+\infty} h_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 .$$

Supponiamo $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ regolare. Poiché, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $a_n = h_n b_n$, a_n è prodotto di due successioni regolari, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, che ha limite 1, pertanto, per il teorema sul limite del prodotto 2.2.28, anche $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è regolare e il limite coincide con quello di $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Viceversa, supponiamo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ regolare. Poiché $\lim_{n\to+\infty} h_n > 0$, per il teorema del confronto 2.2.5, definitivamente $h_n > 0$, quindi $a_n \neq 0$ e risulta $b_n = a_n/h_n$. Come sopra, da qui segue che b_n è regolare. ■

Questo teorema assicura che per determinare il limite di una successione si può studiare il limite di una successione asintotica a essa; questo consente, in molti casi, di ricondursi allo studio di una successione più semplice.

2.2.41 Esempio. Consideriamo un polinomio p di grado $k \in \mathbb{N}^*$. Sia cioè

$$p(x) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j x^j ,$$

con $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{R}$ e $\alpha_k \in \mathbb{R}^*$. Studiamo la successione $\big(p(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Si ha, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$p(n) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j n^j = \alpha_k n^k \sum_{j=0}^{k} \frac{\alpha_j}{\alpha_k} n^{j-k} = \alpha_k n^k \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{\alpha_j}{\alpha_k} n^{j-k} + 1 \right).$$

Per $j = 0, 1, \dots, k-1$ si ha $j - k < 0$, quindi $n^{j-k} \to 0$ (v. esempio 2.2.12), pertanto

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{\alpha_j}{\alpha_k} n^{j-k} + 1 \to 1 .$$

Quindi si ha $p(n) \sim \alpha_k n^k$.

Poiché $n^k \to +\infty$ (v. esempio 2.2.16), per il teorema sul limite del prodotto 2.2.28, se $\alpha_k > 0$, allora $\alpha_k n^k \to +\infty$, mentre se $\alpha_k < 0$, allora $\alpha_k n^k \to -\infty$. Per il teorema 2.2.40 possiamo concludere che $\big(p(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, positivamente se il coefficiente del termine di grado massimo è positivo, negativamente in caso contrario. ◀

Il seguente teorema è una facile conseguenza dei teoremi sul limite del prodotto 2.2.28, affermazione I e sul limite del reciproco 2.2.31, affermazione I.

2.2.42 Teorema

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{R}$, tali che definitivamente $c_n \neq 0$ e $d_n \neq 0$.

I) Se $a_n \sim c_n$ e $b_n \sim d_n$, allora $a_n b_n \sim c_n d_n$.

II) Se $c_n \sim d_n$, allora $1/c_n \sim 1/d_n$.

DIMOSTRAZIONE. I)

$$\begin{aligned} a_n \sim c_n \wedge b_n \sim d_n &\implies \frac{a_n}{c_n} \to 1 \wedge \frac{b_n}{d_n} \to 1 \\ &\implies \frac{a_n b_n}{c_n d_n} \to 1 \\ &\implies a_n b_n \sim c_n d_n . \end{aligned}$$

II)

$$\begin{aligned} c_n \sim d_n &\implies \frac{c_n}{d_n} \to 1 \\ &\implies \frac{d_n}{c_n} \to 1 \\ &\implies \frac{1}{c_n} \sim \frac{1}{d_n} . \end{aligned}$$

■

2.2.43 Esempio. Consideriamo una funzione razionale fratta r. Siano cioè

$$p(x) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j x^j , \qquad q(x) = \sum_{j=0}^{m} \beta_j x^j ,$$

con $k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{m-1} \in \mathbb{R}$ e $\alpha_k, \beta_m \in \mathbb{R}^*$ e poniamo $r(x) = p(x)/q(x)$ per gli $x \in \mathbb{R}$ che non annullano il denominatore. Poiché un polinomio ha al più un numero finito di radici, $r(n)$ è definito per gli n naturali, escluso al più un numero finito. Possiamo quindi studiare il limite di $r(n)$.

Come visto nell'esempio 2.2.41, si ha $p(n) \sim \alpha_k n^k$ e $q(n) \sim \beta_m n^m$. Pertanto, per il teorema 2.2.42, si ha

$$r(n) = p(n) \frac{1}{q(n)} \sim \alpha_k n^k \frac{1}{\beta_m n^m} = \frac{\alpha_k}{\beta_m} n^{k-m} .$$

Se $k>m$, allora $n^{k-m}\to+\infty$ (v. esempio 2.2.16), se $k=m$, allora $n^{k-m}=1$, se $k<m$, allora $n^{k-m}\to 0$ (v. esempio 2.2.12). Pertanto, per il teorema 2.2.40, risulta

$$r(n)\to\begin{cases}+\infty, & \text{se } k>m \text{ e } \alpha_k\beta_m>0,\\ -\infty, & \text{se } k>m \text{ e } \alpha_k\beta_m<0,\\ \dfrac{\alpha_k}{\beta_m}, & \text{se } k=m,\\ 0, & \text{se } k<m.\end{cases}$$

◀

2.2.44 Osservazione. Abbiamo visto (affermazione I del teorema 2.2.42) che la moltiplicazione conserva l'asintoticità di successioni; ciò non è vero per l'addizione. Cioè se $a_n\sim c_n$ e $b_n\sim d_n$, non necessariamente $a_n+b_n\sim c_n+d_n$.

Ad esempio, consideriamo le successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}=(n^2+n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}=(-n^2)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}=(n^2+1)_{n\in\mathbb{N}}$, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}=(-n^2)_{n\in\mathbb{N}}$. Le successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono polinomiali, come visto nell'esempio 2.2.41 sono asintotiche al termine di esponente massimo, che in entrambi i casi è n^2. Poiché sono asintotiche alla stessa successione, per il teorema 2.2.42 sono asintotiche tra loro. Poiché $b_n=d_n$ si ha $b_n\sim d_n$. Tuttavia

$$\frac{a_n+b_n}{c_n+d_n}=\frac{n^2+n-n^2}{n^2+1-n^2}=n\to+\infty,$$

quindi a_n+b_n non è asintotica a c_n+d_n. ◀

Definizione di successione trascurabile

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{R}$, tali che definitivamente $b_n\neq 0$. Diciamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è **trascurabile** rispetto a $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quando $\lim_{n\to+\infty}a_n/b_n=0$. In tal caso scriviamo $a_n=o(b_n)$ (si legge "a_n è o piccolo di b_n").

2.2.45 Osservazione. L'uso del simbolo $=$ per indicare che una successione è trascurabile rispetto a un'altra è scorretto; sarebbe necessario usare il simbolo di appartenenza, perché esistono più successioni trascurabili rispetto a una successione fissata, quindi la definizione individua un insieme di successioni. L'abitudine è però di usare il simbolo di uguaglianza, perché ciò consente di semplificare le notazioni. C'è un prezzo da pagare per questa scelta: il fatto che il simbolo o piccolo indichi più di una successione comporta che le regole di calcolo con gli o piccoli sono diverse dalle ordinarie regole di calcolo.

Ad esempio, la differenza di due successioni trascurabili rispetto a una terza è ancora una successione trascurabile rispetto a quest'ultima. Infatti, se $a_n/c_n\to 0$ e $b_n/c_n\to 0$, allora possiamo concludere solamente che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n-b_n}{c_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{c_n}-\lim_{n\to+\infty}\frac{b_n}{c_n}=0.$$

Questo si traduce nella formula $o(c_n)-o(c_n)=o(c_n)$. Evidentemente non possiamo concludere che $o(c_n)-o(c_n)$ è nullo, perché non consideriamo la differenza di una successione con se stessa, come potrebbe fare pensare il fatto che facciamo la differenza di due oggetti indicati con lo stesso simbolo. Stiamo invece considerando la differenza di due successioni di cui sappiamo soltanto che il quoziente di ognuna di esse con c_n tende a 0. ◀

2.2.46 Esempio. Siano $h, k \in \mathbb{N}^*$, con $h < k$. Si ha $n^h/n^k = n^{h-k} \to 0$, perché $h-k<0$ (v. esempio 2.2.12). Utilizzando i simboli di Landau, questo fatto può essere scritto come $n^h = o(n^k)$.

Sappiamo che, se $k \in \mathbb{N}^*$ e $a \in]1,+\infty[$, allora $n^k/a^n \to 0$ (v. esempio 2.2.37). Risulta quindi $n^k = o(a^n)$.

Sappiamo che, se $a \in]1,+\infty[$, allora $a^n/n! \to 0$ (v. esempio 2.2.38). Risulta quindi $a^n = o(n!)$. ◀

Vi è un collegamento tra asintoticità e trascurabilità di successioni, stabilito nel seguente teorema.

2.2.47 Teorema

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{R}$, tali che definitivamente $b_n \neq 0$. Si ha $a_n \sim b_n$ se e solo se $a_n = b_n + o(b_n)$.

Dimostrazione. Se $a_n \sim b_n$, allora, posto $c_n = a_n - b_n$, risulta $a_n = b_n + c_n$ e

$$\frac{c_n}{b_n} = \frac{a_n - b_n}{b_n} = \frac{a_n}{b_n} - 1 \to 1 - 1 = 0;$$

quindi $c_n = o(b_n)$.

Viceversa, se $a_n = b_n + o(b_n)$, allora

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{b_n + o(b_n)}{b_n} = 1 + \frac{o(b_n)}{b_n} \to 1 + 0 = 1;$$

quindi $a_n \sim b_n$. ■

2.2.48 Esempio. Determiniamo $\lim_{n\to+\infty}(2^n + n^4)/(3^n + n^2)$. Numeratore e denominatore sono somma di successioni positivamente divergenti, quindi sono positivamente divergenti. Il limite è quindi in forma indeterminata. Per l'esempio 2.2.37, si ha $n^4/2^n \to 0$ e $n^2/3^n \to 0$, quindi, per il teorema 2.2.47,

$$2^n + n^4 = 2^n + o(2^n) \sim 2^n,$$
$$3^n + n^2 = 3^n + o(3^n) \sim 3^n.$$

Pertanto, per il teorema 2.2.42, si ha

$$\frac{2^n + n^4}{3^n + n^2} \sim \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0,$$

dove la convergenza a 0 segue dall'esempio 2.2.32, perché $2/3 < 1$. Quindi, per il teorema 2.2.40, si ha anche $\lim_{n\to+\infty}(2^n + n^4)/(3^n + n^2) = 0$.

Determiniamo $\lim_{n\to+\infty}(n! + 4^n)/(n! + n^4)$. Numeratore e denominatore sono somma di successioni positivamente divergenti, quindi sono positivamente divergenti. Il limite è quindi in forma indeterminata. Per l'esempio 2.2.38, si ha $4^n/n! \to 0$, inoltre, per l'esempio 2.2.37, si ha $n^4/4^n \to 0$, quindi $n^4/n! = (n^4/4^n)(4^n/n!) \to 0$. Per il teorema 2.2.47, risulta

$$n! + 4^n = n! + o(n!) \sim n!,$$
$$n! + n^4 = n! + o(n!) \sim n!.$$

Pertanto, per il teorema 2.2.42, si ha

$$\frac{n! + 4^n}{n! + n^4} \sim \frac{n!}{n!} = 1.$$

Quindi, per il teorema 2.2.40, si ha $\lim_{n\to+\infty}(n! + 4^n)/(n! + n^4) = 1$. ◀

Le regole di calcolo per o piccolo sono una semplice conseguenza della definizione e dei teoremi di base sui limiti. Le enunciamo nel seguente teorema.

2.2.49 Teorema (regole di calcolo per o piccolo)

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{R}$, tali che definitivamente $c_n \neq 0$ e $d_n \neq 0$, e $m \in \mathbb{R}^*$.

I) Se $a_n = o(c_n)$ e $b_n = o(c_n)$, allora $a_n + b_n = o(c_n)$.

II) Se $a_n = o(c_n)$, allora $ma_n = o(c_n)$.

III) Se $a_n = o(c_n)$, allora $a_n d_n = o(c_n d_n)$.

IV) Se $a_n = o(c_n)$ e $b_n = o(d_n)$, allora $a_n b_n = o(c_n d_n)$.

V) Se $a_n = o(c_n)$ e $c_n = o(d_n)$, allora $a_n = o(d_n)$.

VI) Se $a_n = o(c_n)$ e $c_n \sim d_n$, allora $a_n = o(d_n)$.

Le regole di calcolo stabilite da questo teorema possono essere espresse come:

$$o(c_n) + o(c_n) = o(c_n),$$
$$m\,o(c_n) = o(c_n),$$
$$o(c_n)d_n = o(c_n d_n),$$
$$o(c_n)o(d_n) = o(c_n d_n),$$
$$o\big(o(d_n)\big) = o(d_n),$$
$$c_n \sim d_n \implies o(c_n) = o(d_n).$$

Dimostrazione. I)

$$\begin{aligned} a_n = o(c_n) \wedge b_n = o(c_n) &\implies \frac{a_n}{c_n} \to 0 \wedge \frac{b_n}{c_n} \to 0 \\ &\implies \frac{a_n + b_n}{c_n} \to 0 \\ &\implies a_n + b_n = o(c_n). \end{aligned}$$

II)

$$\begin{aligned} a_n = o(c_n) &\implies \frac{a_n}{c_n} \to 0 \\ &\implies \frac{ma_n}{c_n} \to 0 \\ &\implies ma_n = o(c_n). \end{aligned}$$

III)

$$\begin{aligned} a_n = o(c_n) &\implies \frac{a_n}{c_n} \to 0 \\ &\implies \frac{a_n d_n}{c_n d_n} \to 0 \\ &\implies a_n d_n = o(c_n d_n). \end{aligned}$$

IV)

$$\begin{aligned} a_n = o(c_n) \wedge b_n = o(d_n) &\implies \frac{a_n}{c_n} \to 0 \wedge \frac{b_n}{d_n} \to 0 \\ &\implies \frac{a_n b_n}{c_n d_n} \to 0 \\ &\implies a_n b_n = o(c_n d_n). \end{aligned}$$

V)

$$\begin{aligned} a_n = o(c_n) \wedge c_n = o(d_n) &\implies \frac{a_n}{c_n} \to 0 \wedge \frac{c_n}{d_n} \to 0 \\ &\implies \frac{a_n}{d_n} = \frac{a_n}{c_n}\frac{c_n}{d_n} \to 0 \\ &\implies a_n = o(d_n). \end{aligned}$$

VI)

$$\begin{aligned} a_n = o(c_n) \wedge c_n \sim d_n &\implies \frac{a_n}{c_n} \to 0 \wedge \frac{c_n}{d_n} \to 1 \\ &\implies \frac{a_n}{d_n} = \frac{a_n}{c_n}\frac{c_n}{d_n} \to 0 \\ &\implies a_n = o(d_n). \end{aligned}$$

■

Definizione di successione controllata

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{R}$, tali che definitivamente $b_n \neq 0$. Diciamo che $(a_n)_{\in\mathbb{N}}n$ è **controllata** da $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quando la successione $(a_n/b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata. In tal caso scriviamo $a_n = O(b_n)$ (si legge "a_n è o grande di b_n").

Abbiamo la seguente relazione tra i concetti di asintoticità, o piccolo e o grande.

2.2.50 Teorema

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{R}$, tali che definitivamente $b_n \neq 0$.

I) Se $a_n \sim b_n$, allora $a_n = O(b_n)$.

II) Se $a_n = O(b_n)$, allora $a_n = O(b_n)$.

Dimostrazione. Se $a_n \sim b_n$ oppure $a_n = o(b_n)$, allora a_n/b_n converge, pertanto, per il teorema sulla limitatezza delle successioni regolari 2.2.21, affermazione I, tale quoziente è limitato; quindi risulta $a_n = O(b_n)$. ■

2.2.51 Esempio. Consideriamo un polinomio p di grado $k \in \mathbb{N}^*$. Sia cioè

$$p(x) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j x^j,$$

con $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{R}$ e $\alpha_k \in \mathbb{R}^*$. Per l'esempio 2.2.43, si ha $p(n)/n^k \to \alpha_k$, per il teorema sulla limitatezza delle successioni regolari 2.2.21, affermazione I, ogni successione convergente è limitata, quindi $p(n) = O(n^k)$. ◀

Per o grande valgono regole di calcolo del tutto analoghe a quelle per o piccolo; anche queste sono una semplice conseguenza della definizione e delle proprietà della limitatezza.

2.2.52 Teorema (regole di calcolo per o grande)

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{R}$, tali che definitivamente $c_n \neq 0$ e $d_n \neq 0$, e $m \in \mathbb{R}^*$.

I) Se $a_n = O(c_n)$ e $b_n = O(c_n)$, allora $a_n + b_n = O(c_n)$.

II) Se $a_n = O(c_n)$, allora $m a_n = O(c_n)$.

III) Se $a_n = O(c_n)$, allora $a_n d_n = O(c_n d_n)$.

IV) Se $a_n = O(c_n)$ e $b_n = O(d_n)$, allora $a_n b_n = O(c_n d_n)$.

V) Se $a_n = O(c_n)$ e $c_n = O(d_n)$, allora $a_n = O(d_n)$.

VI) Se $a_n = O(c_n)$ e $c_n \sim d_n$, allora $a_n = O(d_n)$.

Le regole di calcolo stabilite da questo teorema possono essere espresse come:

$$\begin{gathered}
O(c_n) + O(c_n) = O(c_n), \\
m O(c_n) = O(c_n), \\
O(c_n) d_n = O(c_n d_n), \\
O(c_n) O(d_n) = O(c_n d_n), \\
O\big(O(d_n)\big) = O(d_n), \\
c_n \sim d_n \implies O(c_n) = O(d_n).
\end{gathered}$$

DIMOSTRAZIONE. I)

$$\begin{aligned} a_n = O(c_n) \wedge b_n = O(c_n) &\implies \left(\frac{a_n}{c_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ limitata} \wedge \left(\frac{b_n}{c_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ limitata} \\ &\implies \left(\frac{a_n+b_n}{c_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ limitata} \\ &\implies a_n + b_n = O(c_n). \end{aligned}$$

II)

$$\begin{aligned} a_n = O(c_n) &\implies \left(\frac{a_n}{c_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ limitata} \\ &\implies \left(\frac{ma_n}{c_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ limitata} \\ &\implies ma_n = O(c_n). \end{aligned}$$

III)

$$\begin{aligned} a_n = O(c_n) &\implies \left(\frac{a_n}{c_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ limitata} \\ &\implies \left(\frac{a_n d_n}{c_n d_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ limitata} \\ &\implies a_n d_n = O(c_n d_n). \end{aligned}$$

IV)

$$\begin{aligned} a_n = O(c_n) \wedge b_n = O(d_n) &\implies \left(\frac{a_n}{c_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ limitata} \wedge \left(\frac{b_n}{d_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ limitata} \\ &\implies \left(\frac{a_n b_n}{c_n d_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ limitata} \\ &\implies a_n b_n = O(c_n d_n). \end{aligned}$$

V)

$$\begin{aligned} a_n = O(c_n) \wedge c_n = O(d_n) &\implies \left(\frac{a_n}{c_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ limitata} \wedge \left(\frac{c_n}{d_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ limitata} \\ &\implies \left(\frac{a_n}{d_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{a_n}{c_n}\,\frac{c_n}{d_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ limitata} \\ &\implies a_n = O(d_n). \end{aligned}$$

VI)

$$\begin{aligned} a_n = O(c_n) \wedge c_n \sim d_n &\implies \left(\frac{a_n}{c_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ limitata} \wedge \frac{c_n}{d_n} \to 1 \\ &\implies \left(\frac{a_n}{d_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{a_n}{c_n}\,\frac{c_n}{d_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ limitata} \\ &\implies a_n = O(d_n). \end{aligned}$$

■

Abbiamo inoltre le seguenti regole che coinvolgono insieme o grande e o piccolo.

2.2.53 Teorema

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{R}$, tali che definitivamente $c_n \neq 0$ e $d_n \neq 0$.

I) Se $a_n = o(c_n)$ e $b_n = O(c_n)$, allora $a_n + b_n = O(c_n)$.

II) Se $a_n = o(c_n)$ e $b_n = O(d_n)$, allora $a_n b_n = o(c_n d_n)$.

III) Se $a_n = o(c_n)$ e $c_n = O(d_n)$, allora $a_n = o(d_n)$.

IV) Se $a_n = O(c_n)$ e $c_n = o(d_n)$, allora $a_n = o(d_n)$.

Le regole di calcolo stabilite da questo teorema possono essere espresse come:

$$\begin{aligned} o(c_n) + O(c_n) &= O(c_n), \\ o(c_n)O(d_n) &= o(c_n d_n), \\ o\big(O(d_n)\big) &= o(d_n), \\ O\big(o(d_n)\big) &= o(d_n). \end{aligned}$$

Dimostrazione. I)

$$\begin{aligned} a_n = o(c_n) \wedge b_n = O(c_n) &\implies \frac{a_n}{c_n} \to 0 \wedge \left(\frac{b_n}{c_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ limitata} \\ &\implies \left(\frac{a_n + b_n}{c_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ limitata} \\ &\implies a_n + b_n = O(c_n). \end{aligned}$$

II)

$$\begin{aligned} a_n = o(c_n) \wedge b_n = O(d_n) &\implies \frac{a_n}{c_n} \to 0 \wedge \left(\frac{b_n}{d_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ limitata} \\ &\implies \frac{a_n b_n}{c_n d_n} \to 0 \\ &\implies a_n b_n = o(c_n d_n). \end{aligned}$$

III)

$$\begin{aligned} a_n = o(c_n) \wedge c_n = O(d_n) &\implies \frac{a_n}{c_n} \to 0 \wedge \left(\frac{c_n}{d_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ limitata} \\ &\implies \frac{a_n}{d_n} = \frac{a_n}{c_n}\frac{c_n}{d_n} \to 0 \\ &\implies a_n = o(d_n). \end{aligned}$$

IV)

$$
\begin{aligned}
a_n = O(c_n) \wedge c_n = o(d_n) &\implies \left(\frac{a_n}{c_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ limitata } \wedge \frac{c_n}{d_n} \to 0 \\
&\implies \frac{a_n}{d_n} = \frac{a_n}{c_n}\,\frac{c_n}{d_n} \to 0 \\
&\implies a_n = o(d_n).
\end{aligned}
$$

■

2.3 Condizioni per la regolarità di successioni

Per determinare se una successione è convergente (o, più in generale, regolare) è necessario verificare la definizione di limite e per questo occorre conoscere il limite. In alternativa si possono usare i teoremi che collegano limiti e operazioni, ma occorre già conoscere il limite delle successioni che sommiamo o moltiplichiamo.

In questa sezione adottiamo un diverso punto di vista e studiamo condizioni che assicurano che una successione reale è convergente, o che è regolare, senza conoscerne a priori il limite.

2.3.1 Successioni monotòne

Introduciamo una classe di successioni che hanno sempre limite.

Definizione di successione crescente, decrescente, monotòna

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$.
Diciamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è **crescente** quando

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} \geq a_n\,.$$

Diciamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è **strettamente crescente** quando

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} > a_n\,.$$

Diciamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è **decrescente** quando

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} \leq a_n\,.$$

Diciamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è **strettamente decrescente** quando

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} < a_n\,.$$

Diciamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è **monotòna** quando è crescente o decrescente.

Diciamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è **strettamente monotòna** quando è strettamente crescente o strettamente decrescente.

Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente si prova facilmente che, $\forall m,n \in \mathbb{N}$, se $m < n$, allora $a_m \leq a_n$; proprietà analoghe valgono negli altri casi.

Ogni successione strettamente crescente è crescente, mentre ogni successione strettamente decrescente è decrescente. Le successioni costanti sono sia crescenti che decrescenti.

2.3.1 Esempio. Studiamo la monotonia della successioni introdotte nell'esempio 2.1.1.

La successione $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big(1/(n+1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ è strettamente decrescente, perché, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $p_{n+1} = 1/(n+2) < 1/(n+1) = p_n$.

Esaminando i termini della successione $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((n+(-1)^n)/(n+1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ si vede facilmente che non è monotòna. Infatti $q_0 = 1 > 0 = q_1$, quindi la successione non è crescente, e $q_1 = 0 < 1 = q_2$, quindi la successione non è decrescente.

Analogamente, la successione $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big(1/(5-2n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ non è monotòna. Infatti risulta $r_0 = 1/5 < 1/3 = r_1$ e $r_3 = 1 > -1 = r_4$.

Si verifica facilmente che la successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ è strettamente crescente.

Consideriamo la successione $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((2n+(-1)^n-1)/4\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Si ha

$$t_{n+1} - t_n = \frac{2n+2+(-1)^{n+1}-1}{4} - \frac{2n+(-1)^n-1}{4} = \frac{1-(-1)^n}{2} = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ è pari,} \\ 1, & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Pertanto si ha $t_{n+1} = t_n$ se n è pari e $t_{n+1} > t_n$ se n è dispari. Quindi $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente, ma non strettamente crescente.

Si verifica facilmente che la successione $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (3-n)_{n\in\mathbb{N}}$ è strettamente decrescente.

La successione $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ non è monotòna, perché $v_0 > v_1$ e $v_1 < v_2$.

Anche la successione $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((-1)^n(n+2)/(n+1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ non è monotòna, perché $w_0 = 2 > -3/2 = w_1$ e $w_1 = -3/2 < 4/3 = w_2$.

Analogamente, la successione $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((-1)^n n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ non è monotòna, perché si ha $z_0 = 0 > -1 = z_1$ e $z_1 = -1 < 2 = z_2$. ◀

Il principale risultato sulle successioni monotòne è il teorema seguente.

2.3.2 Teorema (sul limite delle successioni monotòne)

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$.

I) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è monotòna crescente, allora è regolare e si ha

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n .$$

II) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è monotòna decrescente, allora è regolare e si ha

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n .$$

Dimostrazione. I) Consideriamo anzitutto il caso $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = +\infty$. Ogni $M \in \mathbb{R}$ non è un maggiorante della successione, pertanto esiste $n_M \in \mathbb{N}$ tale che $a_{n_M} > M$. Poiché $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente, se $n > n_M$ si ha $a_n \geq a_{n_M} > M$. Pertanto $a_n \to +\infty$.

Consideriamo ora il caso $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \in \mathbb{R}$. Posto $\ell = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$, qualunque sia $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ si ha $\ell - \varepsilon < \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$, quindi, per la caratterizzazione dell'estremo superiore 1.2.42, esiste un termine della successione maggiore di $\ell - \varepsilon$; indichiamolo con a_{n_ε}. La successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente, quindi, se $n > n_\varepsilon$, si ha $a_n \geq a_{n_\varepsilon} > \ell - \varepsilon$. Poiché ℓ è estremo superiore della successione, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $a_n \leq \ell < \ell + \varepsilon$; quindi

$$n > n_\varepsilon \implies \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon;$$

pertanto $a_n \to \ell$.

II) La dimostrazione è analoga a quella dell'affermazione precedente. ■

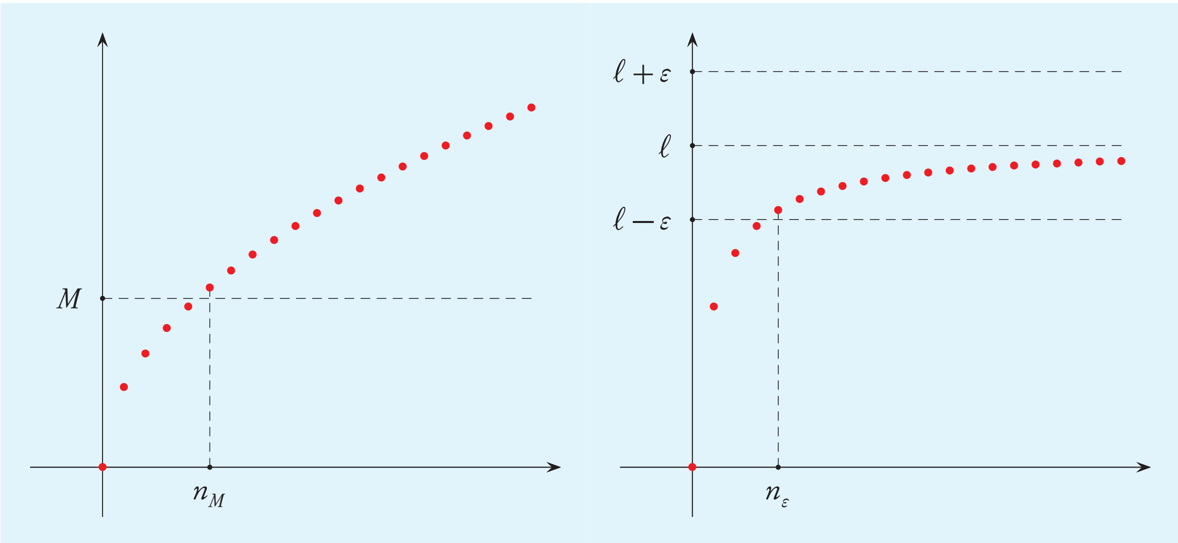


Figura 2.3.1
Dimostrazione del teorema sul limite delle successioni monotòne 2.3.2.
A sinistra il caso di una successione crescente illimitata, a destra il caso di una successione crescente limitata.

Osserviamo che per dimostrare il teorema si utilizza l'esistenza dell'estremo superiore o inferiore dell'insieme dei termini di una successione, quindi è essenziale la completezza di $\mathbb{R}$. In $\mathbb{Q}$ questo teorema non vale, cioè esistono successioni monotòne di numeri razionali che non hanno limite razionale.

Notiamo che l'importanza di questo teorema risiede principalmente nel fatto che assicura che una condizione semplice da verificare, la monotonia, implica la regolarità di una successione. Il fatto che il limite è l'estremo superiore o inferiore della successione è meno rilevante, perché solitamente non è facile determinare tale estremo.

In particolare da questo teorema segue che una successione crescente non può avere limite $-\infty$, perché $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ è diverso da $-\infty$. Analogamente una successione decrescente non può avere limite $+\infty$.

Osserviamo inoltre che questo teorema assicura che un successione crescente superiormente limitata è convergente e, analogamente, una successione decrescente inferiormente limitata è convergente.

2.3.3 Esempio (numero di Nepero o numero di Eulero[5]). Consideriamo le successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, definite da

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \qquad b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

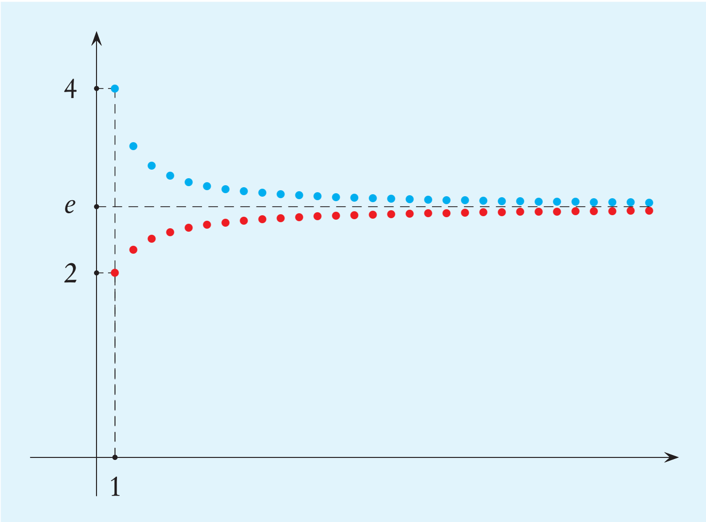


Figura 2.3.2
Le successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (in rosso) e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (in verde) studiate nell'esempio 2.3.3.

Dimostriamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ è crescente e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ è decrescente.
Per $n \in \mathbb{N}^*$ si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\big(1+1/(n+1)\big)^{n+1}}{\big(1+1/n\big)^n} = \frac{\big((n+2)/(n+1)\big)^{n+1}}{\big((n+1)/n\big)^n} = \frac{n+1}{n}\left(\frac{n+2}{n+1}\,\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} =$$
$$= \frac{n+1}{n}\left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{n}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}.$$

Per la disuguaglianza di Bernoulli (v. esempio 1.3.14) risulta

$$\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \geq 1-(n+1)\frac{1}{(n+1)^2} = 1-\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1},$$

pertanto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n+1}{n}\,\frac{n}{n+1} = 1.$$

Quindi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, si ha $a_n \leq a_{n+1}$.

---

[5]Dal nome latinizzato di John Napier (Edimburgo, 1550 - Edimburgo 1617) e di Leonhard Euler (Basilea, 1707 - San Pietroburgo 1783).
Napier è stato l'inventore dei logaritmi, che comparvero per la prima volta in un volume del 1614. In tale volume sono utilizzati i logaritmi in base $1/e$.
Euler, che ha dato molti importanti contributi in vari settori della matematica e della fisica, è ricordato in relazione a questo numero perché è stato il primo, nel 1731, a indicarlo con la lettera e.
La definizione di e come limite di $\big(1+(1/n)\big)^n$ è dovuta a Jakob Bernoulli (v. nota 1) che scrisse tale successione nel 1683 per studiare un problema di interessi composti.

Per $n \in \mathbb{N}^*$ si ha

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{(1+1/n)^{n+1}}{(1+1/(n+1))^{n+2}} = \frac{((n+1)/n)^{n+1}}{((n+2)/(n+1))^{n+2}} = \frac{n}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\,\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} =$$

$$= \frac{n}{n+1}\left(\frac{n^2+2n+1}{n(n+2)}\right)^{n+2} = \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2}.$$

Per la disuguaglianza di Bernoulli (v. esempio 1.3.14) risulta

$$\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \geq 1+(n+2)\,\frac{1}{n(n+2)} = 1+\frac{1}{n} = \frac{n+1}{n},$$

pertanto

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} \geq \frac{n}{n+1}\,\frac{n+1}{n} = 1.$$

Quindi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, si ha $b_n \geq b_{n+1}$.

Per il teorema sul limite sul limite delle successioni monotòne 2.3.2, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ hanno limite. Dimostriamo che le due successioni hanno lo stesso limite reale.

Poiché, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, si ha

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = a_n,$$

per la monotonia delle successioni risulta $a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1$; pertanto a_1 è un minorante di $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ e b_1 è un maggiorante di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Pertanto tali successioni sono limitate, quindi hanno limite reale e si ha $\lim_{n\to+\infty} a_n \leq b_0 = 4$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n \geq a_0 = 2$. Inoltre

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)a_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_n.$$

Indichiamo con e e chiamiamo **numero di Nepero** o **numero di Eulero** questo limite. ◀

2.3.2 Sottosuccessioni

Per studiare alcune proprietà delle successioni risulta utile il concetto di sottosuccessione. L'idea di base è di costruire una nuova successione "buttando via" alcuni termini di una successione assegnata (ad esempio quelli di indice dispari) e si "rinumerano" i termini rimanenti, conservando il loro ordine; naturalmente, perché i termini rimasti individuino una nuova successione, questi devono essere infiniti.

Se $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è ottenuta in questo modo a partire da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, allora b_0 è uguale al primo termine di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ che abbiamo conservato, indicando l'indice di tale termine con k_0, abbiamo $b_0 = a_{k_0}$. Analogamente b_1 è uguale al termine successivo che abbiamo conservato, indichiamo l'indice di tale termine con k_1, quindi $b_1 = a_{k_1}$. Evidentemente si ha $k_1 > k_0$. Proseguendo a costruire la sottosuccessione, in generale si ha $b_n = a_{k_n}$, con la proprietà che passando da n a $n+1$ il corrispondente indice per la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cresce, cioè $k_{n+1} > k_n$.

Per formalizzare l'idea, risulta naturale scegliere una successione $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri naturali, i termini di questa successione sono gli indici dei termini di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ che rimangono. Per conservare l'ordine dei termini, questa successione deve essere strettamente crescente.

Diamo quindi la seguente definizione.

Definizione di sottosuccessione

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$ e $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri naturali strettamente crescente. La successione $\left(a_{k_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ è detta **sottosuccessione** della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (o anche **successione estratta** dalla successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

Per lo studio delle sottosuccessioni è essenziale la proprietà dei loro indici enunciata nel teorema seguente.

2.3.4 Teorema

Sia $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{N}$ strettamente crescente. Allora, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $k_n \geq n$.

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema applicando il principio di induzione 1.3.4.

Poiché k_0 è naturale, per il teorema 1.3.5, si ha $k_0 \geq 0$.

Se $k_n \geq n$, poiché $k_{n+1} > k_n$, si ha $k_{n+1} > n$; quindi, per il teorema 1.3.10, si ha $k_{n+1} \geq n+1$. ■

2.3.5 Teorema (sul limite delle sottosuccessioni)

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$ e $\left(a_{k_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ una sua sottosuccessione. Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è regolare, allora anche $\left(a_{k_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ è regolare e

$$\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = \lim_{n\to+\infty} a_n .$$

Dimostrazione. Posto $\ell = \lim_{n\to+\infty} a_n$, per definizione si ha:

$$\forall U \in \mathscr{I}_\ell,\ \exists n_U \in \mathbb{N}\colon\ \forall n \in \mathbb{N},\quad n > n_U \implies a_n \in U .$$

Se $n \in \mathbb{N}$ è tale che $n > n_U$, poiché, per il teorema 2.3.4, $k_n \geq n$, si ha anche $k_n > n_U$, quindi $a_{k_n} \in U$. Perciò è verificata la definizione di $\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = \ell$. ■

Se una sottosuccessione ha limite, allora la successione da cui questa è estratta non necessariamente ha limite; come vedremo è sempre possibile, data una successione oscillante, trovare una sua sottosuccessione regolare.

Possiamo ricavare conclusioni sul limite di una successione a partire da informazioni sul limite di sottosuccessioni se gli indici delle sottosuccessioni coinvolte esauriscono l'insieme dei naturali. In tale ordine di idee si ha il teorema seguente.

2.3.6 Teorema

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$, $\left(a_{k_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\left(a_{h_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ due sue sottosuccessioni regolari. Se $\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = \lim_{n\to+\infty} a_{h_n}$ e $\mathbb{N} = \{k_m \mid m \in \mathbb{N}\} \cup \{h_m \mid m \in \mathbb{N}\}$, allora esiste

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = \lim_{n\to+\infty} a_{h_n} .$$

Dimostrazione. Posto $\ell = \lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = \lim_{n\to+\infty} a_{h_n}$, per definizione si ha:

$$\begin{aligned} &\forall U \in \mathscr{I}_\ell ,\ \exists i_U \in \mathbb{N}\colon\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > i_U \implies a_{k_n} \in U ,\\ &\forall U \in \mathscr{I}_\ell ,\ \exists j_U \in \mathbb{N}\colon\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > j_U \implies a_{h_n} \in U . \end{aligned}$$

Sia $U \in \mathscr{I}_\ell$ e poniamo $n_U = \max\left\{k_{i_U}, h_{j_U}\right\}$. Sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > n_U$. Poiché

$$\mathbb{N} = \{k_m \mid m \in \mathbb{N}\} \cup \{h_m \mid m \in \mathbb{N}\} ,$$

risulta $n \in \{k_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ oppure $n \in \{h_m \mid m \in \mathbb{N}\}$, quindi $n = k_m$ oppure $n = h_m$, per un opportuno $m \in \mathbb{N}$. Nel primo caso si ha

$$k_m = n > n_U = \max\left\{k_{i_U}, h_{j_U}\right\} \geq k_{i_U} ,$$

quindi $m > i_U$, perché la successione $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è strettamente crescente; pertanto risulta $a_n = a_{k_m} \in U$. Analoga conclusione nel secondo caso.

Abbiamo così dimostrato che $\forall U \in \mathscr{I}_\ell$ esiste $n_U \in \mathbb{N}$ tale che se $n > n_U$ allora $a_n \in U$, quindi è verificata la definizione di $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$. ■

2.3.7 Teorema

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$. Allora esiste una sottosuccessione $\left(a_{k_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monotòna.

Dimostrazione. Nel corso di questa dimostrazione chiamiamo picco ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che, se $m > n$, allora si ha $a_m \leq a_n$; cioè a_n è maggiore o uguale a ogni termine che segue.

Se l'insieme dei picchi è infinito, elenchiamoli in ordine crescente: $k_0 < k_1 < k_2 < \cdots$. Allora, per la definizione di picco, $\forall n \in \mathbb{N}$ risulta $a_{k_{n+1}} \leq a_{k_n}$; pertanto la sottosuccessione $\left(a_{k_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente.

Se invece l'insieme dei picchi è finito o vuoto, allora esiste $h_0 \in \mathbb{N}$ maggiore di ogni picco. Poiché h_0 non è un picco, esiste $h_1 > h_0$ tale che $a_{h_1} > a_{h_0}$. Anche h_1 non è un picco (perché maggiore di h_0), quindi esiste $h_2 > h_1$ tale che $a_{h_2} > a_{h_1}$. Ripetendo il ragionamento si costruisce una sottosuccessione strettamente crescente. ■

2.3.8 Esempio. Studiamo i picchi e le sottosuccessioni monotòne di alcune delle successioni introdotte nell'esempio 2.1.1.

Consideriamo la successione $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1/(5-2n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Si ha

$$r_0 = \frac{1}{5} < \frac{1}{3} = r_1 ,$$

quindi esiste un termine di indice maggiore di 0 che non è minore o uguale a r_0; perciò 0 non è un picco. Analogamente, poiché $r_1 < r_2$, 1 non è un picco. Si ha $r_2 > 0$ e, per $n \geq 3$, $r_n < 0$, quindi 2 è un picco. Infine, per $n \geq 3$, si ha

$$r_n = -\frac{1}{2n-5} < -\frac{1}{2n-3} = r_{n+1},$$

quindi n non è un picco. Pertanto l'unico picco di $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è 2.

Seguendo la dimostrazione del teorema 2.3.7, poiché l'insieme dei picchi è finito, è possibile estrarre una sottosuccessione crescente. Per questo scegliamo k_0 maggiore di ogni picco, ad esempio $k_0 = 3$. Poiché 3 non è un picco esiste un indice k_1 maggiore di k_0 e tale che $r_{k_1} > r_{k_0}$. Possiamo scegliere $k_1 = 4$. Poiché se $n \geq 3$ si ha $r_{n+1} > r_n$, il ragionamento può essere ripetuto scegliendo ogni volta $k_{n+1} = k_n + 1$, quindi in generale $k_n = n + 3$. Pertanto si ha la sottosuccessione crescente

$$(r_{k_n})_{n\in\mathbb{N}} = (r_{n+3})_{n\in\mathbb{N}} = \left(-\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Consideriamo la successione $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Ogni termine è minore o uguale a 1, pertanto se $v_n = 1$, cioè se n è pari, allora n è un picco. Se invece n è dispari, allora $v_n = -1$, mentre $v_{n+1} = 1 > v_n$, pertanto n non è un picco. Quindi l'insieme dei picchi è l'insieme dei numeri pari, che è infinito.

Come stabilito nella dimostrazione del teorema 2.3.7, la sottosuccessione di $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ottenuta prendendo come indici i picchi è decrescente. Pertanto abbiamo la sottosuccessione $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}} = (1)_{n\in\mathbb{N}}$. La sottosuccessione è costante, quindi è anche decrescente.

Consideriamo la successione $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((-1)^n(n+2)/(n+1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Ogni termine di indice pari è positivo, mentre ogni termine di indice dispari è negativo. Quindi, se n è dispari, allora $w_n < 0 < w_{n+1}$, perciò n non è un picco. Se n è pari, allora w_n è maggiore di ogni termine di indice dispari. Inoltre risulta

$$w_n = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} > 1 + \frac{1}{n+3} = \frac{n+4}{n+3} = w_{n+2}.$$

Perciò ciascun termine di indice pari è maggiore anche di ogni termine di indice pari più grande. Quindi ogni n pari è un picco.

Siamo nella stessa situazione vista per la successione $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, i picchi sono tutti e soli i numeri pari, pertanto la sottosuccessione $(w_{2n})_{n\in\mathbb{N}} = \big((2n+2)/(2n+1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente.

Consideriamo la successione $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((-1)^n n\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Qualunque sia n pari, risulta $z_n = n < n + 2 = z_{n+2}$, quindi n non è un picco. Se n è dispari, allora si ha $z_n < 0 < z_{n+1}$, quindi, anche in questo caso, n non è un picco. Pertanto $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non ha picchi.

Come visto nella dimostrazione del teorema 2.3.7, per costruire una sottosuccessione crescente di $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ scegliamo $k_0 = 0$. Successivamente scegliamo $k_1 > 0$ tale che $z_{k_1} > z_0$; possiamo scegliere $k_1 = 2$. Proseguendo, si può sempre scegliere $k_n = 2n$. Abbiamo quindi la sottosuccessione crescente $(z_{2n})_{n\in\mathbb{N}} = (2n)_{n\in\mathbb{N}}$. ◀

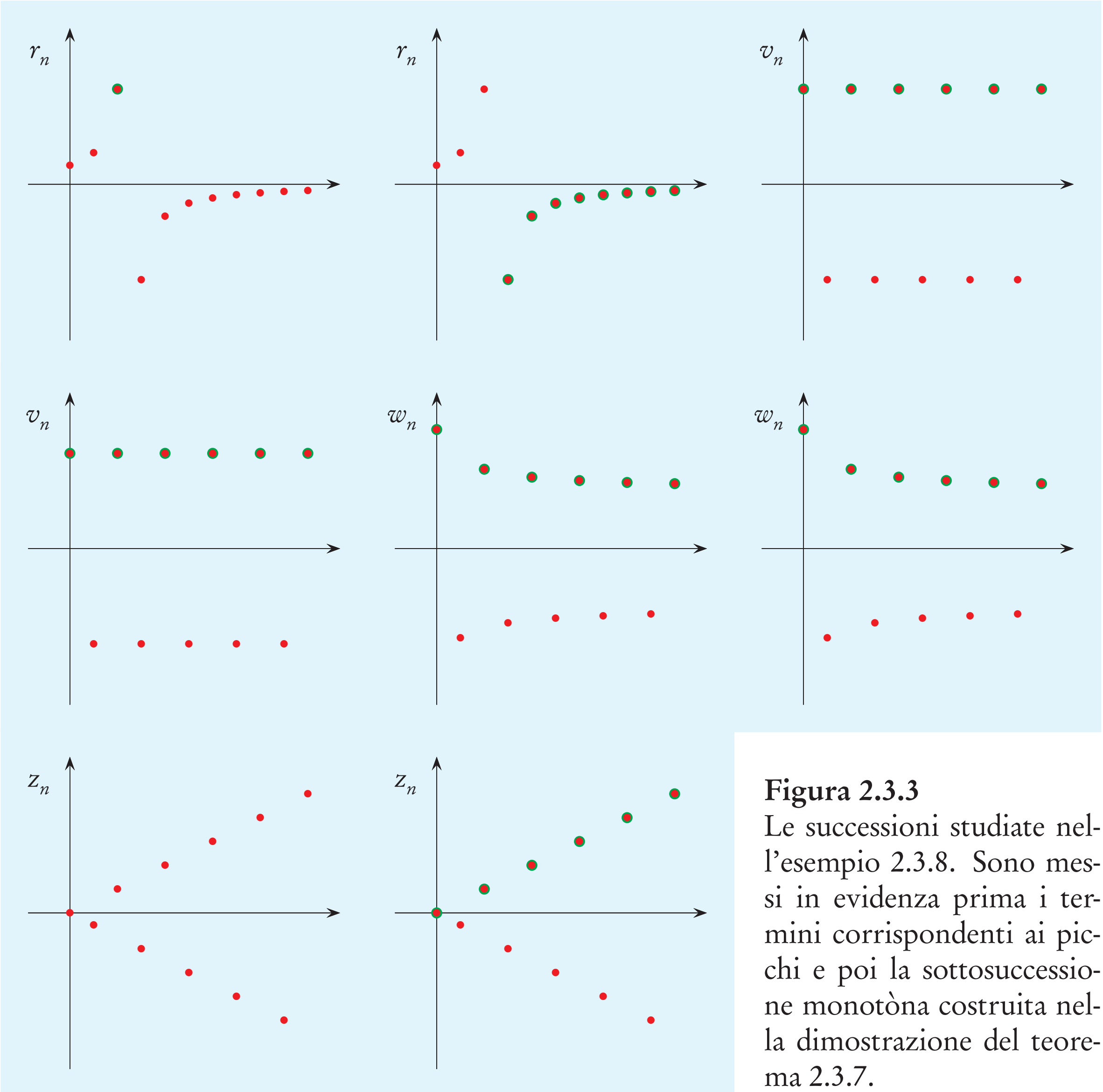


Figura 2.3.3
Le successioni studiate nell'esempio 2.3.8. Sono messi in evidenza prima i termini corrispondenti ai picchi e poi la sottosuccessione monotòna costruita nella dimostrazione del teorema 2.3.7.

Il teorema che segue è di fondamentale importanza, lo utilizzeremo per provare vari teoremi dell'analisi. Osserviamo che nella dimostrazione si fa uso della convergenza delle successioni monotòne, quindi si sfrutta la completezza di $\mathbb{R}$.

2.3.9 Teorema (di Bolzano-Weierstrass[6])

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$. Se essa è limitata, allora esiste una sottosuccessione $\left(a_{k_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente.

[6]Il teorema prende il nome da Bernard Bolzano (Praga, 1781 - Praga, 1848) e da Karl Weierstrass (Ostenfelde, Germania, 1815 - Berlino, 1897); Bolzano pubblicò il teorema in un articolo del 1817, che rimase quasi sconosciuto, Weierstrass lo riscoprì nel 1874.
Bolzano ha contribuito a rendere rigorosi i fondamenti dell'analisi matematica.
Weierstrass ha dato fondamentali contributi in vari settori dell'analisi, soprattutto nella teoria delle funzioni di variabile complessa.

Dimostrazione. Per il teorema 2.3.7 esiste una sottosuccessione $\left(a_{k_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monotòna, che ha limite per il teorema sul limite delle successioni monotòne 2.3.2. Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata, anche $\left(a_{k_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata, quindi, per il teorema sulla limitatezza delle successioni regolari 2.2.21, il limite non può essere né $+\infty$, né $-\infty$, pertanto $\left(a_{k_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente. ■

2.3.10 Esempio. Nell'esempio 2.3.8, con la procedura introdotta nella dimostrazione del teorema 2.3.7, abbiamo costruito alcune successioni monotòne. Studiamone il limite.

Consideriamo la successione $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1/(5-2n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Sappiamo che la sottosuccessione $(r_{n+3})_{n\in\mathbb{N}} = \left(1/(-2n-1)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente (v. esempio 2.3.8) e che $r_n \to 0$ (v. esempio 2.2.3). Pertanto, per il teorema sul limite delle sottosuccessioni 2.3.5, si ha $r_{n+3} \to 0$.

Consideriamo la successione $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Sappiamo che è limitata (v. esempio 2.1.3) e che la sottosuccessione $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}} = (1)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente (v. esempio 2.3.8). Ovviamente tale successione ha limite 1.

Consideriamo la successione $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left((-1)^n(n+2)/(n+1)\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Sappiamo che è limitata (v. esempio 2.1.3) e che la sottosuccessione $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}} = \left((2n+2)/(2n+1)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente (v. esempio 2.3.8). Quindi, per il teorema sul limite delle successioni monotòne 2.3.2, tale successione è regolare; poiché è limitata il limite è reale. Si ha

$$w_{2n} = \frac{2n+2}{2n+1} = 1 + \frac{1}{2n+1}.$$

Poiché $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ (v. esempio 2.2.14), per i teoremi sul limite della somma 2.2.26, sul limite del prodotto 2.2.28 e sul limite del reciproco 2.2.31, si ha $w_{2n} \to 1$.

Consideriamo la successione $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left((-1)^n n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Nell'esempio 2.3.8 abbiamo provato che la sottosuccessione $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}} = (2n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente. Tale successione è superiormente illimitata, quindi, per il teorema sul limite delle successioni monotòne 2.3.2, tende a $+\infty$. ◀

2.3.3 Successioni di Cauchy

Studiamo un'altra condizione che consente di stabilire se una successione è convergente anche non conoscendo a priori il suo limite.

Sappiamo che, se una successione converge, allora i suoi termini di indice grande sono vicini al limite, ma questo implica che tali termini sono vicini tra loro. Diamo un nome alle successioni che hanno questa proprietà.

Definizione di successione di Cauchy[7]

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$. Diciamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una **successione di Cauchy** (o che verifica la **condizione di Cauchy**) quando

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon\ \forall n,m \in \mathbb{N},\quad n,m > n_\varepsilon \implies |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

[7] La condizione prende il nome da Augustin-Louis Cauchy (Parigi, 1789 - Sceaux, Francia, 1857), che la introdusse in un trattato di analisi del 1821. Cauchy ha dato grandi contributi allo studio dell'analisi, dove ha introdotto un maggior rigore rispetto a quanto era abituale a quei tempi.

2.3.11 Esempio. Consideriamo la successione $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big(1/(n+1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, introdotta nell'esempio 2.1.1; dimostriamo che è una successione di Cauchy.

Siano $n, m \in \mathbb{N}$. Se $n > m$, allora si ha $|a_n - a_m| = (1/m) - (1/n) < 1/m$; se invece $n > m$, allora si ha $|a_n - a_m| = (1/n) - (1/m) < 1/n$. In tutti i casi risulta

$$|a_n - a_m| < \max\left\{\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right\} = \frac{1}{\min\{m,n\}}\,.$$

Pertanto, fissato $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, se $n, m \in \mathbb{N}$ sono tali che $n, m > 1/\varepsilon$, risulta

$$|a_n - a_m| < \frac{1}{\min\{m,n\}} < \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon\,.$$

Quindi è verificata la condizione di Cauchy.

Consideriamo la successione $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definita per ricorrenza nell'esempio 2.1.2; dimostriamo che è una successione di Cauchy.

Osserviamo che $c_0 = 0$ e, se $c_n \geq 0$, allora $c_{n+1} = 2/(c_n+2) > 0$. Per induzione tutti i termini, tranne il primo, risultano positivi. Sia $n \in \mathbb{N}^*$; per la definizione di c_n si ha

$$|c_{n+1} - c_n| = \left|\frac{2}{c_n+2} - \frac{2}{c_{n-1}+2}\right| = \left|\frac{2c_{n-1} - 2c_n}{(c_n+2)(c_{n-1}+2)}\right| = \frac{2|c_n - c_{n-1}|}{(c_n+2)(c_{n-1}+2)} < \frac{|c_n - c_{n-1}|}{2}\,.$$

Quindi si ha

$$|c_{n+1} - c_n| < \frac{1}{2}|c_n - c_{n-1}| < \frac{1}{2^2}|c_{n-1} - c_{n-2}| < \cdots < \frac{1}{2^n}|c_1 - c_0| = \frac{1}{2^n}\,.$$

Pertanto, se $n, m \in \mathbb{N}$, con $n > m$, allora risulta

$$|c_n - c_m| = \left|\sum_{k=m}^{n-1}(c_{k+1} - c_k)\right| \leq \sum_{k=m}^{n-1}|c_{k+1} - c_k| \leq \sum_{k=m}^{n-1}\frac{1}{2^k} = \sum_{j=0}^{n-m-1}\frac{1}{2^{m+j}} = \frac{1}{2^m}\sum_{j=0}^{n-m-1}\frac{1}{2^j}\,.$$

Per il teorema 1.3.19 si ha

$$\sum_{j=0}^{n-m-1}\frac{1}{2^j} = \sum_{j=0}^{n-m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^j 1^{m-n-j-1} = \frac{1^{n-m} - (1/2)^{n-m}}{1-(1/2)} < \frac{1}{1-(1/2)} = 2;$$

pertanto $|c_n - c_m| < 1/2^{m-1}$.

Poiché $1/2^m \to 0$, per $m \to +\infty$ (v. esempio 2.2.32), $< 1/2^{m-1} \to 0$, pertanto, fissato $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che, se $m > n_\varepsilon$, allora si ha $< 1/2^{m-1} < \varepsilon$, quindi, se $n > m$, allora $|c_n - c_m| < \varepsilon$. Una disuguaglianza analoga vale scambiando m con n, quindi $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy.

Consideriamo la successione $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definita per ricorrenza nell'esempio 2.1.2; dimostriamo che non verifica la condizione di Cauchy.

Poiché, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$d_{n+2} = -d_{n+1} + n + 1 = -(-d_n + n) + n + 1 = d_n + 1\,,$$

risulta $|d_{n+2} - d_n| = d_{n+2} - d_n = 1$. Pertanto, se si sceglie $\varepsilon < 1$, possiamo trovare due termini di indice arbitrariamente grande che distano tra loro più di ε; quindi $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non verifica la condizione di Cauchy. ◀

Proviamo che la condizione di Cauchy è necessaria e sufficiente per la convergenza di una successione in $\mathbb{R}$.

La dimostrazione della necessità è banale. La dimostrazione della sufficienza è invece più complessa e la spezziamo in più teoremi. Proviamo che ogni successione di Cauchy è limitata, quindi per il teorema di Bolzano-Weierstrass 2.3.9 ha una sottosuccessione convergente, e che ogni successione di Cauchy che ha una sottosuccessione convergente è convergente.

2.3.12 Teorema

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$. Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente, allora è di Cauchy.

Dimostrazione. Posto $\ell = \lim_{n\to+\infty} a_n$, per definizione si ha:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \colon \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_\varepsilon \implies |a_n - \ell| < \varepsilon .$$

Pertanto, fissato $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, se n e m sono maggiori di n_ε si ha

$$|a_n - a_m| = \big|(a_n - \ell) + (\ell - a_m)\big| \le |a_n - \ell| + |\ell - a_m| < 2\varepsilon ;$$

quindi è verificata la definizione di successione di Cauchy. ■

2.3.13 Teorema

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$. Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy, allora è limitata.

Dimostrazione. Supponiamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia una successione di Cauchy, cioè tale che

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \colon \forall n, m \in \mathbb{N}, \quad n, m > n_\varepsilon \implies |a_n - a_m| < \varepsilon .$$

Scelto $\varepsilon = 1$, se $n > n_1$ si ha $|a_n - a_{n_1+1}| < 1$, cioè $a_{n_1+1} - 1 < a_n < a_{n_1+1} + 1$. Allora $\min\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}, a_{n_1+1} - 1\}$ e $\max\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}, a_{n_1+1} + 1\}$ sono rispettivamente un minorante e un maggiorante dell'insieme dei termini della successione; pertanto essa è limitata. ■

2.3.14 Teorema

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$. Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy e ha una sottosuccessione convergente, allora $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente.

Dimostrazione. Sia $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ una sottosuccessione convergente. Posto $\ell = \lim_{n\to+\infty} a_{k_n}$, proviamo che $a_n \to \ell$.

Poiché $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy, si ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \colon \forall n, m \in \mathbb{N}, \quad n, m > n_\varepsilon \implies |a_n - a_m| < \varepsilon .$$

Poiché $a_{k_n} \to \ell$ si ha:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists j_\varepsilon \in \mathbb{N} \colon \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > j_\varepsilon \implies |a_{k_n} - \ell| < \varepsilon .$$

Scelto $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, sia $n > \max\{n_\varepsilon, j_\varepsilon\}$; poiché $k_n \geq n$, si ha anche $k_n > n_\varepsilon$, quindi

$$|a_n - \ell| = \left|(a_n - a_{k_n}) + (a_{k_n} - \ell)\right| \leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - \ell| < 2\varepsilon .$$

Pertanto $a_n \to \ell$. ■

2.3.15 Teorema

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$. Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy, allora è convergente.

Dimostrazione. Per il teorema 2.3.13 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata, pertanto, per il teorema di Bolzano-Weierstrass 2.3.9, ha una sottosuccessione convergente; quindi, per il teorema 2.3.14, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente. ■

2.3.16 Esempio. Nell'esempio 2.3.11 abbiamo visto che la successione $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definita per ricorrenza nell'esempio 2.1.2 da

$$\begin{cases} c_0 = 1, \\ c_{n+1} = \dfrac{2}{c_n + 2}, \quad \text{per } n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

è di Cauchy. Per il teorema 2.3.15 tale successione ha limite reale, indichiamolo con ℓ. Ovviamente anche le successioni $(c_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ e $\big(2/(c_n+2)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ sono convergenti e hanno limite ℓ e $2/(\ell+2)$, rispettivamente. Quindi $\ell = 2/(\ell+2)$, che equivale a $\ell^2 + 2\ell - 2 = 0$. Questa uguaglianza è verificata se

$$\ell = -1 \pm \sqrt{1^2 + 2} = -1 \pm \sqrt{3}.$$

Poiché $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è a termini positivi (v. esempio 2.3.11) il limite non può essere negativo, pertanto $c_n \to -1 + \sqrt{3}$. ◀

2.3.4 Massimo limite e minimo limite

Introduciamo due concetti che sono utili per avere informazioni sul comportamento per valori grandi dell'indice dei termini delle successioni oscillanti.

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione convergente a $\ell \in \mathbb{R}$. Poiché ogni termine della successione è minore o uguale di $\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, per il teorema del confronto 2.2.5, si ha $\ell \leq \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Scelto $n \in \mathbb{N}$ poniamo

$$\beta_n = \sup\{a_m \mid m \geq n\};$$

i termini della successione sono definitivamente minori o uguali a β_n, quindi si ha anche $\ell \leq \beta_n$. Evidentemente $\{a_m \mid m \geq n+1\} \subseteq \{a_m \mid m \geq n\}$, quindi l'estremo superiore del primo insieme è minore o uguale a quello del secondo insieme, cioè $\beta_{n+1} \leq \beta_n$. Abbiamo quindi definito una successione $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, decrescente con $\beta_n \geq \ell$; pertanto tale successione ha limite maggiore o uguale a ℓ. Per la definizione di limite, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che se $n > n_\varepsilon$, allora $a_n < \ell + \varepsilon$, quindi per tali n si ha $\beta_n \leq \ell + \varepsilon$, pertanto $\lim_{n\to+\infty} \beta_n \leq \ell + \varepsilon$, quindi, per l'arbitrarietà di ε, risulta $\lim_{n\to+\infty} \beta_n \leq \ell$. Perciò $\lim_{n\to+\infty} \beta_n = \ell$. Il limite della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è quindi anche limite di una successione decrescente, che la "controlla dal di sopra".

In modo analogo, ponendo, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_n = \inf\{a_m \mid m \geq n\},$$

otteniamo una successione crescente che converge a ℓ e "controlla dal di sotto" la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

La costruzione delle successioni $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ può essere fatta a partire da qualunque successione limitata, anche se non è convergente, ottenendo due successioni monotòne, con la proprietà che, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\alpha_n \leq a_n \leq \beta_n .$$

Tali successioni hanno limite e i limiti ci danno indicazioni sul comportamento di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ per n grande.

Formalizziamo i discorsi fatti, considerando anche successioni illimitate. Per definire tali concetti è necessario il seguente teorema.

2.3.17 Teorema

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$.

I) Supponiamo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ inferiormente limitata. Posto, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_n = \inf\{a_m \mid m \geq n\},$$

la successione $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente.

II) Supponiamo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ superiormente limitata. Posto, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\beta_n = \sup\{a_m \mid m \geq n\},$$

la successione $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente.

Le ipotesi di limitatezza richieste assicurano che α_n e β_n sono numeri reali.

Dimostrazione. I) Poiché, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $\{a_m \mid m \geq n+1\} \subseteq \{a_m \mid m \geq n\}$, risulta

$$\alpha_{n+1} = \inf\{a_m \mid m \geq n+1\} \geq \inf\{a_m \mid m \geq n\} = \alpha_n .$$

II) La dimostrazione è simile a quella dell'affermazione I. ■

Per il teorema sul limite delle successioni monotòne 2.3.2, ogni successione monotòna è regolare, quindi è giustificata la definizione seguente.

Definizione di massimo limite e di minimo limite

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$.

Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è superiormente limitata chiamiamo **massimo limite** (o anche **limite superiore**) di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ il numero reale esteso

$$\max\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \sup\{a_m \mid m \geq n\}.$$

Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è superiormente illimitata poniamo $\max\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è inferiormente limitata chiamiamo **minimo limite** (o anche **limite inferiore**) di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ il numero reale esteso

$$\min\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \inf\{a_m \mid m\geq n\}.$$

Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è inferiormente illimitata poniamo $\min\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

Quando si usano i termini "limite superiore" e "limite inferiore" si usano le notazioni $\limsup_{n\to+\infty} a_n$ e $\liminf_{n\to+\infty} a_n$.

2.3.18 Esempio. Determiniamo massimo limite e minimo limite di alcune delle successioni introdotte nell'esempio 2.1.1.

Consideriamo la successione $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Poiché definitivamente esistono termini della successione uguali a 1 e termini della successione uguali a -1, si ha, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\{a_m \mid m\geq n\} = \{-1,1\}$, pertanto

$$\begin{aligned}\max\lim_{n\to+\infty}(-1)^n &= \lim_{n\to+\infty}\sup\{-1,1\} = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1,\\ \min\lim_{n\to+\infty}(-1)^n &= \lim_{n\to+\infty}\inf\{-1,1\} = \lim_{n\to+\infty}(-1) = -1.\end{aligned}$$

Consideriamo la successione $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((-1)^n(n+2)/(n+1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nell'esempio 2.1.3 abbiamo osservato che, se n è dispari, allora $w_n<0$ e $w_n<w_{n+2}$; se invece n è pari, allora $w_n>0$. Perciò, se n è dispari, allora, qualunque sia $m\geq n$, risulta $w_n<w_m$, quindi, con le notazioni del teorema 2.3.17, si ha $\alpha_n = \inf\{w_m \mid m\geq n\} = w_n$. Se invece n è pari, allora $w_n>0>w_{n+1}$ e, poiché $n+1$ è dispari, $w_{n+1}<w_m$, qualunque sia $m>n+1$; pertanto $\alpha_n = \inf\{w_m \mid m\geq n\} = w_{n+1}$. Quindi risulta

$$\alpha_n = \begin{cases} w_{n+1} = -\dfrac{n+3}{n+2}, & \text{se } n \text{ è pari,}\\[2ex] w_n = -\dfrac{n+2}{n+1}, & \text{se } n \text{ è dispari.}\end{cases}$$

Si ha

$$-\frac{n+3}{n+2} = -1-\frac{1}{n+2}, \qquad -\frac{n+2}{n+1} = -1-\frac{1}{n+1}$$

ed è facile verificare che $-1-1/(n+1) < -1-1/(n+2)$, quindi risulta, $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$-1-\frac{1}{n+1} \leq \alpha_n \leq -1-\frac{1}{n+2}.$$

Poiché la prima e l'ultima successione hanno limite -1, per il teorema dei due carabinieri 2.2.11 $\alpha_n\to -1$, pertanto $\min\lim_{n\to+\infty} w_n = -1$.

In modo analogo si prova che $\max\lim_{n\to+\infty} w_n = 1$.

Consideriamo la successione $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((-1)^n n\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Nell'esempio 2.1.3 abbiamo stabilito che $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è illimitata sia inferiormente che superiormente. Pertanto

$$\min\lim_{n\to+\infty} z_n = -\infty, \qquad \max\lim_{n\to+\infty} w_n = +\infty. \qquad ◀$$

Dal teorema sul limite delle successioni monotòne 2.3.2 si ottiene il seguente teorema.

2.3.19 Teorema

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$.
Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è superiormente limitata, allora

$$\max\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf\big\{\sup\{a_m \,|\, m \geq n\} \,\big|\, n \in \mathbb{N}\big\}.$$

Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è inferiormente limitata, allora

$$\min\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup\big\{\inf\{a_m \,|\, m \geq n\} \,\big|\, n \in \mathbb{N}\big\}.$$

Le affermazioni del teorema sono valide anche se non sono verificate le ipotesi di limitatezza, considerando sup e inf nel senso di $\overline{\mathbb{R}}$. Infatti se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è superiormente illimitata, quindi $\max\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, si ha, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sup\{a_m \,|\, m \geq n\} = +\infty$, quindi $\inf\big\{\sup\{a_m \,|\, m \geq n\} \,\big|\, n \in \mathbb{N}\big\} = +\infty$.

Con una notazione meno precisa, possiamo scrivere le uguaglianze stabilite in questo teorema come:

$$\max\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\geq n} a_m\,, \qquad \min\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{m\geq n} a_m\,.$$

Studiamo le proprietà di massimo limite e minimo limite.

2.3.20 Teorema

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$. Allora

$$\min\lim_{n\to+\infty} a_n \leq \max\lim_{n\to+\infty} a_n\,.$$

Dimostrazione. Se la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è illimitata, allora $\min\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ oppure $\max\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, quindi la tesi è verificata. Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata, allora, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $\inf\{a_m \,|\, m \geq n\} \leq \sup\{a_m \,|\, m \geq n\}$, pertanto, per il teorema del confronto 2.2.19,

$$\min\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \inf\{a_m \,|\, m \geq n\} \leq \lim_{n\to+\infty} \sup\{a_m \,|\, m \geq n\} = \max\lim_{n\to+\infty} a_n\,. \qquad \blacksquare$$

2.3.21 Teorema

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$ e $\big(a_{k_n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ una sua sottosuccessione regolare. Allora

$$\min\lim_{n\to+\infty} a_n \leq \lim_{n\to+\infty} a_{k_n} \leq \max\lim_{n\to+\infty} a_n\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo la disuguaglianza relativa al massimo limite, quella relativa al minimo limite si prova in modo analogo.

Se $\max\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ la disuguaglianza è evidentemente verificata.

Se $\max\lim_{n\to+\infty} a_n < +\infty$, poiché $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $k_n \geq n$ (v. teorema 2.3.4), risulta $a_{k_n} \leq \sup\{a_m \,|\, m \geq n\}$, pertanto, per il teorema del confronto 2.2.19, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} \leq \lim_{n\to+\infty} \sup\{a_m \,|\, m \geq n\} = \max\lim_{n\to+\infty} a_n \,.$$ ■

2.3.22 Teorema

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$. Allora esistono $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ e $(a_{h_n})_{n\in\mathbb{N}}$, sottosuccessioni di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tali che

$$\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = \max\lim_{n\to+\infty} a_n \,, \qquad \lim_{n\to+\infty} a_{h_n} = \min\lim_{n\to+\infty} a_n \,.$$

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo l'affermazione relativa al massimo limite, quella relativa al minimo limite si dimostra in modo analogo.

Consideriamo anzitutto il caso $\max\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, cioè $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ superiormente illimitata. Allora $\{a_n \,|\, n > m\}$ è superiormente illimitato qualunque sia $m \in \mathbb{N}$, perché eliminando un numero finito di elementi da un insieme superiormente illimitato si ottiene un insieme che è ancora superiormente illimitato. Il numero 0 non è maggiorante di $\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, quindi $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_{k_0} > 0$. Analogamente 1 non è maggiorante di $\{a_n \,|\, n > k_0\}$, quindi esiste $k_1 > k_0$ tale che $a_{k_1} > 1$. Proseguendo, scelto k_n, esiste $k_{n+1} > k_n$ e tale che $a_{k_{n+1}} > n+1$. In questo modo si costruisce una sottosuccessione $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tale che, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $a_{k_n} > n$, quindi $a_{k_n} \to +\infty$.

Consideriamo il caso $\max\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$. Per $n \in \mathbb{N}$ si ha $a_n \leq \sup\{a_m \,|\, m \geq n\}$, inoltre

$$\lim_{n\to+\infty} \sup\{a_m \,|\, m \geq n\} = \max\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \,,$$

pertanto, per il teorema 2.2.15, affermazione II, $a_n \to -\infty$.

Infine sia $\max\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$. Con le notazioni del teorema 2.3.17, la successione $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente e $\beta_n \to \ell$, quindi risulta $\beta_n \geq \ell$ qualunque sia $n \in \mathbb{N}$. In particolare $\beta_0 > \ell - 1$, quindi, per la caratterizzazione dell'estremo superiore 1.2.42, esiste k_0 tale che $a_{k_0} > \ell - 1$. Evidentemente $a_{k_0} \leq \sup\{a_m \,|\, m \geq k_0\} = \beta_{k_0}$. Analogamente $\beta_{k_0+1} > \ell - (1/2)$, quindi esiste $k_1 \geq k_0 + 1 > k_0$, tale che $a_{k_1} > \ell - (1/2)$. Risulta inoltre $a_{k_1} \leq \beta_{k_1}$. Proseguendo si costruisce una sottosuccessione $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tale che, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\ell - \frac{1}{n+1} < a_{k_n} \leq \beta_{k_n} \,.$$

Si ha $\ell - \bigl(1/(n+1)\bigr) \to \ell$ e, per il teorema sul limite delle sottosuccessioni 2.3.5, risulta $\beta_{k_n} \to \ell$, quindi, per il teorema dei due carabinieri 2.2.11, $\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = \ell$. ■

2.3.23 Osservazione. Per i teoremi 2.3.21 e 2.3.22 $\min\lim_{n\to+\infty} a_n$ è il minimo dei limiti delle sottosuccessioni regolari di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$; analogamente $\max\lim_{n\to+\infty} a_n$ è il massimo di tali limiti.

In particolare $\min\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ se e solo se esiste una sottosuccessione di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergente a $-\infty$ e $\max\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ se e solo se se esiste una sottosuccessione di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergente a $+\infty$. ◀

2.3.24 Teorema

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

I) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è regolare;

II) $\min\lim_{n\to+\infty} a_n = \max\lim_{n\to+\infty} a_n$.

Se tali affermazioni sono vere risulta

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \min\lim_{n\to+\infty} a_n = \max\lim_{n\to+\infty} a_n .$$

Dimostrazione. I $\Longrightarrow$ II) Per il teorema 2.3.22 esiste una sottosuccessione $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = \max\lim_{n\to+\infty} a_n$; per il teorema sul limite delle sottosuccessioni 2.3.5, ogni sottosuccessione ha lo stesso limite di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pertanto $\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = \lim_{n\to+\infty} a_n$, quindi $\max\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_n$.

Per motivi analoghi anche $\min\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_n$.

II $\Longrightarrow$ I) Poniamo $\ell = \min\lim_{n\to+\infty} a_n = \max\lim_{n\to+\infty} a_n$.

Supponiamo $\ell \in \mathbb{R}$. Poiché, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\inf\{a_m \mid m \geq n\} \leq a_n \leq \sup\{a_m \mid m \geq n\},$$

per il teorema dei due carabinieri 2.2.11 $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$.

Se $\ell = +\infty$, poiché, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $\inf\{a_m \mid m \geq n\} \leq a_n$, per il teorema 2.2.15, affermazione I, risulta $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

Se $\ell = -\infty$ la dimostrazione è analoga. ■

2.3.25 Osservazione. Se $\min\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, allora, per il teorema 2.3.20, si ha anche $\max\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, quindi, per il teorema precedente, $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

Analogamente, se $\max\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$. ◀

Studiamo il comportamento di massimo limite e minimo limite rispetto all'addizione e alla moltiplicazione per uno scalare.

2.3.26 Teorema

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{R}$.

I) Se $\min\lim_{n\to+\infty} a_n \in \mathbb{R}$ e $\min\lim_{n\to+\infty} b_n \in \mathbb{R}$, allora

$$\min\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) \geq \min\lim_{n\to+\infty} a_n + \min\lim_{n\to+\infty} b_n .$$

II) Se $\min\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ e $\min\lim_{n\to+\infty} b_n > -\infty$, allora

$$\min\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = +\infty .$$

III) Se $\max\lim_{n\to+\infty} a_n \in \mathbb{R}$ e $\max\lim_{n\to+\infty} b_n \in \mathbb{R}$, allora

$$\max\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n) \le \max\lim_{n\to+\infty} a_n + \max\lim_{n\to+\infty} b_n\,.$$

IV) Se $\max\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ e $\max\lim_{n\to+\infty} b_n < +\infty$, allora

$$\max\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n) = -\infty\,.$$

Dimostrazione. I) Per $n \in \mathbb{N}$, se $k \ge n$, allora si ha

$$a_k + b_k \ge \inf\{a_m \,|\, m \ge n\} + \inf\{b_m \,|\, m \ge n\}\,,$$

pertanto

$$\inf\{a_k + b_k \,|\, k \ge n\} \ge \inf\{a_m \,|\, m \ge n\} + \inf\{b_m \,|\, m \ge n\}\,.$$

Passando al limite per $n \to +\infty$, si ottiene

$$\begin{aligned}
&\min\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to+\infty} \inf\{a_k+b_k \,|\, k \ge n\} \ge \\
&\ge \lim_{n\to+\infty}\big(\inf\{a_m \,|\, m \ge n\} + \inf\{b_m \,|\, m \ge n\}\big) = \\
&= \lim_{n\to+\infty} \inf\{a_m \,|\, m \ge n\} + \lim_{n\to+\infty} \inf\{b_m \,|\, m \ge n\} = \min\lim_{n\to+\infty} a_n + \min\lim_{n\to+\infty} b_n\,.
\end{aligned}$$

II) Se $\min\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ (v. osservazione 2.3.25), inoltre se $\min\lim_{n\to+\infty} b_n > -\infty$, allora $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è inferiormente limitata, quindi, per il teorema sul limite della somma 2.2.26, affermazione II, si ha $\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n) = +\infty$.

III) La dimostrazione è analoga a quella dell'affermazione I.

IV) La dimostrazione è analoga a quella dell'affermazione II. ■

2.3.27 Esempio. Nelle affermazioni I e III di questo teorema è stabilito che il minimo limite della somma è minore o uguale della somma dei minimi limiti, mentre il massimo limite della somma è minore o uguale della somma dei massimi limiti. In generale non vale l'uguaglianza.

Consideriamo le successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((-1)^{n+1}\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Evidentemente, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $\{a_m \,|\, m \ge n\} = \{-1, 1\}$ e $\{b_m \,|\, m \ge n\} = \{-1, 1\}$, pertanto

$$\min\lim_{n\to+\infty} a_n = \min\lim_{n\to+\infty} b_n = -1\,,$$
$$\max\lim_{n\to+\infty} a_n = \max\lim_{n\to+\infty} b_n = 1\,.$$

Inoltre

$$a_n + b_n = (-1)^n + (-1)^{n+1} = (-1)^n\big(1 + (-1)\big) = 0\,,$$

pertanto la successione $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha limite 0. Perciò

$$\min\lim_{n\to+\infty} a_n + \min\lim_{n\to+\infty} b_n = -2 < 0 = \min\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n)\,,$$
$$\max\lim_{n\to+\infty} a_n + \max\lim_{n\to+\infty} b_n = 2 > 0 = \max\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n)\,.$$

◀

2.3.28 Teorema

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$ e $\lambda\in\mathbb{R}^*$.

I) Supponiamo $\min\lim_{n\to+\infty} a_n\in\mathbb{R}$. Se $\lambda>0$, allora
$$\min\lim_{n\to+\infty}(\lambda a_n)=\lambda\min\lim_{n\to+\infty} a_n\,;$$
se $\lambda<0$, allora
$$\max\lim_{n\to+\infty}(\lambda a_n)=\lambda\min\lim_{n\to+\infty} a_n\,.$$

II) Supponiamo $\min\lim_{n\to+\infty} a_n\in\{-\infty,+\infty\}$. Se $\lambda>0$, allora
$$\min\lim_{n\to+\infty}(\lambda a_n)=\min\lim_{n\to+\infty} a_n\,;$$
se $\lambda<0$, allora
$$\max\lim_{n\to+\infty}(\lambda a_n)=-\min\lim_{n\to+\infty} a_n\,.$$

III) Supponiamo $\max\lim_{n\to+\infty} a_n\in\mathbb{R}$. Se $\lambda>0$, allora
$$\max\lim_{n\to+\infty}(\lambda a_n)=\lambda\max\lim_{n\to+\infty} a_n\,;$$
se $\lambda<0$, allora
$$\min\lim_{n\to+\infty}(\lambda a_n)=\lambda\max\lim_{n\to+\infty} a_n\,.$$

IV) Supponiamo $\max\lim_{n\to+\infty} a_n\in\{-\infty,+\infty\}$. Se $\lambda>0$, allora
$$\max\lim_{n\to+\infty}(\lambda a_n)=\max\lim_{n\to+\infty} a_n\,;$$
se $\lambda<0$, allora
$$\min\lim_{n\to+\infty}(\lambda a_n)=-\max\lim_{n\to+\infty} a_n\,.$$

DIMOSTRAZIONE. I) Poniamo $\ell=\min\lim_{n\to+\infty} a_n$. Per il teorema 2.3.22 esiste una sottosuccessione $\left(a_{k_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $a_{k_n}\to\ell$; inoltre, per il teorema 2.3.21, ogni sottosuccessione regolare ha limite minore o uguale a ℓ.

Sia $\lambda>0$. Evidentemente $\lambda a_{k_n}\to\lambda\ell$ e ogni sottosuccessione regolare di $(\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha limite minore o uguale a $\lambda\ell$. Allora, per l'osservazione 2.3.23, $\min\lim_{n\to+\infty}(\lambda a_n)=\lambda\ell$.

Sia $\lambda<0$. Evidentemente $\lambda a_{k_n}\to\lambda\ell$ e ogni sottosuccessione regolare di $(\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha limite maggiore o uguale a $\lambda\ell$. Allora, per l'osservazione 2.3.23, $\max\lim_{n\to+\infty}(\lambda a_n)=\lambda\ell$.

II) Supponiamo $\min\lim_{n\to+\infty} a_n=-\infty$; allora esiste una sottosuccessione $\left(a_{k_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $a_{k_n}\to-\infty$. Se $\lambda>0$, allora $\lambda a_{k_n}\to-\infty$, quindi $\min\lim_{n\to+\infty}(\lambda a_n)=-\infty$; se invece $\lambda<0$, allora $\lambda a_{k_n}\to+\infty$, quindi $\max\lim_{n\to+\infty}(\lambda a_n)=+\infty$.

Supponiamo ora $\min\lim_{n\to+\infty} a_n=+\infty$; risulta $\lim_{n\to+\infty} a_n=+\infty$ (v. osservazione 2.3.25). Se $\lambda>0$, allora $\lambda a_n\to+\infty$, perciò $\min\lim_{n\to+\infty}(\lambda a_n)=+\infty$; se invece $\lambda<0$, allora $\lambda a_n\to-\infty$, quindi $\max\lim_{n\to+\infty}(\lambda a_n)=-\infty$.

III) La dimostrazione è analoga a quella dell'affermazione I.

IV) La dimostrazione è analoga a quella dell'affermazione II. ■

3

Limiti e continuità di funzioni reali di variabile reale

3.1 Topologia dell'insieme dei numeri reali

In questo capitolo iniziamo lo studio delle funzioni da sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$. Tali funzioni sono dette anche **funzioni reali di variabile reale**. Prima di affrontare questo studio è opportuno introdurre alcuni concetti relativi ai sottoinsiemi di $\mathbb{R}$; sono i concetti di base di un ampio capitolo della matematica chiamato "topologia".

Scelto $A \subseteq \mathbb{R}$, classifichiamo i punti di $\mathbb{R}$ a seconda della loro "vicinanza" ad A o a $\complement A$.

Definizione di punto interno, punto esterno, punto di frontiera

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$.

Diciamo che c è **punto interno** ad A quando $\exists U \in \mathscr{I}_c$ tale che $U \subseteq A$.

Diciamo che c è **punto esterno** ad A quando $\exists U \in \mathscr{I}_c$ tale che $U \cap A = \varnothing$.

Diciamo che c è **punto di frontiera** per A quando non è né punto interno né punto esterno ad A.

Poiché $U \subseteq A$ se e solo se $U \cap \complement A = \varnothing$, i punti interni ad A sono quelli "lontani" da $\complement A$; analogamente i punti esterni sono quelli "lontani" da A; i punti di frontiera sono "vicini" sia ad A che a $\complement A$.

Dalle definizioni è evidente che i punti interni ad A appartengono ad A e quelli esterni non appartengono ad A. Inoltre si ha $U \subseteq A$ se e solo se $U \cap \complement A = \varnothing$, quindi i punti interni ad A sono quelli esterni a $\complement A$ e viceversa i punti esterni ad A sono quelli interni a $\complement A$.

Definizione di interno, frontiera, chiusura di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$.

Chiamiamo **interno** di A e indichiamo con $\operatorname{int} A$ l'insieme dei punti interni ad A.

Chiamiamo **frontiera** di A e indichiamo con ∂A l'insieme dei punti di frontiera per A.

Chiamiamo **chiusura** di A e indichiamo con $\overline{A}$ l'insieme $\operatorname{int} A \cup \partial A$.

Poiché ogni numero reale è interno o esterno o di frontiera per un insieme, $\mathbb{R}$ è l'unione dei tre insiemi, a due a due disgiunti, $\operatorname{int} A$, $\operatorname{int}(\complement A)$ e ∂A.

Si verifica facilmente, negando la definizione di punto interno e di punto esterno, che vale il seguente teorema.

3.1.1 Teorema

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$; $c \in \partial A$ se e solo se

$$\forall U \in \mathscr{I}_c, \quad (U \cap A \neq \varnothing) \wedge (U \cap \complement A \neq \varnothing).$$

3.1.2 Osservazione. Poiché $\complement(\complement A) = A$ da questo teorema segue immediatamente che un punto è di frontiera per A se e solo se è di frontiera per $\complement A$, cioè $\partial A = \partial(\complement A)$. Pertanto $\overline{\complement A} = \operatorname{int}(\complement A) \cup \partial A$.

Poiché $\operatorname{int} A$, $\operatorname{int}(\complement A)$ e ∂A sono a due a due disgiunti, è evidente che $\overline{A} \cap \overline{\complement A} = \partial A$. ◀

3.1.3 Esempio. Poiché ogni intorno di un numero reale è incluso in $\mathbb{R}$, ogni punto di $\mathbb{R}$ è interno a $\mathbb{R}$. Quindi $\mathbb{R}$ non ha né punti di frontiera né punti esterni.

Poiché $\varnothing$ ha intersezione vuota con qualunque insieme, ogni numero reale è esterno a $\varnothing$. Quindi $\varnothing$ non ha né punti interni né punti di frontiera.

L'insieme $\mathbb{Z}$ non ha punti interni. Infatti non esistono intervalli inclusi in $\mathbb{Z}$, quindi nessun punto ha un intorno incluso in $\mathbb{Z}$. Da qui segue che ogni punto di $\mathbb{Z}$ è di frontiera. Infine ogni punto di $\complement\mathbb{Z}$ è esterno a $\mathbb{Z}$. Infatti se $c \notin \mathbb{Z}$, allora $[c] < c < [c]+1$ e non esistono interi compresi tra $[c]$ e $[c]+1$. Posto $\delta = \min\{c-[c], [c]+1-c\}$, risulta $[c] \leq c-\delta$ e $c+\delta \leq [c]+1$, pertanto

$$]c-\delta, c+\delta[\subseteq \big][c], [c]+1\big[\subseteq \complement\mathbb{Z}.$$

Quindi c è esterno a $\mathbb{Z}$.

Abbiamo quindi $\operatorname{int}\mathbb{Z} = \varnothing$, $\partial\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ e $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$.

Ogni punto di $\mathbb{R}$ è di frontiera per $\mathbb{Q}$. Infatti, se $c \in \mathbb{R}$, allora, per il teorema 1.4.7, $\forall \delta \in \mathbb{R}^+$, esistono $x \in \mathbb{Q}$ e $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ compresi tra $c-\delta$ e $c+\delta$; pertanto risulta $]c-\delta, c+\delta[\cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$ e $]c-\delta, c+\delta[\cap \complement\mathbb{Q} \neq \varnothing$. Quindi, per il teorema 3.1.1, c è un punto di frontiera per $\mathbb{Q}$. Poiché tutti gli elementi di $\mathbb{R}$ sono di frontiera, $\mathbb{Q}$ non ha né punti interni, né punti esterni

Abbiamo quindi $\operatorname{int}\mathbb{Q} = \varnothing$, $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ e $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. ◀

3.1.4 Esempio. Siano

$$A_1 = \{0\}, \qquad A_2 =]1,2[, \qquad A_3 = [1,2], \qquad A_4 =]0,1[\cup]1,2[,$$

$$A_5 = \{0\} \cup [1,2], \qquad A_6 =]0,+\infty[, \qquad A_7 = [0,+\infty[, \qquad A_8 = \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Il punto 0 è di frontiera per A_1. Infatti non è interno ad A_1, perché qualunque intorno di 0 contiene numeri diversi da 0, quindi non è incluso in A_1; inoltre non è esterno ad A_1, perché appartiene all'insieme.

Se $c \notin A_1$, allora c è esterno ad A_1. Infatti $0 \notin \big]c-|c|, c+|c|\big[$, quindi c ha un intorno incluso in $\complement A_1$.

Quindi si ha $\operatorname{int} A_1 = \varnothing$, $\partial A_1 = \{0\}$ e $\overline{A}_1 = \{0\}$.

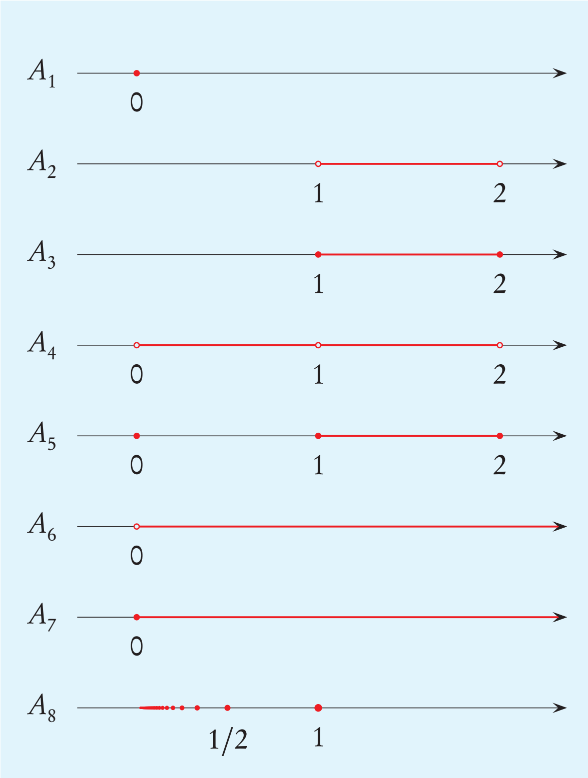


Figura 3.1.1
Gli insiemi studiati nell'esempio 3.1.4

Se $c \in \,]1,2[$, allora c è interno ad A_2. Infatti, posto $\delta = \min\{c-1, 2-c\}$, risulta $]c-\delta, c+\delta[\, \subseteq \,]1,2[$.

Il punto 1 è di frontiera per A_2. Infatti ogni intorno di 1 contiene numeri minori di 1, quindi non è incluso in A_2, e numeri compresi tra 1 e 2, quindi non è incluso in $\complement A_2$. Per motivi analoghi 2 è di frontiera per A_2.

Se $c \in \,]2,+\infty[$, allora c è esterno ad A_2, perché $\big]c-(c-2), c+(c-2)\big[\,=\,]2, 2c-2[$ è un intorno di c disgiunto da A_2. Analogamente se $c \in \,]-\infty, 1[$, allora c è esterno ad A_2, perché $\big]c-(1-c), c+(1-c)\big[\,=\,]2c-1, 1[$ è un intorno di c disgiunto da A_2.

Quindi si ha $\operatorname{int} A_2 = \,]1,2[$, $\partial A_2 = \{1,2\}$ e $\overline{A}_2 = [1,2]$.

Ragionando come per A_2, si prova che $\operatorname{int} A_3 = \,]1,2[$, $\partial A_3 = \{1,2\}$ e $\overline{A}_3 = [1,2]$.

Poiché $A_2 \subseteq A_4$, i punti interni ad A_2 sono interni ad A_4, quindi se $c \in \,]1,2[$, allora è interno ad A_4. Con ragionamenti analoghi a quelli fatti per A_2 si prova che se $c \in \,]0,1[$, allora c è interno ad A_4.

I punti 0, 1 e 2 sono di frontiera per A_4. Infatti ciascuno di essi non appartiene ad A_4, quindi non è interno, e si prova facilmente che ogni intorno di uno di tali punti interseca A_4, quindi non sono punti esterni.

Se $c \in \,]2,+\infty[$, allora c è esterno ad A_4, perché $\big]c-(c-2), c+(c-2)\big[\,=\,]2, 2c-2[$ è un intorno di c disgiunto da A_4. Analogamente se $c \in \,]-\infty, 0[$, allora c è esterno ad A_4, perché $\big]c-(-c), c+(-c)\big[\,=\,]2c, 0[$ è un intorno di c disgiunto da A_4.

Quindi si ha $\operatorname{int} A_4 = \,]0,1[\, \cup \,]1,2[$, $\partial A_4 = \{0,1,2\}$ e $\overline{A}_4 = [0,2]$.

Poiché $A_2 \subseteq A_5$, i punti interni ad A_2 sono interni ad A_5, quindi se $c \in \,]1,2[$, allora c è interno ad A_5.

I punti 0, 1 e 2 sono di frontiera per A_5, perché essi appartengono ad A_5, quindi non sono esterni, e si verifica facilmente che ogni loro intorno non è contenuto in A_5, quindi non sono interni.

Con ragionamenti analoghi a quelli fatti per gli insiemi precedenti, si prova che ogni punto di $]-\infty,0[\cup]0,1[\cup]2,+\infty[$ è esterno ad A_5.

Quindi si ha $\operatorname{int}A_5=]1,2[$, $\partial A_5=\{0,1,2\}$ e $\overline{A}_5=\{0\}\cup[1,2]$.

Se $c\in]0,+\infty[$, allora $]c-c,c+c[\subseteq]0,+\infty[$, quindi c è interno ad A_6.

Ogni intorno di 0 contiene sia numeri positivi che numeri negativi, quindi ha intersezione non vuota sia con A_6 che con il suo complementare; perciò 0 è punto di frontiera per A_6.

Se $c\in]-\infty,0[$, allora $\big]c-(-c),c+(-c)\big[\cap]0,+\infty[=\varnothing$, quindi c è esterno ad A_6.

Quindi si ha $\operatorname{int}A_6=]0,+\infty[$, $\partial A_6=\{0\}$ e $\overline{A}_6=[0,+\infty[$.

Ragionando come per A_6, si prova che $\operatorname{int}A_7=]0,+\infty[$, $\partial A_7=\{0\}$ e $\overline{A}_7=[0,+\infty[$.

L'insieme A_8 non contiene intervalli, quindi non può contenere un intorno di un punto; pertanto A_8 non ha punti interni. Quindi ogni punto di A_8 è di frontiera.

Il punto 0 è di frontiera per A_8. Infatti la successione $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge a 0 (v. esempio 2.2.12), quindi, $\forall\delta\in\mathbb{R}^+$, definitivamente si ha $1/n\in]-\delta,\delta[$, pertanto ogni intorno di 0 ha intersezione non vuota con A_8. Poiché $0\notin A_8$, ogni intorno di 0 ha anche intersezione non vuota con $\complement A_8$, pertanto, per il teorema 3.1.1, 0 è punto di frontiera.

Se $c\in]1,+\infty[$, allora $\big]c-(c-1),c+(c-1)\big[=]1,2c-1[$ è un intorno di c disgiunto da A_8 quindi c è esterno ad A_8. Se $c\in]-\infty,0[$, allora $\big]c-(-c),c+(-c)\big[=]2c,0[$ è un intorno di c disgiunto da A_8, quindi c è esterno ad A_8. . Se $c\in]0,1[\setminus A_8$, allora esiste $n\in\mathbb{N}^*$ tale che si ha $1/(n+1)<c<1/n$. Posto $\delta=\min\big\{c-1/(n+1),(1/n)-c\big\}$, risulta $]c-\delta,c+\delta[\subseteq\big]1/n,1/(n+1)\big[\subseteq\complement A_8$. Pertanto c è esterno ad A_8.

Quindi si ha $\operatorname{int}A_8=\varnothing$, $\partial A_8=A_8\cup\{0\}$ e $\overline{A}_8=A_8\cup\{0\}$. ◀

Dalle definizioni si ottiene immediatamente il seguente teorema.

3.1.5 Teorema

Sia $A\subseteq\mathbb{R}$. Allora:

I) $\operatorname{int}A\subseteq A\subseteq\overline{A}$;

II) $\overline{A}=A\cup\partial A$.

Anche il teorema seguente è una semplice conseguenza delle definizioni.

3.1.6 Teorema

Siano $A,B\subseteq\mathbb{R}$.

I) Se $A\subseteq B$, allora $\operatorname{int}A\subseteq\operatorname{int}B$;

II) Se $A\subseteq B$, allora ogni punto esterno a B è esterno ad A;

III) $\operatorname{int}(A\cap B)=\operatorname{int}A\cap\operatorname{int}B$.

DIMOSTRAZIONE. I, II) Sono immediata conseguenza della definizione.

III) Per l'affermazione I si ha $\operatorname{int}(A\cap B)\subseteq \operatorname{int}A$ e $\operatorname{int}(A\cap B)\subseteq \operatorname{int}B$, pertanto risulta $\operatorname{int}(A\cap B)\subseteq \operatorname{int}A\cap \operatorname{int}B$.

Viceversa se $c\in \operatorname{int}A\cap \operatorname{int}B$, allora esistono $U_A, U_B\in \mathscr{I}_c$ tali che $U_A\subseteq A$ e $U_B\subseteq B$. Pertanto risulta $U_A\cap U_B\in \mathscr{I}_c$ e $U_A\cap U_B\subseteq A\cap B$; quindi $c\in \operatorname{int}(A\cap B)$. Perciò si ha $\operatorname{int}A\cap \operatorname{int}B\subseteq \operatorname{int}(A\cap B)$. ■

I punti interni, esterni e di frontiera e la chiusura di un insieme possono essere caratterizzati mediante successioni convergenti, come risulta dal seguente teorema.

3.1.7 Teorema

Siano $A\subseteq \mathbb{R}$ e $c\in \mathbb{R}$.

I) Il punto c appartiene ad $\overline{A}$ se e solo se esiste $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione in A convergente a c.

II) Il punto c è interno ad A se e solo se, qualunque sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, successione in $\mathbb{R}$ convergente a c, definitivamente $a_n\in A$.

III) Il punto c è esterno ad A se e solo se, qualunque sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, successione in $\mathbb{R}$ convergente a c, definitivamente $a_n\notin A$.

IV) Il punto c è di frontiera per A se e solo se esistono $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione in A e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione in $\complement A$ convergenti a c.

Per l'affermazione I, $\overline{A}$ è l'insieme dei punti che sono limite di successioni in A.

DIMOSTRAZIONE. I) Se $c\in\overline{A}$, allora c non è interno a $\complement A$, quindi $\forall U\in\mathscr{I}_c$ non si ha $U\subseteq \complement A$, pertanto $U\cap A\neq\varnothing$. Quindi, $\forall n\in\mathbb{N}$, si ha $]c-1/(n+1), c+1/(n+1)[\cap A\neq\varnothing$, perciò esiste $a_n\in A$ tale che $c-1/(n+1)<a_n<c+1/(n+1)$. Poiché

$$\lim_{n\to+\infty}\left(c-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(c+\frac{1}{n+1}\right)=c,$$

per il teorema dei due carabinieri 2.2.11 $a_n\to c$.

Viceversa, se $c\notin\overline{A}$, allora c è interno a $\complement A$, quindi esiste $U\in\mathscr{I}_c$ incluso in $\complement A$. Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione convergente a c, allora definitivamente $a_n\in U$, quindi $a_n\in\complement A$. Pertanto non esistono successioni in A convergenti a c.

II) Se c è interno ad A, allora esiste $U\in\mathscr{I}_c$ incluso in A. Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione convergente a c, allora definitivamente $a_n\in U$, quindi definitivamente $a_n\in A$.

Viceversa, se c non è interno ad A, allora $c\in\overline{\complement A}$, quindi, per l'affermazione I, esiste $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione in $\complement A$ convergente a c. Pertanto non è vero che, qualunque sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione in $\mathbb{R}$ convergente a c, definitivamente si ha $a_n\in A$.

III) Segue dall'affermazione II, perché i punti esterni ad A sono quelli interni a $\complement A$.

IV) Per l'osservazione 3.1.2, $c\in\partial A$ se e solo se $c\in\overline{A}\cap\overline{\complement A}$. Per l'affermazione I, questo equivale al fatto che esistano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione in A e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione in $\complement A$ convergenti a c. ■

Definizione di insieme aperto, chiuso

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$.
Diciamo che A è **aperto** quando $A = \operatorname{int} A$.
Diciamo che A è **chiuso** quando $A = \overline{A}$.

Vale la seguente semplice caratterizzazione degli aperti e dei chiusi.

3.1.8 Teorema

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$.

I) L'insieme A è aperto se e solo se $A \cap \partial A = \varnothing$.

II) L'insieme A è chiuso se e solo se $\partial A \subseteq A$.

Dimostrazione. I) Poiché $\operatorname{int} A \cap \partial A = \varnothing$, se $A = \operatorname{int} A$ si ha $A \cap \partial A = \varnothing$.
Viceversa, poiché $A \subseteq \operatorname{int} A \cup \partial A$, se $A \cap \partial A = \varnothing$, allora $A \subseteq \operatorname{int} A$.

II) Si ha $\overline{A} = A$ se e solo se $A \cup \partial A = A$ e questo equivale a $\partial A \subseteq A$. ■

Si verifica facilmente che gli intervalli che abbiamo chiamato aperti sono insiemi aperti secondo questa definizione, mentre gli intervalli che abbiamo chiamato chiusi sono chiusi secondo questa definizione.

3.1.9 Osservazione. L'insieme $\mathbb{R}$ è aperto, perché ogni punto è interno, ed è chiuso, perché, non avendo punti di frontiera, coincide con l'unione dell'interno con la frontiera.

Anche $\varnothing$ è sia aperto che chiuso, perché non ha né punti interni né punti di frontiera, quindi coincide sia con il suo interno che con la sua chiusura.

Gli insiemi $\varnothing$ e $\mathbb{R}$ sono gli unici sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che sono sia aperti che chiusi. Infatti se A è sia aperto che chiuso, allora, per il teorema 3.1.8, ∂A è incluso in A, ma è disgiunto da A, quindi $\partial A = \varnothing$. Gli unici insiemi che hanno frontiera vuota sono $\mathbb{R}$ e $\varnothing$.

Infatti, sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e diverso da $\mathbb{R}$. Allora esistono $a \in A$ e $b \in \mathbb{R} \setminus A$. Supponiamo $a < b$, in caso contrario la dimostrazione è analoga. Posto $C = \{x \in A \mid x < b\}$, si ha $a \in C$, quindi $C \neq \varnothing$, e b è un maggiorante di C, quindi C è superiormente limitato. Posto $c = \sup C$, proviamo che risulta $c \in \partial A$. Infatti, $\forall \delta \in \mathbb{R}^+$, si ha $c - \delta < \sup C$, quindi esiste un elemento di C compreso tra $c - \delta$ e c, ma $C \subseteq A$, quindi esiste un elemento di A appartenente a $]c-\delta, c[\subseteq]c-\delta, c+\delta[$, quindi ogni intorno di c interseca A. Inoltre, se $c < b$, allora ogni elemento di $]c, b]$ non appartiene ad A, e, $\forall \delta \in \mathbb{R}^+$, $]c-\delta, c+\delta[$ interseca tale intervallo, quindi non è incluso in A. Se invece $c = b$, allora ogni intorno di c contiene b che non appartiene ad A, quindi tale intorno non è incluso in A. Pertanto c non è né interno né esterno ad A, quindi è di frontiera. ◀

3.1.10 Esempio. Ricordando l'esempio 3.1.3, $\mathbb{Z}$ è chiuso, $\mathbb{Q}$ non è né aperto né chiuso.

Determiniamo quali degli insiemi introdotti nell'esempio 3.1.4 sono aperti o chiusi. Ricordando quanto provato in tale esempio, gli insiemi $A_2 =]1,2[$, $A_4 =]0,1[\cup]1,2[$ e $A_6 =]0,+\infty[$ sono aperti, mentre gli insiemi $A_1 = \{0\}$, $A_3 = [1,2]$, $A_5 = \{0\} \cup [1,2]$ e $A_7 = [0,+\infty[$ sono chiusi, infine l'insieme $A_8 = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ non è né aperto né chiuso. ◀

3.1.11 Teorema

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$.

I) A è aperto se e solo se $\complement A$ è chiuso.

II) A è chiuso se e solo se $\complement A$ è aperto.

Dimostrazione. I) Ricordiamo che $\partial A = \partial(\complement A)$ (v. osservazione 3.1.2). Per il teorema 3.1.8, A è aperto se e solo se $A \cap \partial A = \varnothing$, cioè $\partial A = \partial(\complement A) \subseteq \complement A$ e questo equivale al fatto che $\complement A$ sia chiuso.

II) Segue subito da I, applicata a $\complement A$. ■

La proprietà di essere aperto e quella di essere chiuso si conservano per unioni e intersezioni. Per la precisione valgono i seguenti teoremi.

3.1.12 Teorema

Sia $\{A_i \mid i \in I\}$ una famiglia di insiemi.

I) Se $\forall i \in I$, A_i è aperto, allora $\bigcup_{i \in I} A_i$ è aperto.

II) Se $\forall i \in I$, A_i è chiuso, allora $\bigcap_{i \in I} A_i$ è chiuso.

Dimostrazione. I) Sia $c \in \bigcup_{i \in I} A_i$, dimostriamo che c è un punto interno a tale insieme. Sia $j \in I$ tale che $c \in A_j$; poiché A_j è aperto, esiste $U \in \mathscr{I}_c$ tale che $U \subseteq A_j$, quindi $U \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$, perciò c è interno a $\bigcup_{i \in I} A_i$.

Pertanto ogni punto di $\bigcup_{i \in I} A_i$ è interno, perciò $\bigcup_{i \in I} A_i$ è aperto.

II) Si ha $\complement\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} \complement A_i$. Per il teorema 3.1.11, $\forall i \in I$, $\complement A_i$ è aperto, quindi, per l'affermazione I, $\bigcup_{i \in I} \complement A_i$ è aperto, pertanto, nuovamente per il teorema 3.1.11, $\bigcap_{i \in I} A_i$ è chiuso. ■

3.1.13 Teorema

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$.

I) Se A e B sono aperti, allora $A \cap B$ è aperto.

II) Se A e B sono chiusi, allora $A \cup B$ è chiuso.

Dimostrazione. I) Sia $c \in A \cap B$, dimostriamo che $c \in \operatorname{int}(A \cap B)$. Poiché A e B sono aperti, c è interno ad A e a B, quindi $\exists U_A, U_B \in \mathscr{I}_c$ tali che $U_A \subseteq A$ e $U_B \subseteq B$. Posto $U = U_A \cap U_B$, si ha $U \in \mathscr{I}_c$, $U \subseteq U_A \subseteq A$ e $U \subseteq U_B \subseteq B$, pertanto $U \subseteq A \cap B$, quindi c è interno ad $A \cap B$.

Poiché ogni punto di $A \cap B$ è interno, $A \cap B$ è aperto.

II) Si ha $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$. Per il teorema 3.1.11 $\complement A$ e $\complement B$ sono aperti, quindi, per l'affermazione I, $\complement A \cap \complement B$ è aperto, pertanto, nuovamente per il teorema 3.1.11, $A \cup B$ è chiuso. ■

Da questo teorema segue che se A, B e C sono tre insiemi aperti, allora $A \cap B$ è aperto e quindi anche $(A \cap B) \cap C$ è aperto; quest'ultimo è l'intersezione dei tra insiemi. Ripetendo il ragionamento si prova che l'intersezione di un numero finito di insiemi aperti è aperta.

In modo analogo si ha che l'unione di un numero finito di insiemi chiusi è chiusa.

3.1.14 Osservazione. Tra i teoremi 3.1.12 e 3.1.13 c'è una differenza fondamentale: nel primo si considerano unioni e intersezioni di una famiglia di insiemi anche infinita, nel secondo unioni e intersezioni di due insiemi. Come osservato sopra, dal fatto che una proprietà si conserva per unione o intersezione di due insiemi segue che si conserva per unione o intersezione di un numero finito di insiemi, ma non si può trarre la stessa conclusione per famiglie infinite di insiemi. In particolare il teorema 3.1.13 è falso per intersezioni e unioni di famiglie infinite.

Per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ l'insieme $]-1/n, 1/n[$ è aperto. Si ha

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\},$$

perché se x appartiene a tale intersezione, risulta, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x \leq 1/n$, quindi $x \leq 0$, e $x \geq -1/n$, quindi $x \geq 0$. L'insieme $\{0\}$ ha interno vuoto (v. esempio 3.1.4), quindi non è aperto. Pertanto la famiglia di insiemi aperti $\left\{]-1/n, 1/n[\,\middle|\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ ha intersezione che non è aperta.

Considerando i complementari di questi insiemi, abbiamo la famiglia di insiemi chiusi $\left\{]-\infty, -1/n] \cup [1/n, +\infty[\,\middle|\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$, la cui unione è $\mathbb{R}^*$ che non è chiuso. ◀

3.1.15 Teorema

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Allora:

I) $\operatorname{int} A$ è aperto;

II) $\overline{A}$ è chiuso.

Dimostrazione. I) Dobbiamo provare che $\operatorname{int}(\operatorname{int} A) = \operatorname{int} A$. Poiché $\operatorname{int} A \subseteq A$, per il teorema 3.1.6, affermazione I, si ha $\operatorname{int}(\operatorname{int} A) \subseteq \operatorname{int} A$, quindi resta da dimostrare che $\operatorname{int} A \subseteq \operatorname{int}(\operatorname{int} A)$.

Se $c \in \operatorname{int} A$, allora esiste $\delta \in \mathbb{R}^+$ tale che $]c-\delta, c+\delta[\subseteq A$. Se $x \in]c-\delta, c+\delta[$, allora, posto $\eta = \min\{(c+\delta)-x, x-(c-\delta)\}$ si ha

$$x - \eta \geq x - \big(x - (c-\delta)\big) = c - \delta,$$
$$x + \eta \leq x + \big((c+\delta) - x\big) = c + \delta,$$

quindi

$$]x-\eta, x+\eta[\subseteq]c-\delta, c+\delta[\subseteq A;$$

pertanto $x \in \operatorname{int} A$. Perciò $]c-\delta, c+\delta[\subseteq \operatorname{int} A$, ma tale intervallo è un intorno di c, pertanto $c \in \operatorname{int}(\operatorname{int} A)$. Quindi $\operatorname{int} A \subseteq \operatorname{int}(\operatorname{int} A)$.

II) Poiché $\overline{A} = \operatorname{int} A \cup \partial A$, $\complement\overline{A}$ è costituito dai punti esterni ad A, cioè $\complement\overline{A} = \operatorname{int}(\complement A)$. Poiché, per l'affermazione I, $\operatorname{int}(\complement A)$ è aperto, per il teorema 3.1.11, $\overline{A}$ è chiuso. ■

Definizione di insieme compatto

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Diciamo che A è **compatto** quando ogni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione in A ha una sottosuccessione convergente a un elemento di A.

Gli insiemi compatti possono essere caratterizzati sulla base di concetti già definiti.

3.1.16 Teorema (caratterizzazione degli insiemi compatti)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

I) A è compatto;

II) A è chiuso e limitato.

Dimostrazione. I $\Longrightarrow$ II) Dimostriamo che se A non è chiuso oppure non è limitato, allora non è compatto.

Supponiamo che A non sia superiormente limitato. Allora $\forall n \in \mathbb{N}$ esiste un elemento di A, che indichiamo con a_n, tale che $a_n > n$. Per il teorema 2.2.15, affermazione I, $a_n \to +\infty$, quindi, per il teorema 2.3.5, ogni sua sottosuccessione diverge, cioè $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non ha sottosuccessioni convergenti a un elemento di A. Pertanto A non è compatto.

La dimostrazione è analoga se A è inferiormente illimitato.

Supponiamo ora che A non sia chiuso, cioè che esista $c \in \overline{A} \setminus A$. Poiché $c \in \overline{A}$, per il teorema 3.1.7, affermazione I, esiste una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A convergente a c. Ogni sottosuccessione di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a c che non appartiene ad A, quindi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non ha sottosuccessioni convergenti a un elemento di A. Pertanto A non è compatto.

II $\Longrightarrow$ I) Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in A. Poiché A è limitato, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata; per il teorema di Bolzano-Weierstrass 2.3.9, esiste una sottosuccessione $\left(a_{k_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente. Per il teorema 3.1.7, affermazione I, si ha $\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} \in \overline{A} = A$. Quindi A è compatto. ■

3.1.17 Esempio. Consideriamo gli insiemi studiati negli esempi 3.1.4 e 3.1.10.

Gli insiemi $A_1 = \{0\}$, $A_3 = [1,2]$ e $A_5 = \{0\} \cup [1,2]$ sono chiusi e limitati, quindi, per il teorema 3.1.16, sono compatti. L'insieme $A_7 = [0,+\infty[$ non è limitato, quindi non è compatto. Gli insiemi $A_2 =]1,2[$, $A_4 =]0,1[\cup]1,2[$, $A_6 =]0,+\infty[$ e $A_8 = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ non sono chiusi, quindi non sono compatti. ◀

Per lo studio dei limiti, hanno interesse i punti che sono "vicini" a un insieme privato del punto stesso. Risulta quindi utile la seguente definizione, che estendiamo ai punti di $\overline{\mathbb{R}}$.

Definizione di punto limite, punto di accumulazione, punto isolato, insieme derivato di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $c \in \overline{\mathbb{R}}$.

Diciamo che c è **punto limite** di A quando, $\forall U \in \mathscr{I}_c$, si ha $A \cap U \setminus \{c\} \neq \varnothing$.

Indichiamo con $PL(A)$ l'insieme dei punti limite di A.

Diciamo che c è **punto di accumulazione** per A quando c è un punto limite di A che appartiene a $\mathbb{R}$.

Chiamiamo **insieme derivato** di A e indichiamo con $D(A)$ l'insieme dei punti di accumulazione per A.

Diciamo che c è un **punto isolato** per A quando $c \in A \setminus D(A)$.

Dalle definizioni segue subito che è $D(A) = PL(A) \cap \mathbb{R}$.

Per definizione, la condizione che $c \in \mathbb{R}$ sia punto di accumulazione per A equivale al fatto che c non sia esterno ad $A \setminus \{c\}$, cioè che sia $c \in \overline{A \setminus \{c\}}$.

3.1.18 Osservazione. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$; si ha $+\infty \in PL(A)$ se e solo se, $\forall M \in \mathbb{R}$, risulta $A \cap]M, +\infty[\neq \varnothing$, cioè esiste un elemento di A maggiore di M. Quindi $+\infty \in PL(A)$ se e solo se A è superiormente illimitato.

Analogamente $-\infty \in PL(A)$ se e solo se A è inferiormente illimitato.

Per definizione, $c \in A$ è punto isolato per A se e solo se non è vero che

$$\forall \delta \in \mathbb{R}^+, \quad A \cap]c - \delta, c + \delta[\setminus \{c\} \neq \varnothing,$$

cioè

$$\exists \overline{\delta} \in \mathbb{R}^+ : \quad A \cap]c - \overline{\delta}, c + \overline{\delta}[\setminus \{c\} = \varnothing;$$

si ha $A \cap]c - \overline{\delta}, c + \overline{\delta}[\setminus \{c\} = \varnothing$ se e solo se $A \cap]c - \overline{\delta}, c + \overline{\delta}[= \{c\}$, quindi c è punto isolato per A se e solo se

$$\exists \overline{\delta} \in \mathbb{R}^+ : \quad A \cap]c - \overline{\delta}, c + \overline{\delta}[= \{c\}.$$ ◀

Il teorema seguente mette in relazione il concetto di punto di accumulazione con quello di punto interno e di punto di frontiera.

3.1.19 Teorema

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Allora:

I) $\operatorname{int} A \subseteq D(A) \subseteq \overline{A}$;

II) $\partial A \setminus A \subseteq D(A)$.

Dimostrazione. I) Se $c \in \operatorname{int} A$, allora esiste $U \in \mathscr{I}_c$ tale che $U \subseteq A$, quindi qualunque sia $V \in \mathscr{I}_c$ si ha $A \cap V \setminus \{c\} \supseteq U \cap V \setminus \{c\}$. Poiché $U \cap V$ è un intervallo, ha più di un elemento, quindi $U \cap V \setminus \{c\} \neq \varnothing$, pertanto anche $A \cap V \setminus \{c\} \neq \varnothing$; perciò $c \in D(A)$.

Se $c \in D(A)$, allora, $\forall U \in \mathscr{I}_c$, si ha $A \cap U \setminus \{c\} \neq \varnothing$, quindi $A \cap U \neq \varnothing$, pertanto c non è esterno ad A, cioè $c \in \overline{A}$.

II) Se $c \in \partial A \setminus A$, allora, qualunque sia $U \in \mathscr{I}_c$, si ha $A \cap U \neq \varnothing$. Poiché $c \notin A$, $A \cap U = A \cap U \setminus \{c\}$, pertanto $A \cap U \setminus \{c\} \neq \varnothing$. Quindi $c \in D(A)$. ■

3.1.20 Esempio. Determiniamo il derivato degli insiemi introdotti nell'esempio 3.1.4. Utilizzeremo ripetutamente il fatto che $\operatorname{int} A \subseteq D(A) \subseteq \overline{A}$ e che $\partial A \setminus A \subseteq D(A)$ (v. teorema 3.1.19).

Consideriamo $A_1 = \{0\}$. Si ha $D(A_1) \subseteq \overline{A_1} = \{0\}$. Qualunque sia $U \in \mathscr{I}_0$, risulta $A_1 \cap U \setminus \{0\} = \{0\} \setminus \{0\} = \varnothing$; quindi $0 \notin D(A)$.

Pertanto $D(A_1) = \varnothing$ e 0 è un punto isolato per A_1.

Consideriamo $A_2 =]1,2[$. Si ha

$$]1,2[= \operatorname{int} A_2 \subseteq D(A_2) \subseteq \overline{A_2} = [1,2].$$

I punti 1 e 2 sono punti di frontiera che non appartengono ad A_2, quindi sono punti di accumulazione.

Pertanto $D(A_2) = [1,2]$.

Consideriamo $A_3 = [1,2]$. Poiché $A_2 \subseteq A_3$ si ha $D(A_2) \subseteq D(A_3)$, pertanto

$$[1,2] = D(A_2) \subseteq D(A_3) \subseteq \overline{A_3} = [1,2].$$

Pertanto $D(A_3) = [1,2]$.

Consideriamo $A_4 =]0,1[\cup]1,2[$. Si ha

$$]0,1[\cup]1,2[= \operatorname{int} A_4 \subseteq D(A_4) \subseteq \overline{A_4} = [0,2].$$

I punti 0, 1 e 2 sono punti di frontiera che non appartengono ad A_2, quindi sono punti di accumulazione.

Pertanto $D(A_4) = [0,2]$.

Consideriamo $A_5 = \{0\} \cup [1,2]$. Si ha

$$]1,2[= \operatorname{int} A_5 \subseteq D(A_5) \subseteq \overline{A_5} = \{0\} \cup [1,2].$$

Poiché $A_2 \subseteq A_5$ e 1 e 2 sono punti di accumulazione per A_2, essi sono di accumulazione anche per A_5. Il punto 0 non è di accumulazione per A_5, perché il suo intorno $]-1/2,1/2[$ interseca A_5 solo in 0.

Pertanto $D(A_5) = [1,2]$ e 0 è un punto isolato per A_5.

Consideriamo $A_6 =]0,+\infty[$. Si ha

$$]0,+\infty[= \operatorname{int} A_6 \subseteq D(A_6) \subseteq \overline{A_6} = [0,+\infty[.$$

Il punto 0 è punto di frontiera che non appartiene ad A_6, quindi è di accumulazione.

Pertanto $D(A_6) = [0,+\infty[$.

Consideriamo $A_7 = [0,+\infty[$. Poiché $A_6 \subseteq A_7$ si ha $D(A_6) \subseteq D(A_7)$, quindi

$$[0,+\infty[= D(A_6) \subseteq D(A_7) \subseteq \overline{A_7} = [0,+\infty[.$$

Pertanto $D(A_7) = [0,+\infty[$.

Consideriamo $A_8 = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. Si ha $D(A_8) \subseteq \overline{A_8} = A_8 \cup \{0\}$. Inoltre

$$A_8 \cap \left]1 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}\right[= A_8 \cap \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[= \{1\},$$

pertanto 1 non è punto di accumulazione. Se $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, allora $1/(n+1) < 1/n < 1(n-1)$ e $1/n$ è l'unico elemento di A_8 compreso tra tali numeri. Pertanto, ponendo

$$\delta = \min\left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right\} = \min\left\{\frac{1}{n(n+1)}, \frac{1}{n(n-1)}\right\} = \frac{1}{n(n+1)},$$

risulta $A_8 \cap]1/n - \delta, 1/n + \delta[= \{1/n\}$, pertanto $1/n$ non è di accumulazione per A_8. Poiché 0 è un punto di frontiera e non appartiene ad A_8, 0 è un punto di accumulazione.

Pertanto $D(A_8) = \{0\}$ e tutti i punti di A_8 sono punti isolati. ◀

I punti limite possono essere caratterizzati anche mediante le successioni, come mostra il seguente teorema.

3.1.21 Teorema

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $c \in \overline{\mathbb{R}}$. Risulta $c \in PL(A)$ se e solo se esiste una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $A \setminus \{c\}$ che tende a c.

Dimostrazione. Sia $c \in PL(A)$, proviamo che esiste una successione in $A \setminus \{c\}$ che tende a c.

Se $c \in \mathbb{R}$, allora c non è esterno ad $A\setminus\{c\}$, cioè $c \in \overline{A \setminus \{c\}}$ quindi, per il teorema 3.1.7, affermazione I, esiste una successione in $A \setminus \{c\}$ convergente a c.

Se $c = +\infty$, allora, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $]n,+\infty[\cap A \neq \varnothing$, pertanto esiste $a_n \in A = A \setminus \{c\}$ tale che $a_n > n$. Per il teorema 2.2.15, affermazione I, $a_n \to +\infty$.

Se $c = -\infty$ la dimostrazione è analoga, considerando gli intorni del tipo $]-\infty,-n[$.

Viceversa, sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $A \setminus \{c\}$ tale che $a_n \to c$. Per la definizione di limite si ha

$$\forall U \in \mathscr{I}_c,\ \exists n_U \in \mathbb{N}\colon\ \forall n \in \mathbb{N},\quad n > n_U \implies a_n \in U.$$

Pertanto, $\forall U \in \mathscr{I}_c$, si ha $a_{n_U+1} \in U$; poiché ogni termine della successione appartiene ad $A \setminus \{c\}$, si ha anche $a_{n_U+1} \in U \cap A \setminus \{c\}$, quindi $U \cap A \setminus \{c\} \neq \varnothing$; pertanto $c \in PL(A)$. ■

3.2 Estremi e limitatezza di funzioni

Le definizioni che seguono sono del tutto analoghe a quelle date per le successioni di numeri reali; invece dell'insieme dei termini, si considera l'immagine della funzione.

Definizione di funzione superiormente limitata, superiormente illimitata e di estremo superiore di una funzione

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$.

Diciamo che f è **superiormente limitata** quando $Im(f)$ è superiormente limitata. In tal caso chiamiamo **estremo superiore** di f e indichiamo con $\sup f$ l'estremo superiore di $Im(f)$.

Diciamo che f è **superiormente illimitata** quando $Im(f)$ è superiormente illimitata. In tal caso poniamo $\sup f = +\infty$.

Definizione di funzione inferiormente limitata, inferiormente illimitata e di estremo inferiore di una funzione

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$.

Diciamo che f è **inferiormente limitata** quando $Im(f)$ è inferiormente limitata. In tal caso chiamiamo **estremo inferiore** di f e indichiamo con $\inf f$ l'estremo inferiore di $Im(f)$.

Diciamo che f è **inferiormente illimitata** quando $Im(f)$ è inferiormente illimitata. In tal caso poniamo $\inf f = -\infty$.

Definizione di funzione limitata

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f: A \to \mathbb{R}$. Diciamo che f è **limitata** quando $Im(f)$ è limitata.

È conseguenza immediata di queste definizioni il fatto che una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ è superiormente limitata se e solo se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che, $\forall x \in A$, si ha $f(x) \leq M$, mentre è inferiormente limitata se e solo se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che, $\forall x \in A$, si ha $f(x) \geq M$.

3.2.1 Esempio. Consideriamo le funzioni:

$$\begin{aligned} &f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, && f_1(x) = x^2 - 1, \\ &f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, && f_2(x) = \frac{1}{x^2+1}, \\ &f_3: \left]-1,1\right[\to \mathbb{R}, && f_3(x) = \frac{x}{1-x^2}. \end{aligned}$$

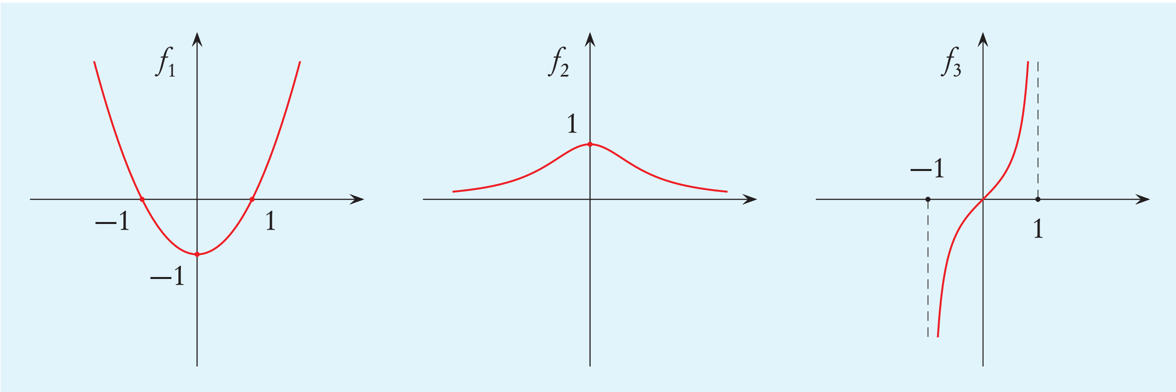


Figura 3.2.1
Le funzioni studiate nell'esempio 3.2.1.

Per $x \in \mathbb{R}$ si ha $f_1(x) = x^2 - 1 \geq -1$, quindi f_1 è inferiormente limitata. Inoltre, poiché $f_1(0) = -1$, si ha $-1 = \min Im(f_1)$.

Se $x > 1$, allora $x^2 > x$, quindi $f_1(x) > x - 1$. Pertanto, se $y > 0$, allora $f_1(y+1) > y$, quindi y non è maggiorante dell'immagine di f_1, pertanto f_1 è superiormente illimitata.

Il fatto che f_1 è superiormente illimitata può essere provato anche osservando che la successione $\left(f_1(n)\right)_{n\in\mathbb{N}} = (n^2-1)_{n\in\mathbb{N}}$ ha limite $+\infty$, quindi, per il teorema sulla limitatezza delle successioni regolari 2.2.21 è superiormente illimitata. Poiché $\left\{f_1(n) \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq Im(f_1)$, anche $Im(f_1)$ è superiormente illimitata.

Evidentemente, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_2(x) > 0$, quindi f_2 è inferiormente limitata e 0 è un minorante di $Im(f_2)$. Inoltre la successione $\left(f_2(n)\right)_{n\in\mathbb{N}} = (1/(n^2+1))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0, pertanto, qualunque sia $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, ε non è un minorante della successione, quindi non è neppure un minorante di $Im(f_2)$. Pertanto $\inf f_2 = 0$.

Per $x \in \mathbb{R}$ si ha $x^2+1 \geq 1$, quindi $f_2(x) = 1/(x^2+1) \leq 1$. Pertanto f_2 è superiormente limitata, inoltre $1 = f_2(0) = \max Im(f_2)$.

Si ha

$$f_3\left(\frac{n}{n+1}\right)=\frac{n/(n+1)}{1-n^2/(n+1)^2}=\frac{n(n+1)}{(n+1)^2-n^2}=\frac{n(n+1)}{2n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty\,.$$

Quindi $\left\{f_3\big(n/(n+1)\big)\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$ è superiormente illimitato, per il teorema sulla limitatezza delle successioni regolari 2.2.21. Poiché $Im(f_3)$ contiene tale insieme, è anch'esso superiormente illimitato, quindi $\sup f_3=+\infty$.

Considerando la successione $\big(f_3(-n/(n+1))\big)_{n\in\mathbb{N}}$ e ragionando in modo analogo, si dimostra che $\inf f_3=-\infty$. ◀

3.3 Limiti di funzioni

3.3.1 Definizioni

Estendiamo il concetto di limite, che abbiamo definito per le successioni, alle funzioni reali di variabile reale.

Nella sezione 2.2 abbiamo definito il limite di una successione per $n\to+\infty$, distinguendo il caso di limite reale o $+\infty$ o $-\infty$, abbiamo poi unificato le definizioni utilizzando gli intorni di un punto di $\overline{\mathbb{R}}$; si ha $a_n\to\ell\in\overline{\mathbb{R}}$ se e solo se

$$\forall U\in\mathscr{I}_\ell,\ \exists n_U\in\mathbb{N}\colon\ \forall n\in\mathbb{N},\quad n>n_U\implies a_n\in U\,.$$

La condizione $n>n_U$ equivale a $n\in\,]n_U,+\infty[$ e questo insieme è un intorno di $+\infty$. Quindi, se è verificata la definizione di limite, allora esiste $V\in\mathscr{I}_{+\infty}$ tale che, per $n\in\mathbb{N}$, risulta $n\in V\implies a_n\in U$. Viceversa, supponiamo che esista $V\in\mathscr{I}_{+\infty}$ tale che, per $n\in\mathbb{N}$, si ha $n\in V\implies a_n\in U$; allora risulta $V=\,]M,+\infty[$, per un $M\in\mathbb{R}$, scelto $n_U\in\mathbb{N}$ maggiore o uguale a M, se $n>n_U$ si ha $n\in V$, quindi $a_n\in U$. Pertanto la definizione di limite è equivalente a

$$\forall U\in\mathscr{I}_\ell,\ \exists V_U\in\mathscr{I}_{+\infty}\colon\ \forall n\in\mathbb{N},\quad n\in V_U\implies a_n\in U\,.$$

Questa definizione può essere immediatamente estesa alle funzioni reali di variabile reale. Occorre però tenere presente che, assegnata una funzione $f\colon A\to\mathbb{R}$, ha senso chiedersi come si comporta $f(x)$ per $x\to+\infty$ solo se la funzione è definita per valori di x arbitrariamente "grandi", cioè se A è superiormente illimitato. Come visto nell'osservazione 3.1.18 ciò equivale al fatto che sia $+\infty\in PL(A)$, cioè che ogni intorno di $+\infty$ abbia intersezione non vuota con A. Sotto questa condizione su A, possiamo dire che $f(x)$ ha limite $\ell\in\overline{\mathbb{R}}$, per $x\to+\infty$, quando

$$\forall U\in\mathscr{I}_\ell,\ \exists V_U\in\mathscr{I}_{+\infty}\colon\ \forall x\in A,\quad x\in V_U\implies f(x)\in U\,.$$

La definizione può essere facilmente modificata in modo da tenere conto del comportamento di $f(x)$ quando x si "avvicina" a un numero reale c o a $-\infty$, basta chiedere l'esistenza di un intorno di c o di $-\infty$, anziché di un intorno di $+\infty$. Nel caso del numero reale c risulta utile considerare il comportamento della funzione nei punti vicini, ma diversi da c, pertanto nella definizione si considerano solo gli elementi di $A\setminus\{c\}$.

Perché la definizione abbia qualche interesse è necessario che, qualunque sia $V \in \mathscr{I}_c$, esistano in V elementi di $A \setminus \{c\}$; in caso contrario, scegliendo come V_U un intorno di c che ha intersezione vuota con $A \setminus \{c\}$, l'implicazione $x \in V_U \implies f(x) \in U$ è sempre verificata, portando a concludere che qualunque elemento di $\overline{\mathbb{R}}$ è limite di $f(x)$. Nel dare la definizione di limite per $x \to c$ è quindi necessario supporre che c sia un punto limite del dominio di f.

Diamo quindi la seguente definizione.

Definizione di limite di una funzione

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $c \in PL(A)$ e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Diciamo che $f(x)$ ha **limite** ℓ per x che tende a c e scriviamo $\lim_{x \to c} f(x) = \ell$ (o anche $f(x) \to \ell$ per $x \to c$) quando

$$\forall U \in \mathscr{I}_\ell, \exists V_U \in \mathscr{I}_c : \forall x \in A \setminus \{c\}, \quad x \in V_U \implies f(x) \in U .$$

La definizione di limite si può scrivere anche in un'altra forma, che cambia a seconda che c e ℓ siano reali o no. Esplicitando la definizione di intorno, abbiamo quanto segue.

Se $c \in \mathbb{R}$ e $\ell \in \mathbb{R}$, si ha $\lim_{x \to c} f(x) = \ell$ se e solo se

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in A \setminus \{c\}, \quad x \in]c - \delta_\varepsilon, c + \delta_\varepsilon[\implies |f(x) - \ell| < \varepsilon .$$

Se $c \in \mathbb{R}$ e $\ell = +\infty$, si ha $\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$ se e solo se

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta_M \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in A \setminus \{c\}, \quad x \in]c - \delta_M, c + \delta_M[\implies f(x) > M .$$

Se $c \in \mathbb{R}$ e $\ell = -\infty$, si ha $\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$ se e solo se

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta_M \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in A \setminus \{c\}, \quad x \in]c - \delta_M, c + \delta_M[\implies f(x) < M .$$

Se $c = +\infty$ e $\ell \in \mathbb{R}$, si ha $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ se e solo se

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists K_\varepsilon \in \mathbb{R} : \forall x \in A, \quad x \in]K_\varepsilon, +\infty[\implies |f(x) - \ell| < \varepsilon .$$

Se $c = +\infty$ e $\ell = +\infty$, si ha $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ se e solo se

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists K_M \in \mathbb{R} : \forall x \in A, \quad x \in]K_M, +\infty[\implies f(x) > M .$$

Se $c = +\infty$ e $\ell = -\infty$, si ha $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ se e solo se

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists K_M \in \mathbb{R} : \forall x \in A, \quad x \in]K_M, +\infty[\implies f(x) < M .$$

Se $c = -\infty$ e $\ell \in \mathbb{R}$, si ha $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ se e solo se

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists K_\varepsilon \in \mathbb{R} : \forall x \in A, \quad x \in]-\infty, K_\varepsilon[\implies |f(x) - \ell| < \varepsilon .$$

Se $c = -\infty$ e $\ell = +\infty$, si ha $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ se e solo se

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists K_M \in \mathbb{R} : \forall x \in A, \quad x \in]-\infty, K_M[\implies f(x) > M .$$

Se $c = -\infty$ e $\ell = -\infty$, si ha $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ se e solo se

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists K_M \in \mathbb{R} : \forall x \in A, \quad x \in]-\infty, K_M[\implies f(x) < M .$$

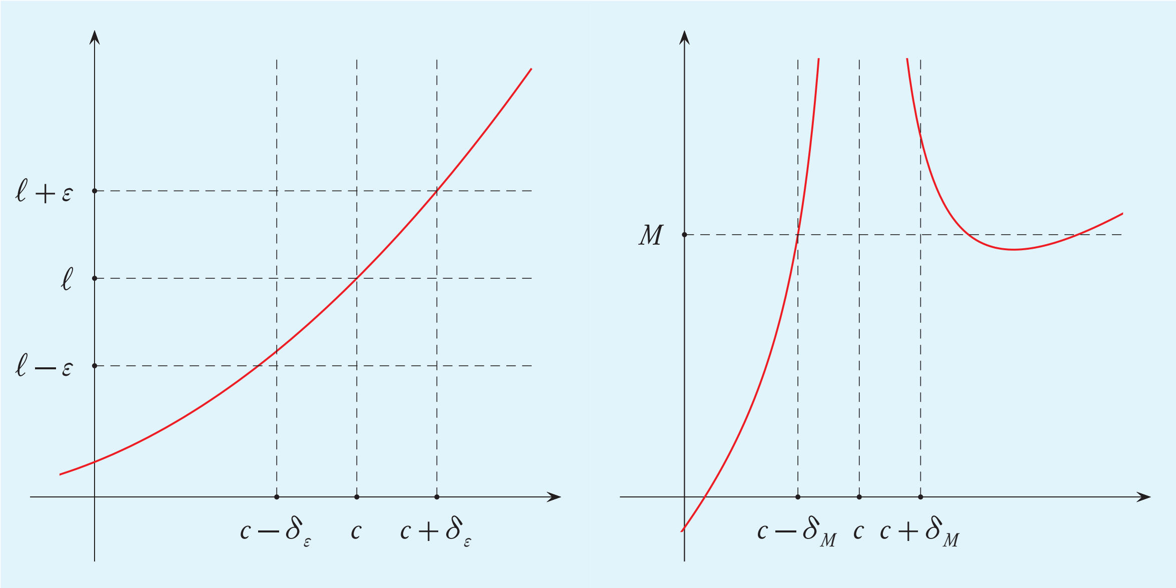


Figura 3.3.1
Definizioni di $\lim_{x\to c} f(x)=\ell\in\mathbb{R}$ (a sinistra) e di $\lim_{x\to c} f(x)=+\infty$ (a destra).
A sinistra: se x è compreso tra $c-\delta_\varepsilon$ e $c+\delta_\varepsilon$, allora $f(x)$ è compreso tra $\ell-\varepsilon$ e $\ell+\varepsilon$.
A destra: se x è compreso tra $c-\delta_M$ e $c+\delta_M$, allora $f(x)$ è maggiore di M.

Osserviamo che nel caso $\ell\in\mathbb{R}$ la condizione $|f(x)-\ell|<\varepsilon$ è tanto più restrittiva quanto più ε è piccolo: se essa è verificata per un certo valore di ε, allora è verificata anche per ogni valore più grande. Nella definizione di limite $+\infty$, se la condizione $f(x)>M$ è verificata per un certo M, allora è verificata per tutti gli M più piccoli; ad esempio se la condizione è verificata per ogni $M\in\mathbb{R}^+$, allora è verificata per ogni $M\in\mathbb{R}$. Nel caso di limite $-\infty$ si ha analogamente che è sufficiente chiedere che sia verificata la condizione per ogni $M\in\mathbb{R}^-$.

Analogamente, quando $c=+\infty$, se si può scegliere un certo K_ε, allora anche ogni numero più grande verifica la condizione; in particolare nella definizione si può richiedere che sia $K_\varepsilon>0$. Se invece $c=-\infty$, allora si può richiedere che sia $K_\varepsilon<0$.

Per indicare che una funzione ha limite utilizziamo una terminologia analoga a quella introdotta per le successioni.

Definizione di funzione convergente, divergente, regolare, oscillante

Siano $A\subseteq\mathbb{R}$, $f:A\to\mathbb{R}$ e $c\in PL(A)$.

Diciamo che $f(x)$ è **convergente** per x che tende a c quando esiste $\lim_{x\to c} f(x)$ e esso e appartiene a $\mathbb{R}$.

Diciamo che $f(x)$ è **divergente** per x che tende a c quando $f(x)$ ha limite $+\infty$ oppure $-\infty$ per x che tende a c; in particolare diciamo che $f(x)$ è **divergente positivamente** nel primo caso, **divergente negativamente** nel secondo caso.

Diciamo che $f(x)$ è **regolare** per x che tende a c quando è convergente oppure divergente.

Diciamo che $f(x)$ è **oscillante** per x che tende a c quando non è regolare.

Un particolare esempio di funzioni convergenti sono le funzioni costanti, cioè quelle che a ogni elemento del dominio fanno corrispondere lo stesso valore. È ovvio infatti che se f è tale che, $\forall x \in \mathscr{D}(f)$, si ha $f(x) = m$, allora $\lim_{x\to c} f(x) = m$, qualunque sia $c \in PL\big(\mathscr{D}(f)\big)$.

3.3.1 Esempio. Consideriamo le funzioni:

$$\begin{aligned} &f_4 \colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, && f_4(x) = \frac{1}{x},\\ &f_5 \colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}, && f_5(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x},\\ &f_6 \colon [0,1[\cup]1,+\infty[\to \mathbb{R}, && f_6(x) = \frac{x-\sqrt{x}}{x-1}. \end{aligned}$$

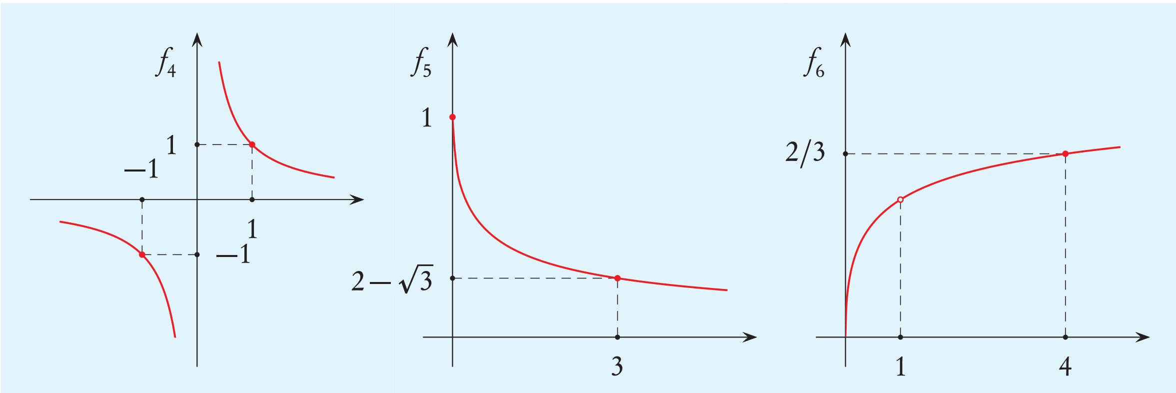


Figura 3.3.2
Le funzioni studiate nell'esempio 3.3.1.

Studiamone alcuni limiti.

Proviamo che $\lim_{x\to-\infty} f_4(x) = 0$. Fissato $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, si ha $|f_4(x) - 0| < \varepsilon$ se e solo se $|1/x| < \varepsilon$, che equivale a $|x| > 1/\varepsilon$, cioè $x > 1/\varepsilon$ o $x < -1/\varepsilon$. Pertanto, se $x < -1/\varepsilon$, allora $|f_4(x) - 0| < \varepsilon$, quindi $f_4(x) \to 0$, per $x \to -\infty$.

Da ciò segue che anche per $x > 1/\varepsilon$ si ha $|f_4(x) - 0| < \varepsilon$, quindi risulta $f_4(x) \to 0$, per $x \to +\infty$.

La funzione f_4 è superiormente e inferiormente illimitata in ogni intorno di 0. Infatti siano $\delta, M \in \mathbb{R}^+$. Se $x \in \big]0, \min\{\delta, 1/M\}\big[$, allora $x \in]-\delta,\delta[\setminus \{0\}$ e $f_4(x) = 1/x > M$, pertanto $f_4\big(]-\delta,\delta[\setminus \{0\}\big)$ è superiormente illimitato. In modo analogo si dimostra che tale insieme è inferiormente illimitato. Pertanto, per il teorema 3.3.12, f_4 non ha limite per $x \to 0$.

Dimostriamo che $f_5(x) \to 0$, per $x \to +\infty$. Sia $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Poiché, $\forall x \in [0,+\infty[$, si ha $\sqrt{x+1} > \sqrt{x}$, risulta $\big|f_5(x)\big| < \varepsilon$ se e solo se $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \varepsilon$. Ciò equivale a

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} &< \sqrt{x} + \varepsilon,\\ x+1 &< x + 2\varepsilon\sqrt{x} + \varepsilon^2,\\ 1 - \varepsilon^2 &< 2\varepsilon\sqrt{x}. \end{aligned}$$

Se $\varepsilon > 1$ la disequazione è verificata per $x \in [0, +\infty[$, mentre se $\varepsilon \leq 1$ è verificata per $x \in \left](1-\varepsilon^2)^2/(4\varepsilon^2), +\infty\right[$. Pertanto $f_5(x) \to 0$, per $x \to +\infty$.

Proviamo che $f_6(x) \to 1/2$, per $x \to 1$.

Fissato $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, studiamo la disequazione $\left|f_6(x) - (1/2)\right| < \varepsilon$. Tale disequazione equivale al sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x-\sqrt{x}}{x-1} - \dfrac{1}{2} < \varepsilon, \\ \dfrac{x-\sqrt{x}}{x-1} - \dfrac{1}{2} > -\varepsilon, \end{cases}$$

e quindi equivale a

$$\begin{cases} \dfrac{2\left(x-\sqrt{x}\right)-(x-1)-2\varepsilon(x-1)}{2(x-1)} < 0, \\ \dfrac{2\left(x-\sqrt{x}\right)-(x-1)+2\varepsilon(x-1)}{2(x-1)} > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{(1-2\varepsilon)x-2\sqrt{x}+1+2\varepsilon}{2(x-1)} < 0, \\ \dfrac{(1+2\varepsilon)x-2\sqrt{x}+1-2\varepsilon}{2(x-1)} > 0. \end{cases}$$

Studiamo il segno del numeratore di ciascuna delle due frazioni. Ponendo $y = \sqrt{x}$, dobbiamo studiare il segno dei seguenti trinomi di secondo grado:

$$(1-2\varepsilon)y^2 - 2y + 1 + 2\varepsilon, \qquad (1+2\varepsilon)y^2 - 2y + 1 - 2\varepsilon.$$

Per studiare il segno del primo occorre distinguere a seconda che il coefficiente $1-2\varepsilon$ sia positivo, nullo o negativo; tale coefficiente è positivo per $\varepsilon < 1/2$, quindi è sufficiente studiare questo caso. Il primo trinomio si annulla per

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1^2-(1-2\varepsilon)(1+2\varepsilon)}}{1-2\varepsilon} = \frac{1 \pm \sqrt{4\varepsilon^2}}{1-2\varepsilon} = \frac{1 \pm 2\varepsilon}{1-2\varepsilon} = \begin{cases} \dfrac{1+2\varepsilon}{1-2\varepsilon}, \\ 1. \end{cases}$$

Il secondo trinomio si annulla per

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1^2-(1+2\varepsilon)(1-2\varepsilon)}}{1+2\varepsilon} = \frac{1 \pm \sqrt{4\varepsilon^2}}{1+2\varepsilon} = \frac{1 \pm 2\varepsilon}{1+2\varepsilon} = \begin{cases} 1, \\ \dfrac{1-2\varepsilon}{1+2\varepsilon}. \end{cases}$$

Pertanto

$$(1-2\varepsilon)y^2 - 2y + 1 + 2\varepsilon = (1-2\varepsilon)(y-1)\left(y - \frac{1+2\varepsilon}{1-2\varepsilon}\right),$$

$$(1+2\varepsilon)y^2 - 2y + 1 - 2\varepsilon = (1+2\varepsilon)(y-1)\left(y - \frac{1-2\varepsilon}{1+2\varepsilon}\right).$$

Pertanto il sistema equivale a

$$\begin{cases} \dfrac{1-2\varepsilon}{2}\,\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}\left(\sqrt{x}-\dfrac{1+2\varepsilon}{1-2\varepsilon}\right)<0,\\[2ex] \dfrac{1+2\varepsilon}{2}\,\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}\left(\sqrt{x}-\dfrac{1-2\varepsilon}{1+2\varepsilon}\right)>0. \end{cases}$$

Poiché, $\forall x \in [0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$, si ha $\left(\sqrt{x}-1\right)/(x-1)>0$, il sistema equivale a

$$\begin{cases} \sqrt{x}<\dfrac{1+2\varepsilon}{1-2\varepsilon},\\[2ex] \sqrt{x}>\dfrac{1-2\varepsilon}{1+2\varepsilon}. \end{cases}$$

che è verificato per

$$\frac{(1-2\varepsilon)^2}{(1+2\varepsilon)^2}<x<\frac{(1+2\varepsilon)^2}{(1-2\varepsilon)^2}.$$

Pertanto, posto

$$\delta=\min\left\{1-\frac{(1-2\varepsilon)^2}{(1+2\varepsilon)^2},\frac{(1+2\varepsilon)^2}{(1-2\varepsilon)^2}-1\right\},$$

se $x\in\mathscr{D}(f_6)$ è tale che $x\in\,]1-\delta,1+\delta[$, allora $\left|f_6(x)-(1/2)\right|<\varepsilon$.

Quindi $\lim_{x\to 1} f_6(x)=1/2$.

Proviamo che $\lim_{x\to+\infty} f_6(x)=1$.

Fissato $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$, studiamo la disequazione $\left|f_6(x)-1\right|<\varepsilon$. Poiché studiamo il limite per $x\to+\infty$, per semplificare la risoluzione possiamo considerare $x>1$, per cui risulta $x-\sqrt{x}<x-1$, perciò $f_6(x)<1$. Quindi la disequazione equivale a

$$1-\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}<\varepsilon,$$

$$\frac{(\varepsilon-1)(x-1)+\left(x-\sqrt{x}\right)}{x-1}>0,$$

$$\varepsilon x-\sqrt{x}+1-\varepsilon>0.$$

Posto $y=\sqrt{x}$, la disequazione diventa $\varepsilon y^2-y+1-\varepsilon>0$. Il trinomio di secondo grado $\varepsilon y^2-y+1-\varepsilon$ ha coefficiente di y^2 positivo, quindi esiste K (che possiamo scegliere positivo) tale che per $y>K$ il trinomio è positivo; pertanto se $x>K^2$, allora si ha $\varepsilon x-\sqrt{x}+1-\varepsilon>0$.

Questo prova che $f_6(x)\to 1$, per $x\to+\infty$. ◀

Risulta chiaro dalle premesse fatte che il concetto di limite di funzione è strettamente collegato a quello di limite di successione. Precisiamo questo legame.

Anzitutto una successione di numeri reali è una funzione da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$, quindi essa è anche una funzione reale di variabile reale; poiché $PL(\mathbb{N})=\{+\infty\}$ per una tale funzione è definito il limite solo quando l'argomento tende a $+\infty$. Si verifica facilmente che in tale caso il concetto di limite di funzione coincide con il concetto di limite di successione.

Inoltre i limiti di funzioni sono legati ai limiti di successioni dal teorema seguente, che in molti casi consente di dedurre facilmente un teorema per i limiti di funzioni da un analogo teorema relativo ai limiti di successioni.

3.3.2 Teorema (di relazione tra limite di funzione e limite di successione)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, $c \in PL(A)$ e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

I) $\lim_{x \to c} f(x) = \ell$;

II) per ogni $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, successione in $A \setminus \{c\}$ che tende a c, si ha $\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = \ell$.

Dimostrazione. I $\implies$ II) Consideriamo una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $A \setminus \{c\}$ che tende a c.

Per la definizione di limite si ha:

$$\forall U \in \mathscr{I}_\ell, \exists V_U \in \mathscr{I}_c : \forall x \in A \setminus \{c\}, \quad x \in V_U \implies f(x) \in U,$$

mentre per la definizione di $a_n \to c$ si ha

$$\forall W \in \mathscr{I}_c, \exists n_W \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_W \implies a_n \in W.$$

Fissato $U \in \mathscr{I}_\ell$, poniamo $W = V_U$. Se $n \in \mathbb{N}$ è tale che $n > n_{V_U}$, allora risulta $a_n \in V_U \cap A \setminus \{c\}$, quindi $f(a_n) \in U$. Perciò

$$n > n_{V_U} \implies f(a_n) \in U,$$

quindi è verificata la definizione di $f(a_n) \to \ell$.

II $\implies$ I) Dimostriamo che, se l'affermazione I è falsa, allora è falsa anche la II; cioè proviamo che, se non si ha $\lim_{x \to c} f(x) = \ell$, allora esiste una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $A \setminus \{c\}$ tale che $a_n \to c$, ma non si ha $f(a_n) \to \ell$.

Se non si ha $\lim_{x \to c} f(x) = \ell$, allora

$$\exists \overline{U} \in \mathscr{I}_\ell : \forall V \in \mathscr{I}_c, \exists x \in A \setminus \{c\} : \quad x \in V \wedge f(x) \notin \overline{U}.$$

Se $c \in \mathbb{R}$, allora, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $]c - 1/(n+1), c + 1/(n+1)[\in \mathscr{I}_c$, pertanto esiste un elemento di $A \cap]c - 1/(n+1), c + 1/(n+1)[\setminus \{c\}$, che indichiamo con a_n, tale che $f(a_n) \notin \overline{U}$. La successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ così costruita ha termini in $A \setminus \{c\}$; inoltre, $\forall n \in \mathbb{N}$, risulta

$$c - \frac{1}{n+1} < a_n < c + \frac{1}{n+1},$$

quindi, per il teorema dei due carabinieri 2.2.11 si ha $a_n \to c$. D'altra parte, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $f(a_n) \notin \overline{U}$, quindi la successione $\big(f(a_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ non può avere limite ℓ. Perciò l'affermazione II non è verificata.

Se invece $c = +\infty$ si procede in modo analogo considerando gli intorni di $+\infty$ del tipo $]n, +\infty[$.

Infine se $c = -\infty$ si procede in modo analogo considerando gli intorni di $-\infty$ del tipo $]-\infty, -n[$. ■

3.3.3 Esempio. Consideriamo la funzione

$$f_7 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_7(x) = x\,.$$

Sia $c \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora $c \in PL(\mathbb{R})$ e, qualunque sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione in $\mathbb{R}\setminus\{c\}$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} f_7(a_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n = c\,.$$

Pertanto, per il teorema di relazione tra limite di funzione e limite di successione 3.3.2, $\forall c \in \overline{\mathbb{R}}$, si ha $\lim_{x\to c} x = c$. ◀

3.3.4 Esempio. Consideriamo un polinomio p di grado $k \in \mathbb{N}^*$. Sia cioè

$$p(x) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j x^j\,,$$

con $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{R}$ e $\alpha_k \in \mathbb{R}^*$.

Sia $c \in \mathbb{R}$. Dai teoremi sul limite della somma 2.2.26 e sul limite del prodotto 2.2.28 segue che, qualunque sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, successione in $\mathbb{R}\setminus\{c\}$ convergente a c, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} p(a_n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{k} \alpha_j a_n^j = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \Big(\lim_{n\to+\infty} a_n\Big)^j = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j c^j = p(c)\,.$$

Pertanto, per il teorema di relazione tra limite di funzione e limite di successione 3.3.2, si ha

$$\lim_{x\to c} p(x) = p(c)\,.$$

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$ divergente a $+\infty$. Si ha, per $n \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \neq 0$,

$$p(a_n) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j a_n^j = \alpha_k a_n^k \sum_{j=0}^{k} \frac{\alpha_j}{\alpha_k} a_n^{j-k} = \alpha_k a_n^k \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{\alpha_j}{\alpha_k} a_n^{j-k} + 1 \right).$$

Per $j = 0, 1, \ldots, k-1$ si ha $k - j > 0$, quindi $a_n^{j-k} = 1/a_n^{k-j} \to 0$, pertanto

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{\alpha_j}{\alpha_k} n^{j-k} + 1 \to 1\,.$$

Poiché $\alpha_k a_n^k \to \operatorname{sgn}(\alpha_k)\infty$, risulta $p(a_n) \to \operatorname{sgn}(\alpha_k)\infty$. Pertanto, per il teorema di relazione tra limite di funzione e limite di successione 3.3.2, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} p(x) = \operatorname{sgn}(\alpha_k)\infty\,.$$

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$ divergente a $-\infty$. Come nel caso in cui $a_n \to +\infty$, $p(a_n)$ può essere scritto come prodotto di $\alpha_k a_n^k$ per il termine n-simo di una successione che converge a 1. Quindi $\lim_{n\to+\infty} p(a_n) = \lim_{n\to+\infty} \alpha_k a_n^k$. Se k è pari, allora $a_n^k \to +\infty$, mentre se k è dispari, allora $a_n^k \to -\infty$; perciò, se k è pari si ha $\alpha_k a_n^k \to \operatorname{sgn}(\alpha_k)\infty$, se k è dispari si ha $\alpha_k a_n^k \to \operatorname{sgn}(-\alpha_k)\infty$. Pertanto, per il teorema di relazione tra limite di funzione e limite di successione 3.3.2, si ha

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\alpha_k)\infty\,, & \text{se } k \text{ è pari}\,, \\ \operatorname{sgn}(-\alpha_k)\infty\,, & \text{se } k \text{ è dispari}\,. \end{cases}$$ ◀

3.3.5 Osservazione. Per il teorema di relazione tra limite di funzione e limite di successione 3.3.2, se esiste $\lim_{x\to c} f(x)$, allora, date due successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $A\setminus\{c\}$ convergenti a c, le successioni $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\big(f(b_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ sono regolari e hanno lo stesso limite. Pertanto se due successioni di tale tipo hanno limite diverso, allora non esiste $\lim_{x\to c} f(x)$. ◀

3.3.6 Esempio. L'osservazione 3.3.5 può essere utilizzata per dare una dimostrazione diversa da quella dell'esempio 3.3.1 del fatto che non esiste $\lim_{x\to 0}(1/x)$. Infatti le successioni $\big(1/(n+1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\big(-1/(n+1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ convergono a 0, ma

$$\frac{1}{1/(n+1)} = n+1 \to +\infty, \qquad \frac{1}{-1/(n+1)} = -n-1 \to -\infty.$$ ◀

3.3.2 Teoremi fondamentali sui limiti

Riprendiamo ora i teoremi fondamentali sui limiti di successioni, studiati nella sezione 2.2, e studiamo i teoremi corrispondenti relativi ai limiti di funzioni. In molti casi il teorema di relazione tra limite di funzione e limite di successione 3.3.2 consente di dimostrare facilmente questi teoremi.

Per utilizzare la notazione $\lim_{x\to c} f(x)$ senza ambiguità è necessario assicurarsi che una funzione non possa avere due limiti distinti per x che tende a uno stesso punto. Ciò è garantito dal teorema seguente.

3.3.7 Teorema (di unicità del limite)

Siano $A\subseteq\mathbb{R}$, $f\colon A\to\mathbb{R}$, $c\in PL(A)$ e $\ell, m\in\overline{\mathbb{R}}$. Se ℓ e m sono entrambi limite di $f(x)$, per $x\to c$, allora $\ell = m$.

Dimostrazione. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $A\setminus\{c\}$ che ha limite c (tale successione esiste per il teorema 3.1.21). Allora, per il teorema di relazione tra limite di funzione e limite di successione 3.3.2, la successione $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ha come limite sia ℓ che m, quindi, per il teorema di unicità del limite 2.2.22, si ha $\ell = m$. ■

È evidente dalla definizione che il limite di una funzione dipende solo dai valori che essa assume in punti del dominio vicini a c (e diversi da c stesso). In altre parole: se si modifica una funzione al di fuori di un intorno di c il limite per $x\to c$, se esiste, non cambia. Ciò si traduce nel teorema seguente.

3.3.8 Teorema

Siano $A,B\subseteq\mathbb{R}$, $f\colon A\to\mathbb{R}$, $g\colon B\to\mathbb{R}$ e $c\in PL(A)\cap PL(B)$. Supponiamo che esista $W\in\mathscr{I}_c$ tale che

a) $A\cap W\setminus\{c\} = B\cap W\setminus\{c\}$,

b) $\forall x\in A\cap W\setminus\{c\}$, si ha $f(x) = g(x)$.

Se $f(x)$ è regolare per $x\to c$, allora anche $g(x)$ è regolare per $x\to c$ e risulta $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x)$.

Dimostrazione. Poniamo $\ell = \lim_{x\to c} f(x)$. Per la definizione di limite risulta

$$\forall U \in \mathcal{I}_\ell,\, \exists V_U \in \mathcal{I}_c \colon\ \forall x \in A\setminus\{c\},\quad x \in V_U \implies f(x)\in U\,.$$

Fissato $U \in \mathcal{I}_\ell$, si ha $A\cap V_U \cap W\setminus\{c\} = B\cap V_U\cap W\setminus\{c\}$, quindi

$$x \in B\cap V_U\cap W\setminus\{c\} \implies x\in A\cap V_U\setminus\{c\} \implies f(x)\in U\,;$$

inoltre

$$x \in B\cap V_U\cap W\setminus\{c\} \implies x\in B\cap W\setminus\{c\} \implies f(x)= g(x),$$

perciò

$$x \in B\cap V_U\cap W\setminus\{c\} \implies g(x)\in U\,;$$

poiché $V_U\cap W$ è un intorno di c, è verificata la definizione di $\lim_{x\to c} g(x)=\ell$. ■

Questo teorema assicura che i teoremi che seguono sono applicabili anche se le ipotesi sono verificate solo in un intorno del punto a cui tende la variabile, escluso il punto stesso, e non in tutto il dominio.

3.3.9 Teorema (del confronto)

Siano $A\subseteq\mathbb{R}$, $f,g\colon A\to\mathbb{R}$, $c\in PL(A)$. Supponiamo che $f(x)$ e $g(x)$ siano regolari per $x\to c$. Se $\forall x\in A\setminus\{c\}$, si ha $f(x)\le g(x)$, allora $\lim_{x\to c} f(x)\le \lim_{x\to c} g(x)$.

Dimostrazione. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $A\setminus\{c\}$ che tende a c; si ha, $\forall n\in\mathbb{N}$, $f(a_n)\le g(a_n)$. Per il teorema di relazione tra limite di funzione e limite di successione 3.3.2 risulta $\lim_{n\to+\infty} f(a_n)=\lim_{x\to c} f(x)$ e $\lim_{n\to+\infty} g(a_n)=\lim_{x\to c} g(x)$. Per il teorema del confronto per limiti di successioni 2.2.19 si ha $\lim_{n\to+\infty} f(a_n)\le\lim_{n\to+\infty} g(a_n)$, quindi $\lim_{x\to c} f(x)\le\lim_{x\to c} g(x)$. ■

3.3.10 Teorema (della permanenza del segno)

Siano $A\subseteq\mathbb{R}$, $f\colon A\to\mathbb{R}$, $c\in PL(A)$ e $m\in\overline{\mathbb{R}}$. Supponiamo che $f(x)$ sia regolare per $x\to c$.

I) Se $\lim_{x\to c} f(x) > m$, allora esiste $W\in\mathcal{I}_c$ tale che, $\forall x\in A\cap W\setminus\{c\}$, si ha $f(x)>m$.

II) Se $\lim_{x\to c} f(x) < m$, allora esiste $W\in\mathcal{I}_c$ tale che, $\forall x\in A\cap W\setminus\{c\}$, si ha $f(x)<m$.

Dimostrazione. I) Poniamo $\ell=\lim_{x\to c} f(x)$. Per la definizione di limite si ha

$$\forall U \in \mathcal{I}_\ell,\, \exists V_U \in \mathcal{I}_c \colon\ \forall x \in A\setminus\{c\},\quad x \in V_U \implies f(x)\in U\,.$$

Se $m=-\infty$ la tesi è verificata; non può essere $m=+\infty$, perché $m<\ell$.

Consideriamo il caso $m\in\mathbb{R}$. Poiché $\ell>m$, si ha $\ell\ne-\infty$. Poniamo $U=\left]m,+\infty\right[$ se $\ell=+\infty$, mentre poniamo $U=\left]\ell-(\ell-m),\ell+(\ell-m)\right[$ se $\ell\in\mathbb{R}$. In ciascuno dei due casi ogni elemento di U è maggiore di m, quindi $x\in A\cap V_U\setminus\{c\}\implies f(x)>m$.

II) La dimostrazione è analoga a quella dell'affermazione I. ■

3.3.11 Teorema (dei due carabinieri)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$, $h : A \to \mathbb{R}$ e $c \in PL(A)$. Supponiamo che, $\forall x \in A \setminus \{c\}$, sia $f(x) \le g(x) \le h(x)$.

I) Se $f(x)$ e $h(x)$ sono convergenti per $x \to c$ e

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x),$$

allora $g(x)$ è convergente per $x \to c$ e

$$\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x).$$

II) Se $f(x) \to +\infty$, per $x \to c$, allora $g(x) \to +\infty$, per $x \to c$.

III) Se $h(x) \to -\infty$, per $x \to c$, allora $g(x) \to -\infty$, per $x \to c$.

Dimostrazione. I) Poniamo $\ell = \lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x)$. Per il teorema di relazione tra limite di funzione e limite di successione 3.3.2, qualunque sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, successione in $A \setminus \{c\}$ convergente a c, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} h(a_n) = \ell;$$

poiché, $\forall n \in \mathbb{N}$, sia $f(a_n) \le g(a_n) \le h(a_n)$, per il teorema dei due carabinieri 2.2.11 risulta $\lim_{n\to+\infty} g(a_n) = \ell$. Pertanto, utilizzando nuovamente il teorema di relazione 3.3.2, si può concludere che $\lim_{x\to c} g(x) = \ell$.

II, III) La dimostrazione è analoga a quella dell'affermazione I. ■

A differenza dei teoremi visti finora, per cui la versione relativa alle funzioni si ottiene con ovvie modifiche dal corrispondente teorema per le successioni, il teorema sulla limitatezza delle successioni regolari 3.3.12 nell'ambito delle funzioni ha un corrispondente sostanzialmente diverso.

Ciò si comprende facilmente esaminando la dimostrazione della limitatezza delle successioni convergenti. Anzitutto dalla convergenza di una successione si deduce che l'insieme dei termini che hanno indice oltre una certa soglia è limitato; successivamente si osserva che i termini con indice inferiore alla soglia sono in numero finito, quindi costituiscono un insieme limitato. Perciò l'insieme dei termini è unione di due insiemi limitati, quindi è limitato. Analogamente, nel caso delle funzioni, se $f(x)$ converge per $x \to c$, allora esiste un intorno di c in cui f è limitata; non c'è però alcun motivo per cui, in generale, f sia limitata fuori da tale intorno.

Abbiamo quindi il seguente teorema.

3.3.12 Teorema (sulla limitatezza delle funzioni regolari)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $c \in PL(A)$.

I) Se $f(x)$ è convergente per $x \to c$, allora esiste $W \in \mathscr{I}_c$ tale che $f(A \cap W)$ è limitato.

II) Se $f(x) \to +\infty$, per $x \to c$, allora, $\forall V \in \mathscr{I}_c$, $f(A \cap V)$ è superiormente illimitato ed esiste $W \in \mathscr{I}_c$ tale che $f(A \cap W)$ è inferiormente limitato.

III) Se $f(x) \to -\infty$, per $x \to c$, allora, $\forall V \in \mathscr{I}_c$, $f(A \cap V)$ è inferiormente illimitato ed esiste $W \in \mathscr{I}_c$ tale che $f(A \cap W)$ è superiormente limitato.

Dimostrazione. I) Scelto un arbitrario intorno di $\lim_{x \to c} f(x)$, questo è limitato; poiché, per la definizione di limite, esiste $V \in \mathscr{I}_c$ tale che $f\big(A \cap V \setminus \{c\}\big)$ è incluso in tale intorno, risulta $f\big(A \cap V \setminus \{c\}\big)$ limitato. Se $c \notin A$ tale insieme coincide con $f(A \cap V_U)$, che quindi è limitato; in caso contrario $f(A \cap V_U) = \big\{f(c)\big\} \cup f\big(A \cap V \setminus \{c\}\big)$, che è limitato, perché unione di due insiemi limitati.

II) Sia $V \in \mathscr{I}_c$. Poiché $c \in PL(A)$, per il teorema 3.1.21 esiste $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ successione in $A \setminus \{c\}$ che ha limite c. Esiste $\overline{n}$ tale che per $n \geq \overline{n}$ si ha $a_n \in V$, quindi la successione $(a_{\overline{n}+n})_{n \in \mathbb{N}}$, è una successione in $A \cap V \setminus \{c\}$ convergente a c. Per il teorema di relazione tra limite di funzione e limite di successione 3.3.2, si ha $\lim_{n \to +\infty} f(a_{\overline{n}+n}) = +\infty$, pertanto, per il teorema sulla limitatezza delle successioni regolari 2.2.21, affermazione II, $\big\{f(a_{\overline{n}+n}) \,\big|\, n \in \mathbb{N}\big\}$ è superiormente illimitato. Perciò anche $f(A \cap V)$, che contiene tale insieme, è superiormente illimitato.

Poiché ogni intorno di $+\infty$ è inferiormente limitato, come nella dimostrazione dell'affermazione I si prova che esiste $W \in \mathscr{I}_c$ tale che $f(A \cap W)$ è inferiormente limitato.

III) La dimostrazione è analoga a quella dell'affermazione II. ■

Studiamo il limite della restrizione di una funzione. Si tratta di un teorema che non ha corrispondente nell'ambito delle successioni.

3.3.13 Teorema (sul limite della restrizione)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq A$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $c \in PL(B)$. Se esiste $\lim_{x \to c} f(x)$, allora esiste $\lim_{x \to c} f\big|_B(x)$ e si ha

$$\lim_{x \to c} f\big|_B(x) = \lim_{x \to c} f(x).$$

Dimostrazione. Poniamo $\ell = \lim_{x \to c} f(x)$. Per la definizione di limite si ha

$$\forall U \in \mathscr{I}_\ell,\ \exists V_U \in \mathscr{I}_c : \forall x \in A \setminus \{c\}, \quad x \in V_U \implies f(x) \in U.$$

Poiché $B \subseteq A$ e, $\forall x \in B$, si ha $f\big|_B(x) = f(x)$, qualunque sia $U \in \mathscr{I}_\ell$, se $x \in B \cap V_U \setminus \{c\}$, allora si ha $f\big|_B(x) \in U$; perciò $\lim_{x \to c} f\big|_B(x) = \ell$. ■

Studiamo il limite della composizione di due funzioni f e g, supponendo che esista tale composizione, cioè sia $Im(f) \subseteq \mathscr{D}(g)$. Per determinare il limite di $g \circ f$ in un punto c occorre conoscere $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$ per x vicino a c. Ciò significa anzitutto conoscere $f(x)$ per x vicino a c; per questo supponiamo che esista $\lim_{x \to c} f(x) = \ell$. Sotto questa condizione, se x è vicino a c, l'argomento di g nella funzione composta è $f(x)$ che è vicino a ℓ. Quindi per determinare $\lim_{x \to c} (g \circ f)(x)$, interessa $\lim_{y \to \ell} g(y)$ e non, come si potrebbe erroneamente pensare, il limite di g in c.

3.3.14 Teorema (sul limite della composizione)

Siano $A,B \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$, $c \in PL(A)$, $\ell \in PL(B)$ e $m \in \overline{\mathbb{R}}$. Supponiamo che sia $f(A) \subseteq B$, che esistano $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$ e $\lim_{y\to \ell} g(y) = m$ e che sia verificata una delle seguenti condizioni:

a) $\forall x \in A \setminus \{c\}$, si ha $f(x) \neq \ell$,

b) $\ell \in B$ e $g(\ell) = m$.

Allora esiste $\lim_{x\to c}(g \circ f)(x)$ e tale limite è uguale a m.

Dimostrazione. Per la definizione di limite si ha:

$$\begin{aligned}
&\forall U \in \mathscr{I}_m, \exists V_U \in \mathscr{I}_\ell : \forall y \in B \setminus \{\ell\}, \quad y \in V_U \implies g(y) \in U,\\
&\forall W \in \mathscr{I}_\ell, \exists Z_W \in \mathscr{I}_c : \forall x \in A \setminus \{c\}, \quad x \in Z_W \implies f(x) \in W.
\end{aligned}$$

Scelto $U \in \mathscr{I}_m$, per $x \in A \cap Z_{V_U} \setminus \{c\}$ si ha $f(x) \in V_U$; poiché l'immagine di f è inclusa in B, è anche $f(x) \in B \cap V_U$.

Per poter proseguire nella dimostrazione bisogna utilizzare una delle condizioni a) e b).

Se vale a), allora si ha sempre $f(x) \neq \ell$, quindi

$$\begin{aligned}
x \in A \cap Z_{V_U} \setminus \{c\} &\implies f(x) \in B \cap V_U \setminus \{\ell\}\\
&\implies g\big(f(x)\big) \in U;
\end{aligned}$$

perciò risulta $\lim_{x\to c} g\big(f(x)\big) = m$.

Se invece vale b), allora si ha

$$\begin{aligned}
y \in B \cap V_U &\implies \big(y \in B \cap V_U \setminus \{\ell\} \vee y = \ell\big)\\
&\implies \big(g(y) \in U \vee g(y) = m\big)\\
&\implies g(y) \in U \cup \{m\} = U,
\end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned}
x \in A \cap Z_{V_U} \setminus \{c\} &\implies f(x) \in B \cap V_U\\
&\implies g\big(f(x)\big) \in U.
\end{aligned}$$

Anche in questo caso risulta $\lim_{x\to c} g\big(f(x)\big) = m$. ■

Notiamo che, se $\ell = \pm\infty$, allora è verificata l'ipotesi a), perché f assume valori reali.

3.3.15 Osservazione. Il teorema sul limite della composizione, oltre alla naturale richiesta dell'esistenza dei limiti delle funzioni che si compongono, ha una ipotesi aggiuntiva. Come risulta evidente dalla dimostrazione, ciò è necessario perché, se ℓ appartiene al dominio di g, per studiare il limite della funzione composta sono necessarie informazioni su $g(\ell)$, che non seguono dalla conoscenza di $\lim_{y\to\ell} g(y)$.

Vediamo, con un esempio, che se non è verificata nessuna delle due ipotesi aggiuntive, allora può non essere verificata la tesi del teorema.

Siano

$$f_9 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_9(x) = -1,$$

$$g_9 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g_9(y) = \begin{cases} 2y, & \text{se } y \neq -1, \\ -3, & \text{se } y = -1. \end{cases}$$

Risulta $\lim_{x\to 0} f_9(x) = -1$ e $\lim_{y\to -1} g_9(y) = -2$, ma

$$\lim_{x\to 0}(g_9 \circ f_9)(x) = \lim_{x\to 0} g_9\big(f(x)\big) = \lim_{x\to 0} g_9(-1) = \lim_{x\to 0}(-3) = -3.$$

Quindi, con le notazioni del teorema, $\lim_{x\to c}(g_9 \circ f_9)(x) \neq m$. ◀

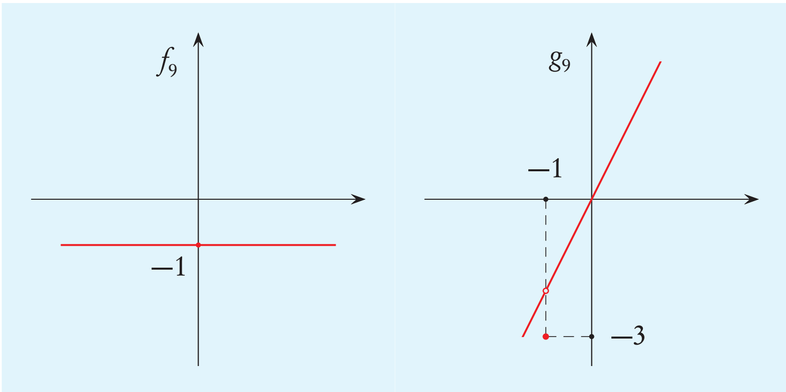


Figura 3.3.3
Le funzioni f_9 e g_9 studiate nell'osservazione 3.3.15.

3.3.16 Esempio. Consideriamo le funzioni:

$$f_6 : [0,1[\,\cup\,]1,+\infty[\, \to \mathbb{R}, \qquad f_6(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{x-1},$$

$$f_8 :]-1,0[\,\cup\,]0,1[\, \to \mathbb{R}, \qquad f_8(x) = x + 1.$$

Nell'esempio 3.3.1 abbiamo provato che $\lim_{x\to 1} f_6(x) = 1/2$. La funzione f_8 è restrizione di una funzione polinomiale, quindi, per $x \to 0$, tende al valore del polinomio in 0 (v. esempio 3.3.4), cioè $\lim_{x\to 0} f_8(x) = 1$. Si ha $f_8\big(]-1,0[\,\cup\,]0,1[\big) \subseteq [0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$, quindi è definita la composizione $f_6 \circ f_8$ e si ha

$$(f_6 \circ f_8)(x) = \frac{x + 1 - \sqrt{x+1}}{x}.$$

Applichiamo il teorema sul limite della composizione 3.3.14 per calcolare il limite per $x \to 0$ di questa funzione. Con le notazioni dell'enunciato del teorema, si ha $c = 0$, $\ell = 1$,

$$\lim_{x\to \ell} f_6(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x-1} = \frac{1}{2},$$

quindi $m = 1/2$. Inoltre è verificata la condizione a), perché se $x \in\,]-1,0[\,\cup\,]0,1[$, allora si ha $x + 1 \neq 1 = \ell$.

Pertanto si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + 1 - \sqrt{x+1}}{x} = \frac{1}{2}.$$ ◀

3.3.3 Limite sinistro e limite destro

Studiamo limiti di particolari restrizioni di una funzione che hanno un notevole interesse.

Definizione di limite sinistro e limite destro di una funzione

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$.

Se $c \in D\big(A \cap \,]-\infty, c[\big)$, diciamo che $f(x)$ ha **limite sinistro** ℓ per x che tende a c (o anche $f(x)$ ha **limite** ℓ per x che tende a c **da sinistra**) e scriviamo $\lim_{x\to c^-} f(x) = \ell$ quando $\lim_{x\to c} f\big|_{A\cap]-\infty,c[}(x) = \ell$.

Se $c \in D\big(A \cap \,]c, +\infty[\big)$, diciamo che $f(x)$ ha **limite destro** ℓ per x che tende a c (o anche $f(x)$ ha **limite** ℓ per x che tende a c **da destra**) e scriviamo $\lim_{x\to c^+} f(x) = \ell$ quando $\lim_{x\to c} f\big|_{A\cap]c,+\infty[}(x) = \ell$.

3.3.17 Esempio. Sia $c \in \mathbb{R}$ e consideriamo la funzione

$$f_{10} : \mathbb{R} \setminus \{c\} \to \mathbb{R}, \qquad f_{10}(x) = \frac{1}{x-c}.$$

Studiamo i limiti sinistro e destro di tale funzione in c.

Qualunque sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, successione in $\big(\mathbb{R}\setminus\{c\}\big)\cap]-\infty,c[\,=\,]-\infty,c[$ convergente a c, si ha $a_n - c \to 0$ e $a_n - c < 0$, per $n \in \mathbb{N}$. Allora, per il teorema 2.2.31, affermazione III, risulta $f_{10}(a_n) = 1/(a_n - c) \to -\infty$. Pertanto $\lim_{x\to c^-} f_{10}(x) = -\infty$.

Qualunque sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, successione in $\big(\mathbb{R}\setminus\{c\}\big)\cap]c,+\infty[\,=\,]c,+\infty[$ convergente a c, si ha $a_n - c \to 0$ e $a_n - c > 0$, per $n \in \mathbb{N}$. Allora, per il teorema 2.2.31, affermazione II, risulta $f_{10}(a_n) = 1/(a_n - c) \to +\infty$. Pertanto $\lim_{x\to c^+} f_{10}(x) = +\infty$. ◀

3.3.18 Osservazione. Dalla definizione segue che $\lim_{x\to c^-} f(x) = \ell$ se e solo se

$$\forall U \in \mathscr{I}_\ell,\, \exists \delta_U \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in A, \quad x \in\,]c-\delta_U, c[\implies f(x) \in U,$$

mentre $\lim_{x\to c^+} f(x) = \ell$ se e solo se

$$\forall U \in \mathscr{I}_\ell,\, \exists \delta_U \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in A, \quad x \in\,]c, c+\delta_U[\implies f(x) \in U.$$ ◀

Il limite sinistro e il limite destro rientrano nella definizione generale di limite per funzioni reali di variabile reale, perciò per essi sono validi tutti i teoremi sui limiti, sia quelli già enunciati che quelli che verranno enunciati in seguito.

Per il teorema sul limite della restrizione 3.3.13 è evidente che se una funzione ha limite per $x \to c$, con $c \in \mathbb{R}$, allora essa ha anche limite sinistro e limite destro per $x \to c$, purché le corrispondenti definizioni abbiano senso; cioè, se $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$ e $c \in D\big(A \cap \,]-\infty, c[\big)$, allora si ha anche $\lim_{x\to c^-} f(x) = \ell$ e analogamente per il limite destro.

Se è possibile definire il limite sinistro di una funzione per $x \to c$, ma non il corrispondente limite destro, cioè se $c \in D\big(A \cap \,]-\infty, c[\big)$, ma $c \notin D\big(A \cap \,]c, +\infty[\big)$, allora $c \in D(A)$ e le definizioni di limite e di limite sinistro sono equivalenti, quindi o esistono entrambi e sono uguali, oppure nessuno dei due esiste. Infatti, se $c \notin D\big(A \cap]c,+\infty[\big)$, allora $\exists \overline{\delta} \in \mathbb{R}^+$ tale che, se $\delta < \overline{\delta}$, allora $\big(A \cap]c,+\infty[\big) \cap]c-\delta, c+\delta[= \varnothing$, cioè $A \cap]c, c+\delta[= \varnothing$; pertanto si ha $A \cap]c-\delta, c+\delta[\setminus \{c\} = A \cap]c-\delta, c[$. Poiché nella definizione di limite si può scegliere $\delta_\varepsilon \le \overline{\delta}$, le due condizioni $x \in A \cap]c-\delta_\varepsilon, c+\delta_\varepsilon[\setminus \{c\}$ e $x \in A \cap]c-\delta_\varepsilon, c[$ coincidono, quindi la definizione di limite coincide con quella di limite sinistro.

Analogamente, se non è definito il limite sinistro, allora la definizione di limite e di limite destro coincidono.

Nel caso che abbiano senso sia il limite destro che il limite sinistro si ha il teorema seguente.

3.3.19 Teorema (di relazione tra limiti unilateri e limite bilatero)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $c \in D\big(A \cap]-\infty, c[\big) \cap D\big(A \cap]c,+\infty[\big)$ e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

I) $\lim_{x \to c} f(x) = \ell$;

II) $\lim_{x \to c^-} f(x) = \ell$ e $\lim_{x \to c^+} f(x) = \ell$.

Dimostrazione. I $\Longrightarrow$ II) È una ovvia conseguenza del teorema sul limite della restrizione 3.3.13, perché limite sinistro e limite destro sono limiti di restrizioni.

II $\Longrightarrow$ I) Supponiamo che sia $\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = \ell$.

Per la definizione di limite sinistro e destro (v. osservazione 3.3.18) si ha

$$\forall U \in \mathscr{I}_\ell,\ \exists \rho_U \in \mathbb{R}^+ \colon \forall x \in A, \quad x \in]c-\rho_U, c[\implies f(x) \in U,$$
$$\forall U \in \mathscr{I}_\ell,\ \exists \sigma_U \in \mathbb{R}^+ \colon \forall x \in A, \quad x \in]c, c+\sigma_U[\implies f(x) \in U.$$

Fissato $U \in \mathscr{I}_c$, poniamo $\delta_U = \min\{\rho_U, \sigma_U\}$. Si ha

$$]c-\delta_U, c+\delta_U[\setminus \{c\} =]c-\delta_U, c[\cup]c, c+\delta_U[\subseteq]c-\rho_U, c[\cup]c, c+\sigma_U[;$$

quindi, se $x \in A \cap]c-\delta_U, c+\delta_U[\setminus \{c\}$, allora $x \in A \cap]c-\rho_U, c[$ oppure $x \in A \cap]c, c+\sigma_U[$, in ciascuno dei due casi $f(x) \in U$. Pertanto $\lim_{x \to c} f(x) = \ell$. ■

3.3.20 Esempio. Sia $c \in \mathbb{R}$ e consideriamo la funzione

$$f_{10} \colon \mathbb{R} \setminus \{c\} \to \mathbb{R}, \qquad f_{10}(x) = \frac{1}{x-c}.$$

Nell'esempio 3.3.17 abbiamo visto che $\lim_{x \to c^-} f_{10}(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to c^+} f_{10}(x) = +\infty$. Poiché $\lim_{x \to c^-} f_{10}(x) \ne \lim_{x \to c^+} f_{10}(x)$, per il teorema di relazione tra limiti unilateri e limite bilatero 3.3.19, non esiste $\lim_{x \to c} f_{10}(x)$. ◀

3.3.4 Operazioni sui limiti

I teoremi che seguono sono del tutto analoghi ai teoremi relativi alle operazioni per i limiti di successioni (teoremi 2.2.26, 2.2.28, 2.2.31 e 2.2.33); essi sono dimostrabili a partire da tali teoremi, utilizzando il teorema di relazione tra limite di funzione e limite di successione 3.3.2.

3.3.21 Teorema (sul limite della somma)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ e $c \in PL(A)$.

I) Se $f(x)$ e $g(x)$ sono convergenti per $x \to c$, allora $f(x)+g(x)$ è convergente per $x \to c$ e
$$\lim_{x\to c}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim_{x\to c} f(x)+\lim_{x\to c} g(x).$$

II) Se $\lim_{x\to c} f(x)=+\infty$ e g è inferiormente limitata, allora
$$\lim_{x\to c}\big(f(x)+g(x)\big)=+\infty.$$

III) Se $\lim_{x\to c} f(x)=+\infty$ e $g(x)$ ha limite diverso da $-\infty$, per $x \to c$, allora
$$\lim_{x\to c}\big(f(x)+g(x)\big)=+\infty.$$

IV) Se $\lim_{x\to c} f(x)=-\infty$ e g è superiormente limitata, allora
$$\lim_{x\to c}\big(f(x)+g(x)\big)=-\infty.$$

V) Se $\lim_{x\to c} f(x)=-\infty$ e $g(x)$ ha limite diverso da $+\infty$, per $x \to c$, allora
$$\lim_{x\to c}\big(f(x)+g(x)\big)=-\infty.$$

Come nel caso delle successioni, questo teorema consente di calcolare il limite della somma di due funzioni quando si conosce il limite di ciascuno dei due addendi, con l'esclusione del caso in cui una delle due funzioni diverge a $+\infty$ e l'altra diverge a $-\infty$. In tal caso diciamo che si ha un limite in **forma indeterminata**.

3.3.22 Teorema (sul limite del prodotto)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ e $c \in PL(A)$.

I) Se $f(x)$ e $g(x)$ sono convergenti per $x \to c$, allora $f(x)g(x)$ è convergente per $x \to c$ e
$$\lim_{x\to c}\big(f(x)g(x)\big)=\lim_{x\to c} f(x)\lim_{x\to c} g(x).$$

II) Se $f(x)$ è divergente per $x \to c$ e $\inf g\big(A\setminus\{c\}\big)>0$, allora
$$\lim_{x\to c}\big(f(x)g(x)\big)=\lim_{x\to c} f(x).$$

III) Se $f(x)$ è divergente per $x \to c$ e $g(x)$ ha limite maggiore di 0, per $x \to c$, allora
$$\lim_{x\to c}\big(f(x)g(x)\big)=\lim_{x\to c} f(x).$$

IV) Se $f(x)$ è divergente per $x \to c$ e $\sup g\big(A\setminus\{c\}\big)<0$, allora
$$\lim_{x\to c}\big(f(x)g(x)\big)=-\lim_{x\to c} f(x).$$

V) Se $f(x)$ è divergente per $x \to c$ e $g(x)$ ha limite minore di 0, per $x \to c$, allora

$$\lim_{x\to c}\big(f(x)g(x)\big) = -\lim_{x\to c} f(x).$$

VI) Se $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ e g è limitata, allora

$$\lim_{x\to c}\big(f(x)g(x)\big) = 0.$$

Come nel caso delle successioni, questo teorema consente di calcolare il limite del prodotto di due funzioni quando si conosce il limite di ciascuno dei due fattori, con l'esclusione del caso in cui una delle funzioni diverge (positivamente o negativamente) e l'altra converge a 0. In tal caso diciamo che si ha un limite in **forma indeterminata**.

3.3.23 Teorema (sul limite del reciproco)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $c \in PL(A)$.

I) Se $f(x)$ è convergente per $x \to c$ e $\lim_{x\to c} f(x) \neq 0$, allora $1/f(x)$ è convergente per $x \to c$ e

$$\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to c} f(x)}.$$

II) Se $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ e, $\forall x \in A\setminus\{c\}$, si ha $f(x) > 0$, allora

$$\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

III) Se $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ e, $\forall x \in A\setminus\{c\}$, si ha $f(x) < 0$, allora

$$\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)} = -\infty.$$

IV) Se $f(x)$ è divergente per $x \to c$, allora

$$\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)} = 0.$$

3.3.24 Esempio. Consideriamo una funzione razionale fratta r. Siano cioè

$$p(x) = \sum_{j=0}^{k}\alpha_j x^j, \qquad q(x) = \sum_{j=0}^{m}\beta_j x^j,$$

con $k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{m-1} \in \mathbb{R}$ e $\alpha_k, \beta_m \in \mathbb{R}^*$ e poniamo $r(x) = p(x)/q(x)$ per gli $x \in \mathbb{R}$ che non annullano il denominatore. Poiché un polinomio ha al più un numero finito di radici, $r(x)$ è definito per gli x reali, escluso al più un numero finito.

Sia $c \in \mathbb{R}$. Poiché p e q sono polinomi, si ha $\lim_{x\to c} p(x) = p(c)$ e $\lim_{x\to c} q(x) = q(c)$ (v. esempio 3.3.4).

Se $q(c) \neq 0$, per i teoremi sul limite del prodotto 3.3.22 e sul limite del reciproco 3.3.23, si ha

$$\lim_{x\to c} r(x) = \lim_{x\to c} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim_{x\to c} p(x)}{\lim_{x\to c} q(x)} = \frac{p(c)}{q(c)} = r(c).$$

Se $q(c) = 0$, allora esistono un polinomio q_1, che non si annulla in c, e $\rho \in \mathbb{N}^*$ tale che $q(x) = q_1(x)(x-c)^\rho$, quindi

$$r(x) = \frac{p(x)}{q_1(x)} \frac{1}{(x-c)^\rho}.$$

Risulta $\lim_{x\to c} p(x)/q_1(x) = p(c)/q_1(c)$. Sappiamo che si ha $\lim_{x\to c^+}\big(1/(x-c)\big) = +\infty$ e $\lim_{x\to c^-}\big(1/(x-c)\big) = -\infty$ (v. esempio 3.3.17); quindi, per il teorema sul limite del prodotto 3.3.22, risulta $\lim_{x\to c^+}\big(1/(x-c)^\rho\big) = +\infty$; se ρ è pari si ha $\lim_{x\to c^-}\big(1/(x-c)^\rho\big) = +\infty$ e se ρ è dispari si ha $\lim_{x\to c^-}\big(1/(x-c)^\rho\big) = -\infty$.

Se $p(c) \neq 0$ si ha quindi

$$\lim_{x\to c^+} r(x) = \operatorname{sgn}\left(\frac{p(c)}{q_1(c)}\right)\infty,$$

$$\lim_{x\to c^-} r(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}\left(\dfrac{p(c)}{q_1(c)}\right)\infty, & \text{se } \rho \text{ è pari},\\[2ex] \operatorname{sgn}\left(-\dfrac{p(c)}{q_1(c)}\right)\infty, & \text{se } \rho \text{ è dispari}. \end{cases}$$

Se $p(c) = 0$, la scomposizione

$$r(x) = \frac{p(x)}{q_1(x)} \frac{1}{(x-c)^\rho}.$$

ci dà un limite per $x \to c$ in forma indeterminata. Per determinare il limite osserviamo che esistono un polinomio p_1, che non si annulla in c, e $\sigma \in \mathbb{N}^*$ tale che $p(x) = p_1(x)(x-c)^\sigma$, quindi risulta $r(x) = \big(p_1(x)/q_1(x)\big)(x-c)^{\sigma-\rho}$. Ripetendo i ragionamenti precedenti si ha

$$\lim_{x\to c} r(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } \sigma > \rho,\\[1ex] \dfrac{p_1(c)}{q_1(c)}, & \text{se } \sigma = \rho,\\[2ex] \operatorname{sgn}\left(\dfrac{p_1(c)}{q_1(c)}\right)\infty, & \text{se } \sigma < \rho \text{ e } \rho-\sigma \text{ è pari}, \end{cases}$$

$$\lim_{x\to c^+} r(x) = \operatorname{sgn}\left(\frac{p_1(c)}{q_1(c)}\right)\infty, \qquad \text{se } \sigma < \rho \text{ e } \rho-\sigma \text{ è dispari},$$

$$\lim_{x\to c^-} r(x) = \operatorname{sgn}\left(-\frac{p_1(c)}{q_1(c)}\right)\infty, \qquad \text{se } \sigma < \rho \text{ e } \rho-\sigma \text{ è dispari}.$$

◀

3.3.25 Teorema (sul limite del valore assoluto)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $c \in PL(A)$.

I) Se $f(x)$ è convergente per $x \to c$, allora $|f(x)|$ è convergente per $x \to c$ e

$$\lim_{x \to c} |f(x)| = \left| \lim_{x \to c} f(x) \right| .$$

II) Se $f(x)$ è divergente per $x \to c$, allora

$$\lim_{x \to c} |f(x)| = +\infty .$$

III) Se $\lim_{x \to c} |f(x)| = 0$, allora

$$\lim_{x \to c} f(x) = 0 .$$

3.3.5 Simboli di Landau

Introduciamo i simboli di Landau per le funzioni, riprendendo quanto fatto nella sottosezione 2.2.6 per le successioni. Elenchiamo definizioni e teoremi analoghi a quelli visti per le successioni in tale sottosezione. Le dimostrazioni sono del tutto analoghe.

I simboli di Landau sono strettamente collegati ai limiti. Per un limite di funzione è necessario precisare a quale punto tende la variabile da cui dipende la funzione. Tale precisazione è indispensabile anche quando si utilizzano i simboli di Landau per le funzioni.

Definizione di funzione asintotica

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ e $c \in PL(A)$; supponiamo che, $\forall x \in A \setminus \{c\}$, sia $g(x) \neq 0$. Diciamo che f è **asintotica** (o **equivalente**) a g, per $x \to c$, quando esiste $\lim_{x \to c} f(x)/g(x) = 1$. In tal caso scriviamo $f(x) \sim g(x)$, per $x \to c$.

3.3.26 Teorema

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ e $c \in PL(A)$; supponiamo che, $\forall x \in A \setminus \{c\}$, sia $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ e $h(x) \neq 0$ Allora, per $x \to c$:

I) $f(x) \sim f(x)$;

II) $f(x) \sim g(x) \implies g(x) \sim f(x)$;

III) $\big(f(x) \sim g(x) \wedge g(x) \sim h(x)\big) \implies f(x) \sim h(x)$.

3.3.27 Teorema

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ e $c \in PL(A)$; supponiamo che, $\forall x \in A \setminus \{c\}$, sia $g(x) \neq 0$ e che sia $f(x) \sim g(x)$, per $x \to c$. Per $x \to c$ la funzione $f(x)$ è regolare se e solo se $g(x)$ è regolare e in tal caso si ha

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) .$$

3.3.28 Teorema

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g, h, k : A \to \mathbb{R}$ e $c \in PL(A)$; supponiamo che, $\forall x \in A \setminus \{c\}$, sia $h(x) \neq 0$ e $k(x) \neq 0$.

I) Se, per $x \to c$, $f(x) \sim h(x)$ e $g(x) \sim k(x)$, allora $f(x)g(x) \sim h(x)k(x)$.

II) Se, per $x \to c$, $h(x) \sim k(x)$, allora $1/h(x) \sim 1/k(x)$.

3.3.29 Esempio. Consideriamo un polinomio p di grado $k \in \mathbb{N}^*$. Sia cioè

$$p(x) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j x^j,$$

con $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{R}$ e $\alpha_k \in \mathbb{R}^*$.

Si ha, $\forall x \in \mathbb{R}^*$,

$$p(x) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j x^j = \alpha_k x^k \sum_{j=0}^{k} \frac{\alpha_j}{\alpha_k} x^{j-k} = \alpha_k x^k \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{\alpha_j}{\alpha_k} x^{j-k} + 1 \right).$$

Per $j = 0, 1, \ldots, k-1$ si ha $j - k < 0$, quindi $x^{j-k} = (1/x)^{k-j} \to 0$, per $x \to \pm\infty$ (v. esempio 3.3.1), pertanto

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{\alpha_j}{\alpha_k} x^{j-k} + 1 \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 1.$$

Quindi si ha $p(x) \sim \alpha_k x^k$. ◀

3.3.30 Esempio. Consideriamo una funzione razionale fratta r. Siano cioè

$$p(x) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j x^j, \qquad q(x) = \sum_{j=0}^{m} \beta_j x^j,$$

con $k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{m-1} \in \mathbb{R}$ e $\alpha_k, \beta_m \in \mathbb{R}^*$ e poniamo $r(x) = p(x)/q(x)$ per gli $x \in \mathbb{R}$ che non annullano il denominatore. Poiché un polinomio ha al più un numero finito di radici, $r(x)$ è definito per gli x reali, escluso al più un numero finito, quindi è definito in un insieme illimitato sia superiormente che inferiormente.

Come visto nell'esempio 3.3.29, si ha, per $x \to \pm\infty$, $p(x) \sim \alpha_k x^k$ e $q(x) \sim \beta_m x^m$. Pertanto, per il teorema 3.3.28, si ha

$$r(x) = p(x) \frac{1}{q(x)} \sim \alpha_k x^k \frac{1}{\beta_m x^m} = \frac{\alpha_k}{\beta_m} x^{k-m}.$$ ◀

Definizione di funzione trascurabile

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ e $c \in PL(A)$; supponiamo che, $\forall x \in A \setminus \{c\}$, sia $g(x) \neq 0$. Diciamo che f è **trascurabile** rispetto a g, per $x \to c$, quando esiste $\lim_{x \to c} f(x)/g(x) = 0$. In tal caso scriviamo $f(x) = o\big(g(x)\big)$, per $x \to c$.

3.3.31 Teorema

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f,g\colon A \to \mathbb{R}$ e $c \in PL(A)$; supponiamo che, $\forall x \in A \setminus \{c\}$, sia $g(x) \neq 0$. Per $x \to c$ risulta $f(x) \sim g(x)$ se e solo se $f(x) = g(x) + o\big(g(x)\big)$.

3.3.32 Teorema (regole di calcolo per o piccolo)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f,g,h,k\colon A \to \mathbb{R}$, $c \in PL(A)$ e $m \in \mathbb{R}^*$; supponiamo che, $\forall x \in A \setminus \{c\}$, sia $h(x) \neq 0$ e $k(x) \neq 0$. Per $x \to c$ vale quanto segue.

I) Se $f(x) = o\big(h(x)\big)$ e $g(x) = o\big(h(x)\big)$, allora $f(x) + g(x) = o\big(h(x)\big)$.

II) Se $f(x) = o\big(h(x)\big)$, allora $mf(x) = o\big(h(x)\big)$.

III) Se $f(x) = o\big(h(x)\big)$, allora $f(x)k(x) = o\big(h(x)k(x)\big)$.

IV) Se $f(x) = o\big(h(x)\big)$ e $g(x) = o\big(k(x)\big)$, allora $f(x)g(x) = o\big(h(x)k(x)\big)$.

V) Se $f(x) = o\big(h(x)\big)$ e $h(x) = o\big(k(x)\big)$, allora $f(x) = o\big(k(x)\big)$.

VI) Se $f(x) = o\big(h(x)\big)$ e $h(x) \sim k(x)$, allora $f(x) = o\big(k(x)\big)$.

Definizione di funzione controllata

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f,g\colon A \to \mathbb{R}$ e $c \in PL(A)$; supponiamo che, $\forall x \in A \setminus \{c\}$, sia $g(x) \neq 0$. Diciamo che f è **controllata** da g, per $x \to c$, quando esiste $V \in \mathscr{I}_c$ tale che la funzione $x \mapsto f(x)/g(x)$ è limitata in $A \cap V \setminus \{c\}$. In tal caso scriviamo $f(x) = O\big(g(x)\big)$, per $x \to c$.

3.3.33 Teorema

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f,g\colon A \to \mathbb{R}$ e $c \in PL(A)$; supponiamo che, $\forall x \in A \setminus \{c\}$, sia $g(x) \neq 0$.

I) Se, per $x \to c$, $f(x) \sim g(x)$, allora $f(x) = O(g(x))$.

II) Se, per $x \to c$, $f(x) = o(g(x))$, allora $f(x) = O(g(x))$.

3.3.34 Teorema (regole di calcolo per o grande)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f,g,h,k\colon A \to \mathbb{R}$, $c \in PL(A)$ e $m \in \mathbb{R}^*$; supponiamo che, $\forall x \in A \setminus \{c\}$, sia $h(x) \neq 0$ e $k(x) \neq 0$. Per $x \to c$ vale quanto segue.

I) Se $f(x) = O\big(h(x)\big)$ e $g(x) = O\big(h(x)\big)$, allora $f(x) + g(x) = O\big(h(x)\big)$.

II) Se $f(x) = O\big(h(x)\big)$, allora $mf(x) = O\big(h(x)\big)$.

III) Se $f(x) = O\big(h(x)\big)$, allora $f(x)k(x) = O\big(h(x)k(x)\big)$.

IV) Se $f(x) = O\big(h(x)\big)$ e $g(x) = O\big(k(x)\big)$, allora $f(x)g(x) = O\big(h(x)k(x)\big)$.

V) Se $f(x)=O\big(h(x)\big)$ e $h(x)=O\big(k(x)\big)$, allora $f(x)=O\big(k(x)\big)$.

VI) Se $f(x)=O\big(h(x)\big)$ e $h(x)\sim k(x)$, allora $f(x)=O\big(k(x)\big)$.

3.3.35 Teorema

Siano $A\subseteq\mathbb{R}$, $f,g,h,k\colon A\to\mathbb{R}$, $c\in PL(A)$ e $m\in\mathbb{R}^*$; supponiamo che, $\forall x\in A\setminus\{c\}$, sia $h(x)\neq 0$ e $k(x)\neq 0$. Per $x\to c$ vale quanto segue.

I) Se $f(x)=o\big(h(x)\big)$ e $g(x)=O\big(h(x)\big)$, allora $f(x)+g(x)=O\big(h(x)\big)$.

II) Se $f(x)=o\big(h(x)\big)$ e $g(x)=O\big(k(x)\big)$, allora $f(x)g(x)=o\big(h(x)k(x)\big)$.

III) Se $f(x)=o\big(h(x)\big)$ e $h(x)=O\big(k(x)\big)$, allora $f(x)=o\big(k(x)\big)$.

IV) Se $f(x)=O\big(h(x)\big)$ e $h(x)=o\big(k(x)\big)$, allora $f(x)=o\big(k(x)\big)$.

3.4 Condizioni per la regolarità di funzioni

3.4.1 Funzioni monotòne

Estendiamo alle funzioni il concetto di monotonia, già definito per le successioni. Ricordiamo che chiamiamo crescente una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che si ha $a_{n+1}\geq a_n$, per ogni $n\in\mathbb{N}$. Questa definizione è motivata dal fatto che $n+1$ è il più piccolo naturale maggiore di n. In generale, se si considerano funzioni con dominio un arbitrario sottoinsieme di $\mathbb{R}$, non esiste un più piccolo elemento del dominio maggiore di un elemento fissato, quindi, per trasportare alle funzioni questo concetto, è opportuno partire dalla condizione (equivalente alla crescenza) $\forall m,n\in\mathbb{N}$, $m<n \implies a_m\leq a_n$.

Risultano quindi naturali le seguenti definizioni.

Definizione di funzione crescente, decrescente, monotòna

Siano $A\subseteq\mathbb{R}$ e $f\colon A\to\mathbb{R}$.

Diciamo che f è **crescente** quando

$$\forall x,y\in A,\quad x<y \implies f(x)\leq f(y).$$

Diciamo che f è **strettamente crescente** quando

$$\forall x,y\in A,\quad x<y \implies f(x)<f(y).$$

Diciamo che f è **decrescente** quando

$$\forall x,y\in A,\quad x<y \implies f(x)\geq f(y).$$

Diciamo che f è **strettamente decrescente** quando

$$\forall x,y\in A,\quad x<y \implies f(x)>f(y).$$

Diciamo che f è **monotòna** quando è crescente o decrescente.

Diciamo che f è **strettamente monotòna** quando è strettamente crescente o strettamente decrescente.

Ogni funzione strettamente crescente è anche crescente e ogni funzione strettamente decrescente è anche decrescente. Inoltre una funzione costante è sia crescente che decrescente.

In particolare se f ha come dominio l'insieme dei naturali, cioè se f è una successione, queste definizioni sono equivalenti alle corrispondenti definizioni date per le successioni.

3.4.1 Teorema

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$. Se f è strettamente monotòna, allora è iniettiva e f^{-1} è strettamente monotòna.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo, ad esempio, f strettamente crescente.

Se $x, y \in A$ e $x \neq y$, allora o $x < y$, quindi $f(x) < f(y)$, o $x > y$, quindi $f(x) > f(y)$; in ogni caso $f(x) \neq f(y)$, quindi f è iniettiva.

Inoltre, siano $z, w \in f(A)$, con $z < w$. Non può essere $f^{-1}(z) \geq f^{-1}(w)$, perché sarebbe $f\big(f^{-1}(z)\big) \geq f\big(f^{-1}(w)\big)$, cioè $z \geq w$. Pertanto $f^{-1}(z) < f^{-1}(w)$. ■

3.4.2 Esempio. Consideriamo le seguenti funzioni:

$$
\begin{aligned}
&f_{11} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, && f_{11}(x) = x^3,\\
&f_{12} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, && f_{12}(x) = [x],\\
&f_{13} : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, && f_{13}(x) = \frac{1}{x}.
\end{aligned}
$$

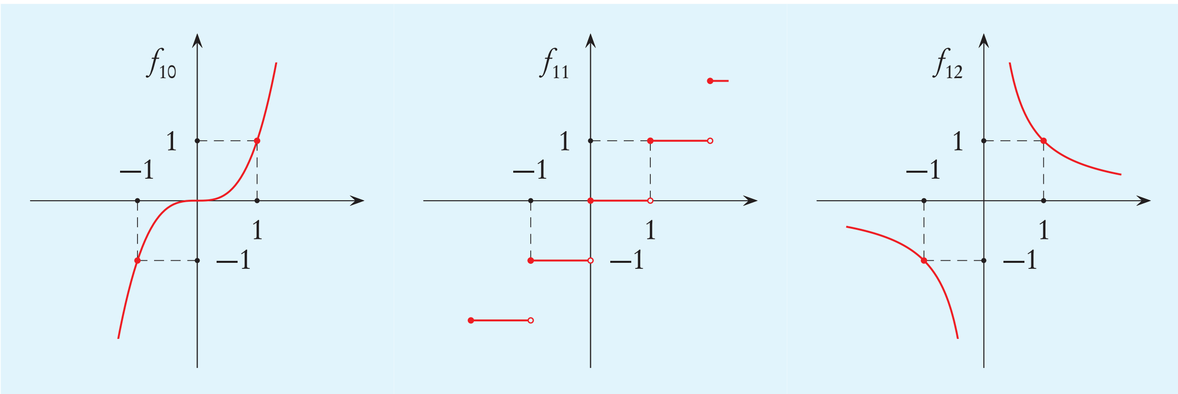


Figura 3.4.1
Le funzioni studiate nell'esempio 3.4.2.

La funzione f_{11} è strettamente crescente. Infatti se $x, y \in \mathbb{R}$, con $x < y$, risulta

$$f_{11}(y) - f_{11}(x) = y^3 - x^3 = (y - x)(x^2 + xy + y^2).$$

Si ha

$$x^2 + xy + y^2 = x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2 + \frac{3}{4}y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0;$$

Pertanto $f_{11}(y) - f_{11}(x)$ è prodotto di numeri non negativi, quindi è non negativo, perciò f_{11} è crescente. Inoltre $\big(x + (1/2)y\big)^2 + (3/4)y^2 = 0$ se e solo se $x + (1/2)y = 0$ e $y = 0$, cioè

$x = y = 0$, ma ciò è impossibile, perché $x < y$. Pertanto $f_{11}(y) - f_{11}(x)$ è prodotto di numeri positivi, quindi è positivo, perciò f_{11} è strettamente crescente.

Se $x, y \in \mathbb{R}$, con $x < y$, allora $[x] \leq x < y$, quindi $[x]$ è un numero intero minore di y, pertanto è minore o uguale a $[y]$. Quindi f_{12} è crescente.

La funzione non è strettamente crescente, perché si ha, ad esempio, $[1] = 1 = [3/2]$, pur essendo $1 < 3/2$.

La funzione f_{13} non è monotona. Infatti $f_{13}(-1) = -1 < 1 = f_{13}(1)$, pertanto f_{13} non è decrescente; inoltre $f_{13}(1) = 1 > 1/2 = f_{13}(2)$, quindi f_{13} non è crescente.

Sappiamo che, dati due numeri positivi x e y, se $x < y$, allora $1/x > 1/y$, (v. teorema 1.2.24). Pertanto $f_{13}|_{\mathbb{R}+}$ è strettamente decrescente.

Inoltre, se $x, y < 0$ e $x < y$, allora $-x > -y$ e $-x, -y > 0$, quindi $-1/x < -1/y$, perciò $1/x > 1/y$. Pertanto $f_{13}|_{\mathbb{R}-}$ è strettamente decrescente. ◀

Per il teorema sul limite delle successioni monotòne 2.3.2 ogni successione monotòna è regolare. Per estendere alle funzioni tale teorema occorre tenere presente una differenza fondamentale: per una successione ha senso solo il limite per $n \to +\infty$, mentre per le funzioni si può considerare il limite per x che tende a un qualunque punto limite del dominio.

Osserviamo inoltre che dall'esempio precedente risulta che una funzione monotòna può non avere limite per x che tende a un punto di accumulazione del dominio. Infatti la funzione f_{12}, cioè la funzione parte intera, è crescente, ma non esiste $\lim_{x\to 0}[x]$. Questo perché se $x \in]-1, 0[$, allora $[x] = -1$, pertanto $\lim_{x\to 0^-}[x] = -1$, mentre se $x \in]0, 1[$, allora $[x] = 0$, pertanto $\lim_{x\to 0^+}[x] = 0$.

Per evitare questo problema occorre considerare solo i limiti unilateri. Rientrano tra questi anche i limiti per $x \to +\infty$ o per $x \to -\infty$, che coinvolgono i valori della funzione solo "a sinistra", nel primo caso, o solo "a destra", nel secondo caso, del punto a cui tende x.

Abbiamo quindi il teorema seguente.

3.4.3 Teorema (sul limite delle funzioni monotòne)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$. Supponiamo f crescente.

I) Se A è superiormente illimitato, allora esiste $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e si ha
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sup f\,.$$

II) Se $c \in D\big(A \cap]c, +\infty[\big)$, allora esiste $\lim_{x\to c^+} f(x)$ e si ha
$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \inf f\big(A \cap]c, +\infty[\big).$$

III) Se $c \in D\big(A \cap]-\infty, c[\big)$, allora esiste $\lim_{x\to c^-} f(x)$ e si ha
$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \sup f\big(A \cap]-\infty, c[\big).$$

IV) Se A è inferiormente illimitato, allora esiste $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e si ha
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \inf f\,.$$

Dimostrazione. I) Supponiamo $\sup f = +\infty$. Allora ogni $M \in \mathbb{R}$ non è un maggiorante di $f(A)$, perciò $\exists x_M \in A$ tale che $f(x_M) > M$. Poiché f è crescente

$$x \in A \cap]x_M, +\infty[\implies f(x) \geq f(x_M) > M.$$

Per l'arbitrarietà di M è verificata la definizione di $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Supponiamo ora $\sup f = \ell \in \mathbb{R}$. Qualunque sia $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $\ell - \varepsilon$ non è un maggiorante di $f(A)$, quindi esiste $x_\varepsilon \in A$ tale che $f(x_\varepsilon) > \ell - \varepsilon$. Poiché f è crescente, se $x \in A \cap]x_\varepsilon, +\infty[$, allora si ha $f(x) \geq f(x_\varepsilon) > \ell - \varepsilon$. Inoltre, $\forall x \in A$, si ha $f(x) \leq \ell < \ell + \varepsilon$, pertanto

$$x \in A \cap]x_\varepsilon, +\infty[\implies \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon.$$

Perciò $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

II) Supponiamo $\inf f\big(A \cap]c, +\infty[\big) = -\infty$. Poiché ogni $M \in \mathbb{R}$ non è un minorante di $f\big(A \cap]c, +\infty[\big)$, esiste $x_M \in A \cap]c, +\infty[$ tale che $f(x_M) < M$; poiché f è crescente

$$x \in A \cap]c, x_M[\implies f(x) \leq f(x_M) < M;$$

perciò $\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty$.

Supponiamo $\inf f\big(A \cap]c, +\infty[\big) = \ell \in \mathbb{R}$. Qualunque sia $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $\ell + \varepsilon$ non è un minorante di $f\big(A \cap]c, +\infty[\big)$, quindi esiste $x_\varepsilon \in A \cap]c, +\infty[$ tale che $f(x_\varepsilon) < \ell + \varepsilon$. Poiché f è crescente, se $x \in A \cap]c, x_\varepsilon[$, allora $f(x) \leq f(x_\varepsilon) < \ell + \varepsilon$. Inoltre se $x \in A \cap]c, +\infty[$, allora $f(x) \geq \ell > \ell - \varepsilon$, quindi

$$x \in A \cap]c, x_\varepsilon[\implies \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon;$$

perciò $\lim_{x\to c^+} f(x) = \ell$.

III) La dimostrazione si ottiene con ovvie modifiche da quella dell'affermazione II.

IV) La dimostrazione si ottiene con ovvie modifiche da quella dell'affermazione I. ■

Un teorema analogo vale per funzioni decrescenti, l'unica differenza è che nell'enunciato gli estremi superiori e gli estremi inferiori vanno scambiati tra loro.

3.4.4 Esempio. Consideriamo la funzione

$$f_{12} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_{12}(x) = [x],$$

già studiata nell'esempio 3.4.2, dove abbiamo dimostrato che è crescente.

Sia $n \in \mathbb{Z}$. Per il teorema sul limite delle funzioni monotòne 3.4.3 si ha

$$\lim_{x\to n^-} [x] = \sup\big\{[x] \,\big|\, x \in]-\infty, n[\big\} = \sup\{k \,|\, k \in \mathbb{Z},\ k < n\} = n - 1,$$
$$\lim_{x\to n^+} [x] = \inf\big\{[x] \,\big|\, x \in]n, +\infty[\big\} = \inf\big\{k \,\big|\, k \in \mathbb{Z},\ k \geq n\big\} = n.$$

Ciò può essere verificato anche osservando che in $]n-1, n[$ si ha $[x] = n - 1$ e in $]n, n+1[$ si ha $[x] = n$. ◀

3.4.2 Condizione di Cauchy

Una successione converge se e solo se è di Cauchy; un fatto analogo vale per le funzioni.

Definizione di condizione di Cauchy per una funzione

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $c \in PL(A)$. Diciamo che f soddisfa la **condizione di Cauchy** per x che tende a c quando

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists V_\varepsilon \in \mathscr{I}_c : \forall x, y \in A \setminus \{c\}, \quad x, y \in V_\varepsilon \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon .$$

3.4.5 Teorema

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $c \in PL(A)$. La funzione f è convergente per $x \to c$ se e solo se soddisfa la condizione di Cauchy per $x \to c$.

Dimostrazione. Supponiamo che esista $\lim_{x\to c} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ e dimostriamo che f soddisfa la condizione di Cauchy per $x \to c$.

Si ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists V_\varepsilon \in \mathscr{I}_c : \forall x \in A \setminus \{c\}, \quad x \in V_\varepsilon \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon .$$

Quindi, fissato $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, se x e y appartengono ad $A \cap V_\varepsilon \setminus \{c\}$ si ha:

$$|f(x) - f(y)| = \big|\big(f(x) - \ell\big) + \big(\ell - f(y)\big)\big| \le |f(x) - \ell| + |\ell - f(y)| < 2\varepsilon ;$$

pertanto è verificata la condizione di Cauchy.

Viceversa supponiamo che $f(x)$ soddisfi la condizione di Cauchy per $x \to c$ e dimostriamo che è convergente.

Poiché $c \in PL(A)$, per il teorema 3.1.21 esiste una $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, successione in $A \setminus \{c\}$, tale che $a_n \to c$. Dimostriamo che $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy. Per la condizione di Cauchy si ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists V_\varepsilon \in \mathscr{I}_c : \forall x, y \in A \setminus \{c\}, \quad x, y \in V_\varepsilon \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon ;$$

mentre, per la definizione di $a_n \to c$, si ha

$$\forall W \in \mathscr{I}_c, \exists n_W \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_W \implies a_n \in W .$$

Fissato $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, scelto $W = V_\varepsilon$, si ha

$$\begin{aligned} n, m > n_{V_\varepsilon} &\implies a_n, a_m \in V_\varepsilon \\ &\implies |f(a_n) - f(a_m)| < \varepsilon , \end{aligned}$$

quindi $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy, pertanto, per il teorema 2.3.15, ha limite reale. Sia ℓ tale limite.

Si ha $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$. Infatti, fissato $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, se $x \in A \cap V_\varepsilon \setminus \{c\}$, allora, scelto $n > n_{V_\varepsilon}$, si ha $a_n \in V_\varepsilon$, pertanto si ha

$$|f(x) - \ell| = \big|\big(f(x) - f(a_n)\big) + \big(f(a_n) - \ell\big)\big| \le |f(x) - f(a_n)| + |f(a_n) - \ell| < 2\varepsilon . \quad \blacksquare$$

3.4.3 Massimo limite e minimo limite

Come abbiamo fatto per le successioni, definiamo massimo limite e minimo limite di funzioni; questi concetti sono utili per avere informazioni sulle funzioni per cui non esiste il limite per x che tende a un particolare punto limite del dominio.

Per definire il massimo limite di una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si considera $\sup\{a_m \mid m \geq n\}$ e si fa tendere n a $+\infty$. Corrispondentemente, se $f: A \to \mathbb{R}$ e $c \in D(A)$ possiamo considerare $\sup\{f(x) \mid x \in A \cap \,]c-r, c+r[\, \setminus \{c\}\}$, con $r \in \mathbb{R}^+$, e fare tendere r a 0. Occorre trattare a parte il caso in cui, $\forall r \in \mathbb{R}^+$, l'estremo superiore è $+\infty$, cioè f è superiormente illimitata in ogni intorno di c; in tal caso si ha $\max\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$.

Se A è superiormente illimitato possiamo fare considerazioni analoghe per definire $\max\lim_{x\to+\infty} f(x)$; al posto di $]c-r, c+r[$, consideriamo gli intorni di $+\infty$ del tipo $]r, +\infty[$, con $r \in \mathbb{R}$, e facciamo tendere r a $+\infty$.

Ovvie modifiche per definire $\max\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Questo modo di procedere ha il difetto di richiedere di dare definizioni distinte per ciascuno dei casi $c \in \mathbb{R}$, $c = +\infty$, $c = -\infty$ e di dovere ulteriormente distinguere a seconda che f sia o meno superiormente illimitata in ogni intorno di c. Cerchiamo di dare la definizione evitando di distinguere i vari casi. Osserviamo anzitutto che l'insieme $]c-r, c+r[$ cresce al crescere di r, quindi anche $\sup f\big(A \cap \,]c-r, c+r[\, \setminus \{c\}\big)$ cresce al crescere di r, pertanto

$$\lim_{r\to 0^+} \sup f\big(A \cap \,]c-r, c+r[\, \setminus \{c\}\big) = \inf_{r\in\mathbb{R}^+} \sup f\big(A \cap \,]c-r, c+r[\, \setminus \{c\}\big),$$

cioè

$$\lim_{r\to 0^+} \sup f\big(A \cap \,]c-r, c+r[\, \setminus \{c\}\big) = \inf\Big\{\sup f\big(A \cap U \setminus \{c\}\big) \,\Big|\, U \in \mathscr{I}_c\Big\}.$$

Se f è illimitata in ogni intorno di c, si ha, $\forall U \in \mathscr{I}_c$, $\sup f\big(A \cap U \setminus \{c\}\big) = +\infty$, quindi, nel senso dei sottoinsiemi di $\overline{\mathbb{R}}$, risulta $\inf_{r\in\mathbb{R}^+} \sup f\big(A \cap \,]c-r, c+r[\, \setminus \{c\}\big) = +\infty$.

Perciò risultano naturali le seguenti definizioni.

Definizione di massimo limite e di minimo limite

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ e $c \in PL(A)$.

Chiamiamo **massimo limite** (o anche **limite superiore**) di $f(x)$ per x che tende a c il numero reale esteso

$$\max\lim_{x\to c} f(x) = \inf\Big\{\sup f\big(A \cap U \setminus \{c\}\big) \,\Big|\, U \in \mathscr{I}_c\Big\}.$$

Chiamiamo **minimo limite** (o anche **limite inferiore**) di $f(x)$ per x che tende a c il numero reale esteso

$$\min\lim_{x\to c} f(x) = \sup\Big\{\inf f\big(A \cap U \setminus \{c\}\big) \,\Big|\, U \in \mathscr{I}_c\Big\}.$$

Come già osservato, gli insiemi di cui si considerano gli estremi inferiore e superiore sono, in generale, sottoinsiemi di $\overline{\mathbb{R}}$.

Quando si usano i termini "limite superiore" e "limite inferiore" si usano le notazioni $\limsup_{x\to c} f(x)$ e $\liminf_{x\to c} f(x)$.

3.4.6 Esempio. Consideriamo la funzione

$$f_4 \colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \qquad f_4(x) = \frac{1}{x},$$

già studiata nell'esempio 3.3.1.

In tale esempio abbiamo stabilito che la funzione non ha limite per $x \to 0$, perché è sia superiormente che inferiormente illimitata in ogni intorno di 0. Ciò significa che, $\forall U \in \mathscr{I}_c$, si ha

$$\inf f\big(U \setminus \{0\}\big) = -\infty, \qquad \sup f\big(U \setminus \{0\}\big) = +\infty,$$

quindi

$$\min\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = -\infty, \qquad \max\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = +\infty.$$

◀

3.4.7 Esempio. Studiamo massimo limite e minimo limite per $x \to +\infty$ della funzione coseno.

Sia $U \in \mathscr{I}_{+\infty}$. Poiché, $\forall x \in \mathbb{R}$, si ha $-1 \le \cos x \le 1$, risulta $\inf\{\cos x \mid x \in U\} \ge -1$ e $\sup\{\cos x \mid x \in U\} \le 1$; inoltre U contiene punti del tipo $2k\pi$ e $2k\pi + \pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, quindi $\inf\{\cos x \mid x \in U\} \le \cos(2k\pi + \pi) = -1$ e $\sup\{\cos x \mid x \in U\} \ge \cos(2k\pi) = 1$. Pertanto risulta $\inf\{\cos x \mid x \in U\} = -1$ e $\sup\{\cos x \mid x \in U\} = 1$, perciò si ha

$$\min\lim_{x\to+\infty} \cos x = -1, \qquad \max\lim_{x\to+\infty} \cos x = 1.$$

In modo analogo si prova che $\min\lim_{x\to-\infty} \cos x = -1$ e $\max\lim_{x\to-\infty} \cos x = 1$. ◀

Per studiare le proprietà di massimo e minimo limite, risulta talvolta utile vederli come limite di successioni, come affermato dal seguente teorema.

3.4.8 Teorema

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f \colon A \to \mathbb{R}$ e $c \in PL(A)$. Poniamo, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = \begin{cases} \left]c - \dfrac{1}{n+1}, c + \dfrac{1}{n+1}\right[, & \text{se } c \in \mathbb{R}, \\ ]n, +\infty[, & \text{se } c = +\infty, \\ ]-\infty, -n[, & \text{se } c = -\infty. \end{cases}$$

Allora:

I) $\min\lim_{x\to c} f(x) = \sup\Big\{\inf f\big(A \cap U_n \setminus \{c\}\big) \Bigm| n \in \mathbb{N}\Big\}$;

II) se inoltre $\min\lim_{x\to c} f(x) \ne -\infty$, allora si ha

$$\min\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{n\to+\infty} \inf f\big(A \cap U_n \setminus \{c\}\big);$$

III) $\max\lim_{x\to c} f(x) = \inf\Big\{\sup f\big(A \cap U_n \setminus \{c\}\big) \Bigm| n \in \mathbb{N}\Big\}$;

IV) se inoltre $\max\lim_{x\to c} f(x) \neq +\infty$, allora si ha

$$\max\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{n\to+\infty} \sup f\big(A\cap U_n \setminus \{c\}\big).$$

Dimostrazione. I) Poiché, $\forall n\in\mathbb{N}$, si ha $U_n \in \mathscr{I}_c$, risulta

$$\inf f\big(A\cap U_n\setminus\{c\}\big) \le \sup\Big\{\inf f\big(A\cap U\setminus\{c\}\big)\,\Big|\, U\in\mathscr{I}_c\Big\},$$

quindi

$$\sup\Big\{\inf f\big(A\cap U_n\setminus\{c\}\big)\,\Big|\, n\in\mathbb{N}\Big\} \le \sup\Big\{\inf f\big(A\cap U\setminus\{c\}\big)\,\Big|\, U\in\mathscr{I}_c\Big\}.$$

Viceversa, se $U\in\mathscr{I}_c$, allora esiste $n\in\mathbb{N}$ tale che $U_n\subseteq U$, quindi

$$\inf f\big(A\cap U\setminus\{c\}\big) \le \inf f\big(A\cap U_n\setminus\{c\}\big),$$

pertanto

$$\inf f\big(A\cap U\setminus\{c\}\big) \le \sup\Big\{\inf f\big(A\cap U_n\setminus\{c\}\big)\,\Big|\, n\in\mathbb{N}\Big\}.$$

Quindi si ha

$$\sup\Big\{\inf f\big(A\cap U\setminus\{c\}\big)\,\Big|\, U\in\mathscr{I}_c\Big\} \le \sup\Big\{\inf f\big(A\cap U_n\setminus\{c\}\big)\,\Big|\, n\in\mathbb{N}\Big\}.$$

Pertanto risulta

$$\sup\Big\{\inf f\big(A\cap U_n\setminus\{c\}\big)\,\Big|\, n\in\mathbb{N}\Big\} = \sup\Big\{\inf f\big(A\cap U\setminus\{c\}\big)\,\Big|\, U\in\mathscr{I}_c\Big\} = \min\lim_{x\to c} f(x).$$

II) Per $n\in\mathbb{N}$ risulta $U_{n+1}\subseteq U_n$, quindi $\inf f\big(A\cap U_n\setminus\{c\}\big) \le \inf f\big(A\cap U_{n+1}\setminus\{c\}\big)$; se $\min\lim_{x\to c} f(x)\neq -\infty$, allora, non può essere $\inf f\big(A\cap U_n\setminus\{c\}\big) = -\infty$ per ogni n, quindi definitivamente $\inf f\big(A\cap U_n\setminus\{c\}\big)\in\mathbb{R}$. Poiché, al crescere di n, $\inf f\big(A\cap U_n\setminus\{c\}\big)$ cresce, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \inf f\big(A\cap U_n\setminus\{c\}\big) = \sup\Big\{\inf f\big(A\cap U_n\setminus\{c\}\big)\,\Big|\, n\in\mathbb{N}\Big\} = \min\lim_{x\to c} f(x).$$

III) La dimostrazione è analoga a quella dell'affermazione I.

IV) La dimostrazione è analoga a quella dell'affermazione II. ■

Studiamo le proprietà del massimo limite e del minimo limite.

3.4.9 Teorema

Siano $A\subseteq\mathbb{R}$, $f : A\to\mathbb{R}$ e $c\in PL(A)$. Allora

$$\min\lim_{x\to c} f(x) \le \max\lim_{x\to c} f(x).$$

Dimostrazione. Siano $U, V \in \mathscr{I}_c$. Si ha $U \cap V \in \mathscr{I}_c$, $U \cap V \subseteq U$ e $U \cap V \subseteq U$, quindi

$$\inf f\big(A \cap U \setminus \{c\}\big) \leq \inf f\big(A \cap U \cap V \setminus \{c\}\big) \leq \sup f\big(A \cap U \cap V \setminus \{c\}\big) \leq \sup f\big(A \cap V \setminus \{c\}\big).$$

Pertanto, $\forall V \in \mathscr{I}_c$, si ha

$$\min\lim_{x \to c} f(x) = \sup\Big\{\inf f\big(A \cap U \setminus \{c\}\big) \,\Big|\, U \in \mathscr{I}_c\Big\} \leq \sup f\big(A \cap V \setminus \{c\}\big),$$

da cui segue

$$\min\lim_{x \to c} f(x) \leq \inf\Big\{\inf f\big(A \cap V \setminus \{c\}\big) \,\Big|\, V \in \mathscr{I}_c\Big\} = \max\lim_{x \to c} f(x).$$ ■

3.4.10 Teorema

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $c \in PL(A)$ e $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in $A \setminus \{c\}$ che tende a c. Allora

$$\min\lim_{n \to +\infty} f(a_n) \geq \min\lim_{x \to c} f(x), \qquad \max\lim_{n \to +\infty} f(a_n) \leq \max\lim_{x \to c} f(x).$$

Dimostrazione. Dimostriamo la disuguaglianza relativa al massimo limite, quella relativa al minimo limite si prova in modo analogo.

Sia $U \in \mathscr{I}_c$. Poiché $a_n \to c$, esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che, per $n \geq \overline{n}$, si ha $a_n \in U$, pertanto

$$\sup\big\{f(a_n) \,\big|\, n \in \mathbb{N}, n \geq \overline{n}\big\} \leq \sup f\big(A \cap U \setminus \{c\}\big).$$

Da ciò, sia nel caso $\max\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = +\infty$ che nel caso $\max\lim_{n \to +\infty} f(a_n) < +\infty$, segue

$$\max\lim_{n \to +\infty} f(a_n) \leq \sup f\big(A \cap U \setminus \{c\}\big).$$

Poiché ciò vale $\forall U \in \mathscr{I}_c$, si ha

$$\max\lim_{n \to +\infty} f(a_n) \leq \inf\Big\{\sup f\big(A \cap U \setminus \{c\}\big) \,\Big|\, U \in \mathscr{I}_c\Big\} = \max\lim_{x \to c} f(x).$$ ■

3.4.11 Teorema

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $c \in PL(A)$. Allora esistono $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, successioni in $A \setminus \{c\}$ che tendono a c tali che

$$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = \min\lim_{x \to c} f(x), \qquad \lim_{n \to +\infty} f(b_n) = \max\lim_{x \to c} f(x).$$

Dimostrazione. Dimostriamo l'affermazione relativa al massimo limite, quella relativa al minimo limite si dimostra in modo analogo.

Per $n \in \mathbb{N}$, indichiamo con U_n l'intorno di c definito nell'enunciato del teorema 3.4.8.

Consideriamo anzitutto il caso $\max\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$. Allora, $\forall U \in \mathscr{I}_c$, si ha $\sup f\big(A \cap U \setminus \{c\}\big) = +\infty$; in particolare, $\forall n \in \mathbb{N}$, risulta $\sup f\big(A \cap U_n \setminus \{c\}\big) = +\infty$, pertanto esiste $b_n \in A \cap U_n \setminus \{c\}$ tale che $f(b_n) > n$. Quindi $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione in $A \setminus \{c\}$ che tende a c e tale che $f(b_n) \to +\infty = \max\lim_{x \to c} f(x)$.

Consideriamo il caso $\max\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$. Per $n \in \mathbb{N}$ sia $b_n \in A \cap U_n \setminus \{c\}$. Allora $b_n \to c$ e $f(b_n) \le \sup f\big(A \cap U_n \setminus \{c\}\big)$. Per il teorema 3.4.8, affermazione IV, si ha $\lim_{n\to+\infty} \sup f\big(A \cap U_n \setminus \{c\}\big) = \max\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$, pertanto, per il teorema 2.2.15, affermazione II, $f(b_n) \to -\infty$.

Infine sia $\max\lim_{x\to c} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Definitivamente si ha $\sup f\big(A\cap U_n \setminus \{c\}\big) < +\infty$, per tali n sia $b_n \in A \cap U_n \setminus \{c\}$ tale che $f(b_n) > \sup f\big(A \cap U_n \setminus \{c\}\big) - 1/(n+1)$; se $\sup f\big(A \cap U_n \setminus \{c\}\big) = +\infty$ sia b_n un arbitrario elemento di $A \cap U_n \setminus \{c\}$. Definitivamente si ha

$$\sup f\big(A\cap U_n \setminus \{c\}\big) - \frac{1}{n+1} < f(b_n) \le \sup f\big(A \cap U_n \setminus \{c\}\big)$$

e, per il teorema 3.4.8, affermazione IV,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup f\big(A\cap U_n \setminus \{c\}\big) - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to+\infty} \sup f\big(A\cap U_n \setminus \{c\}\big) = \ell .$$

Pertanto, per il teorema dei due carabinieri 2.2.11, $\lim_{n\to+\infty} f(b_n) = \ell$. ■

3.4.12 Osservazione. Per i teoremi 3.4.10 e 3.4.11 $\min\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$ se e solo se esiste $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, successione in $A \setminus \{c\}$ che tende a c, tale che $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $-\infty$ e $\max\lim_{x\to c} a_n = +\infty$ se e solo se esiste $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, successione in $A \setminus \{c\}$ che tende a c, tale che $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $+\infty$. ◀

3.4.13 Teorema

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ e $c \in PL(A)$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

I) $f(x)$ è regolare per $x \to c$;

II) $\min\lim_{x\to c} f(x) = \max\lim_{x\to c} f(x)$.

Se tali affermazioni sono vere risulta

$$\lim_{x\to c} f(x) = \min\lim_{x\to c} f(x) = \max\lim_{x\to c} f(x).$$

Dimostrazione. I $\Longrightarrow$ II) Per il teorema 3.4.11 esiste una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $A\setminus\{c\}$ che tende a c e tale che $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \max\lim_{x\to c} f(x)$; per il teorema di relazione tra limite di funzione e limite di successione 3.3.2, si ha $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{x\to c} f(x)$. Pertanto $\max\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} f(x)$.

Per motivi analoghi anche $\min\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} f(x)$.

II $\Longrightarrow$ I) Poniamo $\ell = \min\lim_{x\to c} f(x) = \max\lim_{x\to c} f(x)$.

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $A \setminus \{c\}$ che tende a c. Per il teorema 3.4.10 si ha

$$\ell \le \min\lim_{n\to+\infty} f(a_n) \le \max\lim_{n\to+\infty} f(a_n) \le \ell ,$$

quindi

$$\min\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \max\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \ell ;$$

pertanto, per il teorema 2.3.24 si ha $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \ell$. Allora, per il teorema di relazione tra limite di funzione e limite di successione 3.3.2, si ha $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$. ■

3.4.14 Osservazione. Se $\min\lim_{x\to c} f(x)=+\infty$, allora, per il teorema 3.4.9, si ha anche $\max\lim_{x\to c} f(x)=+\infty$, quindi, per il teorema precedente, $\lim_{x\to c} f(x)=+\infty$.

Analogamente, se $\max\lim_{x\to c} f(x)=-\infty$, allora $\lim_{x\to c} f(x)=-\infty$. ◀

Studiamo il comportamento di massimo limite e minimo limite rispetto all'addizione e alla moltiplicazione per uno scalare.

3.4.15 Teorema

Siano $A\subseteq\mathbb{R}$, $f,g:A\to\mathbb{R}$ e $c\in PL(A)$.

I) Se $\min\lim_{x\to c} f(x)\in\mathbb{R}$ e $\min\lim_{x\to c} g(x)\in\mathbb{R}$, allora

$$\min\lim_{x\to c}\big(f(x)+g(x)\big)\geq\min\lim_{x\to c} f(x)+\min\lim_{x\to c} g(x).$$

II) Se $\min\lim_{x\to c} f(x)=+\infty$ e $\min\lim_{x\to c} g(x)>-\infty$, allora

$$\min\lim_{x\to c}\big(f(x)+g(x)\big)=+\infty.$$

III) Se $\max\lim_{x\to c} f(x)\in\mathbb{R}$ e $\max\lim_{x\to c} g(x)\in\mathbb{R}$, allora

$$\max\lim_{x\to c}\big(f(x)+g(x)\big)\leq\max\lim_{x\to c} f(x)+\max\lim_{x\to c} g(x).$$

IV) Se $\max\lim_{x\to c} f(x)=-\infty$ e $\max\lim_{x\to c} g(x)<+\infty$, allora

$$\max\lim_{x\to c}\big(f(x)+g(x)\big)=-\infty.$$

Dimostrazione. I) Per il teorema 3.4.11 esiste $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, successione in $A\setminus\{c\}$ che tende a c, tale che $\lim_{n\to+\infty}\big(f(a_n)+g(a_n)\big)=\min\lim_{x\to c}\big(f(x)+g(x)\big)$. Per il teorema 2.3.26, affermazione I, risulta

$$\lim_{n\to+\infty}\big(f(a_n)+g(a_n)\big)\geq\min\lim_{n\to+\infty} f(a_n)+\min\lim_{n\to+\infty} g(a_n)$$

quindi, per il teorema 3.4.10, si ha

$$\min\lim_{x\to c}\big(f(x)+g(x)\big)\geq\min\lim_{n\to+\infty} f(a_n)+\min\lim_{n\to+\infty} g(a_n)\geq\min\lim_{x\to c} f(x)+\min\lim_{x\to c} g(x).$$

II) Per il teorema 3.4.11 esiste $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, successione in $A\setminus\{c\}$ che tende a c, tale che $\lim_{n\to+\infty}\big(f(a_n)+g(a_n)\big)=\min\lim_{x\to c}\big(f(x)+g(x)\big)$. Per il teorema 3.4.10 risulta

$$\min\lim_{n\to+\infty} f(a_n)\geq\min\lim_{x\to c} f(x)=+\infty,$$

quindi $\min\lim_{n\to+\infty} f(a_n)=+\infty$, e

$$\min\lim_{n\to+\infty} g(a_n)\geq\min\lim_{x\to c} g(x)>-\infty.$$

Pertanto, per il teorema 2.3.26, affermazione II, si ha $\lim_{n\to+\infty}\big(f(a_n)+g(a_n)\big)=+\infty$.

III) La dimostrazione è analoga a quella dell'affermazione I.

IV) La dimostrazione è analoga a quella dell'affermazione II. ■

3.4.16 Teorema

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $c \in PL(A)$ e $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

I) Supponiamo $\min\lim_{x\to c} f(x) \in \mathbb{R}$. Se $\lambda > 0$, allora

$$\min\lim_{x\to c}\big(\lambda f(x)\big) = \lambda \min\lim_{x\to c} f(x);$$

se $\lambda < 0$, allora

$$\max\lim_{x\to c}\big(\lambda f(x)\big) = \lambda \min\lim_{x\to c} f(x).$$

II) Supponiamo $\min\lim_{x\to c} f(x) \in \{-\infty, +\infty\}$. Se $\lambda > 0$, allora

$$\min\lim_{x\to c}\big(\lambda f(x)\big) = \min\lim_{x\to c} f(x);$$

se $\lambda < 0$, allora

$$\max\lim_{x\to c}\big(\lambda f(x)\big) = -\min\lim_{x\to c} f(x).$$

III) Supponiamo $\max\lim_{x\to c} f(x) \in \mathbb{R}$. Se $\lambda > 0$, allora

$$\max\lim_{x\to c}\big(\lambda f(x)\big) = \lambda \max\lim_{x\to c} f(x);$$

se $\lambda < 0$, allora

$$\min\lim_{x\to c}\big(\lambda f(x)\big) = \lambda \max\lim_{x\to c} f(x).$$

IV) Supponiamo $\max\lim_{x\to c} f(x) \in \{-\infty, +\infty\}$. Se $\lambda > 0$, allora

$$\max\lim_{x\to c}\big(\lambda f(x)\big) = \max\lim_{x\to c} f(x);$$

se $\lambda < 0$, allora

$$\min\lim_{x\to c}\big(\lambda f(x)\big) = -\max\lim_{x\to c} f(x).$$

Dimostrazione. Nella dimostrazione utilizziamo ripetutamente il teorema 3.4.11.

I) Poniamo $\ell = \min\lim_{x\to c} f(x)$. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $A \setminus \{c\}$ che tende a c tale che $f(a_n) \to \ell$.

Sia $\lambda > 0$. Si ha $\lambda f(a_n) \to \lambda\ell$, quindi $\lambda\ell \geq \min\lim_{x\to c}\big(\lambda f(x)\big)$. Inoltre esiste $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione in $A\setminus\{c\}$ che tende a c tale che $\lambda f(b_n) \to \min\lim_{x\to c}\big(\lambda f(x)\big)$; poiché $\lim_{n\to+\infty} f(b_n) \geq \ell$, si ha

$$\min\lim_{x\to c}\big(\lambda f(x)\big) = \lim_{n\to+\infty}\big(\lambda f(b_n)\big) = \lambda \lim_{n\to+\infty} f(b_n) \geq \lambda\ell.$$

Quindi risulta $\min\lim_{x\to c}\big(\lambda f(x)\big) = \lambda\ell$.

Sia $\lambda < 0$. Si ha $\lambda f(a_n) \to \lambda\ell$, quindi $\lambda\ell \leq \max\lim_{x\to c}\big(\lambda f(x)\big)$. Inoltre esiste $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione in $A\setminus\{c\}$ che tende a c tale che $\lambda f(c_n) \to \max\lim_{x\to c}\big(\lambda f(x)\big)$; poiché $\lim_{n\to+\infty} f(c_n) \geq \ell$, si ha

$$\max\lim_{x\to c}\big(\lambda f(x)\big) = \lim_{n\to+\infty}\big(\lambda f(c_n)\big) = \lambda \lim_{n\to+\infty} f(c_n) \leq \lambda\ell.$$

Quindi risulta $\max\lim_{x\to c}\big(\lambda f(x)\big) = \lambda\ell$.

II) Supponiamo $\min\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$; allora esiste $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, successione in $A\setminus\{c\}$ che tende a c, tale che $f(a_n) \to -\infty$. Se $\lambda > 0$, allora $\lambda f(a_n) \to -\infty$, quindi risulta $\min\lim_{x\to c}\bigl(\lambda f(x)\bigr) = -\infty$; se invece $\lambda < 0$, allora $\lambda f(a_n) \to +\infty$, pertanto risulta $\max\lim_{x\to c}\bigl(\lambda f(x)\bigr) = +\infty$.

Supponiamo ora $\min\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$; risulta $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ (v. osservazione 3.4.14). Se $\lambda > 0$, allora $\lambda f(x) \to +\infty$, perciò $\min\lim_{x\to c}\bigl(\lambda f(x)\bigr) = +\infty$; se invece $\lambda < 0$, allora $\lambda f(x) \to -\infty$, quindi risulta $\max\lim_{x\to c}\bigl(\lambda f(x)\bigr) = -\infty$.

III) La dimostrazione è analoga a quella dell'affermazione I.

IV) La dimostrazione è analoga a quella dell'affermazione II. ■

3.5 Funzioni continue

3.5.1 Definizioni e proprietà fondamentali

Studiamo le funzioni che si comportano "bene" rispetto ai limiti. Chiediamo che, in un punto del dominio, che sia anche di accumulazione, esista il limite della funzione e questo coincida col valore della funzione in tale punto. Pertanto, se $f : A \to \mathbb{R}$ e $c \in D(A)$, chiediamo che sia

$$\forall U \in \mathscr{I}_{f(c)},\ \exists V_U \in \mathscr{I}_c : \forall x \in A\setminus\{c\},\quad x \in V_U \implies f(x) \in U.$$

Poiché, $\forall U \in \mathscr{I}_{f(c)}$, si ha $f(c) \in U$, è equivalente chiedere che sia $x \in V_U \implies f(x) \in U$ per $x \in A\setminus\{c\}$ o per $x \in A$. Pertanto la definizione equivale a

$$\forall U \in \mathscr{I}_{f(c)},\ \exists V_U \in \mathscr{I}_c : \forall x \in A,\quad x \in V_U \implies f(x) \in U.$$

Questa condizione ha senso anche se c è un punto isolato di A; in tal caso è evidentemente verificata, è sufficiente scegliere come V_U un qualunque intorno di c la cui intersezione con A è $\{c\}$.

Definizione di funzione continua in un punto

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $c \in A$. Diciamo che f è **continua** in c quando

$$\forall U \in \mathscr{I}_{f(c)},\ \exists V_U \in \mathscr{I}_c : \forall x \in A,\quad x \in V_U \implies f(x) \in U.$$

La definizione di continuità riguarda un punto del dominio, ma solitamente una funzione è continua in più punti; quindi è naturale definire la continuità in un insieme.

Definizione di funzione continua in un insieme

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq A$ e $f : A \to \mathbb{R}$.
Diciamo che f è **continua** in B quando è continua in ogni punto di B.
Diciamo che f è **continua** quando è continua in A.

È evidente che f è continua in c se e solo se

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+,\ \exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in A, \quad x \in]c-\delta_\varepsilon, c+\delta_\varepsilon[\implies |f(x)-f(c)| < \varepsilon .$$

Dai discorsi introduttivi risulta evidente che vale il seguente teorema.

3.5.1 Teorema

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $c \in A$.

I) Se c è un punto isolato per A, allora f è continua in c.

II) Se $c \in D(A)$, f è continua in c se e solo se $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

3.5.2 Esempio. Utilizziamo questo teorema per stabilire la continuità di alcune funzioni.

Sia p un polinomio. Nell'esempio 3.3.4 abbiamo provato che, qualunque sia $c \in \mathbb{R}$, risulta $\lim_{x\to c} p(x) = p(c)$. Pertanto la funzione $x \mapsto p(x)$ è continua.

Sia r una funzione razionale fratta. Nell'esempio 3.3.24 abbiamo provato che, qualunque sia $c \in \mathbb{R}$, che non annulla il denominatore di r, risulta $\lim_{x\to c} r(x) = r(c)$. Pertanto la funzione $x \mapsto r(x)$ è continua. ◀

3.5.3 Esempio. Consideriamo la funzione

$$f_{12} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_{12}(x) = [x] .$$

Nell'esempio 3.4.4 abbiamo provato che, $\forall n \in \mathbb{Z}$, si ha

$$\lim_{x\to n^-} [x] = n-1 \neq n = \lim_{x\to n^+} [x] .$$

Poiché limite destro e limite sinistro sono differenti tra loro, non esiste il limite. Pertanto f_{12} è discontinua in ciascun punto di $\mathbb{Z}$.

Se $c \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ esiste un intorno di c in cui f_{12} è costante, da ciò segue facilmente che in tali punti f_{12} è continua. ◀

Visto lo stretto collegamento tra limite e continuità, vale un teorema analogo al teorema di relazione tra limite di funzione e limite di successione 3.3.2.

3.5.4 Teorema (caratterizzazione della continuità)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $c \in A$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

I) la funzione f è continua in c;

II) per ogni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione in A convergente a c si ha $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(c)$.

Dimostrazione. I $\implies$ II) Supponiamo che f sia continua in c e consideriamo una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A tale che $a_n \to c$.

Per la definizione di continuità si ha

$$\forall U \in \mathscr{I}_{f(c)},\ \exists V_U \in \mathscr{I}_c : \forall x \in A, \quad x \in V_U \implies f(x) \in U ,$$

mentre per la definizione di convergenza si ha

$$\forall W \in \mathscr{I}_c\,,\ \exists n_W \in \mathbb{N}\colon\ \forall n \in \mathbb{N},\quad n > n_W \implies a_n \in W\,.$$

Scelto $U \in \mathscr{I}_\ell$, poniamo $W = V_U$. Se $n \in \mathbb{N}$ è tale che $n > n_{V_U}$, allora si ha $a_n \in V_U \cap A$, quindi $f(a_n) \in U$. Perciò

$$n > n_{V_U} \implies f(a_n) \in U\,,$$

quindi è verificata la definizione di $f(a_n) \to \ell$ e vale l'affermazione II.

II $\implies$ I) Dimostriamo che se l'affermazione I è falsa, allora è falsa anche la II; cioè proviamo che, se f non è continua in c, allora esiste una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A tale che $a_n \to c$, ma non si ha $f(a_n) \to f(c)$.

Se f non è continua in c, allora si ha

$$\exists \overline{U} \in \mathscr{I}_{f(c)}\colon\ \forall V \in \mathscr{I}_c\,,\ \exists x \in A\colon\quad x \in V \wedge f(x) \notin \overline{U}\,.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $]c - 1/(n+1), c + 1/(n+1)[\ \in \mathscr{I}_c$, pertanto esiste un elemento di $A \cap\,]c-1/(n+1), c+1/(n+1)[$, che indichiamo con a_n, tale che $f(a_n) \notin \overline{U}$. La successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ così costruita ha termini in A; inoltre, $\forall n \in \mathbb{N}$, risulta

$$c - \frac{1}{n+1} < a_n < c + \frac{1}{n+1}\,,$$

quindi, per il teorema dei due carabinieri 2.2.11, si ha $a_n \to c$. D'altra parte, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $f(a_n) \notin \overline{U}$, quindi la successione $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ non ha limite $f(c)$. Perciò l'affermazione II non è verificata. ■

I teoremi sul limite della somma 3.3.21, sul limite del prodotto 3.3.22 e sul limite del reciproco 3.3.23 possono essere applicati alle funzioni continue, ottenendo il teorema seguente.

3.5.5 Teorema

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $g\colon A \to \mathbb{R}$ e $c \in A$. Supponiamo f e g continue in c. Allora:

I) la funzione $f + g$ è continua in c;

II) la funzione $f\,g$ è continua in c;

III) se inoltre, $\forall x \in A$, si ha $g(x) \neq 0$, allora la funzione f/g è continua in c.

3.5.6 Teorema (sulla continuità della composizione)

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to B$, $g\colon B \to \mathbb{R}$ e $c \in A$. Se f è continua in c e g è continua in $f(c)$, allora $g \circ f$ è continua in c.

Dimostrazione. Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in A convergente a c, allora, per il teorema 3.5.4, $f(a_n) \to f(c)$, quindi, nuovamente per tale teorema, $g\big(f(a_n)\big) \to g\big(f(c)\big)$. Perciò $g \circ f$ è continua in c. ■

3.5.7 Esempio. È evidente che ogni funzione costante è continua.

La funzione $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, cioè la funzione da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ tale che $x \mapsto x$, è continua. Infatti se $c \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, allora, $\forall x \in \mathbb{R}$, se $x \in]c-\varepsilon, c+\varepsilon[$ si ha $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x) \in]c-\varepsilon, c+\varepsilon[$.

Il teorema 3.5.5 consente di provare la continuità delle funzioni polinomiali e razionali fratte, già dimostrata nell'esempio 3.5.2. Infatti tali funzioni sono somma, prodotto e quoziente di funzioni costanti e di $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. ◀

3.5.2 Funzioni continue nel dominio

Studiamo alcune proprietà di cui godono le funzioni che sono continue in tutto il dominio.

3.5.8 Teorema (di Weierstrass[8])

Siano $K \subseteq \mathbb{R}$ e $f : K \to \mathbb{R}$. Se f è continua e K è compatto, allora f è limitata ed esistono massimo e minimo di f.

Dimostrazione. Dimostriamo anzitutto che f è superiormente limitata, successivamente dimostriamo che ha massimo. In modo analogo si prova che f è inferiormente limitata e che ha minimo.

Per dimostrare che se f è continua, allora è superiormente limitata, dimostriamo che, viceversa, se $\sup f = +\infty$, allora esiste un punto di K in cui f non è continua.

Se $\sup f = +\infty$, allora ogni $n \in \mathbb{N}$ non è maggiorante di $f(K)$, perciò esiste un elemento di K, che indichiamo con a_n, tale che $f(a_n) > n$. Poiché K è compatto, esiste una sottosuccessione $\left(a_{k_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a un elemento c di K. Poiché, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $f\left(a_{k_n}\right) > k_n \geq n$, risulta $f\left(a_{k_n}\right) \to +\infty \neq f(c)$; quindi f non è continua in c.

Dimostriamo ora che, posto $M = \sup f$, risulta $M \in f(K)$. Per la caratterizzazione dell'estremo superiore 1.2.42, qualunque sia $n \in \mathbb{N}$ esiste un elemento di K, che indichiamo con a_n, tale che $f(a_n) > M - 1/(n+1)$. Poiché K è compatto, esiste una sottosuccessione $\left(a_{k_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a un elemento c di K. Poiché f è continua in c si ha $f\left(a_{k_n}\right) \to f(c)$, d'altra parte, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha

$$M - (1/k_n) < f\left(a_{k_n}\right) \leq M,$$

quindi $f\left(a_{k_n}\right) \to M$; pertanto $M = f(c) \in f(K)$. ■

3.5.9 Esempio. Osserviamo che una funzione continua in un insieme non compatto può essere illimitata o, pur essendo limitata, non avere massimo o non avere minimo.

Le funzioni f_1, f_2 e f_3, introdotte nell'esempio 3.2.1 sono polinomiali o razionali fratte, quindi continue per l'esempio 3.5.7. Il dominio di f_1 e f_2 è $\mathbb{R}$ che non è limitato, quindi non è compatto; il dominio di f_3 è $]-1,1[$ che non è chiuso, quindi non è compatto. Le funzioni f_1 e f_3 non sono limitate, f_2 è limitata, ma non ha minimo. ◀

[8] Il teorema prende il nome dal già citato Karl Weierstrass (v. nota 6) che lo espose nelle sue lezioni tenute a Berlino nel 1861.

3.5.10 Teorema (di Bolzano[9] o degli zeri)

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Se $f(a)f(b)<0$ e f è continua, allora esiste $c\in\,]a,b[$ tale che $f(c)=0$.

Dimostrazione. Consideriamo il caso $f(a)<0<f(b)$, il caso $f(b)<0<f(a)$ si tratta in modo analogo.

Poniamo $a_0=a$, $b_0=b$ e $c_0=(a+b)/2$, cioè c_0 è il punto medio dell'intervallo $[a,b]$. Se $f(c_0)=0$, la tesi è verificata. Se $f(c_0)>0$ poniamo $a_1=a_0$ e $b_1=c_0$, se invece $f(c_0)<0$ poniamo $a_1=c_0$ e $b_1=b_0$. In entrambi i casi risulta $f(a_1)<0<f(b_1)$, $a_0\le a_1<b_1\le b_0$ e $b_1-a_1=(b_0-a_0)/2$.

Poniamo poi $c_1=(a_1+b_1)/2$, cioè c_1 è il punto medio dell'intervallo $[a_1,b_1]$. Procedendo come prima, se $f(c_1)=0$ la tesi è verificata. Se $f(c_1)>0$ poniamo $a_2=a_1$ e $b_2=c_1$, se invece $f(c_1)<0$ poniamo $a_2=c_1$ e $b_2=b_1$. In entrambi i casi risulta $f(a_2)<0<f(b_2)$, $a_1\le a_2<b_2\le b_1$ e $b_2-a_2=(b_1-a_1)/2=(b_0-a_0)/2^2$.

Ripetiamo successivamente questa procedura. Se dopo un numero finito di passi la funzione si annulla nel punto medio dell'intervallo la tesi è verificata; altrimenti si prosegue costruendo due successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tali che:

1. $\forall n\in\mathbb{N}$, si ha $a_0\le a_n<b_n\le b_0$;
2. la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente e la successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente;
3. $\forall n\in\mathbb{N}$, si ha $b_n-a_n=(b_0-a_0)/2^n$;
4. $\forall n\in\mathbb{N}$, si ha $f(a_n)<0<f(b_n)$.

La successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente e superiormente limitata, perché b_0 è un suo maggiorante; pertanto, per il teorema sul limite delle successioni monotòne 2.3.2, è convergente. Sia c il suo limite che, per il teorema del confronto per le successioni 2.2.5, appartiene ad $[a,b]$. Si ha inoltre

$$\lim_{n\to+\infty} b_n=\lim_{n\to+\infty}\left(a_n+\frac{b-a}{2^n}\right)=c\,.$$

Poiché f è continua in c, per il teorema del confronto 2.2.5, si ha

$$f(c)=\lim_{n\to+\infty} f(a_n)\le 0,\qquad f(c)=\lim_{n\to+\infty} f(b_n)\ge 0.$$

Pertanto $f(c)=0$. ■

Il teorema di Bolzano assicura che una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato, se assume valore maggiore di 0 in un estremo dell'intervallo e valore minore di 0 nell'altro estremo, allora assume valore 0 in almeno un punto. Ovviamente la conclusione vale anche se i punti il punto in cui f è maggiore di 0 e quello in cui è minore di 0 non sono gli estremi dell'intervallo. Inoltre il risultato vale anche se si considera un qualunque numero reale d al posto di 0. Queste osservazioni portano al teorema seguente.

[9] Il teorema prende il nome dal già citato Bernard Bolzano (v. nota 6) che lo dimostrò nel 1817.

3.5.11 Teorema (dei valori intermedi)

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$. Se I è un intervallo e f è continua, allora $f(I)$ è un intervallo, eventualmente degenere.

Dimostrazione. Proviamo che, se $a, b \in I$ sono tali che $f(a) < f(b)$, allora qualunque sia $d \in \left]f(a), f(b)\right[$ risulta $d \in f(I)$. Consideriamo il caso $a < b$, l'altro caso è analogo.

Sia $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ tale che $g(x) = f(x) - d$. Poiché f è continua anche g è continua; inoltre $g(a) = f(a) - d < 0$, mentre $g(b) = f(b) - d > 0$. Pertanto, per il teorema degli zeri, esiste $c \in]a,b[$ tale che $g(c) = 0$, cioè $f(c) = d$, quindi $d \in f\big(]a,b[\big) \subseteq f(I)$. ■

3.5.12 Esempio. Utilizziamo il teorema dei valori intermedi per dimostrare nuovamente, in modo più semplice, il teorema sull'esistenza della radice n-sima 1.4.6.

Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Consideriamo la funzione

$$f_{14} : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, \qquad f_{14}(x) = x^n .$$

Si ha $f_{14}(0) = 0$ e, $\forall x \in [0,+\infty[$, risulta $f_{14}(x) \geq 0$, quindi $0 = \min Im(f_{14})$. Inoltre si ha $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$, quindi, per il teorema 3.3.12, affermazione II, f_{14} è superiormente illimitata. Poiché f_{14} è continua e il suo dominio è un intervallo, per il teorema dei valori intermedi 3.5.11, l'immagine di f_{14} è un intervallo. Poiché l'immagine ha minimo 0 ed è superiormente illimitata, si ha $Im(f_{14}) = [0,+\infty[$. Pertanto, qualunque sia $a \in [0,+\infty[$, si ha $a \in Im(f_{14})$, quindi esiste $x \in [0,+\infty[$ tale che $f_{14}(x) = a$, cioè $x^n = a$. ◀

Per le funzioni monotòne vale un teorema che, in un certo senso, è l'inverso di quello dei valori intermedi.

3.5.13 Teorema

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$. Se f è monotòna e $f(A)$ è un intervallo, allora f è continua.

Dimostrazione. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ crescente e dimostriamo che se f non è continua, allora $f(A)$ non è un intervallo. Se f è decrescente la dimostrazione è analoga.

Sia $c \in A$ tale che f non è continua in c. Poiché una funzione è continua nei punti isolati del dominio, si ha $c \in D(A)$, quindi $c \in D\big(A \cap]-\infty,c[\big)$ oppure $c \in D\big(A \cap]c,+\infty[\big)$. Per il teorema sul limite delle funzioni monotòne 3.4.3, nel primo caso esiste $\lim_{x\to c^-} f(x)$ e nel secondo caso esiste $\lim_{x\to c^+} f(x)$; poiché f non è continua in c, almeno uno di tali limiti è diverso da $f(c)$.

Supponiamo ad esempio che sia $c \in D\big(A \cap]-\infty,c[\big)$ e $\lim_{x\to c^-} f(x) \neq f(c)$. Poiché f è crescente, $\forall x \in A \cap]-\infty,c[$ si ha $f(x) \leq f(c)$, quindi $\sup f\big(A \cap]-\infty,c[\big) \leq f(c)$. D'altra parte, per il teorema sul limite delle funzioni monotòne 3.4.3, affermazione III, si ha $\sup f\big(A \cap]-\infty,c[\big) = \lim_{x\to c^-} f(x) \neq f(c)$, quindi $\sup f\big(A \cap]-\infty,c[\big) < f(c)$.

Qualunque sia $x \in A$, se $x < c$, allora $f(x) \leq \sup f\big(A \cap]-\infty,c[\big)$, se invece $x \geq c$, allora $f(x) \geq f(c)$, pertanto se y è compreso tra $\sup f\big(A \cap]-\infty,c[\big)$ e $f(c)$, allora $y \notin f(A)$. Scelto $\overline{x} \in A \cap]-\infty,c[$, tali y sono compresi tra $f(\overline{x})$ e $f(c)$, perciò $f(A)$ non è un intervallo. ■

Studiamo la continuità dell'inversa di una funzione iniettiva. Come mostra il seguente esempio, in generale funzione iniettiva continua può avere inversa discontinua.

3.5.14 Esempio. Sia

$$f_{15}\colon [0,1]\cup\,]2,3]\to\mathbb{R}, \qquad f_{15}(x)=\begin{cases} x\,, & \text{se } x\in[0,1]\,,\\ x-1\,, & \text{se } x\in\,]2,3]\,. \end{cases}$$

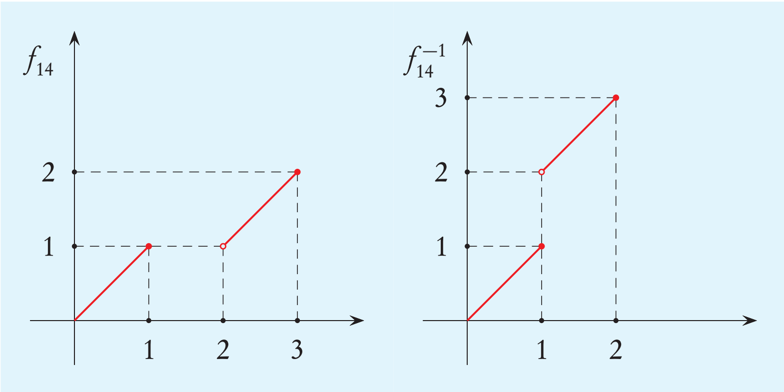


Figura 3.5.1
La funzione f_{14} studiata nell'esempio 3.5.14 (a sinistra) e la sua inversa (a destra).

Studiamo la continuità e la monotonia di f_{15}.

Ogni punto di $[0,1]$ ha un intorno che non interseca $]2,3]$, pertanto per stabilire la continuità di f_{15} nei punti di $[0,1]$ è sufficiente studiare la continuità di $f_{15}|_{[0,1]}$. Tale funzione è polinomiale, quindi è continua, perciò f_{15} è continua in $[0,1]$. Analogamente ogni punto di $]2,3]$ ha un intorno che non interseca $[0,1]$, $f_{15}|_{]2,3]}$ è polinomiale e quindi continua; perciò f_{15} è continua anche in $]2,3]$. Quindi f_{15} è continua.

Siano $x,y\in[0,1]\cup\,]2,3]$, con $x<y$. Evidentemente se $x,y\in[0,1]$ o $x,y\in\,]2,3]$ si ha $f_{15}(x)<f_{15}(y)$. Se $x\in[0,1]$ e $y\in\,]2,3]$, allora $f_{15}(x)\le 1<f_{15}(y)$. Perciò f_{15} è strettamente crescente, quindi, per il teorema 3.4.1, è iniettiva.

Si verifica facilmente che $Im(f_{15})=[0,2]$ e che

$$f_{15}^{-1}\colon [0,2]\to\mathbb{R}, \qquad f_{15}^{-1}(x)=\begin{cases} x\,, & \text{se } x\in[0,1]\,,\\ x+1\,, & \text{se } x\in\,]1,2]\,. \end{cases}$$

Pertanto risulta $\lim_{x\to 1^-} f_{15}^{-1}(x)=\lim_{x\to 1^-} x=1$ e $\lim_{x\to 1^+} f_{15}^{-1}(x)=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2$, quindi f_{15}^{-1} non è continua in 1. ◀

Si può provare la continuità di una funzione inversa utilizzando il teorema 3.5.13. Questo richiede la monotonia di una funzione, a tal fine risultano utili i seguenti teoremi.

3.5.15 Teorema

Siano $I\subseteq\mathbb{R}$ intervallo, $f\colon I\to\mathbb{R}$ continua e iniettiva, $a,b,c\in I$.

I) Se $a<b$, $a<c$ e $f(a)<f(b)$, allora $f(a)<f(c)$.

II) Se $a<b$, $c<b$ e $f(a)<f(b)$, allora $f(c)<f(b)$.

Questo teorema ha una semplice interpretazione geometrica. Consideriamo una funzione f definita in un intervallo, continua e iniettiva. Se esiste un punto del grafico di f che si trova a destra e in alto rispetto al punto $(a, f(a))$, allora tutta la parte di grafico a destra di $(a, f(a))$ si trova più in alto. Analogamente, se esiste un punto del grafico di f che si trova a sinistra e in basso rispetto al punto $(b, f(b))$, allora tutta la parte di grafico a sinistra di $(b, f(b))$ si trova più in basso.

Il teorema rimane valido se si scambia alto con basso.

Dimostrazione. I) Dimostriamo il teorema per assurdo.

Supponiamo quindi che sia $f(c) \leq f(a)$. Poiché f è iniettiva, si ha $f(c) \neq f(a)$, quindi $f(c) < f(a)$. Poiché $f(c) < f(a) < f(b)$, per il teorema dei valori intermedi $f(a)$ appartiene all'immagine della restrizione di f all'intervallo di estremi c e b, cioè esiste d appartenente a tale intervallo tale che $f(d) = f(a)$; poiché a non appartiene all'intervallo di estremi c e b, si ha $a \neq d$. Ciò è assurdo perché f è iniettiva.

Pertanto $f(c) > f(a)$.

II) La dimostrazione è analoga a quella dell'affermazione I. ■

Per il teorema 3.4.1, ogni funzione strettamente monotòna è iniettiva. Il viceversa è vero sotto ipotesi aggiuntive.

3.5.16 Teorema

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$. Se I è un intervallo e f è continua e iniettiva, allora f è strettamente monotòna.

Dimostrazione. Dimostriamo che se f non è strettamente decrescente, allora è strettamente crescente.

Se f non è strettamente decrescente, esistono $\alpha, \beta \in I$ tali che $\alpha < \beta$ e $f(\alpha) \leq f(\beta)$; poiché f è iniettiva non può valere l'uguaglianza, quindi $f(\alpha) < f(\beta)$.

Siano $x, y \in I$, tali che $x < y$.

Se $y > \alpha$ si può applicare il teorema 3.5.15, affermazione I, con $a = \alpha$, $b = \beta$ e $c = y$, pertanto $f(\alpha) < f(y)$; successivamente si può applicare il teorema 3.5.15, affermazione II, con $a = \alpha$, $b = y$ e $c = x$ quindi $f(x) < f(y)$.

Se invece $y \leq \alpha$, allora si ha $x < \alpha$, quindi si può applicare il teorema 3.5.15, affermazione II, con $a = \alpha$, $b = \beta$ e $c = x$, pertanto $f(x) < f(\beta)$; successivamente si può applicare il teorema 3.5.15, affermazione I, con $a = x$, $b = \beta$ e $c = y$, quindi $f(x) < f(y)$.

Pertanto f è strettamente crescente. ■

3.5.17 Teorema (sulla continuità della funzione inversa)

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$.

I) Se f è strettamente monotòna, allora f^{-1} è continua.

II) Se f è continua e iniettiva, allora f^{-1} è continua.

DIMOSTRAZIONE. I) Per il teorema 3.4.1, f è iniettiva e f^{-1} è strettamente monotòna. L'immagine di f^{-1} è uguale al dominio di f, cioè a I, che è un intervallo. Quindi il teorema 3.5.13 assicura che f^{-1} è continua.

II) Per il teorema 3.5.16 f è strettamente monotòna, quindi, per l'affermazione I, f^{-1} è continua. ■

3.5.18 Esempio. Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Consideriamo la funzione

$$f_{14} \colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}, \qquad f_{14}(x) = x^n,$$

già studiata nell'esempio 3.5.12. Questa funzione è strettamente monotòna e il suo dominio è un intervallo. Pertanto, per il teorema 3.5.17, affermazione I, f_{14}^{-1} è continua. La funzione f_{14}^{-1} è la funzione radice n-sima. ◀

3.5.3 Funzioni uniformemente continue

Introduciamo ora un concetto più restrittivo della continuità, che sarà utile per lo studio di alcune proprietà delle funzioni reali di variabile reale.

Se una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ è continua, allora, $\forall c \in A$, si ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \colon \forall x \in A, \quad |x-c| < \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(c)| < \varepsilon,$$

quindi se x è "vicino" a c, allora $f(x)$ è "vicino" a $f(c)$, ma δ_ε, la soglia che stabilisce quando x è "vicino" a c, dipende dalla scelta di c. Si ottiene una condizione più restrittiva chiedendo che δ_ε non dipenda da c, cioè che la scelta di δ_ε sia "uniforme".

Questa richiesta porta alla seguente definizione.

Definizione di funzione uniformemente continua

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$. Diciamo che f è **uniformemente continua** quando

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \colon \forall x, y \in A, \quad |x-y| < \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

La relazione tra continuità e uniforme continuità è stabilita dal teorema seguente.

3.5.19 Teorema

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$. Se f è uniformemente continua, allora è continua.

DIMOSTRAZIONE. Per definizione di uniforme continuità si ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \colon \forall x, y \in A, \quad |x-y| < \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Per ogni $c \in A$, ponendo $y = c$, da qui segue

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \colon \forall x \in A, \quad |x-c| < \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

perciò f è continua in c. ■

Come la continuità, anche la uniforme continuità può essere caratterizzata tramite i limiti di successioni.

3.5.20 Teorema

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f: A \to \mathbb{R}$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

I) f è uniformemente continua;

II) qualunque siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in A tali che $a_n - b_n \to 0$ risulta $f(a_n) - f(b_n) \to 0$.

Dimostrazione. I $\Longrightarrow$ II) Per definizione di uniforme continuità si ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \forall x, y \in A, \quad |x-y| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow \left|f(x) - f(y)\right| < \varepsilon;$$

siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in A tali che $a_n - b_n \to 0$, cioè tali che

$$\forall \eta \in \mathbb{R}^+, \exists n_\eta \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_\eta \Longrightarrow |a_n - b_n| < \eta.$$

Fissato $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, se $n > n_{\delta_\varepsilon}$, allora $|a_n - b_n| < \delta_\varepsilon$, quindi $\left|f(a_n) - f(b_n)\right| < \varepsilon$. Pertanto $f(a_n) - f(b_n) \to 0$.

II $\Longrightarrow$ I) Dimostriamo che se f non è uniformemente continua, allora esistono due successioni in A, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tali che $a_n - b_n \to 0$, ma $f(a_n) - f(b_n)$ non converge a 0.

Se f non è uniformemente continua, allora

$$\exists \overline{\varepsilon} \in \mathbb{R}^+ : \forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists x_\delta, y_\delta \in A : \quad |x_\delta - y_\delta| < \delta \wedge \left|f(x_\delta) - f(y_\delta)\right| \geq \overline{\varepsilon}.$$

In particolare, scegliendo $\delta = 1/(n+1)$, esistono due elementi di A, che indichiamo con a_n e b_n, tali che $|a_n - b_n| < 1/(n+1)$ e $\left|f(a_n) - f(b_n)\right| \geq \overline{\varepsilon}$. Pertanto $a_n - b_n \to 0$, ma non si ha $f(a_n) - f(b_n) \to 0$. ∎

3.5.21 Esempio. Utilizziamo il teorema 3.5.20 per studiare la uniforme continuità delle funzioni introdotte nell'esempio 3.1.4.

Tali funzioni sono polinomiali o razionali fratte, quindi, per l'esempio 3.5.7, esse sono continue.

Consideriamo la funzione

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_1(x) = x^2 - 1.$$

Posto, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = n + (1/n)$, $b_n = n$, risulta $a_n - b_n = 1/n \to 0$ e

$$f_1(a_n) - f_1(b_n) = \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - 1 - n^2 + 1 = 2 + \frac{1}{n^2} \to 2.$$

Quindi $f_1(a_n) - f_1(b_n)$ non tende a 0, perciò, per il teorema 3.5.20, f_1 non è uniformemente continua.

Consideriamo la funzione

$$f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_2(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{R}$ tali che $a_n - b_n \to 0$. Si ha

$$\begin{aligned}|f_2(a_n) - f_2(b_n)| &= \left|\frac{1}{a_n^2+1} - \frac{1}{b_n^2+1}\right| = \frac{|a_n^2 - b_n^2|}{(a_n^2+1)(b_n^2+1)} = \frac{|a_n - b_n||a_n + b_n|}{(a_n^2+1)(b_n^2+1)} \leq \\ &\leq \frac{|a_n - b_n|\big(|a_n| + |b_n|\big)}{(a_n^2+1)(b_n^2+1)} \leq |a_n - b_n|\left(\frac{|a_n|}{a_n^2+1} + \frac{|b_n|}{b_n^2+1}\right).\end{aligned}$$

Poiché

$$0 \leq \big(|a_n| - 1\big)^2 = |a_n|^2 - 2|a_n| + 1 = a_n^2 - 2|a_n| + 1,$$

risulta $2|a_n| \leq a_n^2 + 1$ e una disuguaglianza analoga vale per b_n. Quindi si ha

$$|f_2(a_n) - f_2(b_n)| \leq |a_n - b_n|\left(\frac{|a_n|}{a_n^2+1} + \frac{|b_n|}{b_n^2+1}\right) \leq |a_n - b_n|\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = |a_n - b_n|.$$

Poiché $a_n - b_n \to 0$, da questa disuguaglianza segue che $f_2(a_n) - f_2(b_n) \to 0$. Pertanto f_2 è uniformemente continua.

Consideriamo la funzione

$$f_3\colon]-1,1[\to \mathbb{R}, \qquad f_3(x) = \frac{x}{1-x^2}.$$

Posto, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 1 - (1/2n)$, $b_n = 1 - (1/n)$, risulta $a_n - b_n = 1/(2n) \to 0$ e

$$\begin{aligned}f_3(a_n) - f_3(b_n) &= \frac{1-(1/2n)}{1-\big(1-(1/2n)\big)^2} - \frac{1-(1/n)}{1-\big(1-(1/n)\big)^2} = \\ &= \frac{1-(1/2n)}{(2/2n)-(1/2n)^2} - \frac{1-(1/n)}{(2/n)-(1/n)^2} = \frac{4n^2-2n}{4n-1} - \frac{n^2-n}{2n-1} = \\ &= \big(n + o(n)\big) - \left(\frac{1}{2}n + o(n)\right) = \frac{1}{2}n + o(n) \to +\infty.\end{aligned}$$

Pertanto f_3 non è uniformemente continua. ◀

3.5.22 Teorema

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ e $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione in A. Se f è uniformemente continua e $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente, allora $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente.

Osserviamo che nell'enunciato del teorema viene richiesto che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia convergente, senza precisare che il limite appartenga al dominio. Quindi la semplice continuità della funzione non assicura che $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ sia convergente.

Dimostrazione. Per il teorema 2.3.12, una successione è convergente se e solo se è di Cauchy, pertanto è sufficiente dimostrare che se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy, allora $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy.

Se f è uniformemente continua si ha

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+,\ \exists\delta_\varepsilon\in\mathbb{R}^+\colon\ \forall x,y\in A,\quad |x-y|<\delta_\varepsilon \implies \big|f(x)-f(y)\big|<\varepsilon\,,$$

mentre se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy, allora si ha

$$\forall\eta\in\mathbb{R}^+,\ \exists n_\eta\in\mathbb{N}\colon\ \forall n,m\in\mathbb{N},\quad n,m>n_\eta \implies |a_n-a_m|<\eta\,.$$

Fissato $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$, se $n,m\in\mathbb{N}$ sono tali che $n,m>n_{\delta_\varepsilon}$, allora $|a_n-a_m|<\delta_\varepsilon$, pertanto $\big|f(a_n)-f(a_m)\big|<\varepsilon$. Quindi la successione $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy. ■

Come mostra l'esempio 3.5.21, dalla continuità di una funzione non segue necessariamente la uniforme continuità; ciò risulta vero per domini particolari.

3.5.23 Teorema (di Heine-Cantor[10])

Siano $K\subseteq\mathbb{R}$ e $f\colon K\to\mathbb{R}$. Se f è continua e K è compatto, allora f è uniformemente continua.

Dimostrazione. Dimostriamo che se f non è uniformemente continua, allora esiste $c\in K$ tale che f non è continua in c.

Supponiamo quindi f non uniformemente continua, cioè

$$\exists\bar\varepsilon\in\mathbb{R}^+\colon\ \forall\delta\in\mathbb{R}^+,\ \exists x_\delta,y_\delta\in K\colon\quad |x_\delta-y_\delta|<\delta\ \wedge\ \big|f(x_\delta)-f(y_\delta)\big|\geq\bar\varepsilon\,.$$

In particolare, $\forall n\in\mathbb{N}$, scegliendo $\delta=1/(n+1)$, esistono due elementi di K, che indichiamo con a_n e b_n, tali che $|a_n-b_n|<1/(n+1)$ e $\big|f(a_n)-f(b_n)\big|\geq\bar\varepsilon$. Poiché K è compatto, esiste una sottosuccessione $\big(a_{k_n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$, convergente a un elemento c di K. Inoltre si ha

$$\big|a_{k_n}-b_{k_n}\big|\leq\frac{1}{k_n}\to 0\,,$$

quindi $a_{k_n}-b_{k_n}\to 0$, pertanto si ha anche $b_{k_n}\to c$. Le successioni $\big(a_{k_n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\big(b_{k_n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ sono convergenti a c, ma, $\forall n\in\mathbb{N}$, si ha $\big|f\big(a_{k_n}\big)-f\big(b_{k_n}\big)\big|\geq\bar\varepsilon$, quindi $\Big(f\big(a_{k_n}\big)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\Big(f\big(b_{k_n}\big)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ non possono avere lo stesso limite; pertanto, per il teorema 3.5.4, f non è continua in c. ■

[10]Il teorema prende il nome da Heinrich Eduard Heine (Berlino, 1821 - Halle, Germania, 1881) e da Georg Cantor (San Pietroburgo 1845 - Halle, Germania, 1918). Heine enunciò e dimostrò il teorema in un articolo del 1872; nell'articolo Heine riconosce che Cantor aveva ispirato il suo lavoro. Il teorema era già stato enunciato, senza una dimostrazione valida, da Bolzano (vedi nota 6) negli anni 30 del XIX secolo e dimostrato da Johann Lejeune Dirichlet (Düren, Germania 1805 - Göttingen, Germania, 1859) nel 1854.

Heine ha studiato varie questioni di analisi (tra cui la compattezza di insiemi) e ha dato la definizione di continuità uniforme.

Cantor è stato il fondatore della teoria degli insiemi e dello studio della loro cardinalità.

Le funzioni uniformemente continue possono essere prolungate in modo naturale a una funzione uniformemente continua definita nella chiusura del dominio.

3.5.24 Teorema (sulla prolungabilità delle funzioni uniformemente continue)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$. Se f è uniformemente continua, allora esiste $g : \overline{A} \to \mathbb{R}$ uniformemente continua e tale che $g|_A = f$.

Dimostrazione. Se $c \in \overline{A}$, per il teorema 3.1.7, affermazione I, esiste $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione in A convergente a c; per il teorema 3.5.22, $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente. Se $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è un'altra successione in A convergente a c, allora $a_n - b_n \to 0$, quindi, per il teorema 3.5.20, $f(a_n) - f(b_n) \to 0$, cioè $\lim_{n\to+\infty} f(b_n) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n)$. Quindi $\lim_{n\to+\infty} f(a_n)$ dipende da c e non dalla successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a c scelta. Indichiamo con $g(c)$ tale limite.

Abbiamo così definito una funzione $g : \overline{A} \to \mathbb{R}$. Se $c \in A$, allora possiamo definire $g(c)$ mediante la successione che vale costantemente c e si ha

$$g(c) = \lim_{n\to+\infty} f(c) = f(c);$$

quindi $g|_A = f$.

Dimostriamo che g è uniformemente continua. Si ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+,\ \exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}^+ :\ \forall x, y \in A, \quad |x - y| < \delta_\varepsilon \implies \big|f(x) - f(y)\big| < \varepsilon .$$

Sia $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Fissati $x, y \in \overline{A}$ tali che $|x - y| < \delta_\varepsilon/3$, esistono $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in A convergenti, rispettivamente, a x e a y. Quindi, per la definizione di g, si ha $f(a_n) \to g(x)$ e $f(b_n) \to g(y)$; pertanto, definitivamente, risulta $|a_n - x| < \delta_\varepsilon/3$, $|b_n - y| < \delta_\varepsilon/3$, $\big|f(a_n) - g(x)\big| < \varepsilon$ e $\big|f(b_n) - g(y)\big| < \varepsilon$. Da ciò segue

$$|a_n - b_n| \le |a_n - x| + |x - y| + |y - b_n| < \frac{\delta_\varepsilon}{3} + \frac{\delta_\varepsilon}{3} + \frac{\delta_\varepsilon}{3} = \delta_\varepsilon ;$$

quindi, per la uniforme continuità di f, si ha $\big|f(a_n) - f(b_n)\big| < \varepsilon$; pertanto, scegliendo n in modo opportuno,

$$\big|g(x) - g(y)\big| \le \big|g(x) - f(a_n)\big| + \big|f(a_n) - f(b_n)\big| + \big|f(b_n) - g(y)\big| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon .$$

Perciò g è uniformemente continua. ■

4

Calcolo differenziale per funzioni reali di variabile reale

4.1 Derivate

4.1.1 Definizioni e proprietà fondamentali

In questo capitolo definiamo e studiamo la derivata di una funzione. Si tratta di un concetto fondamentale che ha numerosissime applicazioni.

Vogliamo studiare la rapidità di variazione di una funzione vicino a un punto del suo dominio. Un'informazione su quanto rapidamente varia una funzione f è fornita dal rapporto tra la variazione di f quando si incrementa di una certa quantità il punto in cui essa viene calcolata e l'incremento stesso. Se consideriamo un punto c e un incremento h positivo, tale rapporto è $\big(f(c+h)-f(c)\big)/h$. Ponendo $d=c+h$, il rapporto diventa

$$\frac{f(d)-f(c)}{d-c}.$$

Osserviamo che, scambiando tra loro c e d, il rapporto non cambia; è quindi indifferente considerare $d>c$ (come si ottiene se $d=c+h$ con $h>0$) oppure $d<c$. Chiamiamo rapporto incrementale questo rapporto.

Il rapporto incrementale ha un semplice significato geometrico. Determiniamo l'equazione di una retta del piano cartesiano che interseca il grafico di f in due punti di ascissa c e d, rispettivamente. Una retta passante per $\big(c,f(c)\big)$ ha equazione $y-f(c)=m(x-c)$, dove $m\in\mathbb{R}$ è il suo coefficiente angolare. Tale retta passa anche per $\big(d,f(d)\big)$ se risulta $f(d)-f(c)=m(d-c)$, cioè $m=\big(f(d)-f(c)\big)/(d-c)$. Quindi il rapporto incrementale è il coefficiente angolare della retta che interseca il grafico di f nei due punti scelti.

Il rapporto incrementale ha anche un significato fisico. Se f è la legge del moto di un punto materiale che si muove su una retta, il rapporto incrementale è il rapporto tra uno spostamento del punto e il tempo impiegato per effettuare tale spostamento; si ha quindi la velocità media del punto nell'intervallo di tempo considerato. Precisiamo che si tratta della velocità media con segno: è positiva se il punto si sposta nella direzione delle ascisse crescenti, negativa in caso contrario.

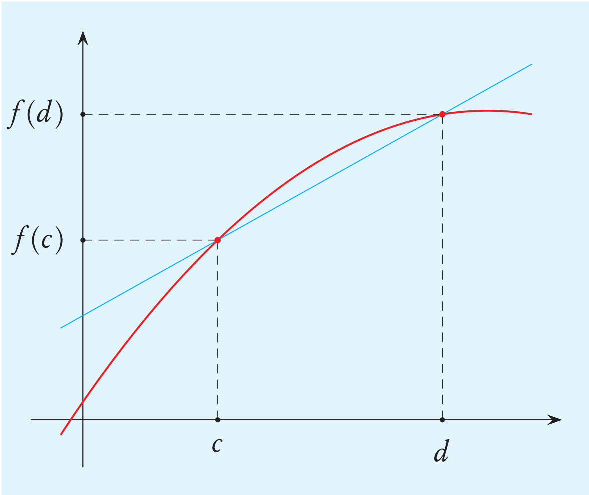


Figura 4.1.1
Il rapporto incrementale di f tra c e d è il coefficiente angolare della retta passante per i due punti $\big(c,f(c)\big)$ e $\big(d,f(d)\big)$.

Formalizziamo questo concetto nella seguente definizione.

Definizione di rapporto incrementale di una funzione

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ e $c,d \in A$ tali che $c \neq d$. Chiamiamo **rapporto incrementale** di f tra c e d il numero reale

$$R_f(d,c) = \frac{f(d)-f(c)}{d-c}.$$

Evidentemente scambiando c e d il rapporto incrementale non cambia, cioè risulta $R_f(d,c)=R_f(c,d)$.

Riprendiamo il significato geometrico del rapporto incrementale. Se la funzione f non ha brusche variazioni, possiamo aspettarci che, quando d è vicino a c, la retta passante per $\big(c,f(c)\big)$ e $\big(d,f(d)\big)$ sia "vicina" alla porzione del grafico di f compresa tra tali punti. Questo suggerisce di considerare punti d sempre più vicini a c, contando sul fatto che la retta sia sempre più "vicina" al grafico della funzione. Poiché la retta è individuata dal suo coefficiente angolare, che è il rapporto incrementale di f tra c e d, risulta naturale considerare il limite del rapporto incrementale per d che tende a c. Supponendo che tale limite esista e sia reale, indichiamolo con ℓ. Allora la retta passante per $\big(c,f(c)\big)$ e $\big(d,f(d)\big)$ "tende" alla retta passante per $\big(c,f(c)\big)$ di coefficiente angolare ℓ. Tale retta è quella che approssima meglio il grafico di f vicino a $\big(c,f(c)\big)$, cioè è la retta tangente al grafico in tale punto.

Consideriamo invece il significato fisico del rapporto incrementale. Se f è la legge del moto di un punto materiale che si muove su una retta, sappiamo che il rapporto incrementale tra c e d è la velocità media del punto nell'intervallo di tempo individuato da c e d. Se il punto non si muove a scatti, la velocità media in un intervallo di tempo piccolo è una buona approssimazione della velocità effettiva del punto. Risulta naturale considerare il limite della velocità media quando la durata dell'intervallo tende a 0, cioè per d che tende a c. Questo limite, se esiste, è la velocità all'istante c.

Formalizziamo questo concetto nella seguente definizione.

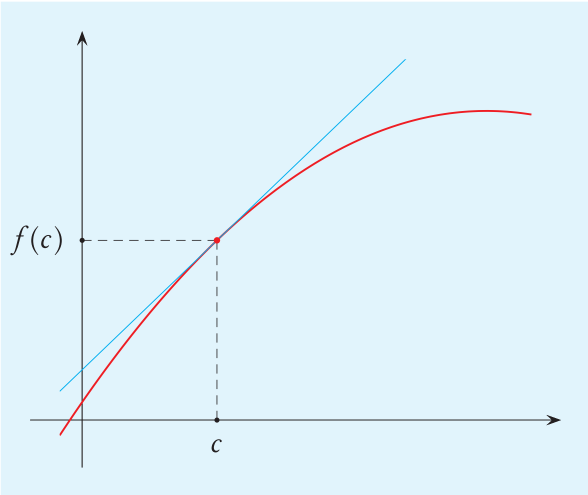


Figura 4.1.2
Il limite del rapporto incrementale di f è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel punto $\big(c, f(c)\big)$.

Definizione di funzione derivabile in un punto e di derivata

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $c \in A \cap D(A)$. Diciamo che f è **derivabile** in c quando esiste ed è reale

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

In tal caso chiamiamo **derivata** di f in c tale limite e lo indichiamo con $f'(c)$.

Per indicare la derivata di f in c si usano anche le notazioni

$$Df(c), \qquad \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=c}, \qquad \left.\frac{d}{dx} f(x)\right|_{x=c}.$$

Notiamo che la derivata in c di una funzione da A a $\mathbb{R}$ è definita quando $c \in A \cap D(A)$. Infatti, per definire il rapporto incrementale, occorre che c sia un punto del dominio; affinché sia definito il limite del rapporto incrementale, occorre che c sia un punto di accumulazione per il dominio.

Talvolta è utile definire la derivata esplicitando l'incremento della variabile da cui dipende la funzione, anziché il punto in cui essa viene calcolata; indicando con h l'incremento, si ha $x = c + h$, quindi

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} R_f(c + h, c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}.$$

Osserviamo che il limite di una funzione dipende solo dai valori che essa assume in un intorno del punto a cui tende la variabile (v. teorema 3.3.8). Pertanto anche la derivata di una funzione in un punto dipende solo dai valori che essa assume in un intorno di tale punto.

Come la continuità, anche la derivabilità di una funzione riguarda un punto del dominio, ma solitamente una funzione è derivabile in più punti; quindi è naturale definire la derivabilità in un insieme.

Definizione di funzione derivabile in un insieme

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ e $B \subseteq A \cap D(A)$.
Diciamo che f è **derivabile** in B quando $\forall c \in B$, f è derivabile in c.
Nel caso che sia $A \subseteq D(A)$ diciamo che f è **derivabile** quando è derivabile in A.

La condizione $A \subseteq D(A)$ è verificata, ad esempio, quando A è un intervallo oppure quando A è aperto.

Se f è derivabile risulta definita una funzione da A a $\mathbb{R}$ che a ogni $x \in A$ fa corrispondere $f'(x)$. Naturalmente indichiamo tale funzione con f'.

4.1.1 Esempio. Siano $\ell \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Consideriamo le funzioni:

$$\begin{aligned}
&f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, && f_1(x) = \ell, \\
&f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, && f_2(x) = x, \\
&f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, && f_3(x) = x^k, \\
&f_4 : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, && f_4(x) = \sqrt{x}, \\
&f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, && f_5(x) = |x|.
\end{aligned}$$

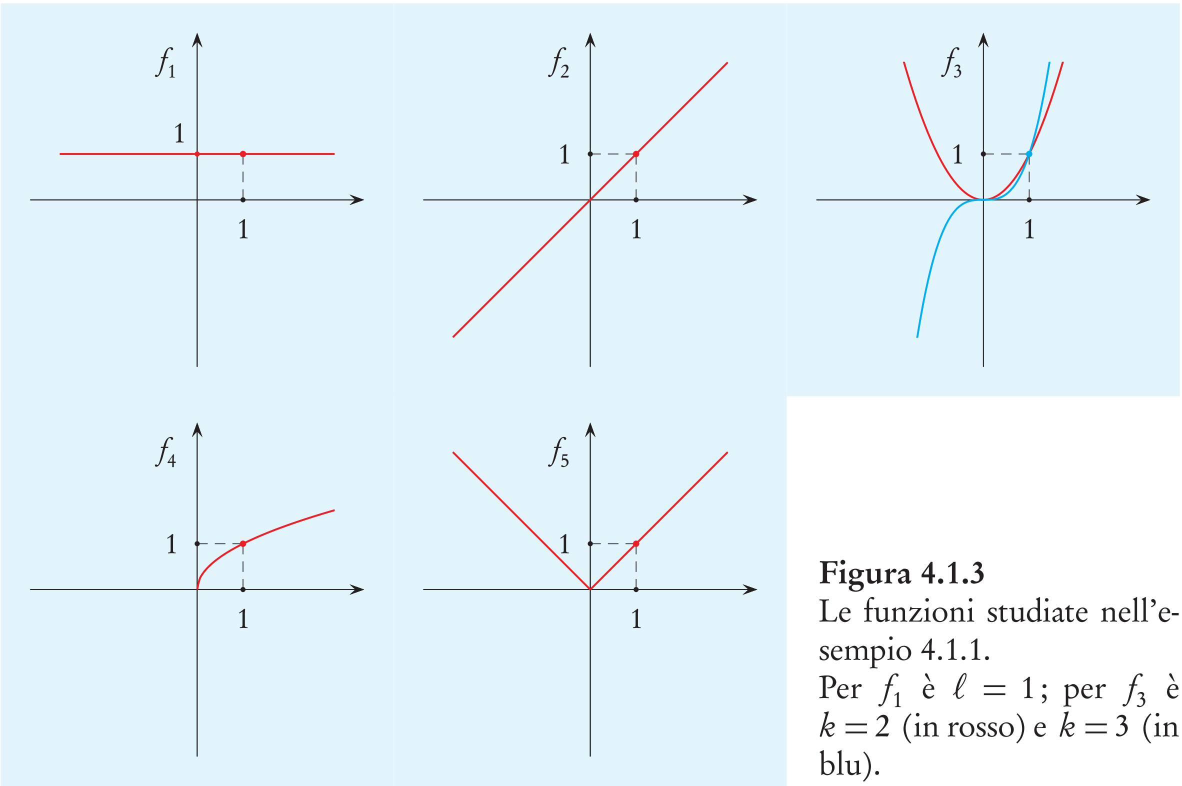


Figura 4.1.3
Le funzioni studiate nell'esempio 4.1.1.
Per f_1 è $\ell = 1$; per f_3 è $k = 2$ (in rosso) e $k = 3$ (in blu).

Sia $c \in \mathbb{R}$; $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{c\}$, si ha

$$R_{f_1}(x,c) = \frac{\ell - \ell}{x - c} = 0 \xrightarrow[x \to c]{} 0.$$

Pertanto f_1 è derivabile e, $\forall c \in \mathbb{R}$, si ha $f_1'(c) = 0$.

Sia $c \in \mathbb{R}$; $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{c\}$, si ha

$$R_{f_2}(x,c) = \frac{x-c}{x-c} = 1 \xrightarrow[x \to c]{} 1\,.$$

Pertanto f_2 è derivabile e, $\forall c \in \mathbb{R}$, si ha $f_2'(c) = 1$.

Sia $c \in \mathbb{R}$; $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{c\}$, utilizzando il teorema 1.3.19, si ha

$$R_{f_3}(x,c) = \frac{x^k - c^k}{x-c} = \frac{(x-c)\sum_{j=0}^{k-1} x^j c^{k-j-1}}{x-c} = \sum_{j=0}^{k-1} x^j c^{k-j-1} \xrightarrow[x \to c]{} \sum_{j=0}^{k-1} c^j c^{k-j-1} = k c^{k-1}\,.$$

Pertanto f_3 è derivabile e, $\forall c \in \mathbb{R}$, si ha $f_3'(c) = k c^{k-1}$.

Sia $c \in \mathbb{R}$; $\forall x \in [0,+\infty[\setminus \{c\}$, si ha

$$R_{f_4}(x,c) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{c}}{x-c} = \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{c}\right)}{(x-c)\left(\sqrt{x}+\sqrt{c}\right)} = \frac{x-c}{(x-c)\left(\sqrt{x}+\sqrt{c}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{c}} \xrightarrow[x \to c]{} \begin{cases} +\infty\,, & \text{se } c = 0\,, \\ \dfrac{1}{2\sqrt{c}}\,, & \text{se } c \in \,]0,+\infty[\,. \end{cases}$$

Pertanto f_4 è derivabile in $]0,+\infty[$ e, $\forall c \in \,]0,+\infty[$, si ha $f_4'(c) = 1/\left(2\sqrt{c}\right)$, mentre non è derivabile in 0.

Sia $c \in \mathbb{R}$; $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{c\}$, si ha

$$R_{f_5}(x,c) = \frac{|x| - |c|}{x-c}\,.$$

Se $c \in \mathbb{R}^+$, allora esiste un intorno di c incluso in $\mathbb{R}^+$; in tale intorno $|x| = x$, pertanto

$$\lim_{x \to c} R_{f_5}(x,c) = \lim_{x \to c} \frac{x-c}{x-c} = \lim_{x \to c} 1 = 1\,.$$

Se $c \in \mathbb{R}^-$, allora esiste un intorno di c incluso in $\mathbb{R}^-$; in tale intorno $|x| = -x$, pertanto

$$\lim_{x \to c} R_{f_5}(x,c) = \lim_{x \to c} \frac{-x+c}{x-c} = \lim_{x \to c}(-1) = -1\,.$$

Se $c = 0$ si ha

$$R_{f_5}(x,0) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1\,, & \text{se } x < 0\,, \\ 1\,, & \text{se } x > 0\,. \end{cases}$$

Quindi, per $x \to 0$, il limite sinistro del rapporto incrementale è -1, mentre il limite destro è 1; quindi il limite non esiste. Pertanto f_5 è derivabile in $\mathbb{R}^*$, mentre non è derivabile in 0.

Definiamo la **funzione segno**:

$$\operatorname{sgn}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1\,, & \text{se } x \in \mathbb{R}^-\,, \\ 0\,, & \text{se } x = 0\,, \\ 1\,, & \text{se } x \in \mathbb{R}^+\,. \end{cases}$$

Si ha, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $d|x|/dx = \operatorname{sgn}(x)$. ◀

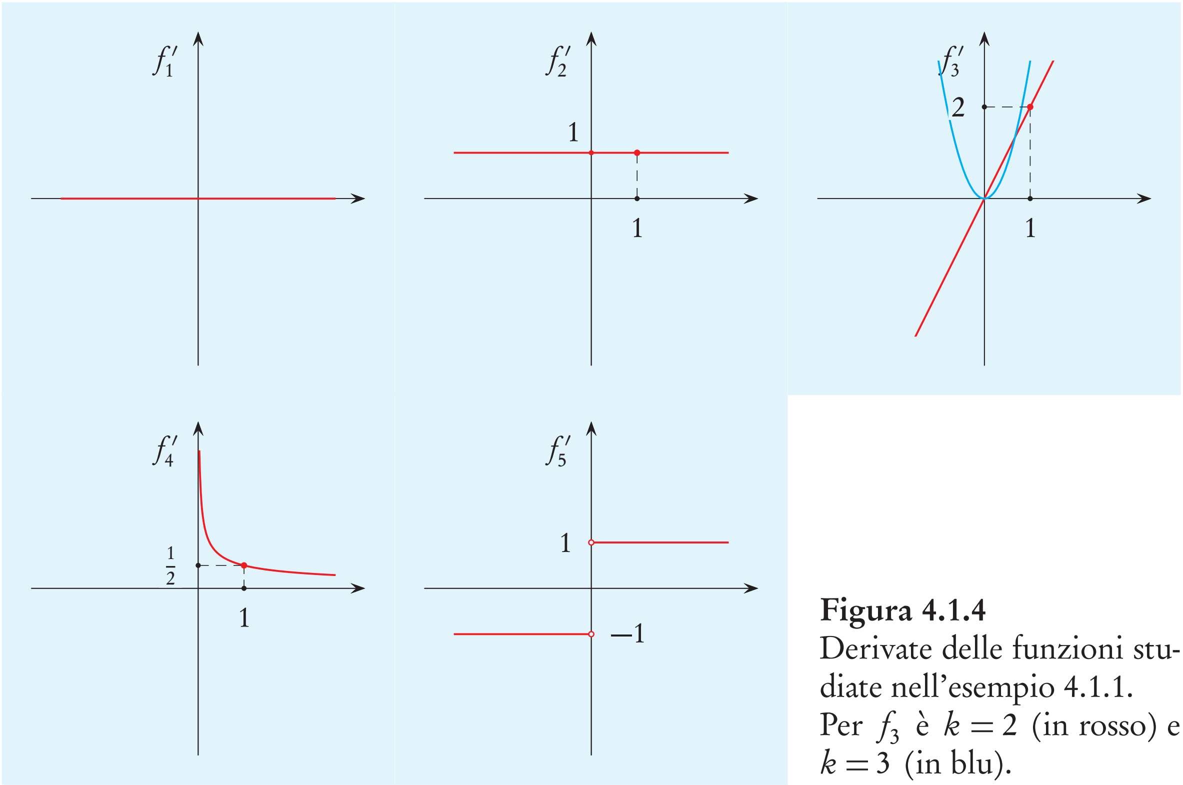


Figura 4.1.4
Derivate delle funzioni studiate nell'esempio 4.1.1. Per f_3 è $k=2$ (in rosso) e $k=3$ (in blu).

Introduciamo ora una caratterizzazione della derivabilità che risulta estremamente utile per provare le proprietà della derivata.

4.1.2 Teorema (caratterizzazione della derivabilità)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $c \in A \cap D(A)$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

I) f è derivabile in c;

II) esiste $\ell \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = f(c) + \ell(x-c) + o(x-c), \qquad \text{per } x \to c;$$

III) esiste $\varphi : A \to \mathbb{R}$ continua in c e tale che, $\forall x \in A$, si ha

$$f(x) = f(c) + \varphi(x)(x-c).$$

Se tali affermazioni sono vere risulta $f'(c) = \ell = \varphi(c)$.

Ricordiamo che la notazione $g(x) = o\big(h(x)\big)$, per $x \to c$, indica che $g(x)/h(x) \to 0$, per $x \to c$. Quindi l'uguaglianza $f(x) = f(c) + \ell(x-c) + o(x-c)$, che può essere scritta nella forma $f(x) - f(c) - \ell(x-c) = o(x-c)$, significa che si ha

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c) - \ell(x-c)}{x-c} = 0.$$

Dimostrazione. I $\Longrightarrow$ III) Supponiamo f derivabile in c. Sia $\varphi\colon A\to\mathbb{R}$ tale che

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}, & \text{se } x\in A\setminus\{c\},\\ f'(c), & \text{se } x=c\,.\end{cases}$$

Per la definizione di derivata φ è continua in c. Se $x\in A\setminus\{c\}$ si ha

$$f(c)+\varphi(x)(x-c)=f(c)+\frac{f(x)-f(c)}{x-c}(x-c)=f(c)+f(x)-f(c)=f(x),$$

mentre se $x=c$ si ha

$$f(c)+\varphi(x)(x-c)=f(c)+f'(c)(c-c)=f(c);$$

quindi, $\forall x\in A$, si ha

$$f(x)=f(c)+\varphi(x)(x-c).$$

Pertanto è verificata l'affermazione III con $\varphi(c)=f'(c)$.

III $\Longrightarrow$ II) Supponiamo che esista $\varphi\colon A\to\mathbb{R}$ continua in c e tale che, $\forall x\in A$, si ha $f(x)=f(c)+\varphi(x)(x-c)$. Allora

$$f(x)=f(c)+\varphi(c)(x-c)+\big(\varphi(x)-\varphi(c)\big)(x-c)=f(c)+\varphi(c)(x-c)+o(x-c),\quad \text{per } x\to c\,,$$

perché $\lim_{x\to c}\big(\varphi(x)-\varphi(c)\big)=0$.

Pertanto è verificata l'affermazione II con $\ell=\varphi(c)$.

II $\Longrightarrow$ I) Supponiamo che sia $f(x)=f(c)+\ell(x-c)+o(x-c)$, per $x\to c$. Allora si ha

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\frac{f(c)+\ell(x-c)+o(x-c)-f(c)}{x-c}=\ell+\frac{o(x-c)}{x-c}\xrightarrow[x\to c]{}\ell\,.$$

Pertanto è verificata l'affermazione I con $f'(c)=\ell$. ■

Per l'affermazione II, se f è derivabile in c, allora esiste un polinomio p, di grado al più 1, tale che la differenza $f(x)-p(x)$ è "piccola", nel senso che è $o(x-c)$, per $x\to c$. Tale polinomio è $p(x)=f(c)+f'(c)(x-c)$. Questo è l'unico polinomio di grado al più 1 che ha questa proprietà. Infatti se la differenza tra un polinomio e f è $o(x-c)$, per $x\to c$, allora la differenza si annulla in c, quindi il polinomio vale $f(c)$ in c, pertanto è del tipo $f(c)+\ell(x-c)$. Per l'affermazione II deve essere $\ell=f'(c)$.

Il grafico di tale polinomio è la retta di equazione $y=f(c)+f'(c)(x-c)$. Per i motivi già esposti, questa retta è quella che approssima meglio il grafico di f vicino al punto $\big(c,f(c)\big)$.

Se f è derivabile in c, chiamiamo **retta tangente** al grafico di f nel punto $\big(c,f(c)\big)$ la retta di equazione

$$y=f(c)+f'(c)(x-c).$$

4.1.3 Teorema (sulla continuità delle funzioni derivabili)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ e $c \in A \cap D(A)$. Se f è derivabile in c, allora f è continua in c.

Dimostrazione. Per la caratterizzazione della derivabilità 4.1.2, esiste $\varphi: A \to \mathbb{R}$ continua in c e tale che, $\forall x \in A$, si ha $f(x) = f(c) + \varphi(x)(x-c)$; perciò f è somma di una funzione costante con una funzione continua in c, quindi è continua in c. ■

4.1.4 Osservazione. Non vale il viceversa di questo teorema: esistono funzioni continue non derivabili.

Nell'esempio 4.1.1 abbiamo visto che le funzioni valore assoluto e radice quadrata, che sono continue, non sono derivabili in 0. ◀

4.1.2 Operazioni sulle derivate

Studiamo le regole per il calcolo della derivata di una funzione ottenuta da funzioni più semplici mediante operazioni algebriche.

4.1.5 Teorema (sull'algebra delle derivate)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g: A \to \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$ e $c \in A \cap D(A)$. Supponiamo f e g derivabili in c. Allora:

I) $f+g$ è derivabile in c e si ha

$$(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c);$$

II) mf è derivabile in c e si ha

$$(mf)'(c) = mf'(c);$$

III) fg è derivabile in c e si ha

$$(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c).$$

Se inoltre $\forall x \in A$, si ha $g(x) \neq 0$, allora:

IV) $1/g$ è derivabile in c e si ha

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(c) = -\frac{g'(c)}{\big(g(c)\big)^2}.$$

V) f/g è derivabile in c e si ha

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{\big(g(c)\big)^2}.$$

Dimostrazione. Utilizziamo la caratterizzazione della derivabilità 4.1.2, che garantisce che esistono $\varphi, \psi \colon A \to \mathbb{R}$ continue in c e tali che, $\forall x \in A$, risulta

$$\begin{aligned} f(x) &= f(c) + \varphi(x)(x-c), \\ g(x) &= g(c) + \psi(x)(x-c), \end{aligned}$$

e si ha $\varphi(c) = f'(c)$ e $\psi(c) = g'(c)$.

I) Per $x \in A$ si ha

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= f(c) + \varphi(x)(x-c) + g(c) + \psi(x)(x-c) = \\ &= f(c) + g(c) + \big(\varphi(x) + \psi(x)\big)(x-c); \end{aligned}$$

la funzione $\varphi + \psi$ è continua in c, perché somma di funzioni continue in c, perciò è verificata l'affermazione III del teorema 4.1.2, quindi $f + g$ è derivabile in c e la derivata è il valore della funzione $\varphi + \psi$ in c, cioè $(f+g)'(c) = \varphi(c) + \psi(c) = f'(c) + g'(c)$.

II) Per $x \in A$ si ha

$$mf(x) = m\big(f(c) + \varphi(x)(x-c)\big) = mf(c) + m\varphi(x)(x-c);$$

la funzione $m\varphi$ è continua in c, perché prodotto di una funzione continua in c per una costante, perciò è verificata l'affermazione III del teorema 4.1.2, quindi mf è derivabile in c e la derivata è il valore della funzione $m\varphi$ in c, cioè $(mf)'(c) = m\varphi(c) = mf'(c)$.

III) Per $x \in A$ si ha

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \big(f(c) + \varphi(x)(x-c)\big)\big(g(c) + \psi(x)(x-c)\big) = \\ &= f(c)g(c) + \varphi(x)(x-c)g(c) + f(c)\psi(x)(x-c) + \varphi(x)\psi(x)(x-c)^2 = \\ &= f(c)g(c) + \big(\varphi(x)g(c) + f(c)\psi(x) + \varphi(x)\psi(x)(x-c)\big)(x-c); \end{aligned}$$

la funzione $x \mapsto \varphi(x)g(c) + f(c)\psi(x) + \varphi(x)\psi(x)(x-c)$ è continua in c, perché somma di funzioni continue in c, perciò è verificata l'affermazione III del teorema 4.1.2, quindi fg è derivabile in c e la derivata è il valore in c della funzione

$$x \mapsto \varphi(x)g(c) + f(c)\psi(x) + \varphi(x)\psi(x)(x-c),$$

cioè

$$(fg)'(c) = \varphi(c)g(c) + f(c)\psi(c) + \varphi(c)\psi(c)(c-c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c).$$

IV) Per $x \in A$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{g(x)} &= \frac{1}{g(c) + \psi(x)(x-c)} = \frac{1}{g(c)} + \frac{1}{g(c) + \psi(x)(x-c)} - \frac{1}{g(c)} = \\ &= \frac{1}{g(c)} + \frac{g(c) - \big(g(c) + \psi(x)(x-c)\big)}{\big(g(c) + \psi(x)(x-c)\big)g(c)} = \frac{1}{g(c)} - \frac{\psi(x)}{\big(g(c) + \psi(x)(x-c)\big)g(c)}(x-c); \end{aligned}$$

la funzione

$$x \mapsto -\frac{\psi(x)}{\big(g(c) + \psi(x)(x-c)\big)g(c)}$$

è continua in c, perché quoziente di funzioni continue in c, perciò è verificata l'affermazione III del teorema 4.1.2, quindi $1/g$ è derivabile in c e la derivata è il valore in c della funzione

$$x \mapsto -\frac{\psi(x)}{\big(g(c)+\psi(x)(x-c)\big)g(c)},$$

pertanto

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(c) = -\frac{\psi(c)}{\big(g(c)+\psi(c)(c-c)\big)g(c)} = -\frac{g'(c)}{\big(g(c)\big)^2}.$$

V) Poiché $f/g = f(1/g)$, la funzione f/g è prodotto di una funzione derivabile in c per la reciproca di una funzione derivabile in c, quindi, per le affermazioni III e IV, è derivabile in c e si ha

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = f'(c)\frac{1}{g(c)} + f(c)\left(\frac{1}{g}\right)'(c) = f'(c)\frac{1}{g(c)} - f(c)\frac{g'(c)}{\big(g(c)\big)^2} = \frac{f'(c)g(c)-f(c)g'(c)}{\big(g(c)\big)^2}.$$

■

4.1.6 Esempio. Consideriamo un polinomio p di grado $k \in \mathbb{N}^*$. Sia cioè

$$p(x) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j x^j,$$

con $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{R}$ e $\alpha_k \in \mathbb{R}^*$. Nell'esempio 4.1.1 abbiamo provato che le funzioni costanti e le funzioni potenza a esponente intero positivo sono derivabili. Per il teorema sull'algebra delle derivate 4.1.5, affermazione II, ognuno degli addendi $x \mapsto \alpha_j x^j$ è derivabile, pertanto, per l'affermazione I, p è derivabile e, $\forall x \in \mathbb{R}$, si ha

$$p'(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{d\alpha_j x^j}{dx} = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \frac{dx^j}{dx} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j j x^{j-1}.$$

Osserviamo che l'addendo che si ottiene per $j = 0$ è una funzione costante, che ha derivata nulla. ◀

4.1.7 Esempio. Sia $k \in \mathbb{N}^*$. Nell'esempio 4.1.1 abbiamo stabilito che la funzione

$$f_3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_3(x) = x^k,$$

è derivabile e, $\forall x \in \mathbb{R}$, si ha $f_3'(x) = kx^{k-1}$ (intendendo che se $k = 1$ abbiamo la funzione costante 1). Per il teorema sull'algebra delle derivate 4.1.5, affermazione IV, applicato a $f_3|_{\mathbb{R}^*}$, la funzione $x \mapsto x^{-k}$ è derivabile e, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, si ha

$$\frac{dx^{-k}}{dx} = \frac{f_3'(x)}{\big(f_3(x)\big)^2} = \frac{kx^{k-1}}{x^{2k}} = -kx^{-k-1}$$

Possiamo unificare questo risultato con ciò che si è stabilito nell'esempio 4.1.1 relativamente alla funzione f_3, affermando che, per $k \in \mathbb{Z}^*$, la funzione $x \mapsto x^k$ è derivabile con derivata kx^{k-1}, per ogni x appartenente al dominio. ◀

4.1.3 Derivata di funzione composta e di funzione inversa

Studiamo ora la derivabilità della composizione di funzioni derivabili e dell'inversa di una funzione derivabile.

4.1.8 Teorema (sulla derivata della composizione)

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$ e $c \in A \cap D(A)$. Supponiamo che sia $f(A) \subseteq B$ e $f(c) \in D(B)$. Se f è derivabile in c e g è derivabile in $f(c)$, allora $g \circ f$ è derivabile in c e

$$(g \circ f)'(c) = g'\big(f(c)\big)f'(c).$$

Dimostrazione. Per la caratterizzazione della derivabilità 4.1.2, esistono $\varphi : A \to \mathbb{R}$ e $\psi : B \to \mathbb{R}$, continue rispettivamente in c e in $f(c)$, tali che

$$\forall x \in A, \quad f(x) = f(c) + \varphi(x)(x - c),$$
$$\forall y \in B, \quad g(y) = g\big(f(c)\big) + \psi(y)\big(y - f(c)\big);$$

inoltre risulta $\varphi(c) = f'(c)$ e $\psi\big(f(c)\big) = g'\big(f(c)\big)$. Si ha, $\forall x \in A$,

$$g\big(f(x)\big) = g\big(f(c)\big) + \psi\big(f(x)\big)\big(f(x) - f(c)\big) = g\big(f(c)\big) + \psi\big(f(x)\big)\varphi(x)(x - c);$$

la funzione f è derivabile in c, quindi è continua in c (v. teorema 4.1.3), pertanto la funzione $x \mapsto \psi\big(f(x)\big)\varphi(x)$ è prodotto di funzioni continue in c, perciò è continua in c, inoltre, per $x = c$, tale funzione vale $g'\big(f(c)\big)f'(c)$. Dalla caratterizzazione della derivabilità 4.1.2 segue che $g \circ f$ è derivabile in c con derivata $g'\big(f(c)\big)f'(c)$. ■

4.1.9 Teorema (sulla derivata della funzione inversa)

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ continua e iniettiva e $c \in I$. Se f è derivabile in c e $f'(c) \neq 0$, allora f^{-1} è derivabile in $f(c)$ e

$$(f^{-1})'\big(f(c)\big) = \frac{1}{f'(c)}.$$

Dimostrazione. Per la caratterizzazione della derivabilità 4.1.2, esiste $\varphi : I \to \mathbb{R}$, continua in c, tale che, $\forall x \in I$, si ha

$$f(x) = f(c) + \varphi(x)(x - c),$$

e risulta $\varphi(c) = f'(c)$. Se $y \in f(I) = \mathscr{D}\big(f^{-1}\big)$, allora si ha

$$y = f\big(f^{-1}(y)\big) = f(c) + \varphi\big(f^{-1}(y)\big)\big(f^{-1}(y) - c\big),$$

quindi

$$y - f(c) = \varphi\big(f^{-1}(y)\big)\big(f^{-1}(y) - c\big).$$

Se $y \neq f(c)$, allora il primo membro è diverso da 0, quindi ciascuno dei due fattori a secondo membro è diverso da 0, in particolare $\varphi\big(f^{-1}(y)\big) \neq 0$; se invece $y = f(c)$, allora

$$\varphi\big(f^{-1}(y)\big) = \varphi\Big(f^{-1}\big(f(c)\big)\Big) = \varphi(c) = f'(c) \neq 0.$$

Perciò $\forall y \in f(I)$ si ha $\varphi\big(f^{-1}(y)\big) \neq 0$. Quindi risulta

$$f^{-1}(y) - c = \frac{1}{\varphi\big(f^{-1}(y)\big)}\big(y - f(c)\big),$$

cioè

$$f^{-1}(y) = f^{-1}\big(f(c)\big) + \frac{1}{\varphi\big(f^{-1}(y)\big)}\big(y - f(c)\big).$$

Poiché f è continua in un intervallo ed è iniettiva, per il teorema 3.5.17, affermazione II, f^{-1} è continua, inoltre φ è continua in c, quindi la funzione $y \mapsto 1/\varphi\big(f^{-1}(y)\big)$ è continua in $f(c)$. Per la caratterizzazione della derivabilità 4.1.2, f^{-1} è derivabile in $f(c)$ con derivata

$$\frac{1}{\varphi\Big(f^{-1}\big(f(c)\big)\Big)} = \frac{1}{\varphi(c)} = \frac{1}{f'(c)}.$$

■

La formula di derivazione di funzione inversa enunciata sopra può essere scritta in un'altra forma, più adatta a calcolare la derivata. Se $d \in f(I)$ e $f'\big(f^{-1}(d)\big) \neq 0$, ponendo $c = f^{-1}(d)$ si ha

$$(f^{-1})'(d) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(d)\big)}.$$

4.1.10 Osservazione. Per ogni $x \in A$, si ha $(f^{-1} \circ f)(x) = x$, pertanto, se f è derivabile in c e f^{-1} è derivabile in $f(c)$, per il teorema sulla derivata della composizione 4.1.8, si ha $(f^{-1})'\big(f(c)\big)f'(c) = 1$, quindi deve essere $f'(c) \neq 0$ e risulta $(f^{-1})'\big(f(c)\big) = 1/f'(c)$.

Segue da qui che, se $f'(c) = 0$, allora f^{-1} non è derivabile in $f(c)$.

Perciò la formula di derivazione della funzione inversa è conseguenza della formula di derivazione della composizione, ma per dedurre questo occorre prima provare la derivabilità della funzione inversa.

La formula di derivazione della funzione inversa può essere ottenuta anche con considerazioni geometriche. Se f è derivabile in c, allora la retta t_f, tangente al grafico di f nel punto $\big(c, f(c)\big)$, ha coefficiente angolare $f'(c)$. Il grafico di f^{-1} si ottiene dal grafico di f scambiando ascisse con ordinate, il punto $\big(c, f(c)\big)$ diventa $\big(f(c), c\big)$ e, se f^{-1} è derivabile in $f(c)$, la retta tangente al suo grafico in tale punto si ottiene dalla retta t_f scambiando ascisse con ordinate e ha coefficiente angolare $(f^{-1})'\big(f(c)\big)$. Poiché questa retta non è parallela all'asse delle ordinate, t_f non può essere parallela all'asse delle ascisse, quindi deve essere $f'(c) \neq 0$. Inoltre scambiando ascisse con ordinate il coefficiente angolare di una retta diventa il reciproco, quindi $(f^{-1})'\big(f(c)\big) = 1/f'(c)$. ◀

4.1.11 Esempio. Sia $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. La funzione radice k-sima è l'inversa della funzione

$$f_6 \colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}, \qquad f_6(x) = x^k.$$

Nell'esempio 4.1.1 abbiamo stabilito che la funzione potenza di esponente k è derivabile con derivata la funzione $x \mapsto kx^{k-1}$. La funzione f_6 è una restrizione della funzione

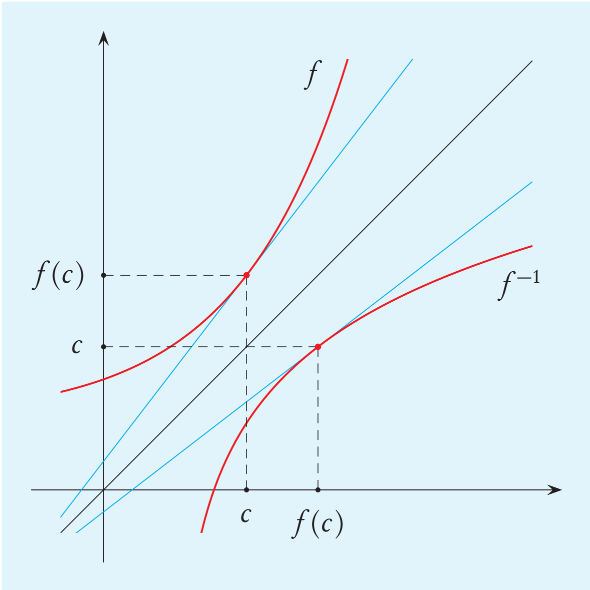


Figura 4.1.5
Il grafico di f^{-1} è il simmetrico rispetto alla retta $y = x$ (in nero) del grafico di f. La retta tangente al grafico di f^{-1} in $\big(f(c), c\big)$ è la simmetrica della retta tangente al grafico di f in $\big(c, f(c)\big)$.

potenza, quindi è anch'essa derivabile con la stessa derivata, che è diversa da 0 in tutti i punti del dominio escluso 0. Per il teorema sulla derivata della funzione inversa, f_6^{-1} è derivabile in tutti i punti d del dominio tali che $d \neq f_6(0) = 0$ e, $\forall d \in \,]0, +\infty[$, si ha

$$f_6^{-1}(d) = \frac{1}{f_6'\big(f_6^{-1}(d)\big)} = \frac{1}{f_6'\big(\sqrt[k]{d}\big)} = \frac{1}{k\big(\sqrt[k]{d}\big)^{k-1}} = \frac{1}{k}\big(\sqrt[k]{d}\big)^{1-k} = \frac{1}{k}\, d^{(1/k)-1}.$$

Per l'osservazione 4.1.10, f_6^{-1} non è derivabile in 0.

Sia $q \in \mathbb{Q}^+ \setminus \mathbb{Z}$, $q = j/k$, con $j \in \mathbb{N}^*$ e $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Consideriamo la funzione potenza di esponente q, cioè

$$f_7 \colon [0, +\infty[\,\to \mathbb{R}, \qquad f_7(x) = x^q.$$

Tale funzione è composizione della funzione $x \mapsto \sqrt[k]{x}$ con la funzione $y \mapsto y^j$. Come stabilito sopra, la prima funzione è derivabile in $\mathbb{R}^+$, la seconda in tutto il dominio (vedi esempio 4.1.1). Pertanto, per il teorema sulla derivata della composizione 4.1.8, la funzione $x \mapsto x^q$ è derivabile in $\mathbb{R}^+$ e, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, si ha

$$f_7'(x) = \frac{d\big(\sqrt[k]{x}\big)^j}{dx} = j\big(\sqrt[k]{x}\big)^{j-1}\frac{1}{k}\, x^{(1/k)-1} = \frac{j}{k}\, x^{(j/k)-1} = q x^{q-1}.$$

Studiamo la derivabilità in 0. Il rapporto incrementale è

$$\frac{x^q - 0^q}{x - 0} = x^{q-1} \xrightarrow[x \to 0]{} \begin{cases} +\infty, & \text{se } 0 < q < 1, \\ 0, & \text{se } q > 1. \end{cases}$$

Pertanto f_7 è derivabile in 0 se e solo se $q > 1$ e in tal caso si ha $f_7'(0) = 0$.

Sia $q \in \mathbb{Q}^- \setminus \mathbb{Z}$, $q = j/k$, con $j \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Consideriamo la funzione potenza di esponente q, cioè

$$f_8 \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \qquad f_8(x) = x^q.$$

Tale funzione è composizione della funzione $x \mapsto \sqrt[k]{x}$ ristretta a $\mathbb{R}^+$ con la funzione $y \mapsto y^j$; queste funzioni sono derivabili. Pertanto, per il teorema sulla derivata della composizione 4.1.8, la funzione $x \mapsto x^q$ è derivabile e, con gli stessi calcoli fatti per f_7, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, si ha $f_8'(x) = qx^{q-1}$.

Considerando anche ciò che si è stabilito negli esempi 4.1.1 e 4.1.7, possiamo concludere che la funzione $x \mapsto x^q$, dove $q \in \mathbb{Q}^*$, è derivabile in tutto il dominio se $q \notin]0,1[$, mentre è derivabile nel dominio escluso 0 se $q \in]0,1[$. In tutti i casi la derivata in x, appartenente all'insieme di derivabilità, è uguale a qx^{q-1}. ◀

4.1.4 Derivate di ordine superiore

Se una funzione è derivabile, risulta in maniera naturale definita la funzione derivata, che a ogni punto x del dominio di f fa corrispondere $f'(x)$. La funzione f' può a sua volta essere derivabile. Risulta quindi naturale la seguente definizione.

Definizione di funzione derivabile 2 volte e di derivata seconda

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ tale che $A \subseteq D(A)$, $f: A \to \mathbb{R}$ derivabile e $c \in A$.

Diciamo che f è **derivabile 2 volte** in c quando f' è derivabile in c. In tal caso chiamiamo **derivata seconda** di f in c la derivata di f' in c e la indichiamo con $f''(c)$.

Diciamo che f è **derivabile 2 volte** quando è derivabile 2 volte in ogni punto di A.

Per indicare la derivata seconda di f in c si usano anche le notazioni

$$D^2 f(c), \qquad \left.\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right|_{x=c}, \qquad \left.\frac{d^2}{dx^2} f(x)\right|_{x=c}.$$

Poiché il concetto di derivata è locale, per definire la derivata seconda è sufficiente che f sia derivabile in un intorno di c

Se f è derivabile 2 volte si può ripetere il procedimento definendo la derivata terza e successivamente la derivata quarta ecc. In generale possiamo definire, per induzione, la derivata di ordine qualunque come segue.

Definizione di funzione derivabile n volte e di derivata n-sima

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ tale che $A \subseteq D(A)$, $f: A \to \mathbb{R}$, $c \in A$ e $n \in \mathbb{N}^*$. Supponiamo che f sia derivabile n volte.

Diciamo che f è **derivabile $n+1$ volte** in c quando la funzione che a ogni punto di A fa corrispondere la derivata n-sima di f è derivabile in c. In tal caso chiamiamo **derivata $n+1$-sima** di f in c tale derivata e la indichiamo con $f^{(n+1)}(c)$.

Diciamo che f è **derivabile $n+1$ volte** quando è derivabile $n+1$ volte in ogni punto di A.

La derivata n-sima della funzione f nel punto c si indica con $f^{(n)}(c)$ o anche con

$$D^n f(c), \qquad \left.\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right|_{x=c}, \qquad \left.\frac{d^n}{dx^n} f(x)\right|_{x=c}.$$

Si utilizza anche la scrittura $f^{(0)}$ per indicare la funzione f.

Notiamo che l'affermazione che una funzione è derivabile n volte non esclude che essa possa essere derivabile anche più di n volte.

Definizione di funzione indefinitamente derivabile

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ tale che $A \subseteq D(A)$ e $f: A \to \mathbb{R}$. Diciamo che f è **indefinitamente derivabile** quando, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f è derivabile n volte.

Se una funzione $f: I \to \mathbb{R}$, con I intervallo di $\mathbb{R}$, è derivabile n volte, con derivate continue, diciamo che f è una funzione di **classe** C^n. Se è indefinitamente derivabile, diciamo che f è una funzione di **classe** C^∞.

Osserviamo che, per il teorema sulla continuità delle funzioni derivabili 4.1.3, se una funzione è derivabile n volte, allora tutte le derivate di ordine minore di n sono continue. Se una funzione è indefinitamente derivabile, le derivate di qualunque ordine sono continue.

Indichiamo con $C^n(I,\mathbb{R})$ l'insieme delle funzioni di classe C^n da un intervallo I a $\mathbb{R}$; analogamente indichiamo con $C^\infty(I,\mathbb{R})$ l'insieme delle funzioni di classe C^∞ da un intervallo I a $\mathbb{R}$.

4.1.12 Esempio. Sia $k \in \mathbb{N}^*$. Nell'esempio 4.1.1 abbiamo provato che la funzione

$$f_3: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_3(x) = x^k,$$

è derivabile, con derivata $f_3'(x) = kx^{k-1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tale funzione è a sua volta derivabile, perché prodotto di una costante per una funzione derivabile. Se $k = 1$, allora f_3' è costante, quindi ha derivata nulla, pertanto f_3'' è la funzione identicamente nulla. Se $k > 1$, allora, $\forall x \in \mathbb{R}$, si ha $f_3''(x) = k(k-1)x^{k-2}$.

Evidentemente f_3'' è a sua volta derivabile, quindi f_3 è derivabile 3 volte. Se $k = 1$, allora f_3'' è la funzione nulla, quindi anche f_3''' è la funzione nulla. Se $k = 2$, allora f_3'' vale costantemente 2, pertanto f_3''' è la funzione nulla. Se $k > 2$, allora, $\forall x \in \mathbb{R}$, si ha $f_3'''(x) = k(k-1)(k-2)x^{k-3}$.

Ripetendo il ragionamento si prova che f_3 è indefinitamente derivabile; se $n \leq k$ risulta, $\forall x \in \mathbb{R}$, si ha $f_3^{(n)}(x) = k(k-1)\ldots(k-n+1)x^{k-n}$, mentre, se $n > k$, allora $f_3^{(n)}$ è identicamente nulla.

Sia $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Nell'esempio 4.1.7 abbiamo provato che la funzione $x \mapsto x^k$, di dominio $\mathbb{R}^*$, è derivabile e la funzione derivata è $x \mapsto kx^{k-1}$. Da questo segue facilmente che tale funzione è indefinitamente derivabile e la derivata n-sima in $x \in \mathbb{R}^*$ è uguale a $k(k-1)\ldots(k-n+1)x^{k-n}$.

Sia $q \in \mathbb{Q}^+ \setminus \mathbb{Z}$. Nell'esempio 4.1.11 abbiamo provato che la funzione

$$f_7: [0,+\infty[\to \mathbb{R}, \qquad f_7(x) = x^q,$$

è derivabile se $q \notin]0,1[$, mentre è derivabile nel dominio escluso 0 se $q \in]0,1[$. Nei punti di derivabilità si ha $f_7'(x) = qx^{q-1}$. Tale funzione è derivabile se $q-1 \notin]0,1[$, cioè $q \notin]1,2[$, mentre è derivabile in $\mathbb{R}^+$, ma non in 0, se $q \in]1,2[$. Quindi, se $q \notin]0,2[$, allora f_7 è derivabile 2 volte, mentre, se $q \in]0,2[$, allora f_7 è derivabile 2 volte in $\mathbb{R}^+$. In ogni caso, nei punti di derivabilità si ha $f_7''(x) = q(q-1)x^{q-2}$.

Ripetendo il ragionamento si prova che f_7 è indefinitamente derivabile in $\mathbb{R}^+$; per x in tale insieme risulta $f_7^{(n)}(x) = k(k-1)\dots(k-n+1)x^{k-n}$. Inoltre se $n < q$, allora f_7 è derivabile n volte in 0. Se si ha $n < q < n+1$, allora $f_7^{(n)}(x) = q(q-1)\dots(q-n+1)x^{q-n}$ non è derivabile in 0, perché $q-n < 1$. Pertanto f_7 non è derivabile $n+1$ volte in 0. Osserviamo che la condizione $n < q < n+1$ equivale a $n = [q]$.

Sia $q \in \mathbb{Q}^- \setminus \mathbb{Z}$. Nell'esempio 4.1.11 abbiamo provato che la funzione

$$f_8 \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \qquad f_8(x) = x^q,$$

è derivabile e la funzione derivata è $x \mapsto qx^{q-1}$. Da ciò segue facilmente che tale funzione è indefinitamente derivabile e, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, si ha $f_8^{(n)}(x) = k(k-1)\dots(k-n+1)x^{k-n}$. ◀

Il calcolo delle derivate di ordine superiore si effettua applicando ripetutamente le regole di derivazione. Poiché la derivata di una somma è la somma delle derivate, risulta immediato provare che la derivata n-sima della somma è la somma delle derivate n-sime. Analogamente per la derivata del prodotto di una costante per una funzione. Per il prodotto la situazione è più complessa, perché la derivata di un prodotto non è il prodotto delle derivate.

4.1.13 Teorema (sull'algebra delle derivate n-sime)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ tale che $A \subseteq D(A)$, $f,g \colon A \to \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $c \in A$. Supponiamo f e g derivabili in n volte in c. Allora:

I) $f+g$ è derivabile n volte in c e si ha

$$(f+g)^{(n)}(c) = f^{(n)}(c) + g^{(n)}(c);$$

II) mf è derivabile n volte in c e si ha

$$(mf)^{(n)}(c) = mf^{(n)}(c);$$

III) fg è derivabile n volte in c e si ha

$$(fg)^{(n)}(c) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(c) g^{(k)}(c).$$

Dimostrazione. I) Dimostriamo il teorema applicando il principio di induzione 1.3.4 alla proposizione $\mathscr{P}(n)$: se f e g sono derivabili in n volte in c, allora $f+g$ è derivabile n volte in c e si ha

$$(f+g)^{(n)}(c) = f^{(n)}(c) + g^{(n)}(c).$$

La proposizione $\mathscr{P}(1)$ è l'affermazione I del teorema sull'algebra delle derivate 4.1.5, che è vera.

Supponiamo vera $\mathscr{P}(n)$. Siano f e g derivabili $n+1$ volte in c. Per ipotesi induttiva la funzione $(f+g)^{(n)}$ è somma delle derivate n-sime di f e g, tali funzioni sono derivabili in c, quindi $(f+g)^{(n)}$ è derivabile in c, pertanto $f+g$ è derivabile $n+1$ volte in c.

Si ha

$$(f+g)^{(n+1)}(c) = D\big((f+g)^{(n)}\big)(c) = D\big(f^{(n)} + g^{(n)}\big)(c) = f^{(n+1)}(c) + g^{(n+1)}(c).$$

Quindi $\mathscr{P}(n+1)$ è vera.

II) Dimostriamo il teorema applicando il principio di induzione 1.3.4 alla proposizione $\mathscr{P}(n)$: se f è derivabile in n volte in c, allora mf è derivabile n volte in c e si ha

$$(mf)^{(n)}(c) = mf^{(n)}(c).$$

La proposizione $\mathscr{P}(1)$ è l'affermazione II del teorema sull'algebra delle derivate 4.1.5, che è vera.

Supponiamo vera $\mathscr{P}(n)$. Sia f derivabile $n+1$ volte in c. Per ipotesi induttiva la funzione $(mf)^{(n)}$ è prodotto di una costante per la derivata n-sima di f, tale funzione è derivabile in c, quindi $(mf)^{(n)}$ è derivabile in c, pertanto mf è derivabile $n+1$ volte in c.

Si ha

$$(mf)^{(n+1)}(c) = D\big((mf)^{(n)}\big)(c) = D\big(mf^{(n)}\big)(c) = mf^{(n+1)}(c).$$

Quindi $\mathscr{P}(n+1)$ è vera.

III) Dimostriamo il teorema applicando il principio di induzione 1.3.4 alla proposizione $\mathscr{P}(n)$: se f e g sono derivabili in n volte in c, allora fg è derivabile n volte in c e si ha

$$(fg)^{(n)}(c) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(c) g^{(k)}(c).$$

La proposizione $\mathscr{P}(1)$ è l'affermazione III del teorema sull'algebra delle derivate 4.1.5, che è vera.

Supponiamo vera $\mathscr{P}(n)$. Siano f e g derivabili $n+1$ volte in c. Per ipotesi induttiva la funzione $(fg)^{(n)}$ è somma di prodotti delle derivate fino all'ordine n di f e g, tali funzioni sono derivabili in c, quindi $(fg)^{(n)}$ è derivabile in c, pertanto fg è derivabile $n+1$ volte in c.

Utilizzando le proprietà dei coefficienti binomiali (v. teorema 1.3.15), si ha

$$(fg)^{(n+1)}(c) = D\big((fg)^{(n)}\big)(c) = D\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}\right)(c) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D\big(f^{(n-k)} g^{(k)}\big)(c) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \big(f^{(n-k+1)}(c) g^{(k)}(c) + f^{(n-k)}(c) g^{(k+1)}(c)\big) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k+1)}(c) g^{(k)}(c) + \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} f^{(n-j+1)}(c) g^{(j)}(c) =$$

$$= \binom{n}{0} f^{(n+1)}(c) g(c) + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right) f^{(n-k+1)}(c) g^{(k)}(c) + \binom{n}{n} f(c) g^{(n+1)}(c) =$$

$$=\binom{n+1}{0}f^{(n+1)}(c)g(c)+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}f^{(n+1-k)}(c)g^{(k)}(c)+\binom{n+1}{n+1}f(c)g^{(n+1)}(c)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(n+1-k)}(c)g^{(k)}(c).$$

Quindi $\mathscr{P}(n+1)$ è vera. ■

4.2 Funzioni derivabili in un intervallo

Studiamo alcune proprietà delle funzioni che sono derivabili in tutti i punti di un intervallo, esclusi eventualmente gli estremi.

4.2.1 Teorema (di Rolle[11])

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Se f è continua in $[a,b]$, derivabile in $]a,b[$ e $f(a)=f(b)$, allora esiste $c\in\,]a,b[$ tale che $f'(c)=0$.

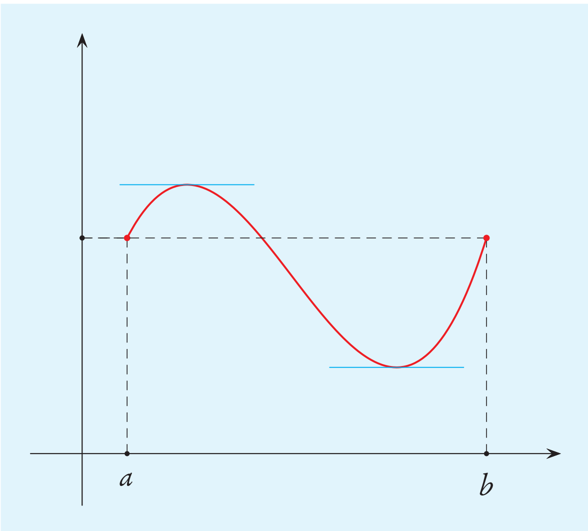


Figura 4.2.1
Per il teorema di Rolle, se f assume gli stessi valori in a e in b, allora vi è almeno un punto del grafico che ha tangente parallela all'asse delle ascisse.

Dimostrazione. La funzione f è continua in un intervallo chiuso e limitato, che, per il teorema 3.1.16 è compatto, quindi, per il teorema di Weierstrass 3.5.8, esistono massimo e minimo di f; li indichiamo, rispettivamente, con M e m. Poiché $m\le f(a)=f(b)\le M$, è verificata almeno una tra le seguenti condizioni:

a) $M>f(a)=f(b)$,

b) $m<f(a)=f(b)$,

c) $M=m=f(a)=f(b)$.

Nel caso che sia verificata la a), esiste $c\in[a,b]$ tale che $f(c)=M$; poiché $M\ne f(a)$ e $M\ne f(b)$, si ha $c\ne a$ e $c\ne b$, quindi $c\in\,]a,b[$. Qualunque sia $x\in[a,b]$ si ha

[11] Il teorema prende il nome da Michel Rolle (Ambert, Francia, 1652 - Parigi, 1719). Oltre al libro in cui compare questo teorema, pubblicato ne 1691, pubblicò un trattato di algebra.

$f(x) \le f(c)$. Allora per $x \in [a,c[$ si ha $f(x)-f(c) \le 0$ e $x-c<0$, quindi $R_f(x,c) \ge 0$; pertanto, per il teorema del confronto 3.3.9, si ha $\lim_{x\to c^-} R_f(x,c) \ge 0$, quindi

$$f'(c) = \lim_{x\to c} R_f(x,c) = \lim_{x\to c^-} R_f(x,c) \ge 0 .$$

D'altra parte, $\forall x \in]c,b]$, risulta $f(x)-f(c) \le 0$ e $x-c>0$, quindi $R_f(x,c) \le 0$, da cui, analogamente, segue $f'(c) \le 0$. Poiché si ha sia $f'(c) \ge 0$ che $f'(c) \le 0$ risulta $f'(c) = 0$.

Nel caso che sia verificata la b), esiste $c \in [a,b]$ tale che $f(c) = m$, procedendo come nel caso a) si ottiene che $c \in]a,b[$ e $f'(c) = 0$.

Nel caso che sia verificata la c), massimo e minimo di f sono uguali tra di loro, quindi f è costante, pertanto ha derivata nulla in ogni punto del dominio. ■

4.2.2 Osservazione. Le tre ipotesi del teorema di Rolle:

a) f è continua in $[a,b]$,

b) f è derivabile in $]a,b[$,

c) $f(a) = f(b)$,

sono essenziali. Se una delle tre non è verificata può non esistere un punto in cui f' si annulla.

Consideriamo le funzioni

$$\begin{aligned} &f_9 : [-1,1] \to \mathbb{R}, && f_9(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in [-1,1[\,, \\ -1, & \text{se } x = 1\,, \end{cases} \\ &f_{10} : [-1,1] \to \mathbb{R}, && f_{10}(x) = |x|, \\ &f_{11} : [-1,1] \to \mathbb{R}, && f_{11}(x) = x\,. \end{aligned}$$

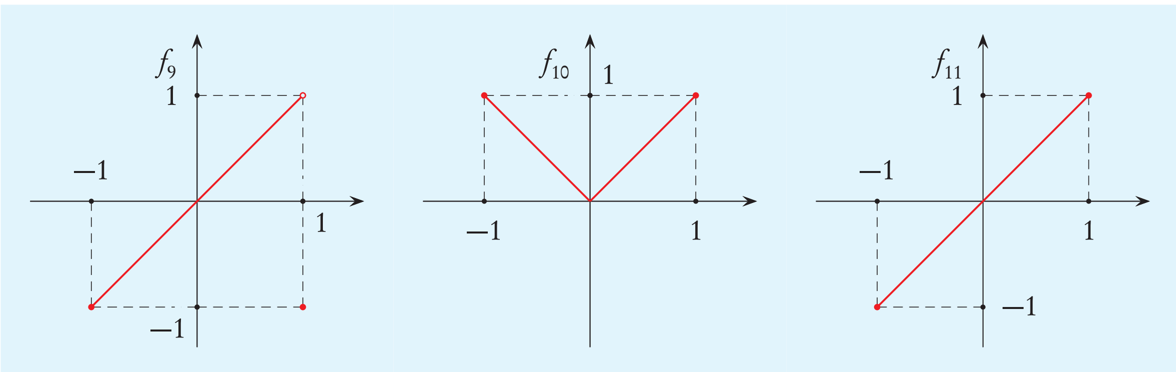


Figura 4.2.2
Le funzioni per cui non è verificata la tesi del teorema di Rolle studiate nell'osservazione 4.2.2.

Si verifica facilmente quanto segue.

La funzione f_9 è continua in $[-1,1[$, ma non è continua in 1, è derivabile in $]-1,1[$ e si ha $f_9(-1) = -1 = f_9(1)$.

La funzione f_{10} è continua in $[-1,1]$, è derivabile in $]-1,1[\setminus\{0\}$, ma non è derivabile in 0, e si ha $f_{10}(-1)=1=f_{10}(1)$

La funzione f_{11} è continua in $[-1,1]$, è derivabile in $]-1,1[$ e risulta $f_{11}(-1)=-1$, $f_{11}(1)=1$, quindi $f_{11}(-1)\neq f_{11}(1)$.

È evidente che la derivata di ciascuna delle funzioni, dove è definita, è diversa da 0. ◀

4.2.3 Teorema (di Cauchy[12])

Siano $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$. Se f e g sono continue in $[a,b]$ e derivabili in $]a,b[$, allora esiste $c\in\,]a,b[$ tale che

$$\big(f(b)-f(a)\big)g'(c)=\big(g(b)-g(a)\big)f'(c).$$

Dimostrazione. Poniamo

$$h:[a,b]\to\mathbb{R},\qquad h(x)=\big(f(b)-f(a)\big)g(x)-\big(g(b)-g(a)\big)f(x).$$

La funzione h è continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$, perché f e g godono delle stesse proprietà. Inoltre si ha

$$h(a)=\big(f(b)-f(a)\big)g(a)-\big(g(b)-g(a)\big)f(a)=f(b)g(a)-g(b)f(a),$$
$$h(b)=\big(f(b)-f(a)\big)g(b)-\big(g(b)-g(a)\big)f(b)=-f(a)g(b)+g(a)f(b),$$

quindi $h(a)=h(b)$. Pertanto h soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle 4.2.1, perciò esiste $c\in\,]a,b[$ tale che $h'(c)=0$. Poiché

$$h'(c)=\big(f(b)-f(a)\big)g'(c)-\big(g(b)-g(a)\big)f'(c),$$

si ha

$$\big(f(b)-f(a)\big)g'(c)=\big(g(b)-g(a)\big)f'(c).$$ ■

Se g' non si annulla, allora risulta $g(a)\neq g(b)$. Infatti, se fosse $g(a)=g(b)$, per il teorema di Rolle 4.2.1 dovrebbe esistere un punto in cui la derivata si annulla. In questo caso la tesi del teorema di Cauchy può essere scritta nella forma

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

4.2.4 Osservazione. Il teorema di Cauchy ha una interpretazione fisica. Consideriamo un punto materiale che si sposta nel piano, sia $\big(g(t),f(t)\big)$ la sua posizione all'istante t.

Al tempo t la componente della velocità lungo l'asse delle ascisse è $g'(t)$ e la componente lungo l'asse delle ordinate è $f'(t)$. Pertanto la velocità vettoriale è $\big(g'(t),f'(t)\big)$.

Se la posizione del punto nell'istante iniziale a coincide con quella nell'istante finale b, cioè $f(b)-f(a)=0$ e $g(b)-g(a)=0$, allora per qualunque $c\in\,]a,b[$ è verificata la tesi del teorema di Cauchy.

Se esiste $c\in\,]a,b[$ tale che $f'(c)=g'(c)=0$, cioè c'è un istante in cui il punto ha velocità nulla, allora la tesi del teorema di Cauchy è verificata per tale c.

[12]Il teorema prende il nome dal già citato Augustin-Louis Cauchy (v. nota 7), che lo pubblicò in un trattato del 1823.

Supponiamo ora che la posizione finale sia diversa da quella iniziale e che la velocità non sia mai nulla. Se $g(a) \neq g(b)$, allora $\big(f(b)-f(a)\big)/\big(g(b)-g(a)\big)$ è il coefficiente angolare della retta passante per la posizione iniziale e la posizione finale del punto, mentre $f'(c)/g'(c)$ è il coefficiente angolare della retta che contiene il vettore velocità; pertanto le due rette sono parallele. Quindi esiste un istante in cui la velocità è parallela allo spostamento del punto tra l'istante a e l'istante b. Un risultato analogo si ottiene anche se $g(a)=g(b)$, mentre $f(a)\neq f(b)$.

La velocità del punto materiale è tangente alla traiettoria. Quindi, se il punto cambia posizione tra il tempo a e il tempo b e non ha mai velocità nulla, per il teorema di Cauchy c'è un punto della traiettoria in cui la retta tangente è parallela alla retta passante per la posizione iniziale e la posizione finale del punto. ◀

4.2.5 Esempio. Siano

$$f_{12}\colon [-1,1]\to\mathbb{R}, \qquad f_{12}(x)=x^2+x\,,$$
$$g_{12}\colon [-1,1]\to\mathbb{R}, \qquad g_{12}(x)=x^2-x\,.$$

Le funzioni f_{12} e g_{12} sono polinomiali, quindi derivabili. Cerchiamo $c\in\,]-1,1[$ che verifichi la tesi del teorema di Cauchy.

Si ha $f_{12}(1)-f_{12}(-1)=2$, $g_{12}(1)-g_{12}(-1)=-2$ e, $\forall x\in[-1,1]$, $f_{12}'(x)=2x+1$, $g_{12}'(x)=2x-1$. Quindi c deve verificare l'equazione $2(2c-1)=-2(2c+1)$, cioè $4c=-4c$, pertanto $c=0$.

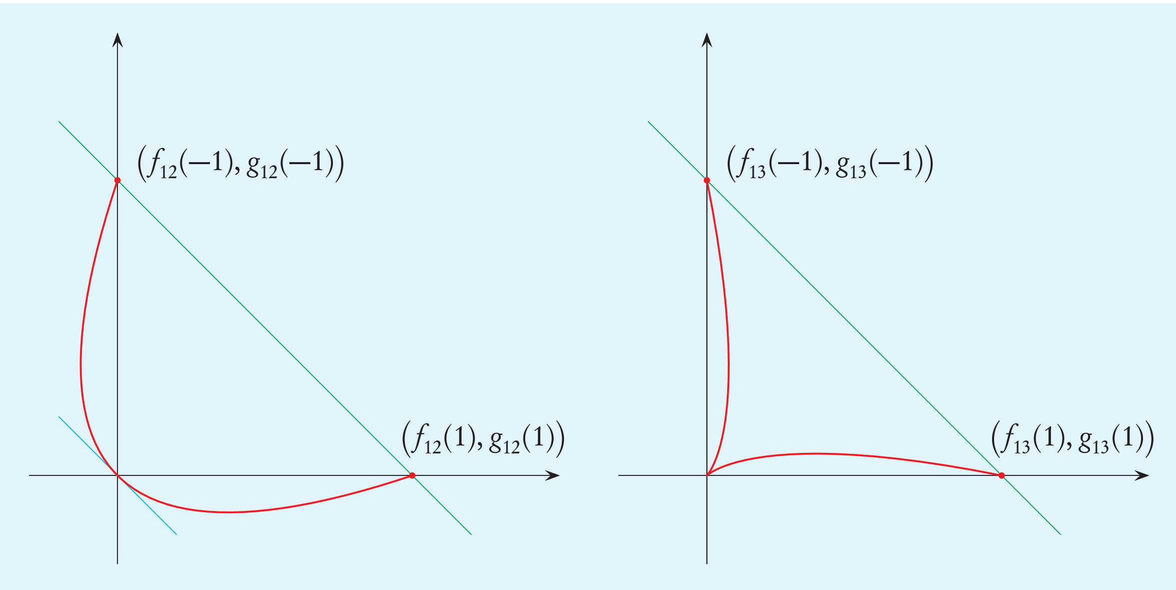


Figura 4.2.3
Le curve costruite come nell'osservazione 4.2.4 relative alle funzioni studiate nell'esempio 4.2.5.
A sinistra: c'è un punto in cui la tangente alla curva è parallela alla retta passante per la posizione iniziale e quella finale del punto.
A destra: c'è un punto in cui si annullano sia f_{13}' che g_{13}'. Tale punto è "angoloso" per la curva, cioè non esiste retta tangente.

Siano

$$f_{13}\colon [-1,1] \to \mathbb{R}, \qquad f_{13}(x) = x^2 + x^3,$$
$$g_{13}\colon [-1,1] \to \mathbb{R}, \qquad g_{13}(x) = x^2 - x^3.$$

Le funzioni f_{13} e g_{13} sono polinomiali, quindi derivabili. Cerchiamo $c \in \,]-1,1[$ che verifichi la tesi del teorema di Cauchy.

Si ha $f_{13}(1) - f_{13}(-1) = 2$, $g_{13}(1) - g_{13}(-1) = -2$ e, $\forall x \in [-1,1]$, $f'_{13}(x) = 2x + 3x^2$, $g'_{13}(x) = 2x - 3x^2$. Quindi c deve verificare l'equazione $2(2c - 3c^2) = -2(2c + 3c^2)$, cioè $4c = -4c$, pertanto $c = 0$. In tale punto f'_{13} e g'_{13} si annullano. ◀

Risulta estremamente utile il seguente caso particolare del teorema di Cauchy.

4.2.6 Teorema (di Lagrange[13] o del valor medio)

Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Se f è continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$, allora esiste $c \in \,]a,b[$ tale che

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(c).$$

Dimostrazione. Sia $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tale che $g(x) = x$. Tale funzione è derivabile, con derivata che vale costantemente 1. Il teorema di Cauchy 4.2.3 applicato alle funzioni f e g assicura che esiste $c \in \,]a,b[$ tale che $f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$. ■

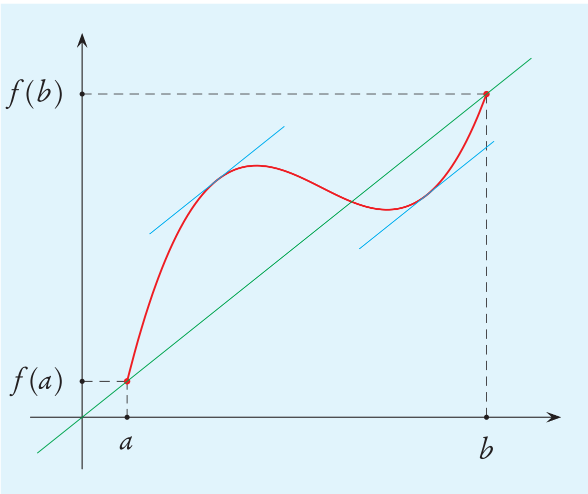


Figura 4.2.4
Per il teorema di Lagrange, vi è almeno un punto del grafico di f che ha tangente parallela alla retta passante per i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

4.2.7 Osservazione. La tesi del teorema di Lagrange può anche essere scritta come

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Abbiamo così una relazione tra derivata e rapporto incrementale che, diversamente dalla definizione, non coinvolge passaggi al limite. Ciò sarò utile per provare numerosi teoremi.

[13] Il teorema prende il nome da Giuseppe Luigi Lagrange (Torino, 1736 - Parigi, 1813), che lo pubblicò in un trattato del 1797. Lagrange è stato tra i fondatori della meccanica analitica e ha dato grandi contributi allo sviluppo di vari settori dell'analisi. Ottenne anche importanti risultati in astronomia, teoria dei numeri, algebra e geometria analitica.

Geometricamente abbiamo una uguaglianza tra il coefficiente angolare di una tangente al grafico di f e il coefficiente angolare della retta passante per $\big(a,f(a)\big)$ e $\big(b,f(b)\big)$. Pertanto esiste un punto del grafico che ha retta tangente parallela alla retta passante per gli estremi di tale grafico. ◀

Vediamo alcune conseguenze del teorema di Lagrange.

4.2.8 Teorema (sulle funzioni a derivata nulla)

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivabile. Se, $\forall x \in I$, si ha $f'(x) = 0$, allora f è costante.

Dimostrazione. Siano $x,y \in I$ con $x \neq y$; possiamo per esempio supporre $x < y$. Poiché I è un intervallo si ha $[x,y] \subseteq I$, quindi possiamo applicare il teorema di Lagrange 4.2.6 a $f|_{[x,y]}$. Perciò esiste $\xi \in \,]x,y[$ tale che $f(y)-f(x)=f'(\xi)(y-x)$; poiché $f'(\xi)=0$, si ha $f(y)-f(x)=0$, cioè $f(y)=f(x)$.

Quindi in tutti i punti del dominio f assume lo stesso valore, cioè è costante. ■

Il teorema seguente permette, in alcuni casi, di semplificare lo studio della derivabilità di una funzione.

4.2.9 Teorema (sul limite della derivata)

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $c \in I$ e $f\colon I \to \mathbb{R}$ continua in I e derivabile in $I \setminus \{c\}$. Se esiste $\lim_{x\to c} f'(x)$, allora esiste $\lim_{x\to c} R_f(x,c) = \lim_{x\to c} f'(x)$.

Dimostrazione. Poniamo $\ell = \lim_{x\to c} f'(x)$. Abbiamo

$$\forall U \in \mathscr{I}_\ell,\ \exists V_U \in \mathscr{I}_c\colon\ \forall x \in I\setminus\{c\},\quad x \in V_U \implies f'(x) \in U\,.$$

Scelto $U \in \mathscr{I}_\ell$, sia $x \in I \cap V_U \setminus \{c\}$. La funzione f è continua nell'intervallo chiuso di estremi c e x ed è derivabile in tale intervallo escluso il punto c. Quindi sono verificate le ipotesi del teorema di Lagrange 4.2.6, perciò esiste ξ appartenente all'intervallo aperto di estremi c e x tale che $R_f(x,c)=f'(\xi)$. Poiché $c,x \in V_U$ e V_U è un intervallo, si ha anche $\xi \in V_U$, quindi $f'(\xi)\in U$, cioè $R_f(x,c)\in U$. Pertanto $\forall x \in I\cap V_U\setminus\{c\}$ si ha $R_f(x,c)\in U$, quindi $f'(c)=\lim_{x\to c} R_f(x,c)=\ell$. ■

Questo teorema assicura che, se esiste reale il limite di f' in c, allora la funzione è derivabile, con derivata uguale a tale limite. Se invece $f'(x)$ è divergente per $x \to c$, allora f non è derivabile in c. È evidente che il teorema vale anche per i limiti unilateri; pertanto se f' ha limite sinistro e destro in c diversi tra di loro, allora f non è derivabile.

4.2.10 Esempio. Consideriamo la funzione

$$f_{14}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad f_{14}(x)=x|x|,$$

che è prodotto delle funzioni f_2 e f_5 (vedi esempio 4.1.1) di dominio $\mathbb{R}$, tali che $f_2(x)=x$ e $f_5(x)=|x|$; la prima è derivabile in $\mathbb{R}$, la seconda è derivabile in $\mathbb{R}^*$ e non è derivabile in 0. Quindi, per il teorema sull'algebra delle derivate 4.1.5, f_{14} è derivabile in $\mathbb{R}^*$ e, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, si ha

$$f'_{14}(x) = f'_2(x) f_5(x) + f_2(x) f'_5(x) = |x| + x \operatorname{sgn}(x) = |x| + |x| = 2|x|.$$

Risulta $\lim_{x\to 0} f'_{14}(x) = \lim_{x\to 0} 2|x| = 0$. Pertanto, per il teorema sul limite della derivata 4.2.9, f_{14} è derivabile in 0, con $f'_{14}(0) = 0$. ◀

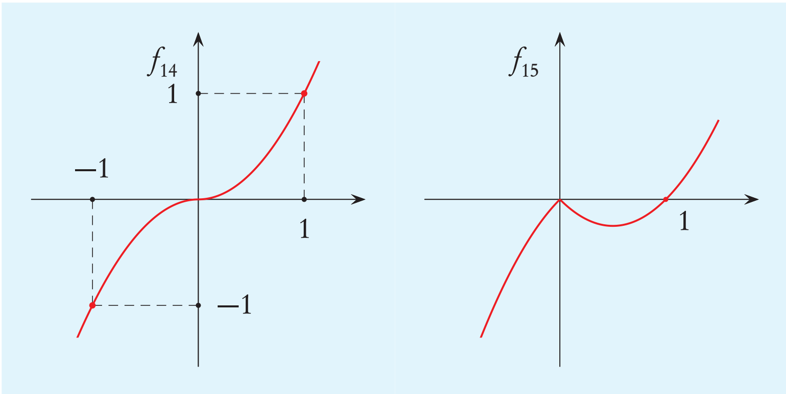


Figura 4.2.5
Le funzioni studiate negli esempi 4.2.10 e 4.2.11.

4.2.11 Esempio. Consideriamo la funzione

$$f_{15} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_{15}(x) = (x-1)|x|,$$

che è prodotto di una funzione polinomiale per la funzione valore assoluto. La prima è derivabile in $\mathbb{R}$, la seconda è derivabile in $\mathbb{R}^*$ e non derivabile in 0. Quindi, per il teorema sull'algebra delle derivate 4.1.5, f_{15} è derivabile in $\mathbb{R}^*$ e, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, si ha

$$f'_{15}(x) = |x| + (x-1)\operatorname{sgn}(x) = x \operatorname{sgn}(x) + (x-1)\operatorname{sgn}(x) = (2x-1)\operatorname{sgn}(x).$$

Risulta $\lim_{x\to 0^-} f'_{15}(x) = \lim_{x\to 0^-}(-2x+1) = 1$ e $\lim_{x\to 0^+} f'_{15}(x) = \lim_{x\to 0^+}(2x-1) = -1$; quindi, per il teorema sul limite della derivata 4.2.9, $\lim_{x\to 0^-} R_{f_{15}}(x,c) \neq \lim_{x\to 0^+} R_{f_{15}}(x,c)$, quindi f_{15} non è derivabile in 0. ◀

4.3 Applicazioni del calcolo differenziale

4.3.1 I teoremi di de l'Hôpital

Studiamo ora alcuni teoremi che, utilizzando il calcolo differenziale, forniscono strumenti utili per il calcolo dei limiti.

Siano f e g funzioni reali di variabile reale, definite in un intervallo I contenente il punto c e tali che $f(c) = g(c) = 0$, mentre $g(x) \neq 0$, per $x \in I \setminus \{c\}$. Allora, $\forall x \in I \setminus \{c\}$, si ha

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{\big(f(x) - f(c)\big)/(x-c)}{\big(g(x) - g(c)\big)/(x-c)} = \frac{R_f(x,c)}{R_g(x,c)}.$$

Se f e g sono derivabili in c, con $g'(c) \neq 0$, allora esiste reale il limite, per $x \to c$, dell'ultimo membro ed è uguale a $f'(c)/g'(c)$, quindi $\lim_{x\to c}\big(f(x)/g(x)\big) = f'(c)/g'(c)$.

Osserviamo che, avendo supposto f e g derivabili in c, per il teorema di continuità delle funzioni derivabili 4.1.3, risulta $\lim_{x\to c} f(x) = f(c) = 0$ e $\lim_{x\to c} g(x) = g(c) = 0$, pertanto il limite si presenta in forma indeterminata $0/0$. Se inoltre le funzioni f e g sono derivabili in I e f' e g' hanno limite per $x \to c$, allora, per il teorema sul limite della derivata 4.2.9, risulta $\lim_{x\to c} f'(x) = f'(c)$ e $\lim_{x\to c} g'(x) = g'(c)$, quindi

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Questa osservazione può essere generalizzata nel seguente teorema.

4.3.1 Teorema (de l'Hôpital[14], forma $0/0$, $x \to a$)

Siano $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$. Se si ha:

a) f e g sono derivabili,

b) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$,

c) $\forall x \in]a, b[$, si ha $g'(x) \neq 0$,

d) esiste $\lim_{x\to a^+} \lim_{x\to a^+}\big(f'(x)/g'(x)\big)$,

allora esiste

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Il teorema è enunciato per il limite destro, perché questo rende più semplice la dimostrazione. Ovviamente un teorema del del tutto analogo vale nel caso del limite sinistro, quindi anche nel caso di limite per x che tende a un punto interno di un intervallo in cui siano definite le due funzioni f e g.

Dimostrazione. Prolunghiamo f e g all'intervallo $[a, b[$ ponendo $f(a) = g(a) = 0$. Poiché $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$ le funzioni f e g sono continue anche in a.

Poiché $\forall x \in]a, b[$, si ha $g'(x) \neq 0$, risulta $g(x) \neq 0$, se $x \neq a$. Infatti se, per assurdo, fosse $g(x) = 0$, allora si potrebbe applicare il teorema di Rolle 4.2.1 alla restrizione di g all'intervallo $[a, x]$, pertanto esisterebbe un punto in cui g' si annulla.

Poniamo $\ell = \lim_{x\to a^+}\big(f'(x)/g'(x)\big)$. Allora, per la definizione di limite, si ha

$$\forall U \in \mathscr{I}_\ell,\ \exists \delta_U \in \mathbb{R}^+ :\ \forall x \in]a, b[, \quad x \in]a, a+\delta_U[\implies \frac{f'(x)}{g'(x)} \in U.$$

Fissato $U \in \mathscr{I}_\ell$, se $x \in]a, b[\cap]a, a+\delta_U[$, allora, per il teorema di Cauchy 4.2.3 applicato alle restrizioni di f e g all'intervallo $[a, x]$, esiste $\xi_x \in]a, x[$ tale che

$$\big(f(x) - f(a)\big)g'(\xi_x) = \big(g(x) - g(a)\big)f'(\xi_x).$$

[14]Questo teorema e i seguenti prendono il nome da Guillaume de l'Hôpital (Parigi, 1661 - Parigi, 1704), che li pubblicò in un trattato di analisi del 1696.

Tali teoremi erano già stati trovati da Johann Bernoulli (Basilea, 1667 - Basilea, 1748, fratello del già citato Jakob, v. nota 1), che diede importanti contributi allo studio dell'analisi e dell'ottica.

poiché $f(a)=g(a)=0$ e $\xi_x \in]a,x[\subseteq]a,a+\delta_U[$, da qui segue

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \in U\,.$$

Abbiamo così dimostrato che, se $x \in]a,a+\delta_U[$, allora $f(x)/g(x) \in U$; pertanto esiste

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell\,. \qquad \blacksquare$$

4.3.2 Esempio. Calcoliamo

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-\sqrt{x}}{x-1}\,,$$

già studiato nell'esempio 3.3.1. Il limite è nella forma indeterminata $0/0$. Numeratore e denominatore sono derivabili in un intorno di 1, la derivata del denominatore vale costantemente 1, quindi non si annulla. Il quoziente delle derivate è

$$\frac{1-1/\left(2\sqrt{x}\right)}{1} = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{1}{2}\,.$$

Pertanto, per il teorema di de l'Hôpital 4.3.1,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-\sqrt{x}}{x-1} = \frac{1}{2}\,. \qquad \blacktriangleleft$$

4.3.3 Teorema (de l'Hôpital, forma $0/0$, $x \to +\infty$)

Siano $f,g\colon]a,+\infty[\to \mathbb{R}$. Se si ha:

a) f e g sono derivabili,

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$,

c) $\forall x \in]a,+\infty[$, si ha $g'(x) \neq 0$,

d) esiste $\lim_{x\to+\infty} \lim_{x\to a^+}\bigl(f'(x)/g'(x)\bigr)$,

allora esiste

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Dimostrazione. Poniamo $b=1/a$ se $a>0$ e $b=1$ se $a\leq 0$. In ogni caso, se $y \in]0,b[$, allora $1/y \in]a,+\infty[$, quindi possiamo definire le funzioni

$$\overline{f}\colon]0,b[\to \mathbb{R}, \qquad \overline{f}(y) = f\left(\frac{1}{y}\right),$$

$$\overline{g}\colon]0,b[\to \mathbb{R}, \qquad \overline{g}(y) = g\left(\frac{1}{y}\right).$$

Verifichiamo che $\overline{f}$ e $\overline{g}$ soddisfano le condizioni del teorema di de l'Hôpital 4.3.1 per $y \to 0^+$. Esse sono derivabili, perché composizione di funzioni derivabili e, $\forall y \in]0,b[$,

si ha

$$\overline{f}'(y) = -\frac{1}{y^2} f'\left(\frac{1}{y}\right), \qquad \overline{g}'(y) = -\frac{1}{y^2} g'\left(\frac{1}{y}\right).$$

Poiché g' non si annulla, anche $\overline{g}'$ non si annulla. Inoltre

$$\lim_{y\to 0^+} \overline{f}(y) = \lim_{y\to 0^+} f\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0;$$

analogamente, $\lim_{y\to 0^+} \overline{g}(y) = 0$. Infine esiste

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{\overline{f}'(y)}{\overline{g}'(y)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{(-1/y^2)f'(1/y)}{(-1/y^2)g'(1/y)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{f'(1/y)}{g'(1/y)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Allora, per il teorema di de l'Hôpital 4.3.1, esiste

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{\overline{f}(y)}{\overline{g}(y)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\overline{f}'(y)}{\overline{g}'(y)},$$

quindi esiste

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\overline{f}(y)}{\overline{g}(y)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\overline{f}'(y)}{\overline{g}'(y)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

■

Ovviamente un teorema analogo vale per il limite per $x \to -\infty$.

4.3.4 Teorema (de l'Hôpital, forma ℓ/∞, $x \to a$)

Siano $f, g\colon]a,b[\to \mathbb{R}$. Se si ha:

a) f e g sono derivabili,

b) $g(x)$ è divergente per $x \to a^+$,

c) $\forall x \in]a,b[$, si ha $g'(x) \neq 0$,

d) esiste $\lim_{x\to a^+} \lim_{x\to a^+}\big(f'(x)/g'(x)\big)$,

allora esiste

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dimostrazione. Poiché g è divergente esiste un intorno di 0 in cui essa non si annulla; si può supporre, eventualmente restringendo il dominio delle funzioni, che non si annulli in tutto l'intervallo $]a,b[$.

Siano $x, y \in]a,b[$ con $x < y$; per il teorema di Cauchy 4.2.3, applicato alle restrizioni di f e g all'intervallo $[x,y]$, esiste $\xi_{x,y} \in]x,y[$ tale che

$$\big(f(y) - f(x)\big)g'(\xi_{x,y}) = \big(g(y) - g(x)\big)f'(\xi_{x,y}).$$

Pertanto si ha, successivamente,

$$f(x) - f(y) = \big(g(x) - g(y)\big)\frac{f'(\xi_{x,y})}{g'(\xi_{x,y})},$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(y) + \big(g(x) - g(y)\big)\frac{f'(\xi_{x,y})}{g'(\xi_{x,y})}, \\
\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(y)}{g(x)} + \frac{f'(\xi_{x,y})}{g'(\xi_{x,y})} - \frac{g(y)}{g(x)}\frac{f'(\xi_{x,y})}{g'(\xi_{x,y})}.
\end{aligned}
$$

Consideriamo il caso $\lim_{x\to a^+}\big(f'(x)/g'(x)\big) = \ell \in \mathbb{R}$.

Per semplificare le notazioni nel seguito, nella definizione di limite scegliamo δ_ε piccolo, in modo che risulti $]a,b[\, \cap\,]a,a+\delta_\varepsilon[\, = \,]a,a+\delta_\varepsilon[$; si ha quindi

$$
\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+,\ \exists \delta_\varepsilon \in\,]0,b-a[:\ \forall x \in\,]a,a+\delta_\varepsilon[,\quad \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - \ell\right| < \varepsilon .
$$

Scelto $\varepsilon \in\,]0,1[$, fissiamo $y \in\,]a,a+\delta_\varepsilon[$. Poiché $g(x)$ è divergente per $x \to a^+$, si ha $\lim_{x\to a^+} f(y)/g(x) = 0$ e $\lim_{x\to a^+} g(y)/g(x) = 0$, quindi esiste $\eta_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ (che possiamo supporre minore di δ_ε) tale che, se $x \in\,]a,a+\eta_\varepsilon[$, allora

$$
\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| < \varepsilon, \qquad \left|\frac{g(y)}{g(x)}\right| < \varepsilon .
$$

Se $x \in\,]a,a+\eta_\varepsilon[$, allora risulta $\xi_{x,y} \in\,]x,y[\, \subseteq\,]a,a+\delta_\varepsilon[$, quindi

$$
\left|\frac{f'(\xi_{x,y})}{g'(\xi_{x,y})} - \ell\right| < \varepsilon,
$$

pertanto

$$
\left|\frac{f'(\xi_{x,y})}{g'(\xi_{x,y})}\right| = \left|\frac{f'(\xi_{x,y})}{g'(\xi_{x,y})} - \ell + \ell\right| \le \left|\frac{f'(\xi_{x,y})}{g'(\xi_{x,y})} - \ell\right| + |\ell| < \varepsilon + |\ell| < 1 + |\ell|,
$$

perciò

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \ell\right| &= \left|\frac{f(y)}{g(x)} + \frac{f'(\xi_{x,y})}{g'(\xi_{x,y})} - \frac{g(y)}{g(x)}\frac{f'(\xi_{x,y})}{g'(\xi_{x,y})} - \ell\right| \le \\
&\le \left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| + \left|\frac{f'(\xi_{x,y})}{g'(\xi_{x,y})} - \ell\right| + \left|\frac{g(y)}{g(x)}\right|\left|\frac{f'(\xi_{x,y})}{g'(\xi_{x,y})}\right| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon\big(1 + |\ell|\big) = \varepsilon\big(3 + |\ell|\big).
\end{aligned}
$$

Possiamo quindi concludere che $\lim_{x\to a^+}\big(f'(x)/g'(x)\big) = \ell$.

Consideriamo ora il caso $\lim_{x\to a^+}\big(f'(x)/g'(x)\big) = +\infty$. Si ha

$$
\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \delta_M \in\,]0,b-a[:\ \forall x \in\,]a,a+\delta_M[,\quad \frac{f'(x)}{g'(x)} > M .
$$

Scelto $M \in\,]1,+\infty[$ fissiamo $y \in\,]a,a+\delta_M[$. Poiché $g(x)$ è divergente per $x \to a^+$, si ha $\lim_{x\to a^+} f(y)/g(x) = 0$ e $\lim_{x\to a^+} g(y)/g(x) = 0$, quindi esiste $\eta_M \in \mathbb{R}^+$ (che possiamo supporre minore di δ_M) tale che se, $x \in\,]a,a+\eta_M[$, allora

$$
\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| < \frac{1}{M}, \qquad \left|\frac{g(y)}{g(x)}\right| < \frac{1}{M} .
$$

Se $x \in]a, a+\eta_M[$, allora si ha

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(y)}{g(x)} + \frac{f'(\xi_{x,y})}{g'(\xi_{x,y})} - \frac{g(y)}{g(x)} \frac{f'(\xi_{x,y})}{g'(\xi_{x,y})} \geq$$

$$\geq -\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| + \frac{f'(\xi_{x,y})}{g'(\xi_{x,y})}\left(1 - \left|\frac{g(y)}{g(x)}\right|\right) > -\frac{1}{M} + M\left(1 - \frac{1}{M}\right) \geq M - 2.$$

Possiamo quindi concludere che $\lim_{x\to a^+}\big(f'(x)/g'(x)\big) = +\infty$.

Nel caso che sia $\lim_{x\to a^+}\big(f'(x)/g'(x)\big) = -\infty$ la dimostrazione è analoga. ■

4.3.5 Teorema (de l'Hôpital, forma ℓ/∞, $x \to +\infty$)

Siano $f, g\colon]a,+\infty[\to \mathbb{R}$. Se si ha:

a) f e g sono derivabili,

b) $g(x)$ è divergente per $x \to +\infty$,

c) $\forall x \in]a,+\infty[$, si ha $g'(x) \neq 0$,

d) esiste $\lim_{x\to+\infty} \lim_{x\to a^+}\big(f'(x)/g'(x)\big)$,

allora esiste

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

La dimostrazione si ottiene dal corrispondente teorema di de l'Hôpital per x che tende a un valore reale in modo analogo a quanto fatto nel caso della forma $0/0$.

Ovviamente un teorema analogo vale per il limite per $x \to -\infty$.

4.3.6 Esempio. Calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Il limite è in forma indeterminata ∞/∞, ma può essere facilmente calcolato come segue:

$$\frac{\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2\big(1+(2/x^2)\big)}}{\sqrt{x^2\big(1+(1/x^2)\big)}} = \frac{\sqrt{1+(2/x^2)}}{\sqrt{1+(1/x^2)}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1.$$

Si può anche cercare di calcolare il limite utilizzando il teorema di de l'Hôpital 4.3.5. Infatti la funzione di cui cerchiamo il limite è quoziente delle funzioni

$$f_{16}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_{16}(x) = \sqrt{x^2+2},$$
$$g_{16}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g_{16}(x) = \sqrt{x^2+1}.$$

Per $x \to +\infty$ si ha $f_{16}(x) \to +\infty$ e $g_{16}(x) \to +\infty$. Inoltre f_{16} e g_{16} sono derivabili e, $\forall x \in \mathbb{R}$, si ha

$$f'_{16}(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}, \qquad g'_{16}(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Risulta $g_{16}'(x) \neq 0$, per $x \in \mathbb{R}^+$. Si ha

$$\frac{f_{16}'(x)}{g_{16}'(x)} = \frac{x/\sqrt{x^2+2}}{x/\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+2}},$$

pertanto per applicare il teorema di de l'Hôpital occorre determinare

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+2}}.$$

Questo limite è del tutto analogo a quello che stiamo studiando, pertanto il teorema di de l'Hôpital non agevola il calcolo del limite. ◀

4.3.2 La formula di Taylor

Sappiamo che il grafico di una funzione ha una retta tangente in ogni punto di derivabilità; da un altro punto di vista, una funzione derivabile può essere approssimata da un polinomio di primo grado. Cerchiamo di migliorare l'approssimazione utilizzando polinomi di grado maggiore.

4.3.7 Esempio. Sia

$$f_{17}\colon]-\infty, 1[\to \mathbb{R}, \qquad f_{17}(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Per il teorema 1.3.19, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, se $x \in]-\infty, 1[$ si ha

$$1 - x^{n+1} = (1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k 1^{n-k} = (1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k.$$

Pertanto

$$1 = (1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1},$$

da cui segue

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Poiché $1/(1-x) \to 1$, per $x \to 0$, esiste un intorno di 0 in cui tale funzione è limitata; pertanto l'ultimo addendo è $O(x^{n+1})$. Quindi

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + O(x^{n+1}), \qquad \text{per } x \to 0.$$

Abbiamo così determinato un polinomio che approssima f_{17} vicino a 0. Poiché, se $n < m$, allora x^m è trascurabile rispetto a x^n, per $x \to 0$, al crescere del grado del polinomio l'approssimazione migliora. ◀

Studiamo il problema dell'approssimazione di una funzione con polinomi di grado superiore al primo nel caso generale. Iniziamo con i polinomi di secondo grado, facendo considerazioni geometriche simili a quelle fatte per individuare la retta tangente.

Sia f una funzione derivabile in un intervallo contenente il punto c. Consideriamo una parabola di equazione $y = g(x)$ con

$$g(x) = \alpha(x-c)^2 + \beta(x-c) + \gamma,$$

con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Consideriamo un qualunque polinomio di grado al più 2, perciò non chiediamo che sia $\alpha \neq 0$, quindi la parabola può degenerare in una retta. Il polinomio è espresso mediante potenze di $x-c$, perché questo semplifica lo studio del suo comportamento per x vicino a c.

Imponiamo che la parabola passi per $(c, f(c))$ e che in questo punto abbia retta tangente coincidente con la retta tangente al grafico di f. La parabola passa per $(c, f(c))$ se e solo se $g(c) = f(c)$ e in tal caso le rette tangenti sono comuni se e solo se $g'(c) = f'(c)$; pertanto deve essere $\gamma = f(c)$ e $\beta = f'(c)$. Quindi la parabola ha equazione

$$y = \alpha(x-c)^2 + f'(c)(x-c) + f(c).$$

Imponiamo che la parabola abbia in comune con il grafico di f anche un altro punto $(d, f(d))$; ciò è verificato se risulta

$$f(d) = \alpha(d-c)^2 + f'(c)(d-c) + f(c),$$

cioè

$$\alpha = \frac{f(d) - f(c) - f'(c)(d-c)}{(d-c)^2}.$$

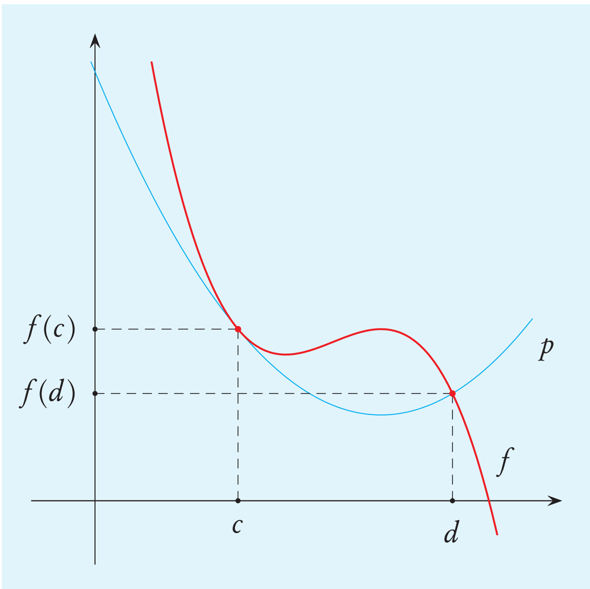


Figura 4.3.1
La parabola p interseca il grafico di f in due punti di ascissa c e d; nel primo di tali punti il grafico e la parabola hanno la stessa retta tangente.

Al variare di d varia il coefficiente α del termine di secondo grado dell'equazione della parabola; studiamo come cambia la parabola per $d \to c$, cioè studiamo il limite di α per $d \to c$. Il limite è quoziente di funzioni infinitesime, quindi è in forma indeterminata.

Consideriamo la funzione $h = f - g$, dove è g la funzione il cui grafico è la parabola individuata sopra. Poiché f è derivabile, anche h lo è; inoltre, h si annulla in c e in d. Per il teorema di Rolle 4.2.1 esiste un punto d_1, appartenente all'intervallo aperto di estremi c e d, tale che $h'(d_1) = 0$. Supponiamo f derivabile 2 volte; allora anche h lo è, quindi h'

è derivabile; inoltre $h'(c)=0$ perché f' e g' coincidono in c. Perciò possiamo applicare il teorema di Rolle 4.2.1 alla funzione h' nell'intervallo di estremi c e d_1; quindi esiste d_2 in tale intervallo tale che $h''(d_2)=0$. Poiché d_2 è compreso tra c e d_1 e d_1 è compreso tra c e d, anche d_2 è compreso tra c e d. Si ha

$$0=h''(d_2)=f''(d_2)-g''(d_2)=f''(d_2)-2\alpha,$$

perciò $\alpha=f''(d_2)/2$. Quando d tende a c, anche d_2 tende a c; quindi, se f'' è continua in c, allora α tende a $f''(c)/2$. Perciò la parabola si "avvicina" alla parabola di equazione

$$y=\frac{f''(c)}{2}(x-c)^2+f'(c)(x-c)+f(c),$$

quando d si avvicina a c. Questa è detta **parabola osculatrice** al grafico di f nel punto $\big(c,f(c)\big)$.

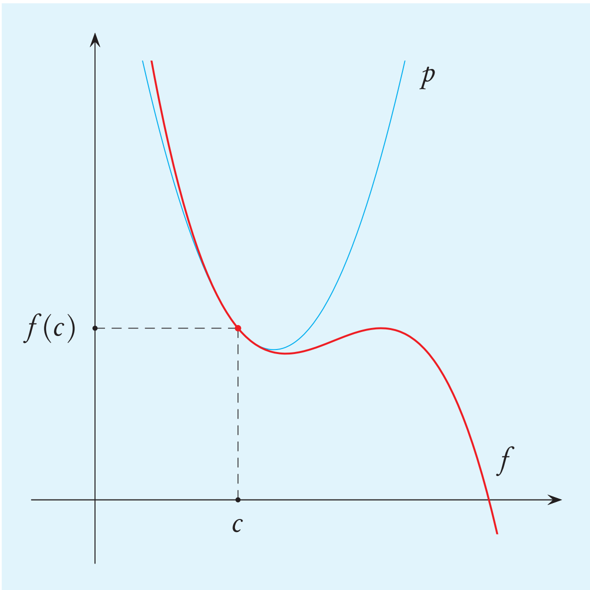


Figura 4.3.2
La parabola p è la parabola osculatrice al grafico di f nel punto di ascissa c.

Precisiamo la relazione tra grafico di funzione e parabola osculatrice in termini di proprietà di funzioni. Abbiamo visto che se f è derivabile 2 volte nell'intervallo I, allora $\forall c,d\in I$ esiste d_2, compreso tra c e d, tale che il coefficiente α del termine di secondo grado della parabola osculatrice è uguale a $f''(d_2)/2$; si ha quindi

$$f(d)=f(c)+f'(c)(d-c)+\frac{f''(d_2)}{2}(d-c)^2,$$

cioè

$$f(d)=f(c)+f'(c)(d-c)+\frac{f''(c)}{2}(d-c)^2+\frac{f''(d_2)-f''(c)}{2}(d-c)^2;$$

se f'' è continua in c, l'ultimo termine è $o\big((d-c)^2\big)$ per $d\to c$. Perciò

$$f(d)=f(c)+f'(c)(d-c)+\frac{f''(c)}{2}(d-c)^2+o\big((d-c)^2\big),\qquad \text{per } d\to c.$$

Sotto opportune ipotesi di derivabilità, abbiamo così stabilito che f si può approssimare, in un intorno di c, con un polinomio di secondo grado il cui grafico è la parabola osculatrice. L'errore che si commette sostituendo il polinomio alla funzione è trascurabile rispetto $(x-c)^2$; questa approssimazione è migliore di quella col polinomio di primo grado avente come grafico la retta tangente, in tal caso l'errore è trascurabile rispetto a $x-c$.

Estendiamo questi ragionamenti ai polinomi di grado qualunque.

Definizione polinomio di Taylor[15]

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f\colon I \to \mathbb{R}$, $c \in I$ e $n \in \mathbb{N}^*$. Supponiamo f derivabile n volte in c. Chiamiamo **polinomio di Taylor** di f di punto iniziale c e ordine n il polinomio

$$T_{c,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k .$$

Utilizziamo questa notazione anche nel caso $n=0$: $T_{c,0}$ denota la funzione che vale costantemente $f(c)$.

4.3.8 Esempio. Consideriamo la funzione

$$f_{17}\colon]-\infty,1[\to \mathbb{R}, \qquad f_{17}(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1},$$

già studiata nell'esempio 4.3.7.

Determiniamo i polinomi di Taylor di punto iniziale 0 di f_{17}. La funzione è razionale fratta, quindi indefinitamente derivabile; $\forall x \in]-\infty,1[$, si ha

$$\begin{aligned} f_{17}'(x) &= (-1)(1-x)^{-1-1}(-1) = (1-x)^{-2},\\ f_{17}''(x) &= (-2)(1-x)^{-2-1}(-1) = 2(1-x)^{-3},\\ f_{17}'''(x) &= 2(-3)(1-x)^{-3-1}(-1) = 3\cdot 2(1-x)^{-4}. \end{aligned}$$

È quindi evidente che, come si può dimostrare per induzione, $\forall x \in]-\infty,1[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $f_{17}^{(n)}(x) = n!(1-x)^{-n-1}$; pertanto $f_{17}^{(n)}(0) = n!$. Quindi

$$T_{0,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f_{17}^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

Questo polinomio coincide con il polinomio che approssima f_{17} vicino a 0 trovato nell'esempio 4.3.7. ◀

Chiamiamo **formula di Taylor** di punto iniziale c e ordine n per la funzione f l'uguaglianza

$$f(x) = T_{c,n}(x) + R_{c,n}(x);$$

il termine $R_{c,n} = f - T_{c,n}$ è detto **resto della formula di Taylor** di punto iniziale c e ordine n per la funzione f.

[15] Il polinomio prende il nome da Brook Taylor (Edmonton, Inghilterra, 1685 - Londra, 1731), che lo introdusse in un libro pubblicato nel 1715. Questo polinomio era già stato trovato in precedenza, il primo a scriverlo è stato James Gregory (Drumoak, Scozia, 1638 - Edimburgo, 1675), che lo citò in una lettera a un collega nel 1671.

Taylor ha dato contributi, oltre che al calcolo differenziale, alla geometria e alla meccanica.

Gregory è stato uno dei precursori del calcolo differenziale, sviluppò la teoria delle serie per studiare questioni geometriche; ha dato anche contributi allo studio dell'ottica.

Questa formula ha interesse se abbiamo informazioni sul resto, che ci consentono di sapere in che senso il polinomio $T_{c,n}$ approssima f. Per ottenere queste informazioni è necessario il seguente teorema.

4.3.9 Teorema

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$, $c \in I$ e $n \in \mathbb{N}^*$. Supponiamo f derivabile n volte in c. Allora, per $j = 0, 1, \ldots, n$, risulta

$$T_{c,n}^{(j)}(c) = f^{(j)}(c).$$

Dimostrazione. Evidentemente $T_{c,n}(c) = f(c)$.

Siano $k \in \mathbb{N}$ e $j \in \mathbb{N}^*$. Se $j < k$, si ha (v. esempio 4.1.12)

$$\frac{d^j (x-c)^k}{dx^j} = k(k-1)\ldots(k-j+1)(x-c)^{k-j},$$

quindi

$$\left.\frac{d^j (x-c)^k}{dx^j}\right|_{x=c} = 0,$$

Se $j > k$

$$\frac{d^j (x-c)^k}{dx^j} = 0.$$

Infine

$$\frac{d^k (x-c)^k}{dx^k} = k!,$$

Pertanto, per $j = 1, 2, \ldots, n$ si ha

$$\left.\frac{d^j T_{c,n}(x)}{dx^j}\right|_{x=c} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} \left.\frac{d^j (x-c)^k}{dx^j}\right|_{x=c} = \frac{f^{(j)}(c)}{j!}\, j! = f^{(j)}(c).$$

■

Enunciamo alcuni teoremi che serviranno per ottenere informazioni sul resto.

4.3.10 Teorema

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile, $c \in I$ e $\alpha \in [0, +\infty[$. Se $f(c) = 0$ e $f'(x) = o\big(|x-c|^\alpha\big)$, per $x \to c$, allora $f(x) = o\big(|x-c|^{\alpha+1}\big)$, per $x \to c$.

Dimostrazione. Sia $x \in I \setminus \{c\}$. Per il teorema di Lagrange 4.2.6, applicato alla restrizione di f all'intervallo di estremi x e c, esiste ξ_x, interno a tale intervallo, tale che si ha $f(x) - f(c) = f'(\xi_x)(x-c)$; per ipotesi $f(c) = 0$, pertanto risulta $f(x) = f'(\xi_x)(x-c)$. Poiché $|\xi_x - c| \leq |x-c|$, da qui segue

$$\left|\frac{f(x)}{|x-c|^{\alpha+1}}\right| = \frac{|f'(\xi_x)(x-c)|}{|x-c|^{\alpha+1}} = \frac{|f'(\xi_x)|}{|x-c|^{\alpha}} = \frac{|f'(\xi_x)|}{|\xi_x-c|^{\alpha}} \frac{|\xi_x-c|^{\alpha}}{|x-c|^{\alpha}} \leq \frac{|f'(\xi_x)|}{|\xi_x-c|^{\alpha}}.$$

Poiché $\lim_{x\to c} f'(x)/|x-c|^\alpha = 0$, si ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+,\ \exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \colon\ \forall x \in I \setminus \{c\}, \quad x \in]c-\delta_\varepsilon, c+\delta_\varepsilon[\implies \left| \frac{f'(x)}{|x-c|^\alpha} \right| < \varepsilon .$$

Fissato $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, se $x \in I \cup]c-\delta_\varepsilon, c+\delta_\varepsilon[\setminus \{c\}$, si ha $\xi_x \in I \cup]c-\delta_\varepsilon, c+\delta_\varepsilon[\setminus \{c\}$ quindi risulta

$$\left| \frac{f(x)}{|x-c|^{\alpha+1}} \right| \le \frac{|f'(\xi_x)|}{|\xi_x - c|^\alpha} < \varepsilon .$$

Perciò $\lim_{x\to c} f(x)/|x-c|^{\alpha+1} = 0$. ■

4.3.11 Teorema

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$, $c \in I$ e $n \in \mathbb{N}^*$. Supponiamo f derivabile n volte in c. Se $f^{(j)}(c) = 0$ per $j = 0, 1, \ldots, n$, allora $f(x) = o\big((x-c)^n\big)$, per $x \to c$.

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema applicando il principio di induzione 1.3.4 alla proposizione $\mathscr{P}(n)$: qualunque sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile n volte in c, tale che $f^{(j)}(c) = 0$, per $j = 0, 1, \ldots, n$, si ha $f(x) = o\big((x-c)^n\big)$, per $x \to c$.

Consideriamo il caso $n = 1$. Se $f(c) = f'(c) = 0$, allora

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{x-c} = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x-c} = f'(c) = 0,$$

perciò $\mathscr{P}(1)$ è vera.

Supponiamo ora che $\mathscr{P}(n)$ si verificata. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile $n+1$ volte in c tale che

$$f(c) = f'(c) = \cdots = f^{(n)}(c) = f^{(n+1)}(c) = 0 .$$

Allora f' è derivabile in c e si ha

$$f'(c) = (f')'(c) = \cdots = (f')^{(n)}(c) = 0,$$

da cui, per ipotesi induttiva, $f'(x) = o\big((x-c)^n\big)$, per $x \to c$. Poiché $f(c) = 0$, per il teorema 4.3.10 si ha $f(x) = o\big((x-c)^{n+1}\big)$, per $x \to c$, quindi $\mathscr{P}(n+1)$ è verificata. ■

4.3.12 Teorema (formula di Taylor con resto nella forma di Peano[16])

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$, $c \in I$ e $n \in \mathbb{N}^*$. Supponiamo f derivabile n volte in c. Allora

$$f(x) = T_{c,n}(x) + o\big((x-c)^n\big), \qquad \text{per } x \to c ;$$

inoltre $T_{c,n}$ è l'unico polinomio di grado minore o uguale a n che ha questa proprietà.

[16] Questa forma del resto prende il nome da Giuseppe Peano (Cuneo, 1858 - Torino, 1932), che la pubblicò in un trattato sul calcolo differenziale del 1884. Peano ottenne importanti risultati in logica matematica, algebra lineare e in vari settori dell'analisi tra cui le equazioni differenziali. Fu anche studioso di filosofia.

Dimostrazione. Per il teorema 4.3.9 la funzione $f - T_{c,n}$ si annulla insieme a tutte le derivate fino all'ordine n in c; per il teorema 4.3.11 si ha quindi $f(x) - T_{c,n}(x) = o\big((x-c)^n\big)$, per $x \to c$, pertanto $f(x) = T_{c,n}(x) + o\big((x-c)^n\big)$.

Sia Q un polinomio di grado minore o uguale a n tale che

$$f(x) = Q(x) + o\big((x-c)^n\big), \qquad \text{per } x \to c\,.$$

Dobbiamo dimostrare che $Q = T_{c,n}$, cioè che $Q - T_{c,n}$ è il polinomio nullo.

Per quanto già dimostrato si ha

$$\lim_{x\to c} \frac{Q(x) - T_{c,n}(x)}{(x-c)^n} = \lim_{x\to c}\left(\frac{Q(x) - f(x)}{(x-c)^n} + \frac{f(x) - T_{c,n}(x)}{(x-c)^n}\right) = 0\,,$$

quindi, ponendo $x - c = y$,

$$\lim_{y\to 0} \frac{Q(y+c) - T_{c,n}(y+c)}{y^n} = 0\,.$$

La funzione $y \mapsto Q(y+c) - T_{c,n}(y+c)$ è polinomiale di grado minore o uguale a n. Per concludere la dimostrazione è sufficiente provare che se R è un polinomio di grado minore o uguale a n e $\lim_{y\to 0} R(y)/y^n = 0$, allora R è identicamente nullo. Proviamo l'implicazione contrapposta: se R è un polinomio di grado minore o uguale a n non identicamente nullo, allora non è vero che $\lim_{y\to 0} R(y)/y^n = 0$.

Sia quindi R un polinomio di grado minore o uguale a n non identicamente nullo; indicato con m il più piccolo esponente tale che il coefficiente di y^m è non nullo, risulta $R(y) = \sum_{k=m}^{n} a_k y^k$ con $a_m \neq 0$. Si ha

$$\frac{R(y)}{y^n} = \frac{y^m}{y^n} \sum_{k=m}^{n} a_k y^{k-m} = y^{m-n} \sum_{k=m}^{n} a_k y^{k-m}\,.$$

Per $y \to 0$ il secondo fattore ha limite a_m, mentre il primo ha limite 1, se $m = n$, e limite destro $+\infty$, se $m < n$. In ciascuno dei due casi il limite del prodotto non può essere 0. ■

4.3.13 Osservazione. Per la formula di Taylor con resto nella forma di Peano, sappiamo che ogni funzione derivabile n volte in c può essere scritta come somma di un polinomio di grado al più n con una funzione trascurabile rispetto a $(x-c)^n$. Se $n = 1$ è conseguenza immediata della caratterizzazione della derivabilità 4.1.2 che vale il viceversa, cioè se una funzione f è somma di un polinomio di grado al più 1 con una funzione trascurabile rispetto a $x - c$, per $x \to c$, allora f è derivabile in c. Ciò non è vero se $n > 1$.

Per $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ sia

$$f_{18}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_{18}(x) = \begin{cases} x^{n+1}\sin(x^{-n}), & \text{se } x \in \mathbb{R}^*\,, \\ 0, & \text{se } x = 0\,. \end{cases}$$

Si ha

$$\left|\frac{f_{18}(x)}{x^n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}\sin(x^{-n})}{x^n}\right| = \left|x\sin(x^{-n})\right| \le |x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0\,,$$

pertanto $f_{18}(x) = o(x^n)$, cioè f_{18} è somma del polinomio identicamente nullo con una funzione trascurabile rispetto a x^n, per $x \to 0$.

La funzione f_{18} è evidentemente derivabile in $\mathbb{R}^*$, con derivata

$$f'_{18}(x) = (n+1)x^n \sin(x^{-n}) + x^{n+1}\cos(x^{-n})(-n)x^{-n-1} = (n+1)x^n \sin(x^{-n}) - n\cos(x^{-n}).$$

Inoltre

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_{18}(x) - f_{18}(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{n+1}\sin(x^{-n})}{x} = \lim_{x\to 0} x^n \sin(x^{-n}) = 0,$$

Quindi f_{18} è derivabile in 0 e $f'_{18}(0) = 0$. Poiché non esiste $\lim_{x\to 0}\cos(x^{-n})$, non esiste neppure $\lim_{x\to 0} f'_{18}(x)$, pertanto f'_{18} non è continua in 0, quindi non è derivabile; perciò f_{18} non è derivabile 2 volte in 0. ◀

Vediamo ora una differente forma del resto, che non coinvolge limiti per x che tende al punto iniziale del polinomio.

Il teorema di Lagrange 4.2.6 può essere interpretato come una formula di Taylor per $n = 0$. Infatti per tale teorema, sotto opportune ipotesi, se c e x sono due punti distinti del dominio di f, allora esiste ξ compreso tra c e x tale che $f(x) = f(c) + f'(\xi)(x - c)$. Poiché il polinomio di Taylor di ordine 0 è la costante $f(c)$, possiamo scrivere

$$f(x) = T_{c,0}(x) + f'(\xi)(x - c).$$

Per provare questa generalizzazione è utile il seguente teorema, che generalizza il teorema di Cauchy 4.2.3.

4.3.14 Teorema

Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo f derivabile n volte in $[a,b]$, con derivata n-sima continua, e $n+1$ volte in $]a,b[$ e g continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$. Indichiamo con $T_{a,n}$ il polinomio di Taylor di punto iniziale a e ordine n di f. Allora esiste $c \in\,]a,b[$ tale che

$$\big(f(b) - T_{a,n}(b)\big)g'(c) = \big(g(b) - g(a)\big)f^{(n+1)}(c)\,\frac{(b-c)^n}{n!}.$$

Il teorema di Cauchy è il caso particolare $n = 0$. Infatti, per tale n, $T_{a,n}$ vale costantemente $f(a)$.

Dimostrazione. Poniamo

$$h : [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad h(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b - x)^k,$$

Poiché tutte le derivate fino all'ordine n di f sono continue in $[a,b]$ e derivabili in $]a,b[$, h è continua in $[a,b]$ ed è derivabile in $]a,b[$. Allora, per il teorema di Cauchy 4.2.3, esiste $\xi \in\,]a,b[$ tale che

$$\big(h(b) - h(a)\big)g'(c) = \big(g(b) - g(a)\big)h'(c). \tag{4.3.1}$$

Si ha

$$
\begin{aligned}
h(a) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k = T_{a,n}(b),\\
h(b) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(b)}{k!}(b-b)^k = f(b),\\
h'(c) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(c)}{k!}(b-c)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}k(b-c)^{k-1} =\\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(c)}{k!}(b-c)^k - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j+1)}(c)}{j!}(b-c)^j = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n .
\end{aligned}
$$

Pertanto l'uguaglianza (4.3.1) diventa

$$
\big(f(b)-T_{a,n}(b)\big)g'(c)-\big(g(b)-g(a)\big)\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n = 0,
$$

da cui segue immediatamente la tesi. ■

4.3.15 Teorema (formula di Taylor con resto nella forma di Lagrange[17])

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$, $c \in I$ e $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo f derivabile n volte in I, con derivata n-sima continua, e $n+1$ volte in $I\setminus\{c\}$. Allora, $\forall x \in I\setminus\{c\}$, esiste ξ compreso tra c e x tale che

$$
f(x) = T_{c,n}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}.
$$

Dimostrazione. Applichiamo il teorema 4.3.14 nell'intervallo di estremi c e x, con g tale che $g(y)=(x-y)^{n+1}$. Poiché $g'(y) = -(n+1)(x-y)^n$, esiste ξ, compreso tra c e x tale che

$$
-\big(f(x)-T_{c,n}(x)\big)(n+1)(x-\xi)^n = \big(0-(x-c)^{n+1}\big)f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-\xi)^n}{n!},
$$

cioè

$$
\big(f(x)-T_{c,n}(x)\big)(n+1) = (x-c)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)\frac{1}{n!},
$$

da cui segue la tesi. ■

Utilizzando altre funzioni g, dal teorema 4.3.14 si ottengono altre forme del resto.

[17] Questa forma del resto prende il nome dal già citato Giuseppe Luigi Lagrange (v. nota 13) che la pubblicò in un trattato del 1797.

4.3.16 Teorema (formula di Taylor con resto nella forma di Cauchy[18])

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$, $c \in I$ e $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo f derivabile n volte in I, con derivata n-sima continua, e $n+1$ volte in $I \setminus \{c\}$. Allora, $\forall x \in I \setminus \{c\}$, esiste ξ compreso tra c e x tale che

$$f(x) = T_{c,n}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-c)(x-\xi)^n .$$

Dimostrazione. Applichiamo il teorema 4.3.14 nell'intervallo di estremi c e x, con g tale che $g(y) = x - y$. Poiché $g'(y) = -1$, esiste ξ, compreso tra c e x tale che

$$-\big(f(x) - T_{c,n}(x)\big) = \big(0 - (x-c)\big) f^{(n+1)}(\xi)\,\frac{(x-\xi)^n}{n!} ,$$

cioè

$$f(x) - T_{c,n}(x) = (x-c) f^{(n+1)}(\xi)\,\frac{(x-\xi)^n}{n!} ,$$

da cui segue la tesi. ■

Vediamo una forma più generale del resto, che comprende come casi particolari sia il resto nella forma di Lagrange che quello nella forma di Cauchy.

4.3.17 Teorema (formula di Taylor con resto nella forma di Schlömilch[19])

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$, $c \in I$, $n \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N}^*$. Supponiamo f derivabile n volte in I, con derivata n-sima continua, e $n+1$ volte in $I \setminus \{c\}$. Allora, $\forall x \in I \setminus \{c\}$, esiste ξ compreso tra c e x tale che

$$f(x) = T_{c,n}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!\,k}(x-c)^k (x-\xi)^{n+1-k} .$$

Osserviamo che nel caso particolare $k = 1$ si ottiene il resto secondo Cauchy, mentre nel caso $k = n+1$ si ottiene il resto secondo Lagrange.

Dimostrazione. Applichiamo il teorema 4.3.14 nell'intervallo di estremi c e x, con g tale che $g(y) = (x-y)^k$. Poiché $g'(y) = -k(x-y)^{k-1}$, esiste ξ, compreso tra c e x tale che

$$-\big(f(x) - T_{c,n}(x)\big) k (x-\xi)^{k-1} = \big(0 - (x-c)^k\big) f^{(n+1)}(\xi)\,\frac{(x-\xi)^n}{n!} ,$$

cioè

$$\big(f(x) - T_{c,n}(x)\big) k = (x-c)^{n+1} f^{(k)}(\xi)\,\frac{(x-\xi)^{n+1-k}}{n!} ,$$

da cui segue la tesi. ■

[18] Questa forma del resto prende il nome dal già citato Augustin Louis Cauchy (v. nota 7) che la pubblicò nelle lezioni tenute all'École royale polytecnique di Parigi nel 1823.

[19] Questa forma del resto prende il nome da Oscar Schlömilch (Weimar, Germania, 1823 - Dresden, Germania, 1901) che la pubblicò in un manuale di calcolo differenziale nel 1847. Schlömilch diede importanti contributi allo sviluppo dell'analisi matematica.

Utilizziamo la formula di Taylor con resto nella forma di Peano per stabilire una formula per le derivate successive della composizione di due funzioni.

4.3.18 Teorema (sulla derivata n-sima della composizione, formula di Faà di Bruno[20])

Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli, $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$, $c \in I$ e $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Supponiamo che sia $f(I) \subseteq J$. Se f è derivabile n volte in c e g è derivabile n volte in $f(c)$, allora $g \circ f$ è derivabile n volte in c e

$$(g \circ f)^{(n)}(c) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} g^{(k)}\big(f(c)\big) \sum_{(j_1, j_2, \ldots, j_n) \in I_{n,k}} \frac{n!}{j_1!\, j_2! \cdots j_n!} \left(\frac{f'(c)}{1!}\right)^{j_1} \left(\frac{f''(c)}{2!}\right)^{j_2} \cdots \left(\frac{f^{(n)}(c)}{n!}\right)^{j_n},$$

dove, per $k = 1, 2, \ldots, n$, si pone

$$I_{n,k} = \left\{ (j_1, j_2, \ldots, j_n) \in \mathbb{N}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} j_i = k,\ \sum_{i=1}^{n} i j_i = n \right\}.$$

Dimostrazione. Proviamo anzitutto, per induzione, che $g \circ f$ è derivabile n volte in c.

Per il teorema sulla derivata della composizione 4.1.8, se f è derivabile in c e g è derivabile in $f(c)$, allora $g \circ f$ è derivabile in c. Quindi per $n = 1$ l'affermazione è vera.

Supponiamo che l'affermazione sia vera per n. Se f è derivabile $n+1$ volte in c e g è derivabile $n+1$ volte in $f(c)$, allora f' è derivabile n volte in c, e g' è derivabile n volte in $f(c)$. Si ha $(g \circ f)' = (g' \circ f) f'$, per ipotesi induttiva $g' \circ f$ è derivabile n volte in c, quindi anche $(g \circ f)'$ è derivabile n volte in c, quindi $g \circ f$ è derivabile $n+1$ volte in c.

Per la formula di Taylor con resto nella forma di Peano 4.3.12 si ha

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(c)}{j!}(x-c)^j + o\big((x-c)^n\big), \qquad \text{per } x \to c,$$
$$g(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}\big(f(c)\big)}{k!}\big(y - f(c)\big)^k + o\Big(\big(y - f(c)\big)^n\Big), \qquad \text{per } y \to f(c),$$

pertanto, per $x \to c$, si ha

$$g\big(f(x)\big) = \tag{4.3.2}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}\big(f(c)\big)}{k!} \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(c)}{j!}(x-c)^j + o\big((x-c)^n\big) - f(c) \right)^k + o\Big(\big(f(x) - f(c)\big)^n\Big) =$$

[20] La formula prende il nome da Francesco Faà di Bruno (Alessandria, 1825 - Torino, 1888), che la pubblicò in un articolo del 1855. La formula, sotto varie forme, era già stata enunciata in precedenza da altri matematici, il primo è stato Louis François Antoine Arbogast (Mutzig, Francia, 1759 - Strasbourg, Francia, 1803), che la pubblicò in un trattato sul calcolo differenziale nel 1800.

Faà di Bruno è stato studioso di analisi, meccanica, astronomia.

Arbogast diede vari contributi allo sviluppo del calcolo differenziale e del calcolo integrale.

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{g^{(k)}\big(f(c)\big)}{k!}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{f^{(j)}(c)}{j!}(x-c)^j+o\big((x-c)^n\big)\right)^k+o\Big(\big(f(x)-f(c)\big)^n\Big).$$

Poiché f è derivabile in c, per $x\to c$, risulta $f(x)-f(c)=O(x-c)$, pertanto si ha $\big(f(x)-f(c)\big)^n=O\big((x-c)^n\big)$, quindi $o\Big(\big(f(x)-f(c)\big)^n\Big)=o\big((x-c)^n\big)$. Se h è una qualunque funzione da I a $\mathbb{R}$, continua in c, e $k\geq 1$, allora, per il teorema sulla potenza di un binomio 1.3.16 risulta, per $x\to c$,

$$\begin{aligned}\Big(h(x)+o\big((x-c)^n\big)\Big)^k&=\sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}\big(h(x)\big)^{k-\ell}o\big((x-c)^n\big)^{\ell}=\\&=\big(h(x)\big)^k+\sum_{\ell=1}^{k}\binom{k}{\ell}\big(h(x)\big)^{k-\ell}o\big((x-c)^n\big)^{\ell}=\\&=\big(h(x)\big)^k+o\big((x-c)^n\big)\sum_{\ell=1}^{k}\binom{k}{\ell}\big(h(x)\big)^{k-\ell}o\big((x-c)^n\big)^{\ell-1}.\end{aligned}$$

Poiché

$$\sum_{\ell=1}^{k}\binom{k}{\ell}\big(h(x)\big)^{k-\ell}o\big((x-c)^n\big)^{\ell-1}\xrightarrow[x\to c]{}\big(h(x)\big)^{k-1},$$

si ha, per $x\to c$,

$$o\big((x-c)^n\big)\sum_{\ell=1}^{k}\binom{k}{\ell}\big(h(x)\big)^{k-\ell}o\big((x-c)^n\big)^{\ell-1}=o\big((x-c)^n\big);$$

pertanto

$$\sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}\big(h(x)\big)^{k-\ell}o\big((x-c)^n\big)^{\ell}=\big(h(x)\big)^k+o\big((x-c)^n\big).$$

Quindi dall'equazione (4.3.2) segue

$$g\big(f(x)\big)=\sum_{k=0}^{n}\frac{g^{(k)}\big(f(c)\big)}{k!}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{f^{(j)}(c)}{j!}(x-c)^j\right)^k+o\big((x-c)^n\big).$$

Pertanto $(g\circ f)(x)$ è somma di un polinomio P, di grado al più n^2, con una funzione trascurabile rispetto a $(x-c)^n$. Siano $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n^2}\in\mathbb{R}$ tali che $P(x)=\sum_{k=0}^{n^2}\alpha_k(x-c)^k$. Gli addendi con esponente maggiore di n sono trascurabili rispetto a $(x-c)^n$, quindi

$$g\big(f(x)\big)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k(x-c)^k+\sum_{k=n+1}^{n^2}\alpha_k(x-c)^k+o\big((x-c)^n\big)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k(x-c)^k+o\big((x-c)^n\big).$$

Poiché $g\circ f$ è derivabile n volte in c, per la formula di Taylor con resto nella forma di Peano 4.3.12, $\sum_{k=0}^{n}\alpha_k(x-c)^k$ è il polinomio di Taylor di $g\circ f$ di punto iniziale c e ordine n. Pertanto $(g\circ f)^{(n)}(c)$ è $n!$ per il coefficiente di $(x-c)^n$ in tale polinomio, che coincide con l'analogo coefficiente del polinomio P.

Per il teorema sulla potenza di un polinomio 1.3.18, posto

$$J_{n,k}=\left\{(\ell_1,\ell_2,\dots,\ell_n)\in\mathbb{N}^n\,\middle|\,\ell_1+\ell_2+\dots+\ell_m=k\right\},$$

si ha

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{g^{(k)}\big(f(c)\big)}{k!}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{f^{(j)}(c)}{j!}(x-c)^j\right)^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{g^{(k)}\big(f(c)\big)}{k!}\sum_{(\ell_1,\ell_2,\dots,\ell_n)\in J_{n,k}}\binom{k}{\ell_1,\ell_2,\dots,\ell_n}\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{f^{(j)}(c)}{j!}(x-c)^j\right)^{\ell_j}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}g^{(k)}\big(f(c)\big)\sum_{(\ell_1,\ell_2,\dots,\ell_n)\in J_{n,k}}\frac{1}{\ell_1!\ell_2!\cdots\ell_n!}\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{f^{(j)}(c)}{j!}\right)^{\ell_j}(x-c)^{\ell_1+2\ell_2+\dots+n\ell_n}.$$

Gli addendi contenenti $(x-c)^n$ sono quelli che si ottengono con $(\ell_1,\ell_2,\dots,\ell_n)\in J_{n,k}$ tale che $\ell_1+2\ell_2+\dots+n\ell_n=n$. Evidentemente se $k=0$ si ha $(\ell_1,\ell_2,\dots,\ell_n)=(0,0,\dots,0)$, quindi non si ha $\ell_1+2\ell_2+\dots+n\ell_n=n$. Pertanto, posto, per $k=1,2,\dots,n$,

$$I_{n,k}=\left\{(\ell_1,\ell_2,\dots,\ell_n)\in\mathbb{N}^n\,\middle|\,\sum_{i=1}^{n}\ell_i=k,\ \sum_{i=1}^{n}i\ell_i=n\right\},$$

il coefficiente di $(x-c)^n$ è

$$\sum_{k=1}^{n}g^{(k)}\big(f(c)\big)\sum_{(\ell_1,\ell_2,\dots,\ell_n)\in I_{n,k}}\frac{1}{\ell_1!\ell_2!\cdots\ell_n!}\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{f^{(j)}(c)}{j!}\right)^{\ell_j},$$

da cui segue il teorema. ■

Indice analitico

U

V