PROPRIETÀ DI INS. APERTI & CHIUSI

RISPETTO AD UNIONE & INTERSEZIONE

PROP.

A_1) OGNI UNIONE DI INSIEMI APERTI È UN INSIEME APERTO!

A_2) OGNI INTERSEZIONE FINITA di APERTI È APERTO!

C_1) OGNI UNIONE FINITA DI CHIUSI È UN CHIUSO.

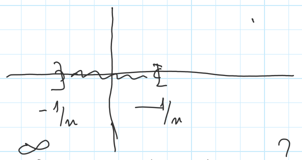
C_2) OGNI INTERSEZIONE (QUALSIASI) DI CHIUSI È UN CHIUSO!

CONTROESEMPI

1) AD A_2) SE DIMENTICHIAMO HP FINITEZZA!!!

PER $n \in \mathbb{Z}^+$, SIA $I_n = \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[\subseteq \mathbb{R}$ EUCLIDEA

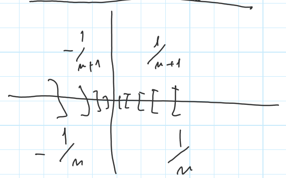
APERTO



SINGLETON

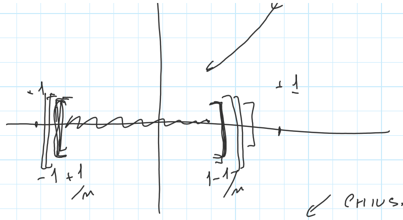
ORA $\underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[}_{\text{APERTO}} \overset{?}{=} \{0\}$ È CHIUSO $\Rightarrow$

NON È APERTI $\Rightarrow$ NON APERTO



2) CONTROESEMPIO AD C_1) SE DIMENTICHIAMO FINITEZZA!

SIA $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ $I_n = \left[-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right]$. È CHIUSO



↙ CHIUSO

ORA $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right] \overset{?}{=}$ È CHIUSO ??...

$\overset{?}{=} \left]-1, 1\right[$ È APERTO !!!... NON CHIUSO !!!...

RMKS

$A_1 \overset{THM}{\Longleftrightarrow} C_2$ & $A_2 \overset{THM}{\Longleftrightarrow} C_1$.

INFATTI, RICORDIAMO LE "LEGGI DI DE MORGAN".

SIA X INSIEME, E SIA

$\{A_i \subseteq X ; i \in I\}$ UNA FAMIGLIA DI SOTTOINSIEMI DI X.

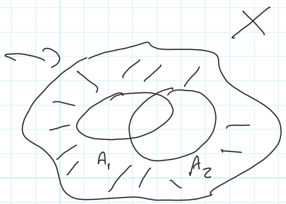
ORA

$(*)$ $\left(\bigcup_i A_i\right)^c = \bigcap_i A_i^c$ ←

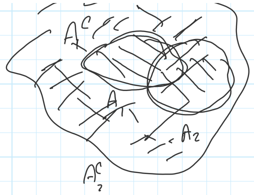
$(**)$ $\left(\bigcap_i A_i\right)^c = \bigcup_i A_i^c$ ←

ES $*)$ $I = \{1,2\}$

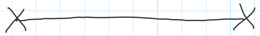
$(A_1 \cup A_2)^c$



MA



$$A_1^c \cap A_2^c = (A_1 \cup A_2)^c$$

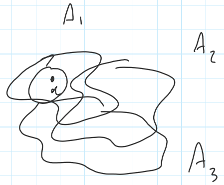


PROOF 1) $\bigcup_i A_i$ (APERTI) È APERTO !!!

INFATTI, A_i APERTO $\Longrightarrow$

$$\forall x \in A_i \;\; \exists\, I(x, r_i) \subseteq A_i \;\; \forall i \in I \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \forall x \in A \;\; \exists\, I(x, r_i) \subseteq A \Rightarrow$$ CIOÈ A APERTO !!!



OVVIO !!!

2) $\bigcap_{i=0}^{n} A_i$ (n ← FINITA; APERTI) È APERTO !!!

Hp) A_i APERTO $\forall i = 0, 1, \dots, n \Longrightarrow$

$$\forall x \in A_i \;\; \exists\, I(x, r_i) \subseteq A_i .$$

ORA, $x \in \bigcap_{i=0}^{n} A_i \overset{DEF}{\Longleftrightarrow} x \in A_i \;\; \forall i = 0, 1, 2, \dots, n$.

$\bigcap^{n} A$

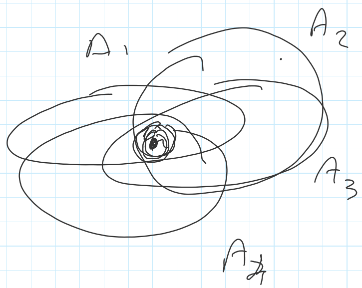
QUINDI $\underline{Hp}$ DATO $x \in \bigcap_{i=0} A_i \Longrightarrow$

$\exists r_0 \in \mathbb{R}^+$ t.e. $I(x, r_0) \subseteq A_0$

$\exists r_1 \in \mathbb{R}^+$ t.e $I(x, r_1) \subseteq A_1$

— — — —

$\exists r_n \in \mathbb{R}^+$ t.e $I(x, r_n) \subseteq A_n$



SIA $\underline{r} = \min \{ r_0, r_1, \ldots, r_n \}$. SI HA

$$\underline{I}(x, \underline{r}) \subseteq \bigcap_{i=0}^{n} A_i$$!!!

$\Downarrow$

<u>È APERTO</u> !!!

<u>QED</u>

<u>BREAK</u> <u>DOMANDE</u> ???

INIZIO ORE 15.20