Thursday, September 22, 2022 10:54 AM

(X, d) SP. METRICO SI DICE

SCONNESSO $\overset{\text{DEF}}{\iff} \exists A_1, A_2 \subseteq X$, $A_1, A_2 \neq \emptyset, X$

A_1, A_2 APERTI t.c.

$$X = A_1 \dot{\cup} A_2 \quad , \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

OVVIAMENTE (X, d) SM SI DIRÀ

CONNESSO $\overset{\text{DEF}}{\iff}$ NON È SCONNESSO

RMK CONNESSIONE & SOTTOINSIEMI APERTI/CHIUSI.

NB $\underbrace{\emptyset, X}_{\text{TRIVIAL}}$ SONO APERTI/CHIUSI

PROP (X, d) SP. METRICO

(X, d) SCONNESSO $\overset{\text{THM}}{\iff} \exists A \subseteq X$, $A \neq \emptyset, X$

CON A APERTO/CHIUSO.

PROOF $\Rightarrow$) (X, d) SCONNESSO $\Rightarrow \exists A_1, A_2 \subseteq X$

$A_1, A_2 \neq \emptyset, X$, A_1, A_2 APERTI t.c. $\left. \begin{array}{l} X = A_1 \dot{\cup} A_2 \\ (A_1 \cap A_2 = \emptyset) \end{array} \right\} (*)$

IMPLICA $\underset{}{\overset{\text{APERTO}}{A_2}} = (A_1)^c \Rightarrow A_1$ CHIUSO

$\underset{\text{APERTO}}{A_1} = (A_2)^c \Rightarrow A_2$ CHIUSO

$\Leftarrow$) $\exists A \subseteq X$, $A \neq \emptyset, X$, A APERTO/CHIUSO.

PONIAMO $A_1 = A$, $A_2 = A^c \Rightarrow$

$$X = \underset{\text{APERTO}}{A_1} \dot{\cup} \underset{\text{APERTO}}{A_2} \quad \text{CON } A_1, A_2 \neq \emptyset, X$$

OVVIAMENTE, SE (X, d) CONNESSO $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \nexists A \neq \emptyset, X$ CON A APERTO / CHIUSO.

THM (TEOREMA DI CONNESSIONE EUCLIDEA)

$n \in \mathbb{Z}^+$, LO SPAZIO $\mathbb{R}^n$ EUCLIDEO

È

CONNESSO !!!

COROLLARIO IN $\mathbb{R}^n$ EUCLIDEO, SI HA:

i) $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset, \mathbb{R}^n$

A APERTO $\Longrightarrow$ A NON CHIUSO

ii) $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset, \mathbb{R}^n$

A CHIUSO $\Longrightarrow$ A NON APERTO

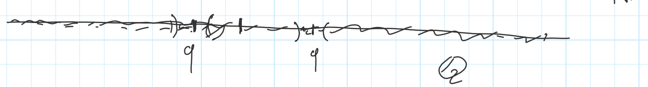
QUINDI $\mathbb{R}$ EUCLIDEO È CONNESSO (THM)

PROBLEMA CONSIDERIAMO $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

RAZIONALI

$(\mathbb{Q}$, EUCLIDEA$)$ È CONNESSO??? NO

$\pi \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$



ORA $\mathbb{Q}_{<\pi} = \{q \in \mathbb{Q} ; q < \pi\} \subseteq \mathbb{Q} \quad \neq \emptyset, \mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}_{>\pi} = \{q \in \mathbb{Q} ; q > \pi\} \subseteq \mathbb{Q} \quad \neq \emptyset, \mathbb{Q}.$

MA ORA $\mathbb{Q}_{<\pi}$ È APERTO IN $\mathbb{Q}$!!!

$\mathbb{Q}_{>\pi}$ È APERTO IN $\mathbb{Q}$!!!

MA $\emptyset, \mathbb{Q}$ $\emptyset, \mathbb{Q}$

$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_{<\pi} \,\dot{\cup}\, \mathbb{Q}_{>\pi} \implies \mathbb{Q}$ È SCONNESSO.

APERTO — APERTO

FUNZIONI CONTINUE

(X, d_X), (Y, d_Y) SP. METRICI

SIA $A \subseteq X$.

SIA $F : A \subseteq (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$. SIA $\underline{x} \in A$.

F È CONTINUA IN $\underline{x} \in A \overset{DEF}{\iff}$

$(*)$
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \; \exists \delta \in \mathbb{R}^+$ t.c.

$d_Y(f(\underline{x}), f(x)) < \varepsilon \quad \forall x \in I(\underline{x}, \delta) \cap A$

ORA, SE $(X, d_X) = (Y, d_Y) = \mathbb{R}$ EUCLIDEO

$(*)$ DIVENTA

F CONTINUA IN $\underline{x} \in A \iff$

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \; \exists \delta \in \mathbb{R}^+$ t.c.

$|f(\underline{x}) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A$ t.c. $|\underline{x} - x| < \delta$. $(**)$

CONTINUITÀ GLOBALE

$F : A \subseteq (X, d_X) \to (Y, d_Y)$

F È CONTINUA SU $A \overset{DEF}{\iff}$ F CONTINUA IN $x \in A$, $\forall x \in A$.

BREAK DOMANDE???

INIZIO ORE 12.10

THM $F: A \subseteq (X, d_X) \to (Y, d_Y)$.

SONO EQUIVALENTI LE SEGUENTI:

i) F CONTINUA SU A.

ii) $\forall B \subseteq Y$, B APERTO $\Rightarrow \exists B_1 \subseteq X$, B_1 APERTO

t.e. $F^{-1}[B] = B_1 \cap A$.

ORA $F^{-1}[B] \overset{DEF}{=} \{x \in A;\ F(x) \in B\}$

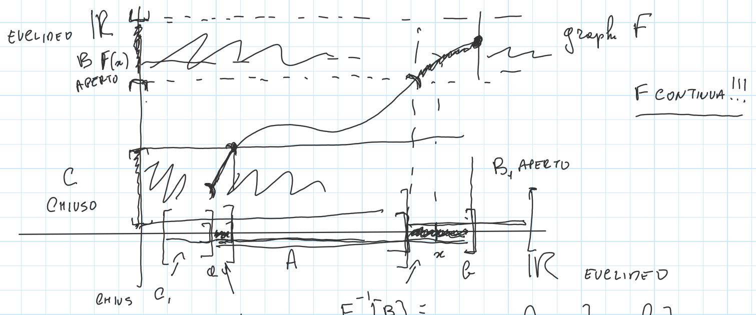
FIBRA DI B

PREIMMAGINE DI B MEDIANTE F

iii) $\forall C \subseteq Y$, C CHIUSO $\Rightarrow \exists C_1 \subseteq X$, C_1 CHIUSO

t.e. $F^{-1}[C] = C_1 \cap A$.

ESEMPIO / CONTROESEMPIO $(X, d_X) = (Y, d_Y) = \mathbb{R}$ EUCLIDEO



$C_1 \cap A = F^{-1}[C]$

CHIUSO

$F^{-1}[B] = A \cap B_1$

$A =]a, b]$

CASI PARTICOLARI SI HA:

1) A APERTO $\Rightarrow$

ii) $\Leftrightarrow \forall B \subseteq Y$, B APERTO $\Rightarrow \exists B_1$ APERTO DI X t.c. $F^{-1}[B] = A \cap B_1$ APERTO

APERTO PER HP. APERTO

2) A CHIUSO $\Longrightarrow$

iii) $\Longleftrightarrow$ $\forall C \subseteq Y$, C CHIUSO $\exists C_1 \subseteq X$, C_1 CHIUSO

t.c. $F^{-1}[C] = A \cap C_1$ CHIUSO.

CHIUSO PER HP CHIUSO

APPLICAZIONE