Integrali multipli.

1. *Misura e misurabilità di sottoinsiemi di* $\mathbf{R}^n$.

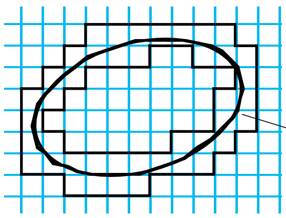
La *misura* di un intervallo di **R** è, per definizione, la sua lunghezza.
La misura di un rettangolo in $\mathbf{R}^2$ è la sua area, cioè il prodotto delle sue dimensioni; analogamente, la misura di un parallelepipedo in $\mathbf{R}^3$ è il volume, definito come prodotto delle tre dimensioni.
La definizione si estende a $\mathbf{R}^n$ con $n \geq 4$, dove non c'è più la possibilità di rappresentare fisicamente gli oggetti di cui si parla. La *misura* di un *iper-parallelepedo* con gli spigoli paralleli agli assi del sistema di riferimento

$$I \;=\; \{x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbf{R}^n;\;\; x_1\in[a_1,b_1], x_2\in[a_2,b_2],\dots,x_n\in[a_n,b_n]\}$$

si definisce cioè come

$$mis(I) \;=\; (b_1-a_1)\cdot(b_2-a_2)\cdot\ldots\cdot(b_n-a_n).$$

Per definire la misura di un sottoinsieme limitato *A* di $\mathbf{R}^n$ che non sia di questa forma, si considerano approssimazioni "dall'interno" e "dall'esterno" di *A*, ossia insiemi contenuti in *A* e insiemi contenenti *A*, costituiti dall'unione di un numero finito di "iper-parallelepipedi" (rettangoli, in $\mathbf{R}^2$, parallelepipedi in $\mathbf{R}^3$, eccetera).



Le misure (aree, volumi, ecc.) di questi insiemi approssimanti forniscono approssimazioni per difetto e per eccesso della misura di *A*, che si desidera definire. Se, raffinando quanto basta la "quadrettatura" dello spazio, si possono ottenere approssimazioni per difetto e per eccesso arbitrariamente vicine fra loro, si dice che *A* è *misurabile*, e il comune limite raggiunto dalle approssimazioni per difetto e per eccesso viene assunto per definizione come *misura* di *A* (area, in $\mathbf{R}^3$; volume, in $\mathbf{R}^3$).
La teoria alla quale abbiamo accennato richiederebbe, per chiarire opportunamente ogni dettaglio, una trattazione alquanto ampia e laboriosa; qui non insisteremo oltre, limitandoci a ricordare un importante risultato, peraltro intuitivamente ragionevole:

Ogni sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbf{R}^n$ *è misurabile.*

2. *Integrale di una funzione continua in un insieme chiuso e limitato.*

Sia *A* un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbf{R}^n$, sia *f* una funzione continua definita in *A*, con valori reali. Vogliamo definire l'*integrale di f sull'insieme A*. Per semplificare il linguaggio e le notazioni, tratteremo il caso di $\mathbf{R}^2$; la trattazione relativa a $\mathbf{R}^n$ non presenta comunque aspetti sostanzialmente diversi.
Prendiamo dunque $A\subseteq\mathbf{R}^2$ chiuso e limitato, e $f: A\to\mathbf{R}$ continua. Mediante una quadrettatura del piano scomponiamo *A* in un numero finito *p* di sottoinsiemi $A_1, A_2,\dots,A_p$. In ciascuno di tali sottoinsiemi consideriamo il minimo ed il massimo valore assunto da *f*; indichiamo rispettivamente con m_k e M_k il minimo ed il massimo valore di *f* in A_k, con $k=1,2,\dots,p$.
I numeri

$$s=\sum_{k=1}^{p} m_k\cdot(Area\ di\ A_k)\,; \qquad S=\sum_{k=1}^{p} M_k\cdot(Area\ di\ A_k)$$

si chiamano rispettivamente *somma inferiore* e *somma superiore* relative alla funzione f, e alla suddivisione di A in $A_1, A_2, \dots, A_p$. Nel caso in cui la funzione f sia sempre ≥ 0, s e S rappresentano un'approssimazione per difetto e un'approssimazione per eccesso della misura (volume) di

$$\boxed{B = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3; (x,y) \in A,\, 0 \leq z \leq f(x,y)\}}.$$

Si può dimostrare che, raffinando ad oltranza la quadrettatura del piano, i valori delle corrispondenti somme superiori e somme inferiori tendono ad un comune limite; tale limite è, per definizione, l'*integrale di f sull'insieme A*, e si indica

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{oppure} \quad \int_A f(x,y)\,dx\,dy$$

Da quanto osservato sopra segue che nel caso di $f \geq 0$ l'integrale di f su A è uguale al volume di B.
Invece, se $f \leq 0$ in A, allora $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$ è negativo, ed il suo valore è l'opposto del volume del sottoinsieme di $\mathbf{R}^3$ formato dai punti compresi fra la superficie grafico di f e il piano xy; se f non ha segno costante in A, allora $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$ è la differenza fra i volumi delle parti che si trovano sopra al piano xy e quelli che si trovano sotto; si estende quindi al caso tridimensionale l'interpretazione geometrica dell'integrale di una funzione di una variabile, il quale rappresenta secondo i casi un'area, l'opposto di un'area o una differenza di aree.

3. *Riduzione di un integrale doppio su un dominio rettangolare.*

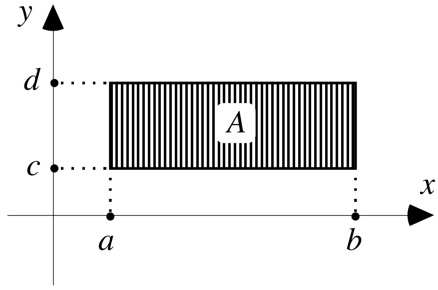
Affrontiamo ora dal punto di vista pratico il *calcolo* di un integrale multiplo. Per semplicità ci limiteremo al caso di funzioni di *due* variabili, cioè agli integrali doppi.
Il calcolo di un integrale doppio avviene mediante la *riduzione* al calcolo di due integrali, ciascuno rispetto ad una sola delle due variabili x, y.
Descriviamo qui il caso più semplice, nel quale il dominio A è un rettangolo con i lati paralleli agli assi:

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; a \leq x \leq b,\, c \leq y \leq d\} = [a,b] \times [c,d]$$

L'integrale doppio $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$ si calcola si calcola integrando separatamente «rispetto alla variabile y», e poi «rispetto alla variabile y», nel modo seguente:

$$\boxed{\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx}$$

Ciò significa che il rettangolo $A = [a,b] \times [c,d]$ viene visto come unione dei segmenti verticali nei quali y varia da c a d, mentre x si suppone fissato ad un valore compreso fra a e b; facendo variare x da a a b, si "ricompone" il rettangolo.



ESEMPIO. Calcolare $\iint_{[1,5]\times[2,3]} x^2 y\,dx\,dy$.

Soluzione. Applichiamo la formula di riduzione, come indicato sopra.

$$\iint_{[1,5]\times[2,3]} x^2 y\,dx\,dy = \int_1^5 \left(\int_2^3 x^2 y\,dy \right) dx$$

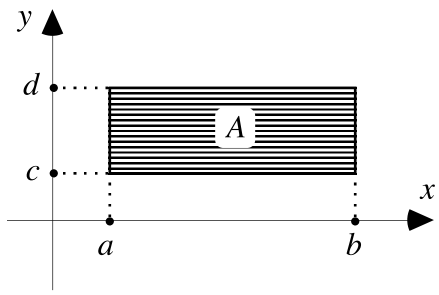
Bisogna calcolare per primo l'integrale interno: $\int_2^3 x^2\, y\, dy$. Il simbolo «*dy*», come il simbolo «*dx*», ha qui un ruolo essenziale, diversamente da quanto accade negli integrali di funzioni di una sola variabile, in cui il ruolo del simbolo «*dx*» è marginale. Infatti, $\int_2^3 x^2\, y\, dy$ indica che dobbiamo calcolare l'integrale *rispetto alla variabile y*, assegnando (per il momento) alla variabile x il ruolo di un parametro costante. Serve quindi una primitiva di $x^2\, y$ rispetto alla variabile y; calcoleremo quindi

$$\int_2^3 x^2\, y\, dy \;=\; \left[\frac{x^2 y^2}{2}\right]_{y=2}^{y=3} \;=\; \frac{9}{2}x^2 - 2x^2 \;=\; \frac{5}{2}x^2 .$$

Si faccia attenzione alla sostituzione degli estremi 2 e 3: essi vanno sostituiti, ovviamente, alla variabile y, e non alla x; per non sbagliare è opportuno indicarlo nella scrittura $\left[\frac{x^2 y^2}{2}\right]_{y=2}^{y=3}$ specificando «$y=2$», «$y=3$», invece di scrivere semplicemente «2» e «3».

Poi, calcoliamo l'integrale esterno.

$$\iint_{[1,5]\times[2,3]} x^2\, y\; dx\, dy \;=\; \int_1^5 \left(\int_2^3 x^2\, y\, dy\right) dx \;=\; \int_1^5 \frac{5}{2}x^2\, dx \;=\; \left[\frac{5}{6}x^3\right]_{x=1}^{x=5} \;=\; \frac{310}{3}. \qquad \blacksquare$$



La formula di riduzione per gli integrali doppi vale anche invertendo i ruoli delle variabili x e y, ossia riservando alla variabile x l'integrale interno e alla y quello esterno. In pratica, il rettangolo $[a,b]\times[c,d]$ viene visto come unione di segmenti paralleli all'asse x, in cui x varia da a a b mentre y resta di volta in volta fissato ad un valore compreso fra c e d.

In questo modo avremo la seguente riduzione dell'integrale doppio:

$$\boxed{\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\; dx\, dy \;=\; \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx\right) dy}$$

ESEMPIO. Calcolare $\iint_{[1,5]\times[2,3]} x^2\, y\; dx\, dy$.

Si tratta dello stesso integrale calcolato nel primo esempio; lo calcoliamo ora con le integrazioni eseguite nell'ordine inverso:

$$\iint_{[1,5]\times[2,3]} x^2\, y\; dx\, dy = \int_2^3 \left(\int_1^5 x^2\, y\; dx\right) dy = \int_2^3 \left[\frac{1}{3}x^3 y\right]_{x=1}^{x=5} dy = \int_2^3 \frac{124}{3} y\; dy = \frac{62}{3}\left[y^2\right]_{y=2}^{y=3} = \frac{310}{3}.$$

Naturalmente il valore che si ottiene deve essere lo stesso, indipendentemente dall'ordine in cui vengono eseguite le integrazioni.

Vediamo un altro esempio, che mostra qualche difficoltà in più.

ESEMPIO. Calcolare $\iint_{[0,1]\times\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]} x\,\mathrm{sen}(x\,y)\; dx\, dy$.

La riduzione dell'integrale può essere effettuata in due modi, come abbiamo visto. L'espressione della funzione integranda suggerisce qui di integrare nell'ordine $\int_0^1 \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \operatorname{sen}(xy)\, dy \right) dx$, piuttosto che nell'altro, perché è molto più semplice scrivere una primitiva di $x \operatorname{sen}(xy)$ rispetto alla variabile y, piuttosto che alla x.

Abbiamo quindi

$$\iint_{[0,1]\times\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]} x \operatorname{sen}(xy)\, dx\, dy \;=\; \int_0^1 \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \operatorname{sen}(xy)\, dy \right) dx \;=\; \int_0^1 \Big[-\cos(xy)\Big]_{y=\frac{\pi}{2}}^{y=\pi} dx \;=$$

$$= \int_0^1 \left(\cos\left(\tfrac{\pi}{2}x\right) - \cos(\pi x) \right) dx \;=\; \left[\frac{2}{\pi} \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}x\right) - \frac{1}{\pi} \operatorname{sen}(\pi x) \right]_{x=0}^{x=1} \;=\; \frac{2}{\pi}.$$

Se la riduzione viene effettuata nell'altro ordine si ottiene il seguente calcolo:

$$(*) \quad \iint_{[0,1]\times\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]} x \operatorname{sen}(xy)\, dx\, dy \;=\; \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\int_0^1 x \operatorname{sen}(xy)\, dx \right) dy\,.$$

Il calcolo di $\int_0^1 x \operatorname{sen}(xy)\, dx$ richiede un'integrazione per parti; lo svolgiamo separatamente qui sotto.

$$\int_0^1 x \operatorname{sen}(xy)\, dx \;=\; \left[x \cdot \frac{-1}{y} \cos(xy) \right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{-1}{y} \cos(xy)\, dx \;=\; \left[\frac{-x}{y} \cos(xy) + \frac{1}{y^2} \operatorname{sen}(xy) \right]_{x=0}^{x=1} \;=$$

$$= \frac{-1}{y} \cos(y) + \frac{1}{y^2} \operatorname{sen}(y)\,.$$

Sostituendo in (*) otteniamo

$$(**) \qquad \iint_{[0,1]\times\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]} x \operatorname{sen}(xy)\, dx\, dy \;=\; \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{-1}{y} \cos(y) + \frac{1}{y^2} \operatorname{sen}(y) \right) dy\,.$$

Il calcolo di una primitiva della funzione di y che appare nell'integrale al secondo membro non è ovvio; anzi, va segnalato che *non è possibile* scrivere una primitiva *separatamente* per ciascuno dei due addendi; per la loro somma il calcolo riesce, come segue:

$$\int \left(\frac{-1}{y} \cos(y) + \frac{1}{y^2} \operatorname{sen}(y) \right) dy \;=\; \int \frac{-1}{y} \cos(y)\, dy + \int \frac{1}{y^2} \operatorname{sen}(y)\, dy\,;$$

applichiamo un'integrazione per parti al primo dei due integrali del secondo membro:

$$\int \frac{-1}{y} \cos(y)\, dy \;=\; \frac{-1}{y} \operatorname{sen}(y) - \int \frac{1}{y^2} \operatorname{sen}(y)\, dy$$

e quindi

$$\int \left(\frac{-1}{y} \cos(y) + \frac{1}{y^2} \operatorname{sen}(y) \right) dy \;=\; \underbrace{\frac{-1}{y} \operatorname{sen}(y) - \int \frac{1}{y^2} \operatorname{sen}(y)\, dy}_{=\int \frac{-1}{y} \cos(y)\, dy} + \int \frac{1}{y^2} \operatorname{sen}(y)\, dy \;=\; \frac{-1}{y} \operatorname{sen}(y)$$

ed infine, riprendendo da (**),

$$\iint_{[0,1]\times\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]} x \operatorname{sen}(xy)\, dx\, dy \;=\; \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{-1}{y} \cos(y) + \frac{1}{y^2} \operatorname{sen}(y) \right) dy\,. \;=\; \left[\frac{-1}{y} \operatorname{sen}(y) \right]_{y=\frac{\pi}{2}}^{y=\pi} \;=\; \frac{2}{\pi}.$$

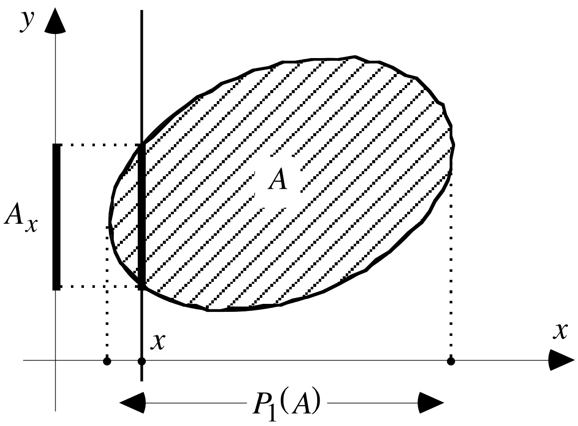
Abbiamo così ritrovato il risultato ottenuto in precedenza; ma il calcolo è stato molto più complicato.

4. *Riduzione di un integrale doppio su un dominio qualunque.*

Sia $A \subseteq \mathbf{R}^2$ un insieme chiuso e limitato. Per ogni $x \in \mathbf{R}$ sia A_x l'insieme

$$A_x \; = \; \{y \in \mathbf{R};\, (x,y) \in A\}$$

cioè la (proiezione sull'asse y della) *sezione di A parallela all'asse y, al fissato livello x*.



Sia poi

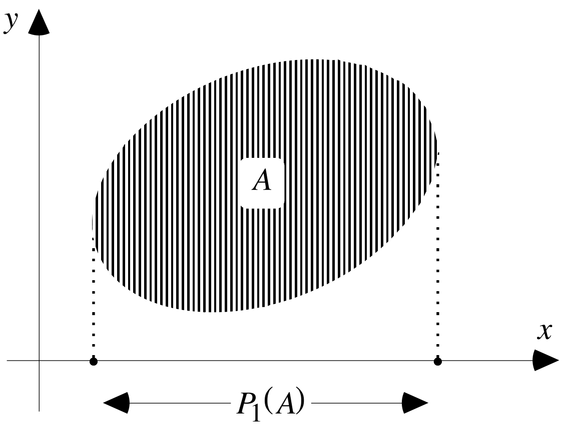
$$P_1(A) \; = \; \{x \in \mathbf{R};\, A_x \neq \emptyset\}$$

cioè la *proiezione di A sull'asse x*.

Se $f : A \to \mathbf{R}$ è una funzione continua, allora

$$\boxed{\iint_A f(x,y)\, dx\, dy \; = \; \int_{P_1(A)} \left(\int_{A_x} f(x,y)\, dy \right) dx} \; .$$

Si tratta della estensione a questo caso più generale, della formula di riduzione vista nel paragrafo precedente per un dominio rettangolare. Infatti se $A = [a,b] \times [c,d]$ allora $P_1(A) = [a,b]$ e, per ogni $x \in [a,b]$, $A_x = [c,d]$. L'insieme A si pensa dunque costituito dall'unione segmenti paralleli all'asse y (le sezioni A_x); l'integrale doppio appare intuitivamente come la "somma" degli integrali di $f(x,y)$ calcolati su ciascuno di questi segmenti.

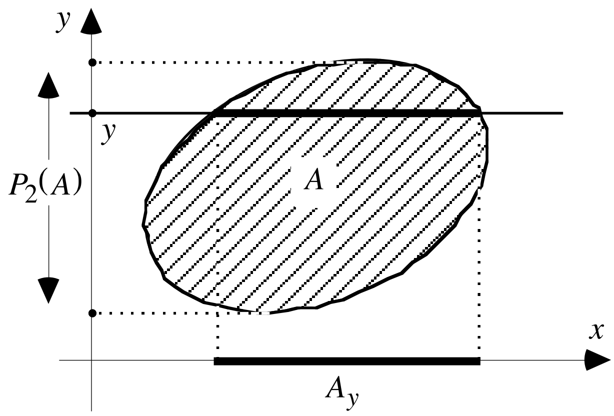


Nel caso generale ora considerato si considera la possibilità che A_x dipenda effettivamente dal valore di x.

Naturalmente, i ruoli assegnati a x e y possono essere scambiati. Chiameremo perciò, se $y \in \mathbf{R}$,

$$A_y \; = \; \{x \in \mathbf{R};\, (x,y) \in A\}$$

cioè la (proiezione sull'asse x della) *sezione di A parallela all'asse x, al fissato livello y*.



Sia poi

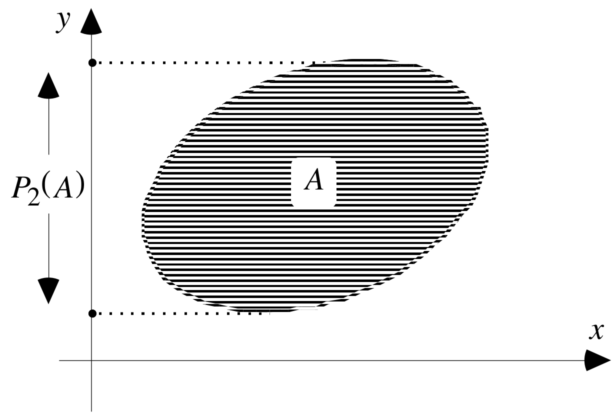
$$P_2(A) \;=\; \{y \in \mathbf{R};\, A_y \neq \varnothing\}$$

cioè la *proiezione di A sull'asse y*.

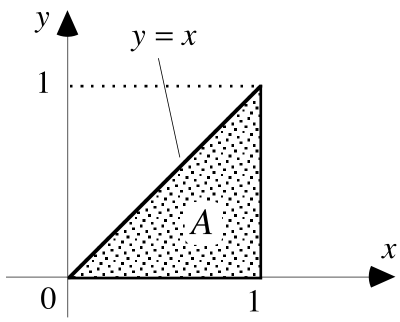
Se $f : A \to \mathbf{R}$ è una funzione continua, allora

$$\boxed{\iint_A f(x,y)\, dx\, dy \;=\; \int_{P_2(A)} \left(\int_{A_y} f(x,y)\, dx \right) dy} \;.$$

Questa volta l'insieme A si pensa costituito dall'unione segmenti paralleli all'asse x (le sezioni A_y); l'integrale doppio appare intuitivamente come la "somma" degli integrali di $f(x,y)$ calcolati su ciascuno di questi segmenti.



ESEMPIO. Calcolare $\displaystyle\iint_A \frac{x+2y}{x+1}\, dx\, dy$, essendo $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\, x \le 1,\, 0 \le y \le x\}$..



Calcoliamo l'integrale secondo la regola

$$\iint_A f(x,y)\, dx\, dy \;=\; \int_{P_1(A)} \left(\int_{A_x} f(x,y)\, dy \right) dx \,.$$

Attualmente risulta $P_1(A) = [0,1]$; ciò è evidente osservando il disegno dell'insieme A, ma si può ottenere

anche per via algebrica. Vediamo infatti come risulta descritto, per un generico x, l'insieme A_x.
Innanzitutto, la descrizione di A contiene la condizione esplicita su x « $x \leq 1$»; dunque se $x > 1$ è certamente $A_x = \varnothing$.
Se $x \leq 1$, la descrizione di A_x si può ottenere aiutandosi con l'osservazione della figura, ma anche in maniera esclusivamente algebrica. Basta infatti leggere le relazioni assegnate tra x e y nella definizione di A, come condizioni relative alla sola y, assegnando a x il ruolo di parametro di volta in volta fissato.
Attualmente abbiamo la condizione $0 \leq y \leq x$; ebbene, si possono trovare valori di y soddisfacenti questa relazione se e solo se $x \geq 0$. Dunque $P_1(A) = [0,1]$, e per ogni $x \in P_1(A)$, la sezione A_x è descritta dalla relazione $0 \leq y \leq x$, ossia $A_x = [0,x]$. Pertanto

$$\iint_A \frac{x+2y}{x+1}\,dx\,dy \;=\; \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{x+2y}{x+1}\,dy \right) dx \;=\; \int_0^1 \left[\frac{xy+y^2}{x+1} \right]_{y=0}^{y=x} dx \;=\; \int_0^1 \frac{2x^2}{x+1}\,dx .$$

Per il calcolo di quest'ultimo integrale serve calcolare il quoziente e il resto della divisione di $2x^2$ per $x+1$; dopo avere effettuato questo semplice calcolo si ottiene

$$\int_0^1 \frac{2x^2}{x+1}\,dx \;=\; 2\int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx \;=\; 2\left[\frac{1}{2}x^2 - x + \ln(x+1) \right]_{x=0}^{x=1} \;=\; -1 + 2\ln 2 .$$

Calcoliamo, l'integrale anche secondo l'altra formula di riduzione, per confrontare i due metodi:

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy \;=\; \int_{P_2(A)} \left(\int_{A_y} f(x,y)\,dx \right) dy$$

Attualmente si ha $P_2(A) = [0,1]$, e per ogni $y \in P_2(A)$, $A_y = [y,1]$. Allora

$$\iint_A \frac{x+2y}{x+1}\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_y^1 \frac{x+2y}{x+1}\,dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_y^1 \frac{x+1-1+2y}{x+1}\,dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_y^1 1 + \frac{-1+2y}{x+1}\,dx \right) dy$$

(l'ultimo passaggio equivale alla determinazione di quoziente e resto della divisione $\frac{x+2y}{x+1}$, *pensati come polinomi in* x). Proseguiamo nel calcolo:

$$= \int_0^1 \left[x + (-1+2y)\ln(x+1) \right]_{x=y}^{x=1} dy \;=\; \int_0^1 \big(1 - y + (-1+2y)\ln 2 - (-1+2y)\ln(y+1) \big)\,dy \;=$$

$$= \int_0^1 \big((2\ln 2 - 1)\,y + 1 - \ln 2 \big)\,dy - \int_0^1 (2y-1)\ln(y+1)\,dy \;=\; \mathbf{A} - \mathbf{B} .$$

Calcoliamo separatamente i due integrali **A** e **B**.

$$\mathbf{A} \;=\; \int_0^1 \big((2\ln 2 - 1)\,y + 1 - \ln 2 \big)\,dy \;=\; \left[\left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) y^2 + (1 - \ln 2)\,y \right]_{y=0}^{y=1} \;=\; \ln 2 - \frac{1}{2} + 1 - \ln 2 \;=\; \frac{1}{2} .$$

L'integrale **B** si calcola con una integrazione per parti:

$$\mathbf{B} \;=\; \int_0^1 (2y-1)\ln(y+1)\,dy \;=\; \left[\left(y^2 - y \right) \ln(y+1) \right]_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 \frac{y^2 - y}{y+1}\,dy .$$

È $\left[\left(y^2 - y \right) \ln(y+1) \right]_{y=0}^{y=1} = 0$; per calcolare $\int_0^1 \frac{y^2-y}{y+1}\,dy$ occorre calcolare quoziente e resto della divisione fra i due polinomi. Si ricava $\frac{y^2-y}{y+1} = y - 2 + \frac{2}{y+1}$, e quindi

$$\mathbf{B} \;=\; -\int_0^1 \frac{y^2 - y}{y+1}\,dy \;=\; \int_0^1 2 - y - \frac{2}{y+1}\,dy \;=\; \left[2y - \frac{1}{2}y^2 - 2\ln(y+1) \right]_{y=0}^{y=1} \;=\; \frac{3}{2} - 2\ln 2 .$$

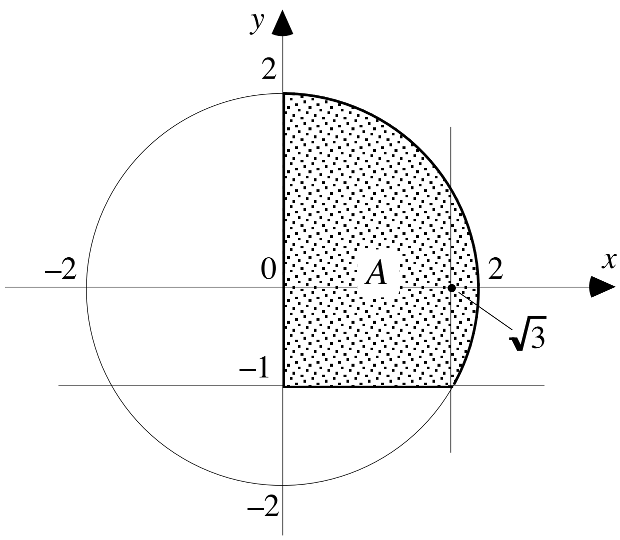
Infine

$$\iint_A \frac{x+2y}{x+1}\,dx\,dy \;=\; \mathbf{A}-\mathbf{B} \;=\; \frac{1}{2}-\frac{3}{2}+2\ln 2 \;=\; -1+2\ln 2\,.$$

Abbiamo così ritrovato il risultato già ottenuto in precedenza; questa volta però il calcolo è stato assai più laborioso, come già era accaduto in un precedente esempio. È quindi opportuno riflettere su quale dei due metodi di riduzione sia di volta in volta preferibile applicare, quando si deve calcolare un integrale doppio.

La scelta della riduzione «con segmenti paralleli all'asse x» oppure «con segmenti paralleli all'asse y» può essere motivata dalla forma della funzione integranda, come nel caso del precedente esempio, ma anche dalla geometria del dominio A sul quale si deve calcolare l'integrale; si veda a tale proposito il seguente esempio.

ESEMPIO. Calcolare $\iint_A x\,y^2\,dx\,dy$, essendo $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\,;\; x^2+y^2\le 4\,,\; y\ge -1,\; x\ge 0\}$.



Si ha evidentemente $P_1(A)=[0,2]$, $P_2(A)=[-1,2]$. Se scegliamo come "integrale interno" (da calcolare per primo) quello rispetto a x, ossia sezioniamo A con i segmenti A_y paralleli all'asse x, abbiamo le sezioni

$$A_y \;=\; \left[0,\sqrt{4-y^2}\right].$$

Infatti, fissato $y\in[-1,2]$, le ascisse dei punti della circonferenza di equazione $x^2+y^2=4$ aventi ordinata y sono $\pm\sqrt{4-y^2}$; il punto che interessa è quello situato nel semipiano $x\ge 0$, quindi ha ascissa $\sqrt{4-y^2}$.
Così risulta:

$$\iint_A x\,y^2\,dx\,dy=\int_{-1}^{2}\left(\int_0^{\sqrt{4-y^2}} x\,y^2\,dx\right)dy=\int_{-1}^{2}\left[\frac{1}{2}x^2y^2\right]_{x=0}^{x=\sqrt{4-y^2}}dy=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}\left(4-y^2\right)y^2\,dy=$$

$$=\;\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}\left(4\,y^2-y^4\right)dy \;=\; \frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}y^3-\frac{1}{5}y^5\right]_{y=-1}^{y=2} \;=\; \frac{1}{2}\left(\frac{32}{3}-\frac{32}{5}+\frac{4}{3}-\frac{1}{5}\right) \;=\; \frac{27}{10}\,.$$

La riduzione dell'integrale è assai più laboriosa se scegliamo di invertire l'ordine delle integrazioni, ponendo all'interno l'integrale rispetto alla variabile y, calcolato su ciascuna delle sezioni A_x parallele

all'asse y.
Infatti, come si nota osservando la figura, le sezioni A_x sono diversamente delimitate secondo che x sia minore o maggiore dell'ascissa del punto del quarto quadrante in cui la retta $y=-1$ interseca la circonferen-za. Con semplici calcoli si ricava il valore di tale ascissa: $x=\sqrt{3}$. Dunque si ha

$$A_x = \begin{cases} \left[-1, \sqrt{4-x^2}\right] & \text{se } x \in \left[0, \sqrt{3}\right] \\ \left[-\sqrt{4-x^2}, \sqrt{4-x^2}\right] & \text{se } x \in \left[\sqrt{3}, 2\right] \end{cases}$$

A causa di questa diversa espressione di A_x, la riduzione dell'integrale effettuata secondo questa modalità richiede lo sdoppiamento in due integrali:

$$\iint_A x\,y^2\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_{A_x} x\,y^2\,dy\right) dx = \int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_{-1}^{\sqrt{4-x^2}} x\,y^2\,dy\right) dx + \int_{\sqrt{3}}^2 \left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} x\,y^2\,dy\right) dx$$

Il calcolo è possibile, anche se più laborioso. Il primo dei due integrali vale

$$\int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_{-1}^{\sqrt{4-x^2}} x\,y^2\,dy\right) dx = \int_0^{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{3} x\,y^3\right]_{y=-1}^{y=\sqrt{4-x^2}} dx = \frac{1}{3}\int_0^{\sqrt{3}} \left(x\left(4-x^2\right)^{\frac{3}{2}} + x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{2}\cdot(-2x)\left(4-x^2\right)^{\frac{3}{2}} + x\right) dx\,;$$

osservando ora che $(-2x)$ è la derivata di $4-x^2$ si ottiene

$$\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\left(4-x^2\right)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}x^2\right]_{x=0}^{x=\sqrt{3}} = \frac{1}{6}\left[-\frac{2}{5}\left(4-x^2\right)^{\frac{5}{2}} + x^2\right]_{x=0}^{x=\sqrt{3}} = \frac{1}{6}\left(-\frac{2}{5} + 3 + \frac{64}{5}\right) = \frac{77}{30}.$$

Il secondo integrale vale

$$\int_{\sqrt{3}}^2 \left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} x\,y^2\,dy\right) dx = \int_{\sqrt{3}}^2 \left[\frac{1}{3} x\,y^3\right]_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{y=\sqrt{4-x^2}} dx = \frac{2}{3}\int_{\sqrt{3}}^2 x\left(4-x^2\right)^{\frac{3}{2}} dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\frac{2}{5}\left(4-x^2\right)^{\frac{5}{2}}\right]_{x=\sqrt{3}}^{x=2} = \frac{2}{15}.$$

Finalmente otteniamo

$$\int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_{-1}^{\sqrt{4-x^2}} x\,y^2\,dy\right) dx = \frac{77}{30} + \frac{2}{15} = \frac{81}{30} = \frac{27}{10}.$$

5. *Cambiamento di variabili in un integrale multiplo.*

Ricordiamo, per cominciare, il corrispondente Teorema per gli integrali di funzioni di una sola variabile.

Se $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ *è una funzione continua, e* $g:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ *è una funzione invertibile, derivabile e tale che* $g(\alpha)=a$, $g(\beta)=b$ (quindi $\alpha=g^{-1}(a)$, $\beta=g^{-1}(b)$), *allora*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\left(g(t)\right)\cdot g'(t)\,dt}.$$

Nel calcolo di integrali di funzioni di una variabile, questo metodo viene applicato prevalentemente per mutare l'espressione della funzione integranda, al fine di calcolare più agevolmente una primitiva. Il corri-spondente metodo per gli integrali multipli. si applica invece, nella maggior parte dei casi, per mutare la forma geometrica dell'insieme di integrazione, come vedremo negli esempi che seguiranno.

Per semplificare l'esposizione. descriviamo la regola nel caso di *due* variabili, cioè per gli integrali doppi; la regola vale altresì per integrali multipli in dimensione qualunque, senza sostanziali differenze.

Si abbia da calcolare $\iint_A f(x,y)\, dx\, dy$, con A sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbf{R}^2$ e f funzione continua in A, con valori reali.

Sia B un sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$; sia $\Phi: B \to \mathbf{R}^2$ una funzione avente come valori *coppie* di numeri reali: ciò significa che Φ è una *coppia* (φ_1, φ_2) di funzioni scalari.

Supponiamo $\Phi(B) = A$, ossia Φ trasforma l'insieme B nell'insieme A. Supponiamo inoltre che le funzioni φ_1 e φ_2, *componenti* di Φ, abbiano derivate parziali continue in ogni punto di B e che f sia *iniettiva* in B, ossia punti diversi di B siano trasformati in punti diversi di A. (1)

Indichiamo con (u,v) le variabili indipendenti di Φ.

Si chiama *matrice jacobiana* di Φ la matrice quadrata di ordine 2 avente come *righe* i *gradienti delle componenti* φ_1 e φ_2 di Φ:

$$J\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{pmatrix}$$

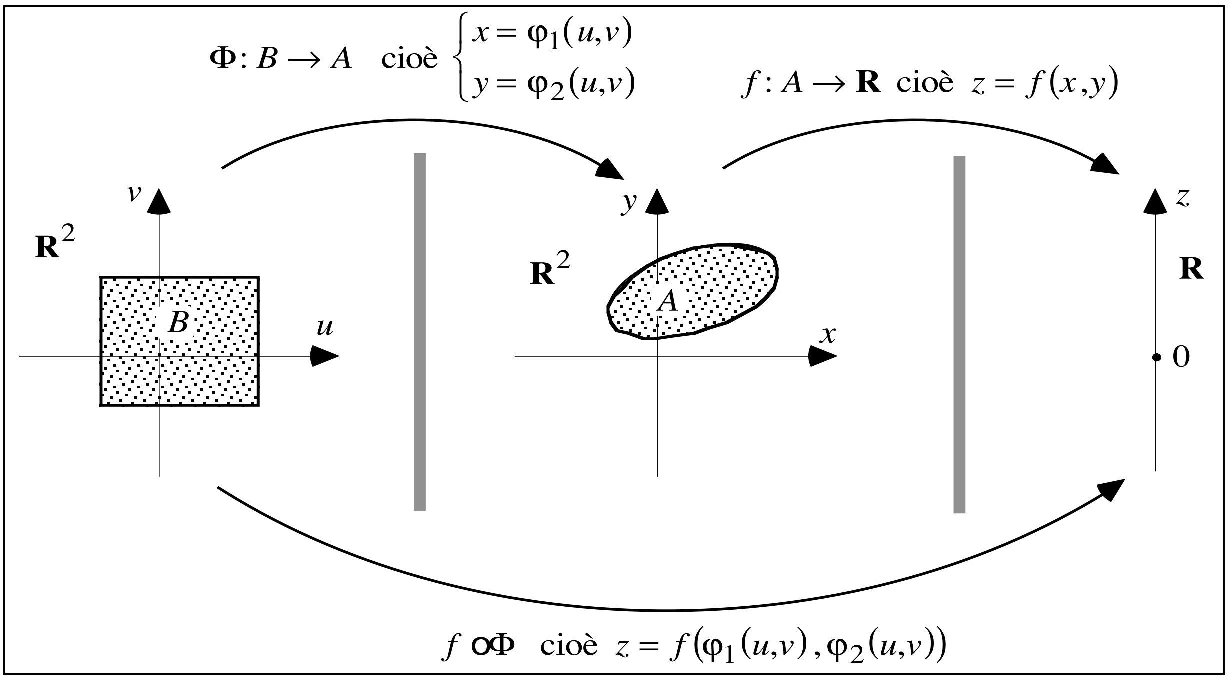
Per esempio, se $\Phi(u,v) = (u\cos v, u\,\mathrm{sen}\, v)$ si ha $\varphi_1(u,v) = u\cos v$, $\varphi_2(u,v) = u\,\mathrm{sen}\, v$; allora

$$grad\,\varphi_1(u,v) = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}\right) = (\cos v, -u\,\mathrm{sen}\, v); \quad grad\,\varphi_2(u,v) = \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}\right) = (\mathrm{sen}\, v, u\cos v)$$

e quindi

$$J\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} \cos v & -u\,\mathrm{sen}\, v \\ \mathrm{sen}\, v & u\cos v \end{pmatrix}.$$

Abbiamo dunque la seguente situazione:



Ebbene, si ha quanto segue:

(1) Quest'ultimo requisito può in effetti venire meno in alcuni punti di frontiera di B, senza che ciò comprometta la validità delle conclusioni che esporremo; non insistiamo qui su questo aspetto tecnico.

FORMULA PER IL CAMBIAMENTO DI VARIABILE IN UN INTEGRALE DOPPIO

$$\boxed{\iint_A f(x,y)\,dx\,dy \;=\; \iint_B f\big(\varphi_1(u,v),\varphi_2(u,v)\big)\cdot\left|\det J\Phi(u,v)\right|\,du\,dv\;.}$$

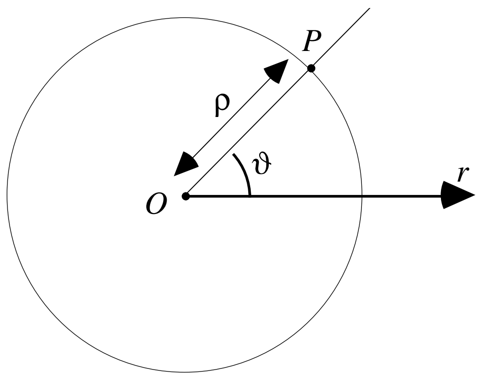
APPLICAZIONE: LE COORDINATE POLARI NEL PIANO.

Un punto nel piano può essere individuato non soltanto mediante le sue coordinate (x,y) rispetto a un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, ma anche in altri modi, talvolta più convenienti per determinate applicazioni. In particolare, sono utili in vari casi le *coordinate polari*, definite come segue.

Assegnato nel piano un punto O (*origine*) e una semiretta r con origine O (*asse polare*), ogni punto P del piano può essere individuato assegnando i seguenti due valori:

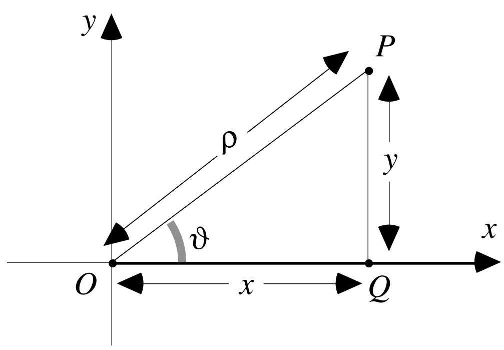
• la lunghezza ρ del segmento OP, ossia la distanza di P da O, detta *raggio vettore di P*;

• la misura υ dell'angolo formato dal segmento OP con l'asse polare. υ si chiama *anomalia di P*.



Il valore di ρ stabilisce una circonferenza di centro O alla quale P deve appartenere; il valore di υ stabilisce una semiretta di origine O che a sua volta deve contenere P, dunque P è il punto di intersezione della circonferenza e della semiretta determinate come si è detto.
I valori di υ possono variare in un intervallo di lunghezza uguale a 2π, per potere rappresentare ogni possibile inclinazione; secondo i casi, si preferirà pensare $\vartheta \in [0,2\pi]$ oppure $\vartheta \in [-\pi,\pi]$, in base a criteri di opportunità.

Conversione da coordinate polari a coordinate cartesiane e viceversa.
Siano dati nel piano un sistema di riferimento cartesiano (Oxy) e un sistema di riferimento polare, avente la stessa origine O di quello polare, e come asse polare la semiretta positiva dell'asse x.



Se P è un punto del piano e (x,y), (ρ,ϑ) sono rispettivamente le coordinate cartesiane e polari di P rispetto ai sistemi indicati, si ottiene immediatamente

$$(*)\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta \end{cases}$$

Queste formule esprimono il passaggio dalle coordinate polari a quelle cartesiane.

Qualche problema in più si ha per il passaggio inverso. Si ha immediatamente $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, tenendo presente che ρ è stato definito come distanza del punto P dall'origine. Lo stesso risultato si ottiene "quadrando e sommando membro a membro" dalle (*).

Se $\rho = 0$, cioè se il punto P ha coordinate cartesiane (0,0), il valore di υ è indeterminato. Altrimenti, dalle (*) e da $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ si ottiene

$$\cos\vartheta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, \quad \mathrm{sen}\,\vartheta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, \quad \text{e se } x \neq 0\,, \quad \tan\vartheta = \frac{y}{x}$$

Da queste relazioni si deduce il valore di υ nell'intervallo stabilito in partenza (di solito $[0,2\pi]$ o $[-\pi,\pi]$).

Le formule (*) che esprimono il passaggio dalle coordinate polari a quelle cartesiane definiscono una funzione Φ di due variabile reali (ρ e υ) con valori in $\mathbf{R}^2$. Questa trasformazione si applica spesso per il calcolo di integrali doppi su insiemi di integrazione di forma "rotonda"; fra poco vedremo alcuni esempi.

Per comodità, scriviamo esplicitamente la formula per il cambiamento di variabili in un integrale doppio, nel caso in cui la trasformazione Φ sia quella da coordinate polari a coordinate cartesiane. Le variabili "nuove", chiamate u e v nell'esposizione teorica, sono ora ρ e υ; La matrice jacobiana di questa Φ è già stata calcolata, con la sola differenza che le variabili erano u e v. Con le nuove notazioni si ha

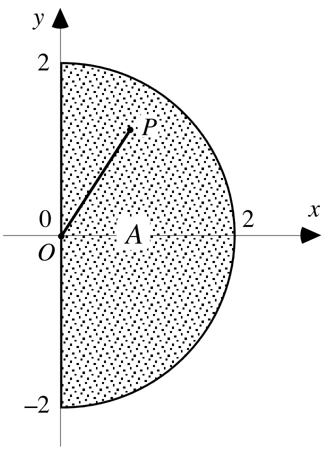
$$J\Phi = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta \\ \mathrm{sen}\,\vartheta & \rho\cos\vartheta \end{pmatrix} \quad \text{e quindi} \quad \det(J\,\Phi) = \rho\cos^2\vartheta + \rho\,\mathrm{sen}^2\vartheta = \rho\,; \ \left|\det(J\,\Phi)\right| = \det(J\,\Phi) = \rho.$$

Allora, se $A \subseteq \mathbf{R}^2$ è un insieme chiuso e limitato, e $f : A \to \mathbf{R}$ è una funzione continua, si ha

$$\boxed{\iint_A f(x,y)\,dx\,dy \;=\; \iint_B f(\rho\cos\vartheta, \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta)\cdot\rho\; d\rho\, d\vartheta\,.}$$

La descrizione dell'insieme B in cui varia (ρ,ϑ) si ottiene ponendo $\rho\cos\vartheta$ al posto di x, $\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta$ al posto di y nelle disuguaglianze che descrivono A. Nei casi più semplici la descrizione di B si ottiene con considerazioni geometriche sulla figura che rappresenta A:

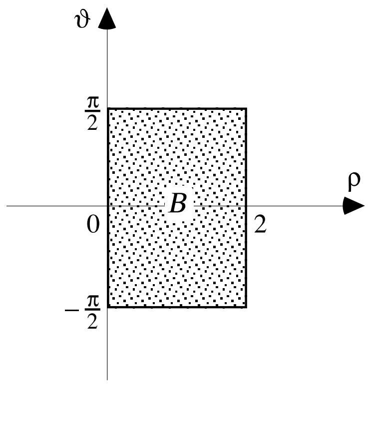
Osserviamo che se si desidera tracciare un disegno dell'insieme B, questo va effettuato in un sistema *cartesiano* con assi ρ, υ (di solito ρ sull'asse orizzontale, υ su quello verticale).



ESEMPIO. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_A x^2\,dx\,dy, \ \text{essendo} \ A = \left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2;\ x^2+y^2 \le 4\,,\ x \ge 0\right\}.$$

Le coordinate polari (ρ,ϑ) dei punti $(x,y)\in A$ variano rispettivamente negli intervalli $[0,2]$ e $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Infatti i punti $P \in A$ sono quelli che distano dall'origine non oltre 2, ed avendo ascissa ≥ 0, sono tali che l'inclinazione del segmento OP rispetto al semiasse x positivo varia fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$; dunque B è (nel piano (ρ,ϑ))



il rettangolo $[0,2]\times\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Questo risultato può essere dedotto per via puramente algebrica. Infatti sostituendo $x=\rho\cos\vartheta$, $y=\rho\operatorname{sen}\vartheta$ nella descrizione cartesiana di A si ottiene: da $x^2+y^2\le 4$:

$$\rho^2\cos^2\vartheta+\rho^2\operatorname{sen}^2\vartheta\le 4$$

cioè $\rho^2\le 4$, e poiché ρ non può essere negativo, $0\le\rho\le 2$;

da $x\ge 0$: $\rho\cos\vartheta\ge 0$, cioè $\cos\vartheta\ge 0$, perché ρ non può essere negativo. La disuguaglianza $\cos\vartheta\ge 0$ è soddisfatta in infiniti intervalli; ne scegliamo arbitrariamente uno: il più naturale è $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Dalla formula per il cambiamento di variabili in coordinate polari abbiamo allora

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy \;=\; \iint_{[0,2]\times\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}\rho^2\cos^2\vartheta\cdot\rho\,d\rho\,d\vartheta \;=\; \iint_{[0,2]\times\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}\rho^3\cos^2\vartheta\,d\rho\,d\vartheta\,.$$

Calcoliamo l'integrale mediante riduzione:

$$\iint_{[0,2]\times\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}\rho^3\cos^2\vartheta\,d\rho\,d\vartheta \;=\; \int_0^2\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\rho^3\cos^2\vartheta\,d\vartheta\right)d\rho$$

Una primitiva di $\cos^2\vartheta$ (rispetto a υ) è

$$\int\cos^2\vartheta\,d\vartheta \;=\int\frac{1}{2}(1+\cos(2\vartheta))\,d\vartheta \;=\; \frac{1}{2}\left(\vartheta+\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\vartheta)\right) \;=\; \frac{1}{4}\big(2\vartheta+\operatorname{sen}(2\vartheta)\big)$$

e allora

$$\frac{1}{4}\int_0^2\rho^3\big[2\vartheta+\operatorname{sen}(2\vartheta)\big]_{\vartheta=-\frac{\pi}{2}}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}}\,d\rho \;=\; \frac{\pi}{2}\int_0^2\rho^3\,d\rho \;=\; \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_{\rho=0}^{\rho=2} \;=\; 2\pi\,.$$

Esercizi svolti.