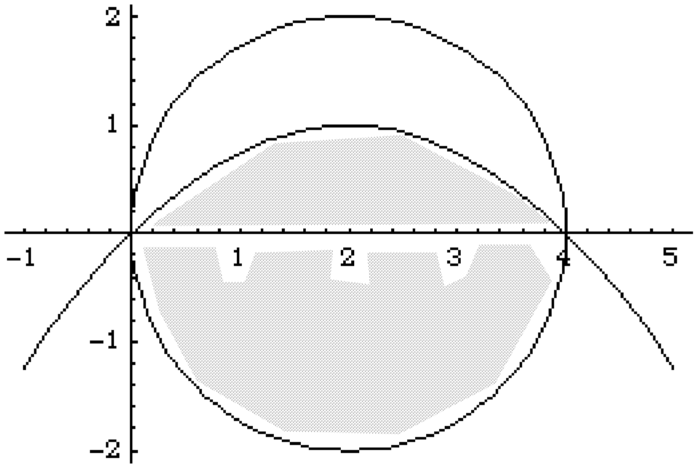
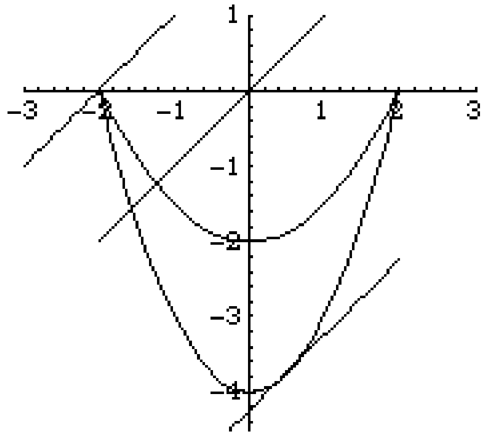
ESERCIZI SU ESTREMI ASSOLUTI PER FUNZIONI DI DUE VARIABILI
($\geq$2005)

5) Calcolare il minimo ed il massimo valore assunti dalla funzione $f(x,y)=xy^2$ nell'insieme
$A=\left\{(x,y);\, x^2+y^2-4x\leq 0,\ y\leq x-\frac{1}{4}x^2\right\}$



Le derivate parziali di f sono $\frac{\partial f}{\partial x}=y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}=2xy$; esse sono entrambe nulle in tutti i punti del tipo $(x,0)$; in questi punti è $f(0,0)=0$.
Studiamo f sulla frontiera di A. Questa è costituita dall'unione della semicirconferenza di centro (2,0) e raggio 2, situata nel semipiano $y\leq 0$ (F_1) e dall' arco di parabola $y=x-\frac{1}{4}x^2$ con $0\leq x\leq 4$ (F_2).
Su F_1 è $y^2=4x-x^2$, cosicché $f(x,y)=4x^2-x^3\equiv p(x)$, con $0\leq x\leq 4$. Si ha $p(0)=0$; $p(4)=0$; $p'(x)=8x-3x^2$, che si annulla per $x=0$ e $x=\frac{8}{3}$, entrambi compresi fra 0 e 4. Risulta $p\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{256}{27}\approx 9{,}48$.
Su F_2 è $y=x-\frac{1}{4}x^2$, cosicché
$f(x,y)=x\left(x-\frac{1}{4}x^2\right)^2\equiv q(x)=x^3-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{16}x^5$ con $0\leq x\leq 4$. Si ha $q(0)=q(4)=0$; $q'(x)=3x^2-2x^3+\frac{5}{16}x^4=\frac{1}{16}x^2\left(5x^2-32x+48\right)$; $q'(x)=0$ per $x=0,\frac{12}{5},4$. Resta da calcolare soltanto $q\left(\frac{12}{5}\right)=\frac{6912}{3125}\approx 2{,}2$.
In conclusione, il minimo ed il massimo valore di f in A sono rispettivamente 0 e $\frac{256}{27}$.

Calcolare il minimo ed il massimo di $f(x,y)=x-y$ nell'insieme $A=\left\{(x,y);\, x^2-4\leq y\leq \frac{1}{2}\left(x^2-4\right)\right\}$



A è la parte di piano fra le due parabole in figura; le linee di livello di f sono rette parallele alla bisettrice del primo quadrante, la quale (rappresentata in figura) corrisponde al livello $k=0$. Quando k cresce la retta $x-y=k$ trasla verso il basso; quindi il minimo ed il massimo di f in A si avranno, rispettivamente in corrispondenza della retta passante per (–2,0) e della tangente alla parabola inferiore. La retta $x-y=k$ passa per (–2,0) se $k=-2$; la retta del fascio $x-y=k$ tangente alla parabola $y=x^2-4$ ha come punto di tangenza il punto della parabola avente ascissa x in cui vale 1 la derivata di x^2-4; l'ascissa del punto di tangenza è $x=\frac{1}{2}$ e l'ordinata è $\frac{1}{4}-4=-\frac{15}{4}$; quindi la retta del fascio che è tangente alla parabola è quella passante per $\left(\frac{1}{2},-\frac{15}{4}\right)$, per la quale risulta $k=\frac{1}{2}+\frac{15}{4}=\frac{17}{4}$. Il minimo e il massimo di f in A sono rispettivamente –2 e $\frac{17}{4}$.

1. Determinare il minimo e il massimo valore che la funzione $f(x,y)=\frac{x-10}{y+2}$ assume nell'insieme $A=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2;\ xy\geq 16,\ x+2y\leq 18,\ x>0\right\}$.
2. Determinare il minimo e il massimo valore che la funzione $f(x,y)=\frac{x-16}{y+8}$ assume nell'insieme $A=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2;\ xy\geq 16,\ x+2y\leq 18,\ x>0\right\}$.
3. Determinare il minimo e il massimo valore che la funzione $f(x,y)=\frac{x-7}{y-1}$ assume nell'insieme $A=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2;\ xy\geq 16,\ 2x+y\geq 18,\ x>0\right\}$.
4. Determinare il minimo e il massimo valore che la funzione $f(x,y)=\frac{y+1}{x-9}$ assume nell'insieme $A=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2;\ xy\geq 16,\ 2x+y\geq 18,\ x>0\right\}$.
5. Determinare il minimo e il massimo valore che la funzione $f(x,y)=\frac{y-16}{x+8}$ assume nell'insieme $A=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2;\ xy\geq 16,\ 2x+y\geq 18,\ x>0\right\}$.
6. Determinare il minimo ed il massimo valore assunti dalla funzione $f(x,y)=x+2y$ nell'insieme $A=\left\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2;\ x^2+y^2\leq 20,\ xy\leq -8,\ x>0\right\}$

7. Determinare il minimo ed il massimo valore assunti dalla funzione $f(x,y) = x - 2y$ nell'insieme $A = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2;\ x^2 + y^2 \le 17,\ xy \ge 4,\ x > 0\}$
8. Determinare il minimo ed il massimo valore assunti dalla funzione $f(x,y) = x - 2y$ nell'insieme $A = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2;\ x^2 + y^2 \le 10,\ xy \ge 3,\ x < 0\}$
9. Determinare il minimo e il massimo valore assunti dalla funzione $f(x,y) = \dfrac{x + y + 3}{y}$ nell'insieme $A = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2; 1 \le y \le 5 - x^2\}$
10. Determinare il minimo e il massimo valore assunti dalla funzione $f(x,y) = \dfrac{x - y + 3}{y}$ nell'insieme $A = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2; 1 \le y \le 5 - x^2\}$
11. Determinare il minimo e il massimo valore assunti dalla funzione $f(x,y) = \dfrac{x + y - 3}{y}$ nell'insieme $A = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2; 1 \le y \le 5 - x^2\}$
12. Determinare il minimo e il massimo valore assunti dalla funzione $f(x,y) = \dfrac{x + 3y - 3}{x - 6}$ nell'insieme $A = \{(x,y); 1 \le y \le 9 - \frac{1}{2}x^2\}$
13. Determinare il minimo e il massimo di $f(x,y) = x^2 + xy + y - 7x$ in $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; y^2 \le y \le x + 2\}$
14. $f(x,y) = x^2 + xy + y - 7x$ in $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; y^2 \le y \le x + 2\}$
15. Determinare il minimo e il massimo valore che la funzione $f(x,y) = 4x^2 + 9y^2$ assume nell'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ \frac{6}{x} \le y \le 4 - \frac{1}{2}x\}$
16. Determinare il minimo e il massimo valore che la funzione $f(x,y) = 9x^2 + 4y^2$ assume nell'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ \frac{6}{x} \le y \le 8 - 2x\}$
17. Determinare il minimo ed il massimo valore assunti dalla funzione $f(x,y) = x + 2y$ nell'insieme $A = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2;\ x^2 + y^2 \le 40,\ xy \le -12,\ x < 0\}$
18. Determinare il minimo e il massimo valore di $f(x,y) = x^2 - 2y^2 + 3y$ nell'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 - 6y \le 0,\ x - y + 3 \le 0\}$
19. Calcolare il minimo ed il massimo valore assunti dalla funzione $f(x,y) = xy^2$ nell'insieme $A = \{(x,y); x^2 + y^2 - 4x \le 0,\ y \le x - \frac{1}{4}x^2\}$
20. Calcolare il minimo ed il massimo valore assunti dalla funzione $f(x,y) = x + y$ nell'insieme $A = \{(x,y); \frac{1}{2}(4 - x^2) \le y \le 4 - x^2\}$
21. Calcolare il minimo ed il massimo valore assunti dalla funzione $f(x,y) = x - y$ nell'insieme $A = \{(x,y); x^2 - 4 \le y \le \frac{1}{2}(x^2 - 4)\}$
22. Calcolare il minimo ed il massimo valore assunti dalla funzione $f(x,y) = xy^2$ nell'insieme $A = \{(x,y); x^2 + y^2 - 4x \le 0,\ y \ge x - \frac{1}{4}x^2\}$