Wednesday, October 5, 2022 12:19 PM

PROBLEMA: COME SI SCRIVE UN DIFFERENZIALE IN MODO "INTRINSECO" ???

SI NOTI CHE SAPPIAMO: f DIFF. IN x $\Rightarrow$

$\forall v \in \mathbb{R}^n$
$$df(\underline{x})(v) = \langle \operatorname{grad} f(\underline{x}), v \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}) \cdot v_i \quad \Leftarrow$$

PER VALUTAZIONI PUNTO A PUNTO.

SI NOTI CHE QUESTO IMPLICA CHE IL DIFFERENZIALE È UNICO!!!

SPAZIO DUALE $(\mathbb{R}^n)^* = (\mathbb{R}^n)'$

$\mathbb{R}^n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) ; x_i \in \mathbb{R} \}$ È SPAZIO VETTORIALE DI DIMENSIONE n.

$$(\mathbb{R}^n)^* \overset{\text{INSIEME}}{=} \{ \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} ;\ \varphi \text{ LINEARE} \}$$

DEFINISCO: $\varphi, \psi \in (\mathbb{R}^n)^*$

SOMMA +) $$(\varphi + \psi)(v) \overset{DEF}{=} \underbrace{\varphi(v)}_{LIN} + \underbrace{\psi(v)}_{LIN} \qquad v \in \mathbb{R}^n$$
($\varphi + \psi$ LINEARE)

MULTIPL. PER SCALARE ·) $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \varphi \in (\mathbb{R}^n)^*$
$$(\lambda\varphi)(v) = \lambda \cdot \varphi(v) \qquad v \in \mathbb{R}^n$$

SI HA CHE
$$\Big((\mathbb{R}^n)^*, \underset{\text{SOMMA}}{+}, \underset{\text{MULTIPL. PER SCALARE}}{\cdot} \Big)$$ È SPAZIO VETTORIALE!!!

CHI È IL VETTORE NULLO DI $(\mathbb{R}^n)^*$???

SARÀ $\underline{0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (LINEARE) t.c.

$$\underline{\underline{0}}(v) = 0 \in \mathbb{R} \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

$\varphi \in (\mathbb{R}^n)^*$ $\qquad \forall v \in \mathbb{R}^n$

$$(\underline{\underline{0}} + \varphi)(v) = \underline{\underline{0}}(v) + \varphi(v) = \varphi(v) =$$

$$= \varphi(v) + \underline{\underline{0}}(v) \Rightarrow$$

$\underline{\underline{0}} + \varphi = \varphi = \varphi + \underline{\underline{0}}$ COME IDENTITA' IN $(\mathbb{R}^n)^*$.

<u>QUALE È LA DIMENSIONE DI $(\mathbb{R}^n)^*$???</u>

SIANO , PER $i = 1, 2, \dots, n$

$dx_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ <u>LINEARE</u> t.c.

$$(*) \quad dx_i(e_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^n$

$= \delta_{ij} \leftarrow$ <u>DELTA DI KRONECKER</u>.

<u>EX</u> $n = 3$

$dx_1(e_1) = 1 \quad dx_1(e_2) = 0 \quad dx_1(e_3) = 0$

$dx_2(e_1) = 0 \quad dx_2(e_2) = 1 \quad dx_2(e_3) = 0$

$dx_3(e_1) = 0 \quad dx_3(e_2) = 0 \quad dx_3(e_3) = 1$.

ORA , $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\stackrel{!}{=} \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot e_j$$

ALLORA $(*) \Rightarrow$

$$dx_i(v) = dx_i\left(\sum_{j=1}^{n} v_j \cdot e_j\right) =$$

<u>LINEARITA'</u>

$$= \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot dx_i(e_j) = v_i$$

QUINDI, È NATURALE CHIAMARE LE dx_i, $i=1,2,\dots,n$

LE "FUNZIONI COORDINATA"! INOLTRE:

COME FUNZIONI NELLE VARIABILI $x_1,\dots,x_n$

AVREMO

$$dx_i(x_1,\dots,x_n) = x_i .$$

THM $\{dx_1, dx_2, \dots, dx_n\}$ È BASE

PER LO SPAZIO DUALE $(\mathbb{R}^n)^*$!!!

IN PARTICOLARE, $\dim (\mathbb{R}^n)^* = n \ (= \dim \mathbb{R}^n)$

PROOF 1) SISTEMA DI GENERATORI.

SIA $\varphi \in (\mathbb{R}^n)^*$. E SIA

$$v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n \overset{!}{=} \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot e_i .$$

PERCIÒ

$$\varphi(v) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i)\, v_i$$

$$\Updownarrow$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\varphi(e_i)}_{\in \mathbb{R}}\, dx_i \quad ???$$

VERO $\forall v \in \mathbb{R}^n$!!!

PERCIÒ $\{dx_1, \dots, dx_n\}$ SIST GENERATORI PER $(\mathbb{R}^n)^*$!!!

GEN