Thursday, September 22, 2022 10:51 AM

LEZIONE 2

(X, d) SP. METRICO.

$A \subseteq X$ APERTO $\overset{DEF}{\Longleftrightarrow}$

$\forall x \in A \quad \exists r \in \mathbb{R}^+$ t.e. $I(x, r) \subseteq A$.

SPAZI DISCRETI

(X, d) ove $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c.

INSIEME

dati $x, x' \in X$ SI HA:

$$d(x, x') \begin{cases} = 0 & x = x' \\ = 1 & x \neq x' \end{cases}$$

È UNA METRICA.

METRICA TOPOLOGIA DISCRETA

ORA, DATO $x \in X$, DATO $r \in \mathbb{R}^+$

CHI È

$I(x, r)$??

RISPOSTA:

$$I(x, r) = \begin{cases} \{x\} & \text{se } r \leq 1 \\ X & \text{se } r > 1 \end{cases}$$

NE CONSEGUE, DATO $A \subseteq X$

$x \in A \implies \{x\} \subseteq A$

MA $\{x\} = I(x, r)$ CON $r \leq 1 \implies$

$\implies \forall x \in A \quad \exists\, I(x,r) \subseteq A \implies$

A È APERTO !!!

QUINDI, SE (X, d) SPAZIO DISCRETO $\implies$

OGNI $A \subseteq X$ È UN APERTO !!!

PUNTO DI ACCUMULAZIONE

(X, d) SP. METRICO

$x_0 \in X$, $A \subseteq X$

x_0 SI DICE PTO. DI ACC. PER $A \overset{DEF}{\iff}$

$\forall r \in \mathbb{R}^+$ SI HA:

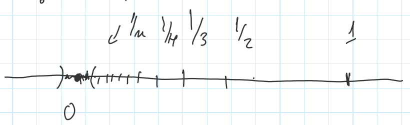
$$\left(I(x_0, r) \setminus \{x_0\} \right) \cap A \neq \emptyset \,.$$

CIOÈ, A CONTIENE PTI $x \in A$, $x \neq x_0$ "ARBITRARIAMENTE" VICINI AD $x_0 \in X$.

ES 1) IN $\mathbb{R}$ EUCLIDEO.

SIA $A = \left\{ \frac{1}{n} \; ; \; n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$

SIA $x_0 = 0 \in \mathbb{R}$



$I(0, r) = \,]-r, r[$, PER n SUFF. GRANDE

SI HA $\quad 1/n < r \iff 1/n \in I(0,r)$

$\Rightarrow\ 0$ È DI ACC. PER $A = \{1/n\ ;\ n \in \mathbb{Z}^+\}$

MA

$0 \notin A$!!!

<u>RMK</u> $\quad (X, d)$ <u>SP. DISCRETO</u>, $A \subseteq X$

ESISTONO PTI DI ACC. PER QUESTO $A \subseteq X$???

FISSO $A \subseteq X$, FISSO $x_0 \in X$

ORA, SIA <u>$r \leq 1$</u>. CIOÈ

$$(*) \quad \left(I(x_0, r) \setminus \{x_0\}\right) \cap A \quad ???$$

MA $\quad I(x_0, r) = \{x_0\} \Rightarrow$

$$\left(I(x_0, r) \setminus \{x_0\}\right) = \left(\{x_0\} \setminus \{x_0\}\right) = \emptyset$$

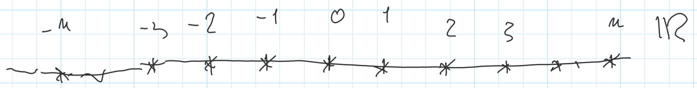
QUINDI

$$\left(I(x_0, r) \setminus \{x_0\}\right) \cap A = \emptyset \cap A = \emptyset \ !!!$$

PERCIÒ x_0 <u>NON</u> DI ACC. PER A !!!

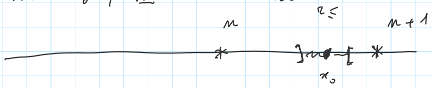
<u>ES</u> <u>IN $\mathbb{R}$ EUCLIDEO</u>

$A = \mathbb{Z}$ HA PUNTI DI ACC. IN $\mathbb{R}$ EUCLIDEO?



<u>DUE CASI</u>

1) SIA $x_0 \notin \mathbb{Z}$ CIOÈ

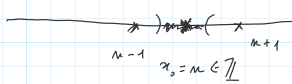


$$\left(I(x_0, r) \setminus \{x_0\}\right) \cap \mathbb{Z} = \emptyset \ !!!$$

$\Rightarrow x_0 \notin \mathbb{Z}$, x_0 <u>NON DI ACC</u> !!!

2) $x_0 \in \mathbb{Z}$. SIA $x_0 = n \in \mathbb{Z}$

$\mathbb{R}$



se $r \leq 1 \Rightarrow$

$$I(n,r) \cap \mathbb{Z} = \{n\} \Rightarrow$$

$$(I(n,r) \setminus \{n\}) \cap \mathbb{Z} = \emptyset \text{ !!!}$$

$\Rightarrow$ $x_0 = n$ NON È DI ACC !!! (PER $\mathbb{Z}$)

BREAK DOMANDE ???

INIZIO ORE 15.10

INSIEMI CHIUSI

(X, d) SP. METRICO

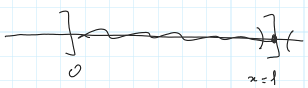
$A \subseteq X$ CHIUSO $\overset{DEF}{\iff}$ $A^c = X \setminus A$ È APERTO

SI NOTI CHE (IN $\mathbb{R}$ EUCLIDEO)

$$]0,1] \overset{DEF}{=} \{x \in \mathbb{R} \,;\, 0 < x \leq 1\}$$

ALLORA

1) $]0,1]$ NON È APERTO !!!

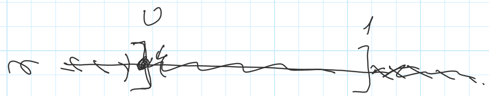


FALLISCE IN $x = 1$

2) $]0,1]$ NON È CHIUSO !!!

INFATTI

$$]0,1]^c = \mathbb{R} \setminus]0,1]$$



$]0,1] = \,]-\infty, 0] \cup \,]1, +\infty[$

$\uparrow$ NON APERTO, PERCHÉ LA COND DI APERTURA FALLISCE IN $x = 0$

$\Rightarrow$ $]0,1]$ NON È CHIUSO !!!

TEOREMA (X, d) SP. METRICO, $A \subseteq X$.

A CHIUSO $\overset{\text{THM}}{\Longleftrightarrow}$ A CONTIENE TUTTI I SUOI PTI DI ACCUMULAZIONE

PROOF $\Rightarrow$) PER ASSURDO

SIA $\exists\, x_0 \notin A$, x_0 DI ACCUMULAZIONE PER A

$\Updownarrow$ $\qquad\qquad$ $\Downarrow$

$\exists\, x_0 \in A^C$ t.c

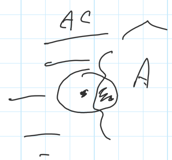
(*) $\forall r \in \mathbb{R}^+$ SI HA $\left(I(x_0, r) \setminus \{x_0\}\right) \cap A \neq \emptyset$

ORA, POICHÉ $x_0 \notin A \;(\Leftrightarrow x_0 \in A^C)$

(*) $\Leftrightarrow$ $I(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$

QUINDI, $x_0 \in A^C$, x_0 DI ACC. PER A $\Leftrightarrow$

$\exists\, x_0 \in A^C$ t.c. $I(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$



$\Downarrow$

$\exists\, x_0 \in A^C$ t.c. $\forall r \in \mathbb{R}^+$, $I(x_0, r) \nsubseteq A^C$

$\Updownarrow$

$\exists\, x_0 \in A^C$ t.c. $\nexists\, I(x_0, r) \subseteq A^C$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ A^C NON APERTO $\Rightarrow$ A NON CHIUSO (ASSURDO).

QED.

$\Leftarrow$) PER ASSURDO

SIA A NON CHIUSO $\overset{DEF}{\Leftrightarrow}$ A^C NON APERTO $\Leftrightarrow$

$\exists\, x_0 \in A^C$ t.c. $\forall r \in \mathbb{R}^+$ SIA $I(x_0, r) \not\subseteq A^C$

MA $\Rightarrow$ $I(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$ (**)

ORA (**) CON $x_0 \in A^C \Leftrightarrow x_0 \notin A$

IMPLICA $(I(x_0, r) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset \quad \forall r \in \mathbb{R}^+$

$$\Downarrow$$

x_0 DI ACC. PER A CON $x_0 \notin A$!!!

NON È VERO CHE "A CONTIENE TUTTI I SUOI PUNTI DI ACC." !!! (ASSURDO).

ES. IN $\mathbb{R}$ EUCLIDEO

$$A = \{1/n \,;\; n \in \mathbb{Z}^+\}$$

A NON CHIUSO. INFATTI,

0 È DI ACC. PER A

MA

$0 \notin A$.

RMK (X, d) SP. DISCRETO.

CHI SONO GLI INSIEMI CHIUSI ???

TUTTI !!!

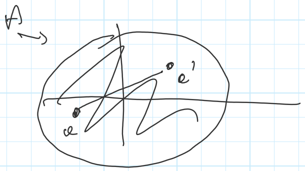
SOTTOSPAZI METRICI

(X, d) SP. METRICO, E SIA $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$

ALLORA A EREDITA UNA STRUTTURA DI SPAZIO METRICO

SIA $d_A : A \times A \to \mathbb{R}$ t.c.

$$d_A(a,a') = d(a,a') \qquad \forall a,a' \in A$$

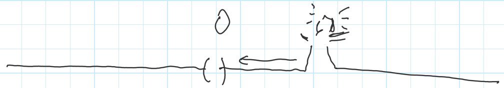


$\mathbb{R}^2$ EUCLIDEO

CONNESSIONE

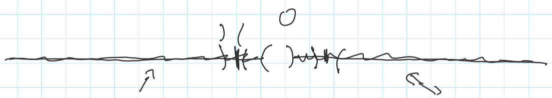
LA LINEA

$\mathbb{R}$ ←



$X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$



$]-\infty, 0[$ $\quad$ $]0,+\infty[$

CIOE' $X = \mathbb{R}\setminus\{0\} = \underbrace{]-\infty, 0[}_{\neq \emptyset; X}^{\text{APERTO}} \dot{\cup} \underbrace{]0,+\infty[}_{\neq \emptyset, X}^{\text{APERTO}}$

SIAMO GUIDATI: (X, d) SP. METRICO

(X,d) SI DICE SCONNESSO $\overset{\text{DEF}}{\iff}$

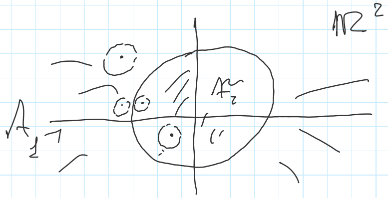
$\exists A_1, A_2 \subseteq X$, $A_1, A_2 \neq \emptyset, X$,

A_1, A_2 APERTI t.c.

$X = A_1 \dot{\cup} A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

ES 2

$X = \mathbb{R}^2 - \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \ x^2+y^2 = 1\}$



X È SCONNESSO!!! INFATTI:

$X = A_1 \dot{\cup} A_2$ ove

$A_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \ x^2+y^2 > 1\}$ APERTO

e

$A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \ x^2+y^2 < 1\}$ APERTO

BREAK