Tuesday, September 27, 2022 10:22 AM

RICORDO (THM FOND)

DATA $F : A \subseteq (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$

SP. METRICI

SI HA CHE SONO EQUIVALENTI

LE SEGUENTI :

1) F È CONTINUA SU A

2) $\forall B$ APERTO DI (Y, d_Y) $\exists B_1$ APERTO DI (X, d_X)

t.c.

$$F^{-1}[B] = \underset{\text{APERTO}}{B_1} \cap A .$$

3) $\forall C$ CHIUSO DI (Y, d_Y) $\exists C_1$ CHIUSO DI (X, d_X)

t.c.

$$F^{-1}[C] = \underset{\text{CHIUSO}}{C_1} \cap A$$

COROLLARIO SE $A = (X, d_X)$ $\Rightarrow$

A SIA APERTO / CHIUSO $\Rightarrow$

SI HA

1') F CONT SU $A = X$ (APERTO / CHIUSO

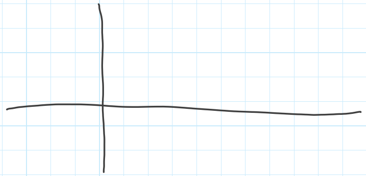
2') $\forall B$ APERTO $\Rightarrow$ $F^{-1}[B]$ È APERTO

3') $\forall C$ CHIUSO $\Rightarrow$ $F^{-1}[C]$ È CHIUSO .

EX 1) $X = Y = \mathbb{R}$ EUCLIDEA

CHI SONO LE FUNZ CONT

F : $\mathbb{R}$ EUCLIDEO $\longrightarrow \mathbb{R}$ EUCLIDEO ?



SONO QUESTE ???

2) F : $\mathbb{R}$ DISCRETO $\longrightarrow$ $\mathbb{R}$ EUCLIDEO

CHI SONO LE FUNZ. CONTINUE ?

SIA B APERTO IN $\mathbb{R}$ EUCLIDEO (CODOMINIO),

COSA POSSIAMO DIRE SU

$F^{-1}[B] = \{ x \in \mathbb{R}$ DISCRETO ; $F(x) \in B \} \subseteq$

$\subseteq \mathbb{R}$ DISCRETO $\Rightarrow$ È APERTO !!!

QUALSIASI FUNZIONE È CONTINUA !!!

2) SIA F : $\mathbb{R}$ EUCLIDEO $\longrightarrow$ $\mathbb{R}$ DISCRETO.

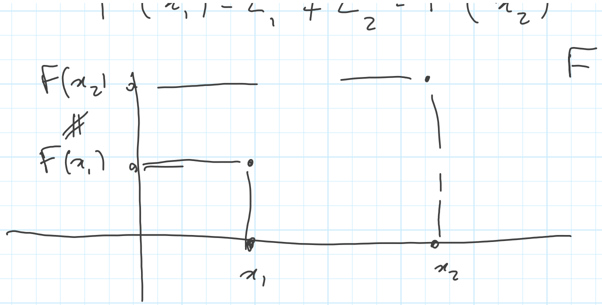
CHI SONO LE FUNZ. CONTINUE ?

SIA F NON COSTANTE, CIOÈ

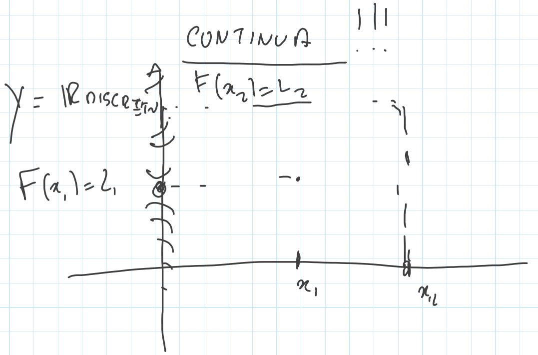
$\exists\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ EUCLIDEO t.c.

$F(x_1) = l \neq l' = F(x_2)$

$F(x_1) = L_1 \neq L_2 = F(x_2)$



SUPPONIAMO CHE F (NON COSTANTE) SIA CONTINUA !!!



$L_1 \neq L_2$

$\mathbb{R}$ EUCLIDEO

SIA $B \subseteq Y$, $B = \mathbb{R} - \{L_1\}$

OVVIAMENTE $F^{-1}[\mathbb{R} - \{L_1\}]$ CONTIENE

APERTO

$F^{-1}[\mathbb{R} - \{L_1\}] \neq \emptyset$ $\Longleftarrow$ SIA $x_2 : F(x_2) = L_2 \neq L_1$

CHE

MA NON $x_1 \in \mathbb{R}$ $(x_1 : F(x_1) = L_1)$

⇙

$F^{-1}[\mathbb{R} - \{L_1\}] \neq \mathbb{R}$

QUINDI, SE F CONT $\Longrightarrow$ $F^{-1}[\mathbb{R} - \{L_1\}]$ E' APERTO

MA ORA

$\{L_1\} \subseteq Y = \mathbb{R}$ DISCRETO <u>È APERTO!!!</u>

<u>SAREBBE</u> F CONT $\Longrightarrow$

$F^{-1}[\{L_1\}]$ È APERTO DI $\mathbb{R}$ EUCLIDEO!!!

MA

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{F^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{L_1\}]}_{\neq \emptyset, \mathbb{R}} \text{ È APERTO} \\ \& \\ F^{-1}[\{L_1\}] \text{ È APERTO} \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{IN } \mathbb{R} \text{ EUCLIDEO.}$$

MA ORA

$$F^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{L_1\}] \cup F^{-1}[\{L_1\}] = \mathbb{R} \quad (\text{EUCLIDEO!!})$$

$\&$

$$F^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{L_1\}] \cap F^{-1}[\{L_1\}] = \emptyset$$

QUINDI SAREBBE

$$\mathbb{R} = \underbrace{F^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{L_1\}]}_{\neq \emptyset, \mathbb{R}} \,\dot{\cup}\, \underbrace{F^{-1}[\{L_1\}]}_{\neq \emptyset, \mathbb{R}}$$

$\mathbb{R}$ EUCLIDEO $\Longleftrightarrow$ [illegible]

APERTO APERTO

ASSURDO, PER IL THM DI CONNESSIOÈ EUCLIDEA!

QUINDI, ABBIAMO PROVATO

f NON COSTANTE $\Longrightarrow$ f NON È CONTINUA

CIOÈ: $f: \mathbb{R}$ EUCLIDEO $\to \mathbb{R}$ DISCR.

f CONTINUA $\Longleftrightarrow$ f COSTANTE