Funzioni reali di più variabili reali

Generalità.

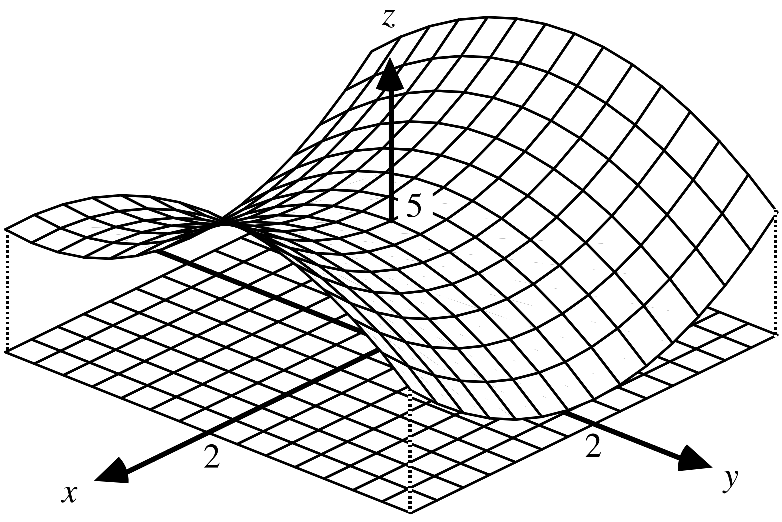
Indichiamo con $\mathbb{R}^n$ il prodotto cartesiano di $\mathbb{R}$ per sé stesso, n volte:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) ;\ x_1 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Quando $n = 2$ oppure $n = 3$ indicheremo le coordinate dei punti di $\mathbb{R}^2$ e di $\mathbb{R}^3$ rispettivamente con (x,y) e (x,y,z), anziché (x_1,x_2) e (x_1,x_2,x_3).

Sia A un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$; una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ è una funzione reale di n variabili reali: a ciascun $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$ la funzione f associa il numero reale $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
La definizione di funzione nota dalla teoria degli insiemi identifica f con il suo ***grafico***, cioè con l'insieme

$$f = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)) ;\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A\} \subseteq A \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$

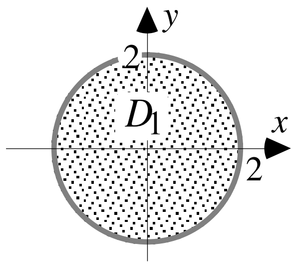


Si nota che soltanto le funzioni di ***due*** variabili hanno una rappresentazione grafica concretamente realizzabile: il grafico di una funzione reale di due variabili è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$, rappresentabile nello spazio ordinario. Tale grafico è una superficie nello spazio; le coordinate (x,y,z) dei punti che la compongono sono caratterizzate da: $(x,y) \in A$; $z = f(x,y)$. La figura rappresenta il grafico della funzione $z = f(x,y) = x^2 - y^2 + 5$, definita nel quadrato $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ -2 \le x \le 2 ;\ -2 \le y \le 2\}$; l'unità di misura sull'asse z è minore di quella degli assi x e y.

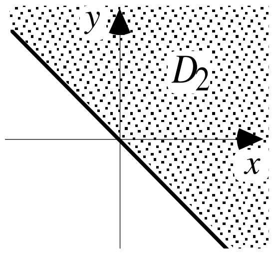
Le funzioni di tre o più variabili non possono essere rappresentate graficamente: occorrerebbe infatti uno spazio a quattro o più dimensioni, che non esiste in natura. Ugualmente le funzioni di tre o più variabili possono essere studiati come oggetti matematici, ed hanno importantissime applicazioni.

Dominio naturale di una funzione di più variabili.

Denotiamo con questo nome, analogamente al caso delle funzioni di una variabile, il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ nel quale ha significato l'espressione di volta in volta assegnata di $f(x_1, \ldots, x_n)$.

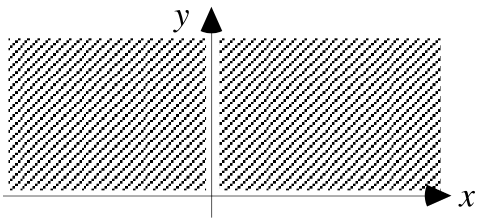


Per esempio, il dominio naturale della funzione $f_1(x,y) = \ln\left(4 - x^2 - y^2\right)$ è l'insieme $D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, ; \, x^2 + y^2 < 4\right\}$, cioè il disco (aperto, ossia con esclusione dei punti di frontiera) con il centro nell'origine e raggio 2;



il dominio naturale della funzione $f_2(x,y) = \sqrt{x+y}$ è il semipiano $D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, ; \, x + y \geq 0\right\}$ chiuso, cioè comprendente la retta $x + y = 0$, frontiera di D_2.

Espressioni più complicate comporteranno la risoluzione di un sistema di più disequazioni, secondo lo stesso principio.



Per esempio, la figura qui a sinistra rappresenta il dominio della funzione $f_3(x,y) = \dfrac{\ln y}{x}$; si tratta dell'insieme $D_3 = \left\{(x,y); \, y > 0, \; x \neq 0\right\}$, cioè il semipiano sopra l'asse x, con esclusione dei punti che appartengono all'asse y.

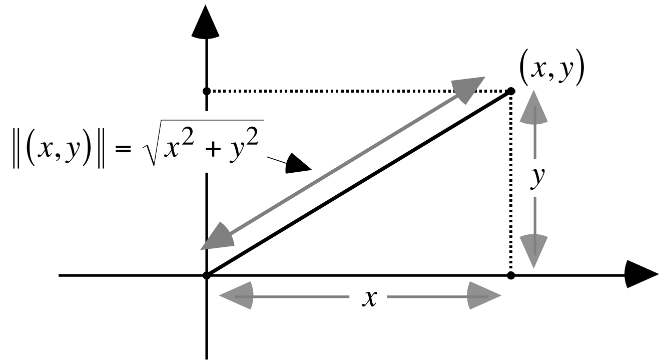
Parecchie nozioni e strumenti già noti riguardo alle funzioni di una variabile reale si possono adattare alle funzioni di più variabili; di seguito esponiamo alcune di tali nozioni.

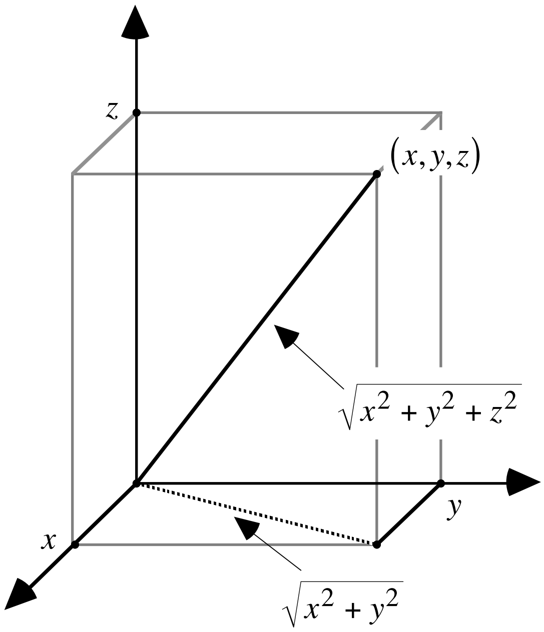
Norma e distanza in $\mathbb{R}^n$; limiti e continuità; estremanti.

Se $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ si chiama ***norma*** di $\boldsymbol{x}$ il numero reale non negativo

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

Se $n = 2$ oppure $n = 3$ si vede facilmente, utilizzando il Teorema di Pitagora, che $\|\boldsymbol{x}\|$ è uguale alla *distanza di* $\boldsymbol{x}$ *dall'origine*.





Quando $n \geq 4$ non è più possibile una rappresentazione grafica, ma si continua a interpretare la norma come "distanza dall'origine" del punto in questione.
La norma in $\mathbb{R}^n$ soddisfa proprietà intuitivamente ragionevoli:

Per ogni $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ *e* $k \in \mathbb{R}$ *si ha*

N1) $\|\boldsymbol{a}\| \geq 0$; $\|\boldsymbol{a}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = (0, 0, \dots, 0)$

N2) $\|k\boldsymbol{a}\| = |k|\,\|\boldsymbol{a}\|$

N3) $\big|\|\boldsymbol{a}\| - \|\boldsymbol{b}\|\big| \leq \|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|$

La dimostrazione delle prime due proprietà è immediata; un po' più impegnativa è la prova (che non riportiamo) delle N3, dette *disuguaglianze triangolari*.

Se $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, \dots, b_n)$ sono due punti di $\mathbb{R}^n$, si definisce ***distanza*** fra $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ la norma della differenza fra $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$:

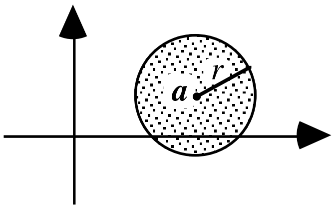
$$dist.(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2 + \dots + (b_n-a_n)^2}$$

Si nota che per $n = 2$ e $n = 3$ la formula esprime effettivamente la lunghezza del segmento congiungente $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$; per dimensioni superiori tale formula rappresenta *per definizione* la lunghezza del segmento.

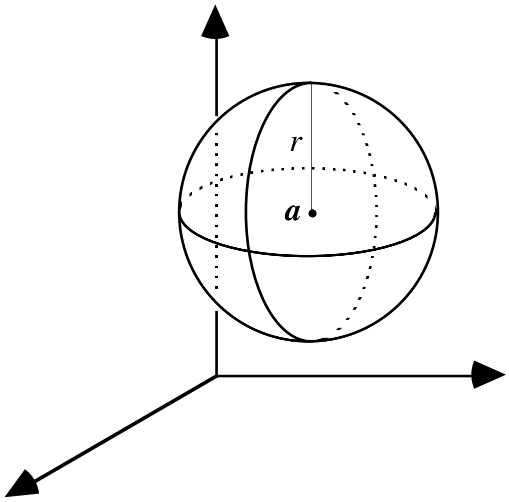
Se $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ e r è un numero reale positivo, si chiama ***sfera*** di $\mathbb{R}^n$ con centro in $\boldsymbol{a}$ e raggio r l'insieme, indicato $S(\boldsymbol{a},r)$, dei punti $\boldsymbol{b}$ la cui distanza da $\boldsymbol{a}$ è minore di r:

$$S(\boldsymbol{a},r) \overset{def.}{=} \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \; ; \; \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \| \le r \right\}$$

Quando $n = 3$ la *sfera* così definita è effettivamente una sfera nel senso geometrico elementare; quando $n = 2$ essa è in realtà un cerchio (comprendente sia i punti della circonferenza, sia i punti interni).



Come al solito, per dimensioni superiori non abbiamo la possibilità di dare una rappresentazione grafica della sfera con centro $\boldsymbol{a}$ e raggio r.



Facendo uso della distanza si può definire la nozione di ***intorno*** di un punto $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$:

*Un sottoinsieme U di $\mathbb{R}^n$ si dice **intorno** di $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n)$ se esiste $r > 0$ tale che la sfera $S(\boldsymbol{a},r)$ con centro $\boldsymbol{a}$ e raggio r è contenuta in U.*

In particolare, $S(\boldsymbol{a},r)$ è un intorno di $\boldsymbol{a}$.

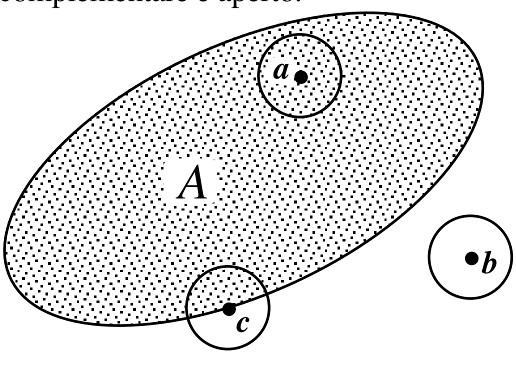
Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ si dice che:

• $\boldsymbol{a}$ *è interno ad A, se A è intorno di* $\boldsymbol{a}$

•• $\boldsymbol{a}$ *è esterno ad A, se è interno al complementare di A in $\mathbb{R}^n$.*

••• $\boldsymbol{a}$ *è punto di frontiera di A, se non è interno né esterno, cioè se ogni sfera col centro in* $\boldsymbol{a}$ *contiene sia punti appartenenti ad A, sia punti non appartenenti ad A.*

Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^n$ si dice ***aperto*** se ogni suo punto è interno; si dice ***chiuso*** se il suo complementare è aperto.



Equivalentemente, si può dire che A è aperto, se nessun punto di frontiera di A appartiene ad A, e che A è chiuso se ogni punto di frontiera di A appartiene ad A.
Ci sono naturalmente insiemi che non sono né aperti, né chiusi.
La figura, ambientata in $\mathbb{R}^2$, mostra un insieme A e tre punti: $\boldsymbol{a}$ interno ad A, $\boldsymbol{b}$ esterno ad A e $\boldsymbol{c}$ punto di frontiera per A. Per ciascuno dei tre punti è indicata una sfera (un disco, essendo nel caso di dimensione 2), che mostra come si realizzano le rispettive definizioni.

Il concetto di *intorno* permette di formulare in modo praticamente invariato rispetto al caso delle funzioni di una variabile, la definizione di limite per una funzione reale di più variabili reali.

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$. Si dice che $\boldsymbol{a}$ è ***punto di accumulazione*** per A se:

$$\textit{per ogni intorno } U \textit{ di } \boldsymbol{a} \textit{ risulta } A \cap U - \{\boldsymbol{a}\} \neq \varnothing$$

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ un punto di accumulazione per A, $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.
Si dice che

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \ell$$

se:

$$\forall\, V \textit{ intorno di } \ell \;\; \exists\, U \textit{ intorno di } \boldsymbol{a}\, ,\, \forall\, \boldsymbol{x} \left(\boldsymbol{x} \in A \cap U - \{\boldsymbol{a}\} \Rightarrow f(\boldsymbol{x}) \in V \right)$$

Tenendo presente come sono definiti gli intorni, la definizione può essere formulata diversamente, come accade nel caso delle funzioni di una variabile:

$$\forall\, V \textit{ intorno di } \ell \;\; \exists\, \delta > 0\, ,\, \forall\, \boldsymbol{x} \left(\boldsymbol{x} \in A \wedge 0 < \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \| < \delta \Rightarrow f(\boldsymbol{x}) \in V \right)$$

Ricordiamo che $\boldsymbol{a}$ vuole dire $(a_1, \ldots, a_n)$ e $\boldsymbol{x}$ vuole dire $(x_1, \ldots, x_n)$; invece ℓ è un numero reale, oppure $+\infty$, oppure $-\infty$. Se $\ell \in \mathbb{R}$ la definizione di limite si può scrivere

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \ell \in \mathbb{R} \;\overset{def.}{\Leftrightarrow}\; \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0\, ,\, \forall\, \boldsymbol{x} \left(\boldsymbol{x} \in A \wedge 0 < \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \| < \delta \Rightarrow | f(\boldsymbol{x}) - \ell | < \varepsilon \right)$$

mentre nei casi in cui il limite è $+\infty$ oppure $-\infty$ la definizione è, rispettivamente:

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = +\infty \;\overset{def.}{\Leftrightarrow}\; \forall\, M > 0 \;\; \exists\, \delta > 0\, ,\, \forall\, \boldsymbol{x} \left(\boldsymbol{x} \in A \wedge 0 < \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \| < \delta \Rightarrow f(\boldsymbol{x}) > M \right)$$

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = -\infty \;\overset{def.}{\Leftrightarrow}\; \forall\, M > 0 \;\; \exists\, \delta > 0\, ,\, \forall\, \boldsymbol{x} \left(\boldsymbol{x} \in A \wedge 0 < \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \| < \delta \Rightarrow f(\boldsymbol{x}) < -M \right)$$

Non si può invece estendere alle funzioni di più variabili la definizione di limite "per $\boldsymbol{x}$ tendente a $+\infty$ (oppure $-\infty$)", perché queste definizioni sono legate alla relazione di ordine di $\mathbb{R}$, non disponibile in $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$.

Tutti i teoremi sui limiti noti per le funzioni di una variabile non collegati alla relazione d'ordine nel dominio valgono per funzioni di più variabili, con la stessa dimostrazione; non sono estensibili invece, in particolare, i teoremi sui limiti di funzioni monotone, per le ragioni già dette.

Analoga al caso delle funzioni di una variabile è la definizione di <u>continuità</u> di una funzione:

Se $f: A \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a} \in A$ e $\boldsymbol{a}$ è un punto di accumulazione per A, si dice che f è ***continua*** in $\boldsymbol{a}$ se

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a})$$

e si dice che f è *continua in* A, se è continua in ogni punto di A

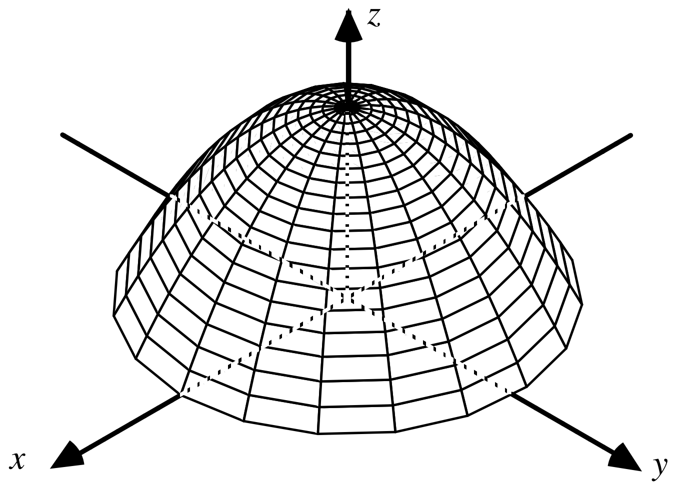
Ancora analoga alla definizione relativa alle funzioni di una variabile è la definizione di *estremante*, ossia di *punto di minimo relativo* o di *massimo relativo:*

Se $f: A \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a} \in A$ e $\boldsymbol{a}$ è un punto di accumulazione per A, si dice che $\boldsymbol{a}$ è un ***punto di minimo relativo*** per f, se

$$\exists\, U \textit{ intorno di } \boldsymbol{a}\,,\ \forall\, \boldsymbol{x}\, \big(\boldsymbol{x} \in A \cap U \Rightarrow f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{a})\big).$$

Si dirà invece che $\boldsymbol{a}$ è un ***punto di massimo relativo*** per f, se

$$\exists\, U \textit{ intorno di } \boldsymbol{a}\,,\ \forall\, \boldsymbol{x}\, \big(\boldsymbol{x} \in A \cap U \Rightarrow f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{a})\big)$$



La figura mostra il grafico della funzione $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$; $(0,0)$ è punto di massimo relativo per f (in questo caso si tratta in effetti di massimo assoluto)

Notiamo che, nelle definizioni date sopra, la relazione di ordine di $\mathbb{R}$ viene utilizzata soltanto su *valori* della funzione, e mai sugli elementi del dominio; per questa ragione è possibile definire per le funzioni con valori in $\mathbb{R}$ le nozioni di punto di minimo relativo o massimo relativo, anche quando il dominio si trova in un ambiente di dimensione superiore a uno.

Derivate parziali di una funzione reale di più variabili reali.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: A \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un punto interno ad A. Si dice che f è *derivabile rispetto a* x_k *nel punto* $\boldsymbol{a}$ se esiste, con valore finito, il limite:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, a_2, \ldots, a_k + t, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots, a_n)}{t}$$

Questo limite si chiama *derivata parziale di* f *rispetto a* x_k *nel punto* $\boldsymbol{a}$, e si indica: $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{a})$, oppure anche $f'_{x_k}(\boldsymbol{a})$.

D'ora in avanti, per semplificare l'esposizione, parleremo delle funzioni di due variabili, cioè stabiliremo $n = 2$. La maggior parte delle definizioni e dei risultati si estendono comunque senza

difficoltà ai casi di dimensione superiore; segnaleremo esplicitamente le situazioni in cui il passaggio a dimensione superiore comporta qualche problema.
Le derivate parziali di una funzione di <u>due</u> variabili $f(x,y)$ in un punto (a,b) interno al dominio di f può essere formulata nel modo seguente:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{x \to a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x-a} \quad ; \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{y \to b} \frac{f(a,y) - f(a,b)}{y-b},$$

purché i limiti indicati esistano con valore finito.
Si nota che la definizione di $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ definisce, in sostanza, la derivata della funzione f "pensata come dipendente dalla sola variabile x", mentre a y è stato assegnato il valore fisso b; analoga interpretazione si può dare a $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$. Questo giustifica il metodo con cui, in pratica, si calcolano le derivate parziali di una funzione di più variabili: la derivata si calcola rispetto alla variabile indicata, riguardando l'altra (o le altre) come parametri costanti. Facciamo alcuni esempi.

$$f(x,y) = \frac{x}{1+y} \quad (\text{con } y \neq -1). \quad \text{Si ha: } \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+y}\,;\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x}{(1+y)^2}\,;$$

$$f(x,y) = x^y \quad (\text{con } x > 0). \quad \text{Si ha: } \frac{\partial f}{\partial x} = y\,x^{y-1}\,;\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x\,;$$

$$f(x,y) = \ln\left(x^2 + 5y\right) \quad \left(\text{con } x^2 + 5y > 0\right). \quad \text{Si ha: } \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+5y}\,;\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{5}{x^2+5y}.$$

Segnaliamo che l'esistenza delle derivate parziali di f in un punto (a,b) ***non è*** condizione sufficiente per la continuità di f in (a,b). Questo risultato manifesta una situazione diversa per le funzioni di più variabili, rispetto a quelle di una variabile: per queste ultime, come è noto, la derivabilità in un punto implica la continuità.

Secondo lo stesso principio si definiscono le derivate parziali di ordine superiore: seconde, terze… di una funzione di due o più variabili. Si ha:

$$f''_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) \quad ; \qquad f''_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)$$

$$f''_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) \quad ; \qquad f''_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)$$

ESEMPIO. $f(x,y) = x^3 y + \frac{x}{y}$ $(y \neq 0)$. Le derivate parziali prime sono:

$$f'_x(x,y) = 3x^2 y + \frac{1}{y} \quad , \qquad f'_y(x,y) = x^3 - \frac{x}{y^2}$$

e le seconde sono

$$f''_{xx}(x,y) = 6xy \quad ; \quad f''_{xy}(x,y) = 3x^2 - \frac{1}{y^2} \quad ; \quad f''_{yx}(x,y) = 3x^2 - \frac{1}{y^2} \quad ; \quad f''_{yy}(x,y) = \frac{2x}{y^3}$$

Si nota che $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$. Questo fatto non è casuale: infatti si ha

TEOREMA DI SCHWARZ. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A aperto; sia $f: A \to \mathbb{R}$. Se in tutto A esistono le derivate parziali prime di f e le derivate parziali seconde f''_{xy} e f''_{yx}, e queste ultime sono continue in A, allora esse sono uguali fra loro.*

Nei casi concreti avremo sempre a che fare con funzioni soddisfacenti le ipotesi del Teorema di Schwarz. In pratica, la verifica dell'uguaglianza delle derivate seconde "miste" è un indizio della esattezza dei calcoli: negli esempi concreti, $f''_{xy} \neq f''_{yx}$ può risultare soltanto da un errore di calcolo.

Definizione. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e $f: A \to \mathbb{R}^2$ una funzione dotata di tutte le derivate parziali prime e seconde nei punti di A.
Si chiama ***gradiente*** di f la coppia di funzioni: $grad\, f = \left(f'_x\, ,\, f'_y\right)$.
Si chiama ***matrice hessiana*** di f la tabella $Hf = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$.

Per esempio, se $f(x,y) = x^3 y + \dfrac{x}{y}$ $(y \neq 0)$ (è la funzione dell'esempio precedente), si ha

$$grad\, f(x,y) = \left(3x^2 y + \frac{1}{y},\, x^3 - \frac{x}{y^2}\right) \quad , \qquad Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 6xy & ; & 3x^2 - \frac{1}{y^2} \\ 3x^2 - \frac{1}{y^2} & ; & \frac{2x}{y^3} \end{bmatrix}$$

Ricerca di estremanti con lo strumento delle derivate parziali.

TEOREMA DI FERMAT. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione dotata di derivate parziali prime in ogni punto di A. Sia $\boldsymbol{a}$ un punto* ***interno*** *ad A; sia inoltre $\boldsymbol{a}$ estremante per f.*
Allora $grad\, f(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$, cioè nel punto $\boldsymbol{a}$ tutte le derivate parziali prime di f valgono zero.

L'enunciato è in sostanza analogo al corrispondente teorema relativo alle funzioni di una variabile.

Nel caso di $n = 2$ l'interpretazione geometrica della condizione $grad\, f(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$ è semplice: le derivate parziali $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ nel punto (a,b) rappresentano le inclinazioni rispetto agli assi x e y del piano tangente alla superficie $z = f(x,y)$ nel punto $(a,b,\, f(a,b))$. Perciò i punti in cui le derivate prime sono nulle sono quelli in cui il piano tangente alla superficie è parallelo al piano xy.

I punti in cui $grad\, f = \mathbf{0}$ si chiamano ***punti critici*** per f. Dunque, gli estremanti interni al dominio di f sono punti critici per f.
È naturale chiedersi se è vero anche il viceversa, ossia se è vero o no che ogni punto critico per f è

estremante per f. La risposta è negativa, com'era del resto già per le funzioni di una variabile.
Per esempio, consideriamo la funzione $f(x,y) = x^2 - y^2 + 5$ (la funzione rappresentata nella figura di pag.1), ma non è estremante per f; infatti in ogni intorno di (0,0) ci sono punti in cui il valore di f è minore di $5 = f(0,0)$ e punti in cui è maggiore: per esempio, i punti $(0,y)$ con $y \neq 0$ e i punti $(x,0)$ con $x \neq 0$, rispettivamente.
Prendendo spunto dall'aspetto di funzioni come quella dell'esempio ora esposto, i punti critici per f che non sono estremanti si chiamano ***punti di sella*** per f.

Utilizzando la *matrice hessiana* è possibile, in certi casi, classificare i punti critici di una funzione f, cioè stabilire se si tratta di punti di minimo relativo, di massimo relativo o di sella. Ci limitiamo ad enunciare la regola nel caso di $n = 2$.
Ricordiamo che si chiama ***determinante*** di una matrice 2×2 $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, il numero:

$$\boxed{\det M = ad - bc}$$

TEOREMA. *Sia* $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^2 *(cioè dotato di derivate parziali prime e seconde continue in* A*). Sia* (a,b) *un punto interno ad* A*, punto critico per* f*. Sia* $H = Hf(a,b)$ *la matrice hessiana di* f *nel punto* (a,b)*. Allora:*

1. $\left(f''_{xx}(a,b) > 0\,;\ \det H > 0\right) \Rightarrow (a,b)$ *punto di minimo relativo per* f*.*

2. $\left(f''_{xx}(a,b) < 0\,;\ \det H > 0\right) \Rightarrow (a,b)$ *punto di massimo relativo per* f*.*

3. $\det H < 0 \Rightarrow (a,b)$ *punto di sella per* f*.*

Resta escluso il caso in cui risulti $\det H = 0$. In questo caso l'esame della matrice hessiana non è in grado di stabilire la natura del punto critico. Per risolvere il problema si deve allora operare direttamente sulla funzione; si vedano a questo proposito gli esempi 3, 4, 5, e 6.

ESEMPI.

1. *Determinare e classificare i punti critici per la funzione* $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + 2xy + y^2 + x^4$

I punti critici si ottengono risolvendo il sistema che uguaglia a zero le due derivate parziali prime di f:

$$\begin{cases} \left(f'_x(x,y) =\right)\ x + 2y + 4x^3 = 0 \\ \left(f'_y(x,y) =\right)\ 2x + 2y = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} -x + 4x^3 = 0 \\ y = -x \end{cases} ; \quad \begin{cases} x\left(4x^2 - 1\right) = 0 \\ y = -x \end{cases}$$

Si ottengono i tre punti critici: $(0,0)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Per stabilire la natura di ciascuno di essi, calcoliamo le derivate parziali seconde e scriviamo la matrice hessiana: $Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 1 + 12x^2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Si ha $Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$; $\det Hf(0,0) = 2 - 4 = -2 < 0$, e quindi (0,0) è un punto di sella per f.

Poi: $Hf\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}$; $\det Hf\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=8-4=4>0$ e $f''_{xx}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=4>0$, e quindi $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ è un punto di minimo relativo per f. Gli stessi risultati si ottengono per il punto $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, il quale è dunque a sua volta punto di minimo relativo per f.

2. *Determinare e classificare i punti critici per la funzione* $f(x,y)=x^3+3x^2y^2-3x$

I punti critici si ottengono risolvendo il sistema che uguaglia a zero le due derivate parziali prime di f:

$$\begin{cases}(f'_x(x,y)=)\ 3x^2+6xy^2-3=0\\ (f'_y(x,y)=)\ 6x^2y=0\end{cases}\quad ;\quad \begin{cases}3x^2+6xy^2-3=0\\ x=0 \vee y=0\end{cases}$$

Se $x=0$ la prima equazione diventa impossibile; allora è $y=0$, e sostituendo nella prima equazione si ricava $x=\pm1$. Ci sono quindi due punti critici: $(-1,0)$ e $(1,0)$.

Per stabilire la natura di ciascuno di essi, calcoliamo le derivate parziali seconde e scriviamo la matrice hessiana: $Hf(x,y)=\begin{bmatrix}6x+6y^2 & 12xy\\ 12xy & 6x^2\end{bmatrix}$. Si ha $Hf(-1,0)=\begin{bmatrix}-6 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}$; $\det Hf(0,0)=-36<0$ e quindi $(-1,0)$ è un punto di sella per f. Poi $Hf(1,0)=\begin{bmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}$; $\det Hf(1,0)=36>0$ e $f''_{xx}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=4>0$; dunque $(1,0)$ è un punto di minimo relativo per f.

3. *Determinare e classificare i punti critici per la funzione* $f(x,y)=x^2+y^4$

I punti critici si ottengono risolvendo il sistema che uguaglia a zero le due derivate parziali prime di f:

$$\begin{cases}(f'_x(x,y)=)\ 2x=0\\ (f'_y(x,y)=)\ 4y^3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$$ perciò vi è un solo punto critico: $(0,0)$

La matrice hessiana di f è $Hf(x,y)=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 12x^2\end{bmatrix}$; $Hf(0,0)=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$; $\det Hf(0,0)=0$, e quindi la matrice hessiana non è in grado di stabilire la natura del punto critico.

Esaminando direttamente l'espressione di $f(x,y)$ si nota però che $f(0,0)=0$, mentre $f(x,y)>0$ per ogni altro (x,y). Dunque $(0,0)$ è punto di minimo (assoluto) per f.

4. *Determinare e classificare i punti critici per la funzione* $f(x,y)=x^2-y^4$

I punti critici si ottengono risolvendo il sistema che uguaglia a zero le due derivate parziali prime di f:

$$\begin{cases}(f'_x(x,y)=)\ 2x=0\\ (f'_y(x,y)=)\ -4y^3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$$ perciò vi è un solo punto critico: $(0,0)$

La matrice hessiana di f è $Hf(x,y)=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -12x^2\end{bmatrix}$; $Hf(0,0)=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$; $\det Hf(0,0)=0$, e quindi, come nell'esempio precedente, la matrice hessiana non è in grado di stabilire la natura del punto critico.

Esaminando direttamente l'espressione di $f(x,y)$ si nota che $f(0,0)=0$, mentre, per esempio, $f(x,0)>0$ per ogni $x\neq0$ e $f(0,y)<0$ per ogni $y\neq0$. Pertanto in ogni intorno di $(0,0)$ ci sono punti in cui $f(x,y)$ assume valori minori di $f(0,0) = 0$ e punti in cui assume valori maggiori; (0,0) è quindi un punto di sella per *f*.

5. *Determinare e classificare i punti critici per la funzione* $f(x,y) = x^3 - 3xy^2 + y^2$

I punti critici si ottengono risolvendo il sistema che uguaglia a zero le due derivate parziali prime di f:

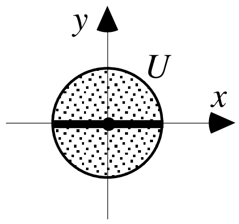
$$\begin{cases} (f'_x(x,y) =)\ 3x^2 - 3y^2 = 0 \\ (f'_y(x,y) =)\ 2y - 6xy = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 3x^2 - 3y^2 = 0 \\ y = 0 \vee x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Si ottengono i tre punti $(0,0)$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ e $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$. Per stabilire la natura di ciascuno di essi, calcoliamo le derivate parziali seconde e scriviamo la matrice hessiana: $Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & -6y \\ -6y & 2-6x \end{bmatrix}$. Si ha

$Hf\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$; $\det Hf\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = -4 < 0$ e quindi $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ è un punto di sella per *f*. Poi

$Hf\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$; $\det Hf\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = -4 < 0$ e $f''_{xx}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 4 > 0$; perciò anche $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ è un punto di sella per *f*.

Infine abbiamo $Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; $\det Hf(1,0) = 0$ e quindi la matrice hessiana non è d'aiuto per stabilire la natura di questo punto critico. Esaminiamo quindi direttamente il comportamento di f vicino a (0,0). È sufficiente osservare che $f(0,0) = 0$, e che per ogni x risulta $f(x,0) = x^3$



L'espressione x^3 assume sempre segno concorde con il segno di x; perciò in ogni intorno U di (0,0) (in particolare, lungo il segmento in cui U interseca l'asse x) ci sono punti in cui f assume valore maggiore di $0 = f(0,0)$ e punti in cui f assume valori minori di $0 = f(0,0)$. Segue che anche il punto (0,0) è punto di sella per *f*.

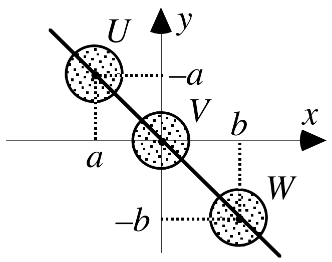
6. *Determinare e classificare i punti critici per la funzione* $f(x,y) = x(x+y)^2$

Calcoliamo i punti critici:

$$\begin{cases} (f'_x(x,y) =)\ (x+y)^2 + 2x(x+y) = 0 \\ (f'_y(x,y) =)\ 2x(x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x + y = 0$$

In questo caso ci sono dunque infiniti punti critici: sono i punti della forma $(x,-x)$, cioè i punti della retta bisettrice del secondo e quarto quadrante. La matrice hessiana è $Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 6x+4y & 4x+2y \\ 4x+2y & 2x \end{bmatrix}$ (invitiamo il lettore a svolgere i semplici calcoli necessari per ottenerla). Nei punti $(x,-x)$ è $Hf(x,-x) = \begin{bmatrix} 2x & 2x \\ 2x & 2x \end{bmatrix}$; $\det Hf(x,-x) = 0$ in tutti questi punti, la cui natura non è quindi determinabile in tal modo.

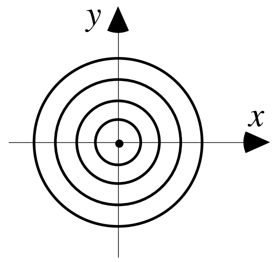
Studiamo dunque direttamente il comportamento di f vicino a ciascuno di questi punti. Si ha $f(x,-x) = 0$; nei punti in cui non è nulla, $f(x,y)$ ha segno concorde con il segno di x, in quanto il fattore $(x+y)^2$ è sempre ≥ 0.



Perciò, se prendiamo un punto $(a,-a)$ con $a<0$, ed un suo intorno U (vedi figura) interamente contenuto nel semipiano delle ascisse negative, avremo in ogni punto di U $f(x,y) \le 0 = f(a,-a)$, e quindi $(a,-a)$ è un punto di <u>massimo relativo</u> per f.
Analogamente, se prendiamo un punto $(b,-b)$ con $b>0$, ed un suo intorno W interamente contenuto nel semipiano delle ascisse positive, avremo in ogni punto di W $f(x,y) \ge 0 = f(b,-b)$ $f(x,y) \ge 0 = f(b,-b)$, e quindi $(b,-b)$ è un punto di <u>minimo relativo</u> per f.
L'origine (0,0) è invece un <u>punto di sella</u> per f, perché è un punto critico, ed in ogni suo intorno V ci sono punti in cui il valore di f è maggiore di $0 = f(0,0)$, e punti in cui è minore.

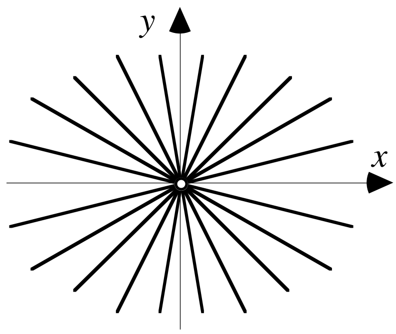
Insiemi di livello di funzioni di più variabili.

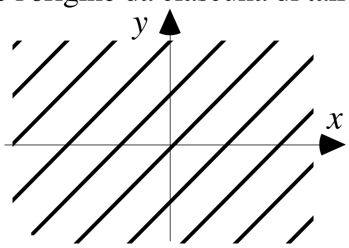
Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}$, si chiama ***insieme di livello*** k per f l'insieme $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n ; f(\boldsymbol{x}) = k\}$. Tale insieme è vuoto se k non appartiene al codominio di f, altrimenti contiene punti, in numero finito o infiniti.



Nel caso di $n = 2$ gli insiemi di livello prendono il nome di ***linee di livello***, perché in generale il loro aspetto è appunto di linee. Per esempio, le linee di livello della funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$ sono non vuote per $k \ge 0$, e sono circonferenze con il centro nell'origine e raggio $\sqrt{k}$: si tratta infatti delle curve di equazioni $x^2 + y^2 = k$.

Le linee di livello della funzione $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ sono invece tutte e sole le rette passanti per l'origine, escluso l'asse x e l'origine da ciascuna di tali rette.





Infine, vediamo come sono fatte le linee di livello della funzione $f(x,y) = x - y$: esse sono tutte e sole le rette parallele alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

Nel caso di funzioni di <u>tre</u> variabili, anziché due, gli insiemi di livello sono chiamati ***superfici di livello***; per esempio, le superfici di livello di $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ sono sfere col centro nell'origine; le superfici di livello di una funzione lineare $f(x,y,z) = ax + by + cz + d$ sono piani, tutti fra loro paralleli.

Ricerca del minimo e del massimo assoluto di una funzione di due variabili in un insieme chiuso e limitato.

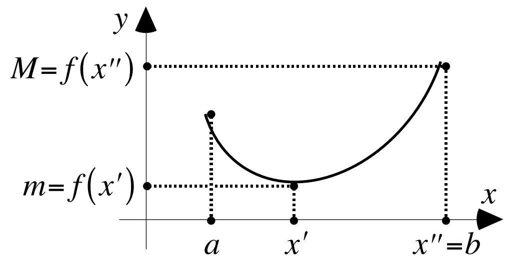
Come abbiamo detto all'inizio di questi appunti, si dice che un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^n$ è *chiuso* se contiene tutti i suoi punti di frontiera. Si dice poi che A è ***limitato***, se esiste una sfera, con centro e raggio opportuni, che contiene A.

Vale anche per le funzioni di più variabili una versione del Teorema di Weierstrass:

TEOREMA DI WEIERSTRASS. *Se* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *è un insieme chiuso e limitato, e* $f: A \to \mathbb{R}$ *è una funzione continua, allora esistono* $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'' \in A$ *tali che: per ogni* $\boldsymbol{x} \in A$ *è* $f(\boldsymbol{x}') \leq f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x}'')$

(cioè esistono il minimo e il massimo assoluto di f sull'insieme A).

Vogliamo qui risolvere, in casi particolarmente semplici, il problema di determinare il minimo e il massimo di una funzione di due variabili, in un insieme chiuso e limitato.
Lavoreremo sempre con funzioni di classe C^1, cioè dotate di derivate parziali continue in tutto il loro dominio.
Per introdurre il problema, ricordiamo come si può procedere per calcolare il minimo e il massimo assoluto di una funzione derivabile <u>di una variabile</u> $f; [a,b] \to \mathbb{R}$.



I punti x' e x'' in cui f assume rispettivamente il valore minimo m e il valore massimo M nell'intervallo $[a,b]$ possono trovarsi in punti interni critici (cioè nei quali $f'(x) = 0$) oppure negli estremi dell'intervallo: nel caso illustrato dalla figura x' è interno all'intervallo, mentre x'' coincide con il secondo estremo b.
Per trovare m e M possiamo quindi procedere così:

• Calcolare la derivata di f; risolvere l'equazione $f'(x) = 0$ e calcolare il valore di f nei punti interni ad $[a,b]$ soddisfacenti l'equazione $f'(x) = 0$.
•• Calcolare $f(a)$ e $f(b)$.
••• Scegliere il più piccolo e il più grande dei valori di f calcolati in (•) e (••): questi sono rispettivamente il minimo e il massimo di f in $[a,b]$.

In teoria, è possibile procedere in modo simile anche per una funzione di due (o più) variabili in un insieme A chiuso e limitato:

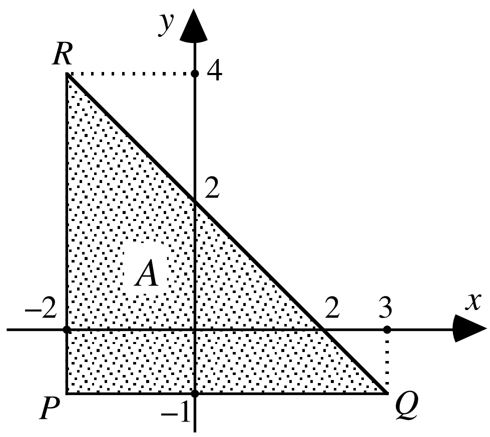
• Calcolare le derivate parziali f'_x, f'_y, risolvere il sistema $\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases}$, e calcolare il valore di $f(x,y)$ nei punti critici interni ad A.
•• Studiare (??) f sulla frontiera di A (questo è il punto che dovremo precisare).
••• Scegliere il più piccolo e il più grande dei valori di f calcolati in (•) e (••): questi sono rispettivamente il minimo e il massimo di f in A.

La differenza sostanziale fra il caso di una variabile e il caso di più variabili sta nel fatto che la frontiera di un intervallo $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ è costituita da due soli punti: a e b, mentre le frontiera di un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^n$ (non vuoto né $= \mathbb{R}^n$) ne contiene infiniti. Pertanto, nel caso delle funzioni di una variabile, il calcolo esplicito di $f(a)$ e $f(b)$ esaurisce lo studio di f sulla frontiera del

dominio; nel caso di più variabili, non è invece possibile calcolare il valore di f in *tutti* i punti di frontiera di A, perché questi sono infiniti. Mostreremo con alcuni esempi come si può procedere per alcune semplici funzioni di due variabili. Presentiamo due diversi metodi: uno, che riconduce lo studio di f sulla frontiera di A allo studio di una funzione di una variabile; l'altro, che utilizza un procedimento di carattere geometrico basato sulle linee di livello di f.
Esistono altri metodi più sofisticati e potenti (in particolare, la *regola dei moltiplicatori di Lagrange*), che in questi appunti non trattiamo.

ESEMPI.

1. *Calcolare il minimo e il massimo assoluto di* $f(x,y) = x^2 + xy - 2y^2 + 9y$ *nell'insieme:* $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x \geq -2,\ y \geq -1,\ x + y \leq 2\}$.



Il dominio A è il triangolo rappresentato nella figura qui a fianco. Cerchiamo gli eventuali punti critici per f interni ad A:

$$\begin{cases} (f'_x(x,y) =)\ 2x + y = 0 \\ (f'_y(x,y) =)\ x - 4y + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Il punto $(-1,2)$ è interno ad A, perché le sue coordinate soddisfano le disuguaglianze $x > -2,\ y > -1,\ x + y < 2$; calcoliamo quindi il valore di f in questo punto: $\boxed{f(-1,2) = 9}$. Non è necessario, invece, "classificare" la natura del punto critico, stabilire cioè se è un punto di massimo relativo, di minimo relativo o di sella.
Ora studiamo f sulla frontiera di A. Questa si compone dei tre segmenti rettilinei PQ, QR, RP (vedi figura); le coordinate dei tre vertici si calcolano intersecando a due a due le rette $x = -2$, $y = -1$, $x + y = 2$; si trova $P = (-2,-1)$, $Q = (3,-1)$, $R = (-2,4)$.
Sul segmento PQ è $y = -1$; quindi nei punti di questo segmento è $f(x,y) = f(x,-1) =$ $= x^2 - x - 2 - 9 = x^2 - x - 11 \equiv g_1(x)$, con x che può variare fra -2 e 3. Abbiamo così da studiare la funzione $g_1(x) = x^2 - x - 11$ nell'intervallo $[-2,3]$. Si ha: $g_1'(x) = 2x - 1$; $g_1'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ e poiché $\frac{1}{2} \in]-2,3[$ calcoliamo $\boxed{g_1\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{45}{4}}$. Poi è $\boxed{g_1(-2) = -5}$ e $\boxed{g_1(3) = -5}$.
Sul segmento PR è $x = -2$; quindi nei punti di questo segmento è $f(x,y) = f(-2,y) = 4 + 7y - 2y^2 \equiv g_2(y)$ con y che può variare fra -1 e 4. Abbiamo così da studiare la funzione $g_2(y) = 4 + 7y - 2y^2$ nell'intervallo $[-1,4]$. Si ha: $g_2'(y) = 7 - 4y$; $g_2'(y) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{4} \in]-1,4[$ quindi calcoliamo $\boxed{g_2\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{81}{8}}$. Per quanto riguarda i valori di g_2 negli estremi di $[-1,4]$, osserviamo che il valore di g_2 con $y = -1$ è uguale a $f(-2,-1)$, e quindi coincide col valore già calcolato di g_1 con $x = -2$;

è quindi superfluo calcolare esplicitamente $g_2(-1) = -5$ se non per riscontro della esattezza dei calcoli.

Infine studiamo f sul segmento QR. Qui è $y = 2 - x$ e quindi nei punti di questo segmento è $f(x,y) = f(x, 2-x) = x^2 + x(2-x) - 2(2-x)^2 + 9(2-x) = 10 + x - 2x^2 \equiv g_3(x)$. Non serve calcolare i valori di g_3 negli estremi dell'intervallo $[-1,4]$, perché essi coincidono con valori già calcolati durante lo studio di f negli altri tratti della frontiera; basta quindi calcolare la derivata di g_3 e trovare i punti in cui si annulla: $g_3'(x) = 1 - 4x$; $g_3'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \in]-1,4[$; $\boxed{g_3\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{81}{8}}$.

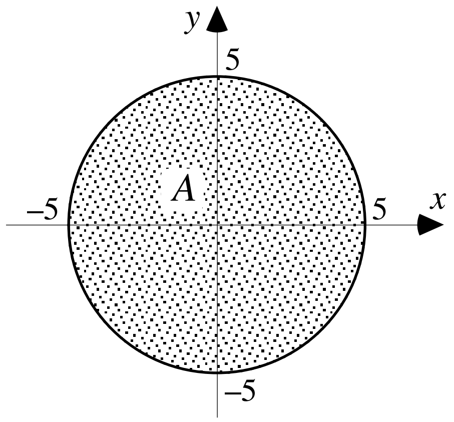
Il minimo e il massimo di f nell'insieme A sono rispettivamente il più piccolo ed il più grande fra i valori di f che sono stati calcolati ed evidenziati nei $\boxed{\text{rettangoli}}$; si osserva che tali valori sono: $-\frac{45}{4}$ e $\frac{81}{8}$. Abbiamo così risolto il problema.

Precisiamo che il procedimento seguito non è in grado di stabilire se gli altri punti ottenuti, diversi dai punti di minimo o massimo assoluto, sono estremanti relativi oppure no.

2. *Calcolare il minimo e il massimo assoluto di* $f(x,y) = x^2 + 6y$ *nell'insieme:*
$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \le 25\right\}$

Eventuali punti critici per f interni ad A si trovano risolvendo il sistema $\begin{cases} (f_x'(x,y) =)\ 2x = 0 \\ (f_y'(x,y) =)\ 6 = 0 \end{cases}$.

Poiché la seconda equazione è impossibile, non c'è alcun punto critico per f. Il minimo ed il massimo valore di f in A sono necessariamente assunti in punti di frontiera.



La frontiera di A è la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 25$. Non conviene ricavare esplicitamente x o y, perché occorrerebbe distinguere due casi: per esempio, ricavando $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$ si dovrebbe sostituire prima $y = \sqrt{25 - x^2}$ e poi $y = -\sqrt{25 - x^2}$ nell'espressione di $f(x,y)$, e in entrambi i casi si darebbe luogo a calcoli abbastanza complicati.

Conviene osservare che nell'espressione di $f(x,y) = x^2 + 6y$ la variabile x figura solamente con esponente 2; dall'equazione della frontiera di A, $x^2 + y^2 = 25$, basta allora ricavare $x^2 = 25 - y^2$. Allora, nei punti della circonferenza, si può scrivere $f(x,y) = 25 - y^2 + 6y \equiv g(y)$, con y che può variare fra -5 e 5. Calcoliamo allora $\boxed{g(-5) = -30}$, $\boxed{g(5) = 30}$ e poi $g'(y) = -2y + 6$; $g'(y) = 0 \Leftrightarrow y = 3$; $\boxed{g(3) = 34}$. Concludiamo che $\min\left\{f(x,y); (x,y) \in A\right\} = -30$, $\max\left\{f(x,y); (x,y) \in A\right\} = 34$.

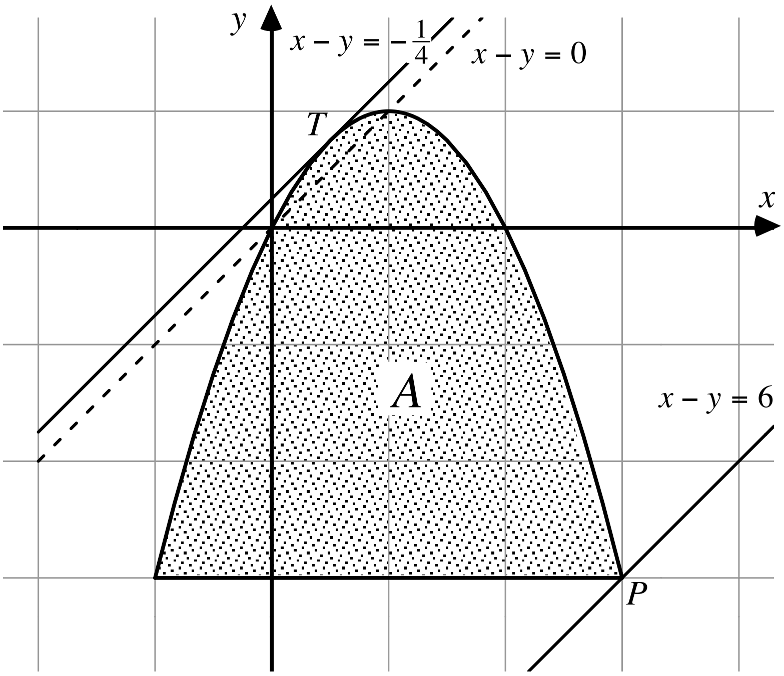
Se interessa anche mettere in evidenza i <u>punti di minimo e massimo assoluto</u>, si nota che il minimo è assunto nei punti di frontiera di A in cui $y = -5$; dall'equazione $x^2 + y^2 = 25$ si ricava che l'unico punto così fatto è $(0,-5)$. I punti di massimo assoluto sono invece i punti di frontiera di A nei quali $y = 3$. Questa volta si ricavano due punti: $(-4,3)$ e $(4,3)$.

Un calcolo analogo si sarebbe potuto svolgere senza difficoltà anche nell'esempio precedente.

3. *Calcolare il minimo e il massimo assoluto di* $f(x,y) = x - y$ *nell'insieme:*
$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; -3 \le y \le 2x - x^2\right\}$

Questa volta il modo più semplice per risolvere il problema è utilizzare le linee di livello di f, che sono rette parallele alla bisettrice del primo e terzo quadrante; in particolare, tale bisettrice è la linea del livello 0 per f, cioè è rappresentata dalla equazione $f(x,y) = 0$ (tratteggiata, nella figura).

Il minimo ed il massimo di f in A sono il più piccolo ed il più grande numero reale k per i quali la linea (retta, in questo caso) di equazione $f(x,y) = k$ ha qualche punto in comune con A.

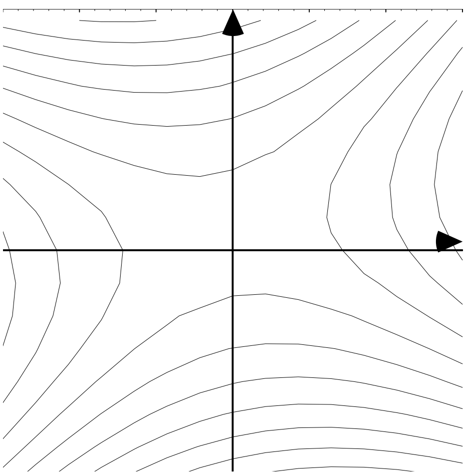


Poiché si nota che le rette in questione si spostano verso il basso al crescere di k, avremo che il <u>massimo</u> di f in A corrisponderà alla retta del fascio più bassa, avente intersezione non vuota con A. È evidente che tale retta è quella che passa per $P = (3,-3)$. La retta $x - y = k$ passa per P se $k = 6$; quindi

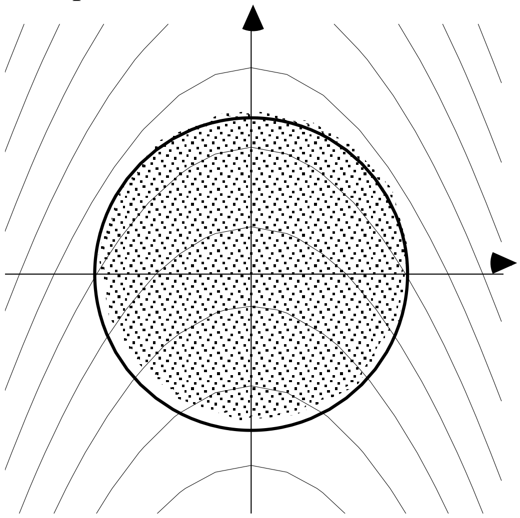
$$\max\left\{f(x,y); (x,y) \in A\right\} = 6.$$

Il <u>minimo</u> di f in A corrisponderà invece alla retta più alta, con intersezione non vuota con A. Questa è la tangente alla parabola in T. Per trovarla, ci sono diversi modi; il più semplice è calcolare per quale x la derivata della funzione $p(x) = 2x - x^2$ (che rappresenta la parabola) è uguale a 1 (1 è il coefficiente angolare delle rette del fascio).
Si ha $p'(x) = 2 - 2x$; $2 - 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$; l'ordinata è $p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$. La retta $x - y = k$ passa per $T = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ se $k = -\frac{1}{4}$. Perciò $\min\left\{f(x,y); (x,y) \in A\right\} = -\frac{1}{4}$.

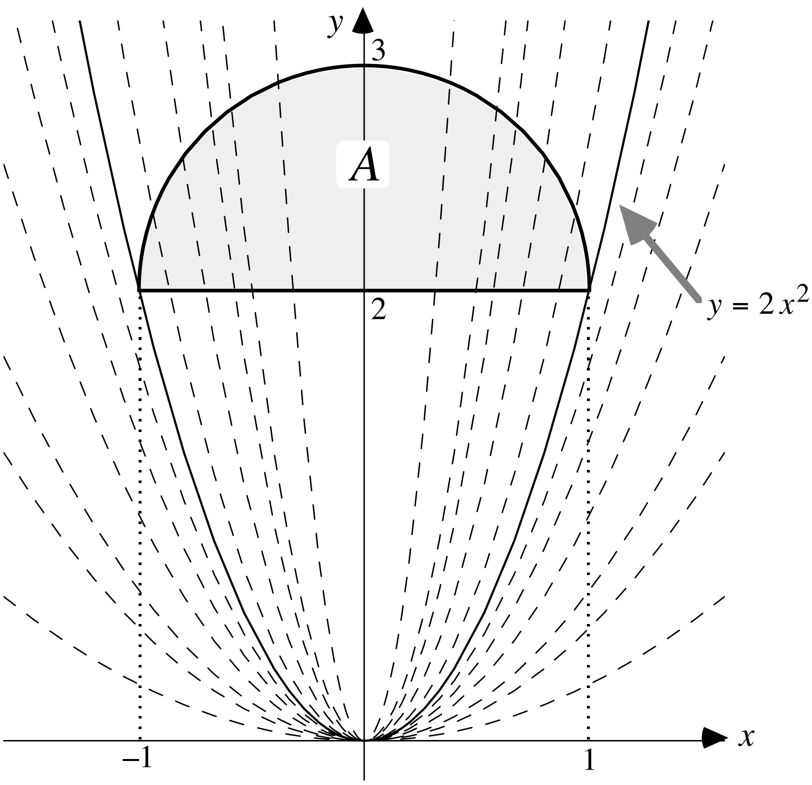
Notiamo che il metodo delle linee di livello rende superfluo il calcolo delle derivate parziali e la ricerca dei punti critici interni. Tale metodo è in generale il più vantaggioso per questo tipo di problemi.
La maggiore limitazione alla sua applicabilità consiste nel fatto che a volte non è facile capire come sono fatte le linee di livello di f; è il caso dell'esempio **1** di questa serie: le linee di livello della funzione $f(x,y) = x^2 + xy - 2y^2 + 9y$ sono in effetti delle iperboli con assi obliqui rispetto agli assi del sistema di riferimento.



La figura a sinistra rappresenta alcune linee di livello per la funzione dell'esempio **1**, con x e y variabili da –30 a 30. Non abbiamo attualmente a disposizione gli strumenti matematici per realizzare tali linee; ma anche sapendo riconoscere la forma delle linee di livello di questa funzione, non sarebbe poi facile utilizzarle algebricamente in relazione al dominio A assegnato nel testo del problema dell'esempio **1**. Per quel problema, il metodo seguito (punti critici interni e successivo studio sulla frontiera) risulta in effetti il più conveniente.



Volendo, si può ricorrere alle curve di livello come metodo alternativo per la risoluzione del problema dell'esempio **2**. Le linee di livello della funzione là considerata $\left(f(x,y) = x^2 + 6y\right)$ sono evidentemente parabole con asse coincidente con l'asse y; la determinazione del massimo e del minimo di f in A si effettua discutendo la posizione di quelle parabole rispetto al dominio assegnato (che è il cerchio col centro nell'origine e raggio 5). La figura a destra rappresenta tale cerchio e alcune delle parabole in questione.



4. *Calcolare il minimo e il massimo assoluto di*

$$f(x,y) = \frac{x^2}{y}$$

nell'insieme:

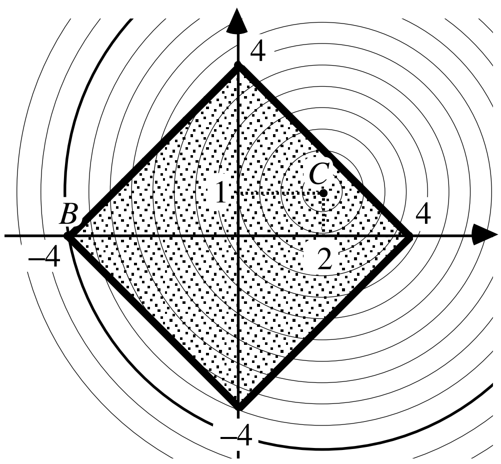
$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x^2 + (y-2)^2 \leq 1 ;\ y \geq 2 \right\}.$$

Il dominio è il semicerchio col centro nel punto (0,2) e raggio 1, situato al di sopra del suo diametro parallelo all'asse x.

La linea di livello 0 di f è l'asse y; le linee di livello $k \neq 0$ sono le parabole di equazione $y = \frac{1}{k}x^2$.

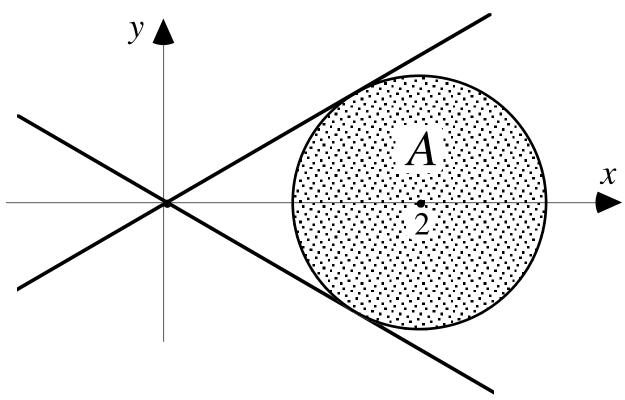
I valori di f sono tutti ≥ 0 in A; poiché f è nulla nei punti dell'asse y, e questo interseca A, si ha $\min\{f(x,y); (x,y)\in A\} = 0$. Per trovare il massimo, osserviamo le linee di livello di f. Le parabole $y = \frac{1}{k}x^2$, con $k > 0$ (alcune di esse sono disegnate a tratteggio nella figura) diventano via via più "larghe" al crescere di k. Il livello massimo raggiunto da f in A sarà perciò il valore k corrispondente alla parabola $y = \frac{1}{k}x^2$ passante per i punti $(1,2)$ e $(-1,2)$. Si calcola facilmente che il valore di k è $\frac{1}{2}$; dunque $\max\{f(x,y); (x,y)\in A\} = \frac{1}{2}$.

5. *Calcolare il minimo e il massimo assoluto di* $f(x,y) = (x-2)^2 + (y-1)^2$ *nell'insieme:*
$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ; |x|+|y| \leq 4\}$



Il dominio è il quadrato con i vertici sugli assi, a distanza 4 dall'origine. Le linee di livello di f sono circonferenze con centro nel punto $C = (2,1)$. Precisamente, la linea di livello $k > 0$ per f ha equazione $(x-2)^2 + (y-1)^2 = k$, ed è quindi la circonferenza col centro in C e raggio $\sqrt{k}$. La linea di livello 0 è ridotta al solo punto C; 0 è il minimo valore che f può assumere in tutto $\mathbb{R}^2$
Poiché $C \in A$, 0 è il minimo di f in A:
$\min\{f(x,y); (x,y)\in A\} = 0$.
Il massimo di f in A è il valore di k più grande per cui la circonferenza $(x-2)^2 + (y-1)^2 = k$ ha qualche punto in comune con A. La più grande circonferenza col centro in C, con intersezione non vuota con A è quella che passa per $B = (-4,0)$. Il suo raggio è la distanza fra C e B, cioè $\sqrt{37}$. Abbiamo già osservato che il raggio è $\sqrt{k}$; risulta $\sqrt{k} = \sqrt{37}$ se $k = 37$; perciò $\max\{f(x,y); (x,y)\in A\} = 37$.

6. *Calcolare il minimo e il massimo assoluto di* $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ *nell'insieme:*
$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ; (x-2)^2 + y^2 \leq 1\}$



Il dominio è il cerchio col centro in $C = (2,0)$ e raggio 1; le linee di livello di f hanno equazione $\dfrac{x-y}{x+y} = k$, cioè $x - y = k(x+y)$: sono quindi le rette passanti per l'origine, diverse dalla retta $x + y = 0$.
I valori che f assume in A sono i valori di k per i quali tali rette sono tangenti o secanti la circonferenza che costituisce la frontiera di A. Dobbiamo quindi discutere in funzione del valore

di k la risolubilità del sistema $\begin{cases} x - y = k(x + y) \\ (x-2)^2 + y^2 \le 1 \end{cases}$. Si può ricavare l'equazione risolvente, di secondo grado in x oppure in y, e discutere il segno del discriminante in funzione di k. Qui però procediamo diversamente: imponiamo che la distanza del centro C della circonferenza dalla retta $x - y = k(x+y)$ sia minore o uguale di 1 (raggio della circonferenza). L'equazione della retta del fascio si scrive $(k-1)x + (k+1)y = 0$.

Ricordiamo che la distanza di un punto (x_0, y_0) da una retta di equazione $ax + by + c = 0$ è $\dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Quindi la distanza di $C = (2,0)$ dalla retta di equazione $(k-1)x + (k+1)y = 0$ è:
$\dfrac{|(k-1)\cdot 2 + (k+1)\cdot 0|}{\sqrt{(k-1)^2 + (k+1)^2}} = \dfrac{2\,|k-1|}{\sqrt{2(k^2+1)}} = \sqrt{2}\,\dfrac{|k-1|}{\sqrt{k^2+1}}$. Questa è ≤ 1 se e solo se $\sqrt{2}\,|k-1| \le \sqrt{k^2+1}$; possiamo elevare al quadrato entrambi i membri, entrambi ≥ 0 ottenendo:

$$2k^2 - 4k + 2 \le k^2 + 1\,;\;\; k^2 - 4k + 1 \le 0 \quad \text{cioè} \quad k \in \left[2-\sqrt{3},\, 2+\sqrt{3}\right].$$

Perciò $\min\{f(x,y);\,(x,y)\in A\} = 2 - \sqrt{3}$, $\max\{f(x,y);\,(x,y)\in A\} = 2 + \sqrt{3}$.

Osserviamo che nella risoluzione di problemi di questo tipo non importa soltanto *come sono fatte* l linee di livello, ma anche *come vengono rappresentate*. Per esempio, in questo problema non sarebbe stato opportuno rappresentare le linee di livello (rette passanti per l'origine) nella forma $y = mx$. Avremmo trovato che tali rette sono non esterne al cerchio A se $m \in \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$, ma questo non avrebbe ancora fornito i valori minimo e massimo di f in A, perché il coefficiente angolare di ciascuna retta passante per l'origine <u>non è</u> il livello di f su tale retta: come abbiamo visto, la linea di livello k di f è la retta di equazione $(k-1)x + (k+1)y = 0$, che ha coefficiente angolare $\dfrac{1-k}{1+k}$, e non k. Sarebbero serviti ulteriori calcoli per dedurre i valori-limite di k da quelli di m; il procedimento più conveniente è certamente quello che abbiamo esposto.