Tuesday, September 27, 2022 10:23 AM

SPAZI CON "PRODOTTO INTERNO"

$$(X, \langle , \rangle) \quad , \langle , \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$$

SP. VETTORIALE — PROD. INTERNO $\overset{\text{DEF.}}{\iff}$

i) $\langle \underline{x}_1 + \underline{x}_2, \underline{y} \rangle = \langle \underline{x}_1, \underline{y} \rangle + \langle \underline{x}_2, \underline{y} \rangle$

$\langle \underline{x}, \underline{y}_1 + \underline{y}_2 \rangle = \langle \underline{x}, \underline{y}_1 \rangle + \langle \underline{x}, \underline{y}_2 \rangle$

ii) $\langle \lambda \underline{x}, \underline{y} \rangle = \lambda \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \langle \underline{x}, \lambda \underline{y} \rangle \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

iii) $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \langle \underline{y}, \underline{x} \rangle$ (SIMMETRIA)

iv) $\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle \geq 0$. DI PIU' $\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle = 0 \iff \underline{x} = \underline{0}$

DEFINITO POSITIVO.

FUNZIONI LINEARI

$$F : X \to Y \qquad X, Y \text{ SP. VETTORIALI}$$

F LINEARI $\overset{\text{DEF}}{\iff}$

1) $F(x_1 + x_2) = F(x_1) + F(x_2)$ ADDITIVITA'

2) $\lambda \in \mathbb{R} \quad F(\lambda x) = \lambda F(x)$ (OMOGENEITA')

CHI SONO LE FUNZ LINEARI $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

ORA $x \in \mathbb{R}$. MA $x \cdot 1$ QUINDI

F LINEARE $\Rightarrow \quad F(x) = F(x \cdot 1) = x \cdot \underbrace{F(1)}_{\text{COSTANTE}}$

QUINDI F LINEARE $\iff$

$$F(x) = F(1) \cdot x$$

LE PROPRIETÀ i) & ii) SI RIASSUMONO DICENDO

CHE LA FUNZIONE <u>È BILINEARE</u> !!!

<u>ORA ESEMPI</u>

$X = \mathbb{R}^n$ $\quad \underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\underline{y} = (y_1, \dots, y_n)$

POSTO

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

<u>PROD. INTERNO EUCLIDEO</u>

<u>SPAZI DI HILBERT</u> (<u>VON NEUMANN</u>)

<u>PRELIMINARY RMK</u>

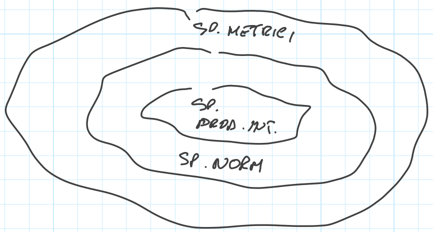
$(X, \langle , \rangle)$ SP. PRODOTTO INTERNO.

PER OGNI $x \in X$ CONSIDERO

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$ <u>È NORMA</u> !!!

QUINDI

$$d(x,y) = \|x - \underline{y}\| \overset{DEF}{=} \sqrt{\langle x-y, x-y \rangle}.$$



$(X, \langle , \rangle)$ SP. DI HILBERT $\iff$

$(X, \langle , \rangle)$ CON PRODOTTO INTERNO

+

COME SP. METRICO È COMPLETO ...

CON $\mathbb{R}$. METRICO È COMPLETO, CIOÈ

OGNI SUCCESSIONE DI CAUCHY È CONVERGENTE