$V \subseteq \mathbb{R}^n$ VARIETÀ REGOLARE DI DIMENSIONE r E CLASSE $C^{(1)}$ $\overset{DEF}{\Leftrightarrow}$

$V \subseteq \mathbb{R}^n$ t.c. $\forall \underline{a} \in V$

$\exists\, I(\underline{a}, r) \subseteq \mathbb{R}^n$, $\exists\, f: I(\underline{a},r)\subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-r}$

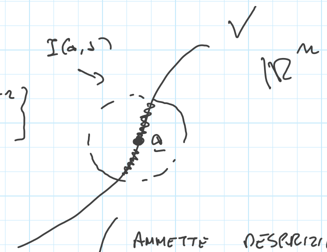
cioè $f \equiv (f_1,\dots,f_{n-r}) \in C^{(1)}$

t.c.

1) $V \cap I(\underline{a},r) =$

$= \{x \in I(\underline{a},r);\ f(x)=\underline{0}\in\mathbb{R}^{n-r}\}$

SCALARMENTE $\parallel$



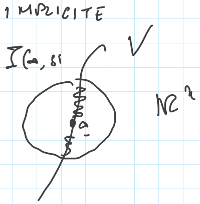
SISTEMA DI $n-r$ EQUAZIONI IN n INDETERMINATE $\begin{cases} f_1(x_1,\dots,x_n)=0 \\ \dots \\ f_{n-r}(x_1,\dots,x_n)=0\end{cases}$

(AMMETTE DESCRIZIONE "CARTESIANA")

2) REGOLARITÀ:

$rk\left(J_{F(a)}\right)$ MAX, CIOÈ $rk\left(J_{F(a)}\right) = n-r$.

VALE IL TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE PER $\underline{a}\in V$!!!



PER I PTI DI $V\cap I(a,\delta)$

POSSO ESSERE ESPRESSI COME PTI

IN CUI CERTE $n-r$ COORDINATE

$y_1,\dots,y_{n-r}$ VARIANO COME FUNZIONI (DIPENDENTI)

$y_1 = \varphi_1(x_1,\dots,x_r)$

$y_{n-r} = \varphi_{n-r}(x_1,\dots,x_r)$

CON $\varphi_1,\dots,\varphi_{n-r}\in C^{(1)}$!!!

DI r COORDINATE $x_1,\dots,x_r$ INDIPENDENTI !!!

EX $V = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ \underline{x^2+y^2+z^2=1},\ z=1\}$

È VARIETÀ REGOLARE IN $\mathbb{R}^3$!!!

SIA $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $F = (F_1, F_2)$ OVE

$F_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-4$, $F_2(x,y,z) = z-1$

DA CUI $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ F(x,y,z) = \underline{0} \in \mathbb{R}^n\}$

REGOLARITÀ ??? SIA $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$J_{F(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

NON HA RANGO MAX (CIOÈ $rk(J_{F(x,y,z)}) < 2$

$\Updownarrow$

$x = y = 0$

$\downarrow$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & ? \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MA I PUNTI $(0,0,z)$ POSSONO APPARTENERE A V ?

PER $F_2(0,0,z) = z-1 = 0 \Rightarrow z = 1$

$\downarrow$

MA $(0,0,1)$ MA $F_1((0,0,1)) \neq 0$

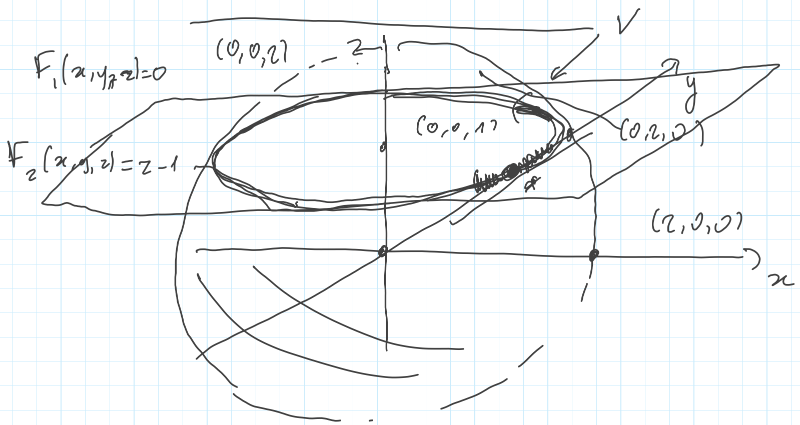
$0^2+0^2+1^2 \neq 4$

PERCIÒ, È VERO CHE

$(x,y,z) \in V \Rightarrow rk\left(J_{F(x,y,z)}\right) = 2$ MAX

V È VARIETÀ REGOLARE DI $\mathbb{R}^3$ DI DIM $3-2=1$

GEOMETRICAMENTE



$\mathbb{R}^3$

DIP.	IND.	DIP.
x	y	z

SIA $\alpha = (\sqrt{3}, 0, 1) \in V$

$$J_{F(\sqrt{3},0,1)} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$(x,y,z) = (\sqrt{3},0,1)$

LOCALMENTE VICINO A $\alpha = (\sqrt{3},0,1)$
POSSO SCRIVERE

$$x = \varphi_1(y) = +\sqrt{3-y^2} \qquad \varphi_1, \varphi_2 \in C^{(1)}$$

$$z = \varphi_2(y) = 1$$

$$x^2+y^2+z^2=1$$

$\beta = (0, \sqrt{3}, 1)$

y, z DIP
x INDIP.

$$J_{F(0,\sqrt{3},1)} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

VICINO A $\beta = (0, \sqrt{3}, 1)$

$$y = \varphi_1(x) = \sqrt{3 - x^2}$$

$$z = \varphi_2(x) = 1$$