Corso di Analisi Matematica T-1
Docenti proff. G. Chinni e G. Dore
Corso di Laurea in Ingegneria dell'Automazione
Anno Accademico 2022/2023

Esercizi

---

(1) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$2z^2 + \big(2\sqrt{3} + 6\,i\big)z + 1 - \sqrt{3}\,i = 0\,.$$

---

(2) Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$\left(\frac{(-1+i)z - 1 - i}{z^2 + 2i\,z - 1}\right)^2 = (1+i)^6\,.$$

---

(3) Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$\left(\frac{1}{z^2} - 4i\sqrt{3}\right)^3 = \big(1 - i3\sqrt{3}\big)^3\,.$$

---

(4) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$e^{1/z} = -2 - i\,.$$

---

(5) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$\left(e^z + i\,\frac{1}{2}\right)^3 = i\,.$$

---

(6) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$e^{iz} - 2ie^{-iz} = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}\,.$$

---

(7) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$(z+4)^6 = (z-4)^6\,.$$

(8) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$e^{(1+i)z} = 1 + i\,.$$

---

(9) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$(z^3 + 3\sqrt{3} + i)^2 = 2 - 2\sqrt{3}\,i\,.$$

---

(10) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$(z^2 + 1 + 2i)^2 = -18i\,.$$

---

(11) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$(e^z + 4 - 4i)^2 = (ie^z + 1)^2\,.$$

---

(12) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$(1+i)z^6 + (4+8i)z^3 + 3 + 15i = 0\,.$$

---

(13) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$e^{2z} + 2ie^z + 7 + 8\sqrt{3}\,i = 0\,.$$

---

(14) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$\left(\frac{z^2 + 2\sqrt{3} - i\sqrt{3}}{z^2}\right)^3 = -8\,.$$

---

(15) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$e^z + (2-3i) - (1+3i)e^{-z} = 0\,.$$

---

(16) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$\left(e^z + 1 - 2\sqrt{3}\,i\right)^3 = -8\,.$$

(17) Studiare la convergenza e la assoluta convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n+1} n!}{(2n+1)!}\,.$$

---

(18) Studiare la convergenza e la assoluta convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+2n}-\sqrt[3]{n^2+2}}{\sqrt[3]{n^2+n}+\sqrt[3]{n^2+1}}\,.$$

---

(19) Studiare la convergenza e la assoluta convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\arctan\left(\frac{3}{n}\right)\right)^{2/n}\,.$$

---

(20) Studiare la convergenza della seguente serie al variare di $a \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \log(1+n^a)\,.$$

---

(21) Studiare la convergenza della seguente serie al variare di $a \in \mathbb{R}_+^*$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4+n^a}{n^8+n^a}\,.$$

---

(22) Studiare la convergenza della seguente serie al variare di $a \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n\big(\sqrt{n}+2\big)}\,(a^2-4a+2)^n\,.$$

---

(23) Studiare la convergenza e la assoluta convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!\,(n+1)!}{(2n)!}\,.$$

---

(24) Studiare la convergenza e la assoluta convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\big((n+1)!\big)^2 3^n}{(2n)!}$$

(25) Studiare la convergenza e la assoluta convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+2)^{n+2}}{(2n)^n}\,.$$

---

(26) Studiare la convergenza e la assoluta convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(\frac{n^2-n+2}{n^2-n+1}\right).$$

---

(27) Studiare la convergenza e la assoluta convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sqrt{3\left(1-\cos\left(\frac{2}{n}\right)\right)}\,.$$

---

(28) Studiare la convergenza della seguente serie al variare di $a \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 4^n \arctan\left(\frac{3}{n}\right)\left(\frac{1}{4}-a^2\right)^n,$$

---

(29) Studiare la convergenza della seguente serie al variare di $a \in \mathbb{R}_+^*$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + a^n}{5^n + (4/a)^n}\,.$$

---

(30) Studiare la convergenza della seguente serie al variare di $a \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(a^2-7a+6)^n}{n6^{n+2}}\,.$$

---

(31) Studiare la convergenza della seguente serie al variare di $a \in \mathbb{R}_+^*$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n + 3^n}{a^n + a^{-n}}\,.$$

---

(32) Studiare la convergenza della seguente serie al variare di $a \in \mathbb{R}_+^*$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\log(n^a + n^{2/a}) - \log(n^a+1)\right).$$

(33) Sapendo che

$$\sin y = y - \frac{1}{6}\,y^3 + o(y^4)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$
$$\cos y = 1 - \frac{1}{2}\,y^2 + \frac{1}{24}\,y^4 + o(y^5)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$

calcolare

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{(\cos x - 1)(4 + x^2)} + \frac{1}{2x\,\sin x + x^4}\right)\,.$$

---

(34) Sapendo che

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}\,y - \frac{1}{8}\,y^2 + o(y^2)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$

calcolare

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(\dfrac{x^3+4}{x^3+2}\right)\log\left(\dfrac{4x^3+1}{2x^3+1}\right)}{\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2+2} - \dfrac{1}{2x}}\,.$$

---

(35) Sapendo che

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}\,y - \frac{1}{8}\,y^2 + o(y^2)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$
$$\log(1+y) = y - \frac{1}{2}\,y^2 + o(y^2)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$

calcolare

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{e^2x^2 - 2x^4 + 2x^6} - ex\log\left(e - \dfrac{x^2}{e}\right)}{x\log(1+3x^4)}\,.$$

---

(36) Sapendo che

$$\cos y = 1 - \frac{1}{2}\,y^2 + \frac{1}{24}\,y^4 + o(y^5)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$
$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}\,y^2 + o(y^2)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$

calcolare

$$\lim_{x\to 0}\frac{\exp(2\cos x - x^2) - e^2 + 2e^2x^2}{\cos(2x) - \exp(-2x^2)}\,.$$

(37) Sapendo che

$$\sqrt[3]{1+y} = 1 + \frac{1}{3}\,y - \frac{1}{9}\,y^2 + o(y^2)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$
$$\log(1+y) = y - \frac{1}{2}\,y^2 + o(y^2)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$

calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+9x^2} - x - 3}{\log\bigl(3\cosh(5x)\bigr)\left(\log\left(\dfrac{3+x}{x}\right) - \dfrac{3}{x+5}\right)}\,.$$

---

(38) Sapendo che

$$\sqrt[2]{1+y} = 1 + \frac{1}{2}\,y + o(y)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$
$$\sqrt[3]{1+y} = 1 + \frac{1}{3}\,y + o(y)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$
$$\cos y = 1 - \frac{1}{2}\,y^2 + o(y^3)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$

calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sinh(4x)\Bigl(\log\bigl(\sinh(2x)\bigr) + \log 2 - 2x\Bigr)\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2} - \sqrt[2]{x^2+3x}\right)}{\arctan(2x)\log\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)\left(\sqrt{x^4+x^2} - \sqrt{x^2+4}\right)}\,.$$

---

(39) Sapendo che

$$\sin y = y - \frac{1}{6}\,y^3 + o(y^4)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$
$$\sinh y = y + \frac{1}{6}\,y^3 + o(y^4)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$
$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}\,y^2 + \frac{1}{6}\,y^3 + o(y^3)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$

calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(e^{2x}-1) - \sin(e^{2x}-1)}{\cos(6x)\log(1+2x)\bigl(\sqrt{1-x^2}-1\bigr)}\,.$$

(40) Sapendo che

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}\,y - \frac{1}{8}\,y^2 + o(y^2)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$
$$\sqrt[3]{1+y} = 1 + \frac{1}{3}\,y - \frac{1}{9}\,y^2 + o(y^2)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$
$$\cos y = 1 - \frac{1}{2}\,y^2 + o(y^3)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$

calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2+2x^3} - \sqrt[3]{x^3+3x^4}}{\sqrt{x^2-4x^4} - \cos(3x^2)}\,.$$

---

(41) Sapendo che

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}\,y - \frac{1}{8}\,y^2 + o(y^2)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$
$$\sqrt[3]{1+y} = 1 + \frac{1}{3}\,y - \frac{1}{9}\,y^2 + o(y^2)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$

calcolare

$$\lim_{x\to +\infty} x\big(\sqrt{x^6+4x^4} - \sqrt[3]{x^9+6x^7}\,\big)\,.$$

---

(42) Sapendo che

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}\,y - \frac{1}{8}\,y^2 + o(y^2)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$

calcolare

$$\lim_{x\to +\infty} x\log\big(e^{x^2} + e^{3x}\big)\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{\sqrt{x^2+4x}}\right)\,.$$

---

(43) Sapendo che

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}\,y - \frac{1}{8}\,y^2 + o(y^2)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$
$$\sin y = y - \frac{1}{6}\,y^3 + o(y^4)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$

calcolare

$$\lim_{x\to +\infty} \big(\sqrt{x^6+4x^5+6x^4} - x^3 - 2x^2\big)\left(\sin\big(\frac{x+4}{x^4+1}\big) - \frac{1}{x^3}\right)\exp\big(6 + 3\log x\big)\,.$$

(44) Sapendo che

$$e^y = 1 + y + + \frac{1}{2}\, y^2 + o(y^2)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$

$$\cosh y = 1 + \frac{1}{2}\, y^2 + \frac{1}{24}\, y^4 + o(y^5)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}\, y - \frac{1}{8}\, y^2 + o(y^2)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$

calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp\bigl(\sqrt{1+4x^2}\bigr) - e\cosh(2x)}{\bigl(\sqrt{x^4+2x^5-2x^6} - x^2 - x^3\bigr)\bigl(\cosh(e^x) - \cosh x\bigr)}\,.$$

---

(45) Sapendo che

$$e^y = 1 + y + o(y)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$

$$\log(1+y) = y - \frac{1}{2}\, y^2 + o(y^2)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$

calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\log\Bigl(\frac{x+1}{x+2}\Bigr) + \frac{1}{x}\right)\left(\exp\Bigl(\frac{x+1}{x+2}\Bigr) - \exp\Bigl(\frac{x}{x+2}\Bigr)\right)\log\bigl(1 + xe^{x^3}\bigr)\,.$$

---

(46) Sapendo che

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}\, y^2 + o(y^2)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$

$$\cos y = 1 - \frac{1}{2}\, y^2 + \frac{1}{24}\, y^4 + o(y^5)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}\, y - \frac{1}{8}\, y^2 + o(y^2)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$

calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\bigl(\exp\bigl(2\cos(2x)\bigr) - e^2\bigr)\bigl(1 + \sqrt{x^2+4x^3} - e^x\bigr)}{\bigl(\sqrt{\cos(2x)} - 1 + x^2\bigr)\bigl(\sqrt{1+\cos(2x)} - 1 + x^2\bigr)}\,.$$

(47) Sapendo che

$$\begin{aligned}
\sin y &= y - \frac{1}{6}\,y^3 + o(y^4)\,, && \text{per } y \to 0\,,\\
\cos y &= 1 - \frac{1}{2}\,y^2 + \frac{1}{24}\,y^4 + o(y^5)\,, && \text{per } y \to 0\,,\\
\sqrt{1+y} &= 1 + \frac{1}{2}\,y - \frac{1}{8}\,y^2 + o(y^2)\,, && \text{per } y \to 0\,,\\
(1+y)^{-1/2} &= 1 - \frac{1}{2}\,y + \frac{3}{8}\,y^2 + o(y^2)\,, && \text{per } y \to 0\,,
\end{aligned}$$

calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+x^{16}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+6}} - \frac{\sqrt{x^2-6}}{x}\right)\left(\cos\left(\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)\right) - \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)\right).$$

---

(48) Sapendo che

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+y} &= 1 + \frac{1}{2}\,y - \frac{1}{8}\,y^2 + o(y^2)\,, && \text{per } y \to 0\,,\\
\sin y &= y - \frac{1}{6}\,y^3 + o(y^4)\,, && \text{per } y \to 0\,,\\
e^y &= 1 + y + \frac{1}{2}\,y^2 + o(y^3)\,, && \text{per } y \to 0\,,
\end{aligned}$$

calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-x^2}\sin x - x}{e^{-3x}\sin\big(\sqrt{x^2+6x^3}\,\big) - x}\,.$$

---

(49) Studiare, nel suo dominio naturale, la funzione definita da:

$$f(x) = |2x^3 - 9x| + 9x$$

(si richiede lo studio della convessità).

---

(50) Studiare, nel suo dominio naturale, la funzione definita da:

$$f(x) = \arcsin|x^2 + 4x + 3|$$

(si richiede lo studio della convessità).

---

(51) Studiare, nel suo dominio naturale, la funzione definita da:

$$f(x) = \sqrt{|x+5| - 1}\; e^{1/x}\,.$$

(52) Studiare, nel suo dominio naturale, la funzione definita da:

$$f(x) = \sqrt{|x^2 - 2x|} - x$$

(si richiede lo studio della convessità).

---

(53) Studiare, nell'intersezione del suo dominio naturale con l'intervallo $[-\pi, \pi]$, la funzione definita da:

$$f(x) = \sqrt{|\sin x|}\ \exp\left(\frac{1}{4\sin x}\right).$$

---

(54) Studiare, nell'intersezione del suo dominio naturale con l'intervallo $[-\pi, \pi]$, la funzione definita da:

$$f(x) = \frac{2\cos^2 x - 1}{-2\tan x + \sin(2x)}$$

(si richiede lo studio della convessità).

---

(55) Studiare, nel suo dominio naturale, la funzione definita da:

$$f(x) = \frac{x^3 + 9x^2}{x^2 - 1}.$$

---

(56) Studiare, nel suo dominio naturale, la funzione definita da:

$$f(x) = |x + 1|\sqrt{x + 2}.$$

---

(57) Studiare, nel suo dominio naturale, la funzione definita da:

$$f(x) = \log\left(1 - \frac{4}{x^3 - x^2}\right).$$

---

(58) Studiare, nel suo dominio naturale, la funzione definita da:

$$f(x) = \cos\left(\arcsin\left(\frac{3x^2 - x - 2}{5x - 2}\right)\right).$$

---

(59) Studiare, nel suo dominio naturale, la funzione definita da:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}\,(x^2 - 4).$$

(60) Studiare, nel suo dominio naturale, la funzione definita da:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x}{x^2 - 3}\,,$$

(si richiede lo studio della convessità).

---

(61) Studiare, nel suo dominio naturale, la funzione definita da:

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x^2 - 1|}}{x - 2}\,.$$

---

(62) Studiare, nell'intersezione del suo dominio naturale con l'intervallo $[-\pi, \pi]$, la funzione definita da:

$$f(x) = \sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{2}} + \sin x |\sin x|\,.$$

---

(63) Studiare, nell'intersezione del suo dominio naturale con l'intervallo $[-\pi, \pi]$, la funzione definita da:

$$f(x) = \frac{(2\sin x - 1)^2}{\sin x}\,.$$

---

(64) Studiare, nell'intersezione del suo dominio naturale con l'intervallo $[-\pi, \pi]$, la funzione definita da:

$$f(x) = \sqrt{2\sin^2 x + \sin x} + \frac{1}{\sqrt{2\sin^2 x + \sin x}}\,.$$

---

(65) Calcolare

$$\int_1^4 \frac{x+3}{x(4x+3)}\,dx\,.$$

---

(66) Calcolare

$$\int_1^2 \frac{\log x}{3x(\log^2 x + 4)}\,dx\,.$$

---

(67) Calcolare

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos x}{\cos x + 2}\,dx\,.$$

(68) Calcolare

$$\int_0^{\pi/6} 2x\,\frac{-2\sin x+5\cos x}{(5\sin x+2\cos x)^3}\,dx\,.$$

---

(69) Calcolare

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{-x^2+4}}{x}\,dx\,.$$

---

(70) Calcolare

$$\int_{1/2}^1 \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{3x-1}}\,dx\,.$$

---

(71) Calcolare

$$\int_1^2 (x+1)\,\frac{e^x-3\,e^{-x}}{(e^x+4+3\,e^{-x})^2}\,dx\,.$$

---

(72) Calcolare

$$\int_2^5 \frac{x+3}{x^2+9}\,dx\,.$$

---

(73) Calcolare

$$\int_0^{1/2} (6x^2+2)\,\arcsin x\,dx\,.$$

---

(74) Calcolare

$$\int_0^1 \frac{x\sqrt{1+8x^2}}{1+4x^2}\,dx\,.$$

---

(75) Calcolare

$$\int_0^1 \frac{\cosh x+4\sinh x}{\cosh x-\sinh x}\,dx\,.$$

---

(76) Calcolare

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+2x^2+2}}\,dx\,.$$

---

(77) Calcolare

$$\int_0^1 \frac{\cosh x+4\sinh x}{\cosh x-\sinh x}\,dx\,.$$

(78) Calcolare

$$\int_{\sqrt{2}}^{2} \arctan\big(\sqrt{x^2-1}\,\big)\,dx\,.$$

(79) Calcolare

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x + \sin x\ \cos x}{-2\cos x + \cos x\ \sin^2 x}\,dx\,.$$

(80) Calcolare

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x - 2\cos x}{2\sin x + \cos x}\,dx\,.$$

Soluzioni

(1) L'equazione è di secondo grado, per risolverla occorre innanzitutto calcolare le radici quadrate del discriminante (che indichiamo con Δ), o meglio, visto che nel coefficiente del termine di primo grado si può facilmente raccogliere il fattore 2, le radici quadrate di $\Delta/4$.

Abbiamo

$$\frac{\Delta}{4} = \left(\sqrt{3} + 3\,i\right)^2 - 2\left(1 - \sqrt{3}\,i\right) = 3 + 6\sqrt{3}\,i - 9 - 2 + 2\sqrt{3}\,i = -8 + 8\sqrt{3}\,i\,.$$

Per calcolare le radici quadrate di $\Delta/4$ dobbiamo trovarne il modulo e un argomento.

$$\left|\frac{\Delta}{4}\right| = \sqrt{(-8)^2 + \left(8\sqrt{3}\right)^2} = 8\sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 16\,.$$

Visto che $\Delta/4$ ha parte reale negativa, un argomento è

$$\pi + \arctan\frac{Im\,(\Delta/4)}{Re\,(\Delta/4)} = \pi + \arctan\frac{8\sqrt{3}}{-8} = \pi - \arctan\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\,\pi\,.$$

Perciò le radici quadrate di $\Delta/4$ sono:

$$\pm\sqrt{16}\left(\cos\frac{2\pi/3}{2} + i\sin\frac{2\pi/3}{2}\right) = \pm 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \pm\left(2 + 2\sqrt{3}\,i\right).$$

Le soluzioni dell'equazione sono quindi

$$\frac{-\sqrt{3} - 3\,i \pm \left(2 + 2\sqrt{3}\,i\right)}{2} = \begin{cases} \dfrac{-\sqrt{3} - 3\,i - 2 - 2\sqrt{3}\,i}{2} = -\dfrac{2+\sqrt{3}}{2} - \dfrac{2\sqrt{3}+3}{2}\,i\,, \\[2ex] \dfrac{-\sqrt{3} - 3\,i + 2 + 2\sqrt{3}\,i}{2} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2} + \dfrac{2\sqrt{3}-3}{2}\,i\,. \end{cases}$$

(2) Per risolvere l'equazione è utile evitare di sviluppare il quadrato a primo membro. Questo può essere fatto osservando che la sesta potenza è il quadrato di un cubo, quindi l'equazione si può riscrivere come uguaglianza tra potenze con esponenti uguali. Otteniamo l'equazione

$$\left(\frac{(-1+i)z - 1 - i}{z^2 + 2i\,z - 1}\right)^2 = \left((1+i)^3\right)^2.$$

Poiché

$$(1+i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i\,,$$

l'equazione equivale a

$$\left(\frac{(-1+i)z - 1 - i}{z^2 + 2i\,z - 1}\right)^2 = (-2+2i)^2\,.$$

Il numero complesso z è soluzione di questa equazione se e solo se è soluzione di una delle seguenti equazioni

$$\frac{(-1+i)z-1-i}{z^2+2i\,z-1}=-2+2i\,,$$
$$\frac{(-1+i)z-1-i}{z^2+2i\,z-1}=2-2i\,.$$

La prima equazione equivale, successivamente, a

$$\frac{(-1+i)z-1-i-(z^2+2i\,z-1)(-2+2i)}{z^2+2i\,z-1}=0\,,$$
$$\frac{(-1+i)z-1-i+(2-2i)z^2+(4i+4)z-2+2i}{z^2+2i\,z-1}=0\,,$$
$$\frac{(2-2i)z^2+(3+5i)z-3+i}{z^2+2i\,z-1}=0\,.$$

Il denominatore è il quadrato di $z+i$, perciò si annulla se e solo se $z=-i$. Quindi z è soluzione se e solo se annulla il numeratore ed è diverso da $-i$. Risolviamo l'equazione

$$(2-2i)z^2+(3+5i)z-3+i=0\,.$$

Il discriminante del polinomio di secondo grado di cui cerchiamo gli zeri è

$$\Delta=(3+5i)^2-4(2-2i)(-3+i)=9+30i-25+24-8i-24i-8=-2i\,.$$

Poiché $-2i$ ha modulo 2 e un suo argomento è $(3/2)\pi$, le sue radici quadrate sono

$$\pm\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right)=\pm\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\pm(-1+i)\,.$$

Pertanto si ha

$$z=\frac{-(3+5i)\pm(-1+i)}{2(2-2i)}\,,$$

perciò vi sono le due soluzioni

$$\frac{-4-4i}{4-4i}=\frac{-2-2i}{2-2i}=\frac{(-2-2i)(2+2i)}{|2-2i|^2}=\frac{-4-4i-4i+4}{2^2+(-2)^2}=\frac{-8i}{8}=-i\,,$$
$$\frac{-2-6i}{4-4i}=\frac{-1-3i}{2-2i}=\frac{(-1-3i)(2+2i)}{|2-2i|^2}=\frac{-2-2i-6i+6}{2^2+(-2)^2}=\frac{4-8i}{8}=\frac{1}{2}-i\,.$$

La soluzione $z=-i$ va scartata perché, come visto sopra, annulla il denominatore.

In modo analogo si procede per risolvere la seconda equazione, cioè

$$\frac{(-1+i)z-1-i}{z^2+2i\,z-1}=2-2i\,,$$

che è equivalente a

$$\frac{(-1+i)z-1-i-(z^2+2i\,z-1)(2-2i)}{z^2+2i\,z-1}=0\,,$$
$$\frac{(-1+i)z-1-i-(2-2i)z^2-(4i+4)z+2-2i}{z^2+2i\,z-1}=0\,,$$
$$\frac{(-2+2i)z^2-(5+3i)z+1-3i}{z^2+2i\,z-1}=0\,.$$

Risolviamo l'equazione

$$(-2+2i)z^2-(5+3i)z+1-3i=0\,.$$

Il discriminante del trinomio è

$$\Delta=(5+3i)^2-4(-2+2i)(1-3i)=25+30i-9+8-24i-8i-24=-2i\,;$$

sappiamo che le radici quadrate di $-2i$ sono $\pm(-1+i)$ e quindi l'equazione ha le soluzioni

$$\frac{5+3i\pm(-1+i)}{2(-2+2i)}\,,$$

cioè

$$\frac{4+4i}{-4+4i}=\frac{2+2i}{-2+2i}=\frac{(2+2i)(-2-2i)}{|-2+2i|^2}=\frac{-4-4i-4i+4}{2^2+(-2)^2}=\frac{-8i}{8}=-i\,,$$
$$\frac{6+2i}{-4+4i}=\frac{3+i}{-2+2i}=\frac{(3+i)(-2-2i)}{|-2+2i|^2}=\frac{-6-6i-2i+2}{(-2)^2+2^2}=-\,\frac{4+8i}{8}=-\,\frac{1}{2}-i\,.$$

La prima è da scartare, mentre la seconda è accettabile.

Quindi l'equazione ha le due soluzioni

$$z=\frac{1}{2}-i\,,\qquad\qquad z=-\,\frac{1}{2}-i\,.$$

(3) Se due numeri complessi elevati al cubo sono uguali allora ognuno di essi è uguali all'altro moltiplicato per una delle radici cubiche di 1. Le radici cubiche di 1 sono

$$r_k=\cos\left(\frac{2k}{3}\,\pi\right)+i\sin\left(\frac{2k}{3}\,\pi\right),$$

per $k=0,1,2$ e quindi

$$r_0=\cos 0+i\sin 0=1\,,$$
$$r_1=\cos\left(\frac{2}{3}\,\pi\right)+i\sin\left(\frac{2}{3}\,\pi\right)=-\,\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,,$$
$$r_2=\cos\left(\frac{4}{3}\,\pi\right)+i\sin\left(\frac{4}{3}\,\pi\right)=-\,\frac{1}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Perciò le soluzioni dell'equazione si ottengono risolvendo le tre equazioni

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{z^2} - i4\sqrt{3} = 1 - i3\sqrt{3}\,,\\
&\frac{1}{z^2} - i4\sqrt{3} = \Big(-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\big(1 - i3\sqrt{3}\,\big)\,,\\
&\frac{1}{z^2} - i4\sqrt{3} = \Big(-\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\Big(1 - i3\sqrt{3}\Big)\,.
\end{aligned}$$

Dalla prima equazione si ottiene

$$\frac{1}{z^2} = i4\sqrt{3} + 1 - i3\sqrt{3} = 1 + i\sqrt{3}\,,$$

da cui $z^2 = 1/\big(1 + i\sqrt{3}\big)$. Determiniamo le radici quadrate di $1/\big(1 + i\sqrt{3}\big)$. Si ha

$$\left|\frac{1}{1 + i\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1^2 + \big(\sqrt{3}\,\big)^2}} = \frac{1}{2}$$

e un argomento di $1/\big(1+i\sqrt{3}\big)$ è l'opposto di un argomento di $1+i\sqrt{3}$, cioè l'opposto di $\arctan\sqrt{3}$ e quindi è $-\pi/3$. Perciò si ha

$$z = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}\Big(\cos\Big(-\frac{\pi}{6}\Big) + i\sin\Big(-\frac{\pi}{6}\Big)\Big) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}\,\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1}{2}\Big) = \pm\Big(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - i\,\frac{1}{2\sqrt{2}}\Big)\,.$$

Dalla seconda equazione si ottiene

$$\frac{1}{z^2} = i4\sqrt{3} + \Big(-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\big(1 - i3\sqrt{3}\big) = i4\sqrt{3} - \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{2} = 4 + i6\sqrt{3}\,,$$

da cui $z^2 = 1/\big(4 + i6\sqrt{3}\big)$. Determiniamo le radici quadrate di $1/\big(4 + i6\sqrt{3}\big)$. Si ha

$$\left|\frac{1}{4 + i6\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{4^2 + \big(6\sqrt{3}\big)^2}} = \frac{1}{\sqrt{124}}$$

e un argomento di $1/\big(4 + i6\sqrt{3}\big)$ è l'opposto di un argomento di $4 + i6\sqrt{3}$, cioè l'opposto di $\arctan\big(6\sqrt{3}/4\big)$, quindi $-\arctan\big(3\sqrt{3}/2\big)$; perciò si ha

$$z = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{124}}\Big(\cos\Big(\frac{1}{2}\,\arctan\frac{3\sqrt{3}}{2}\Big) - i\sin\Big(\frac{1}{2}\,\arctan\frac{3\sqrt{3}}{2}\Big)\Big)\,.$$

Infine dalla terza equazione si ottiene

$$\frac{1}{z^2} = i4\sqrt{3} + \Big(-\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\big(1 - i3\sqrt{3}\big) = i4\sqrt{3} - \frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{9}{2} = -5 + i5\sqrt{3}\,,$$

da cui $z^2 = 1/\big(-5 + i5\sqrt{3}\,\big)$. Determiniamo le radici quadrate di $1/\big(-5 + i5\sqrt{3}\,\big)$. Si ha

$$\left|\frac{1}{-5 + i5\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{(-5)^2 + \big(5\sqrt{3}\,\big)^2}} = \frac{1}{10}$$

mentre un argomento di $1/\big(-5+i5\sqrt{3}\,\big)$ è l'opposto di un argomento di $-5+i5\sqrt{3}$, cioè l'opposto di $\arctan\big(-5\sqrt{3}/5\big) - \pi$, quindi $(4/3)\pi$; perciò si ha

$$\begin{aligned} z &= \pm\sqrt{\frac{1}{10}}\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right) = \pm\sqrt{\frac{1}{10}}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \\ &= \pm\left(-\frac{1}{2\sqrt{10}} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{10}}\right). \end{aligned}$$

Perciò l'equazione ha le sei soluzioni

$$\begin{aligned} z &= \pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - i\,\frac{1}{2\sqrt{2}}\right), \\ z &= \pm\left(\frac{1}{\sqrt[4]{124}}\cos\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) - i\,\frac{1}{\sqrt[4]{124}}\sin\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\right), \\ z &= \pm\left(\frac{1}{2\sqrt{10}} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{10}}\right). \end{aligned}$$

(4) Per le proprietà dell'esponenziale complesso, se $e^{1/z} = -2 - i$, allora $1/z$ ha parte reale uguale a $\log|-2 - i|$ e coefficiente dell'immaginario uguale a uno degli argomenti di $-2-i$. Si ha $|-2 - i| = \sqrt{5}$ e un argomento di $-2-i$ è $\arctan 2+\pi$, quindi gli argomenti di tale numero sono i numeri reali della forma $\arctan 2+(2k+1)\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Perciò

$$\frac{1}{z} = \log\sqrt{5} + \big(\arctan 2 + (2k + 1)\pi\big)i\,,$$

quindi si hanno le soluzioni

$$z = \frac{1}{\log\sqrt{5} + \big(\arctan 2 + (2k + 1)\pi\big)i} = \frac{\log\sqrt{5} - \big(\arctan 2 + (2k + 1)\pi\big)i}{\big(\log\sqrt{5}\,\big)^2 + \big(\arctan 2 + (2k + 1)\pi\big)^2}\,,$$

qualunque sia $k \in \mathbb{Z}$.

(5) Se z è soluzione dell'equazione, allora $e^z + (i/2)$ è una delle radici cubiche di i. Poiché i ha modulo 1 e un suo argomento è $\pi/2$, le radici cubiche di i sono

$$\cos\left(\frac{(\pi/2) + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{(\pi/2) + 2k\pi}{3}\right),$$

con $k = 0, 1, 2$, e si ha

$$\begin{aligned}
\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} &= \frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\,, \\
\cos\left(\frac{5}{6}\,\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{6}\,\pi\right) &= -\,\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\,, \\
\cos\left(\frac{3}{2}\,\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{2}\,\pi\right) &= -i\,.
\end{aligned}$$

Quindi abbiamo le seguenti equazioni:

$$e^z + i\,\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\,, \qquad e^z + i\,\frac{1}{2} = -\,\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\,, \qquad e^z + i\,\frac{1}{2} = -i\,,$$

cioè:

$$e^z = \frac{\sqrt{3}}{2}\,, \qquad e^z = -\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,, \qquad e^z = -i\,\frac{3}{2}\,.$$

Le soluzioni sono

$$\begin{aligned}
z &= \log\frac{\sqrt{3}}{2} + i2k\pi\,, && k \in \mathbb{Z}\,, \\
z &= \log\frac{\sqrt{3}}{2} + i(2k+1)\pi\,, && k \in \mathbb{Z}\,, \\
z &= \log\frac{3}{2} + i\left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi\,, && k \in \mathbb{Z}\,.
\end{aligned}$$

(6) Moltiplicando entrambi i membri per e^{iz}, l'equazione diventa

$$e^{2iz} - 2i = \big(-\sqrt{2} + i\,\sqrt{2}\,\big)e^{iz}\,,$$

cioè

$$e^{2iz} + \big(\sqrt{2} - i\,\sqrt{2}\,\big)e^{iz} - 2i = 0\,.$$

Ponendo $w = e^{iz}$ si ottiene l'equazione di secondo grado

$$w^2 + \big(\sqrt{2} - i\,\sqrt{2}\,\big)w - 2i = 0\,.$$

Il discriminante del trinomio a primo membro è

$$\Delta = \big(\sqrt{2} - i\,\sqrt{2}\,\big)^2 - 4\cdot(-2i) = 2 - 4i - 2 + 8i = 4i\,.$$

Poiché $|4i| = 4$ e un argomento di $4i$ è $\pi/2$, le radici quadrate del discriminante sono

$$\pm\sqrt{4}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \pm 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pm\big(\sqrt{2} + i\,\sqrt{2}\,\big)\,,$$

quindi si ha

$$w = \frac{-\big(\sqrt{2} - i\,\sqrt{2}\,\big) \pm \big(\sqrt{2} + i\,\sqrt{2}\,\big)}{2} = \begin{cases} \dfrac{2i\,\sqrt{2}}{2} = i\,\sqrt{2}\,, \\[2mm] \dfrac{-2\,\sqrt{2}}{2} = -\,\sqrt{2}\,. \end{cases}$$

Quindi deve essere $e^{iz} = i\sqrt{2}$ o $e^{iz} = -\sqrt{2}$. Poiché $i\sqrt{2}$ ha modulo $\sqrt{2}$ e un suo argomento è $\pi/2$, la prima equazione è verificata se

$$i\,z = \log\bigl(\sqrt{2}\bigr) + \frac{\pi}{2}\,i + i2k\pi\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,,$$

cioè

$$z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\,\frac{1}{2}\,\log 2\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Poiché $-\sqrt{2}$ ha modulo $\sqrt{2}$ e un suo argomento è π, la seconda equazione è verificata se.

$$i\,z = \log\bigl(\sqrt{2}\bigr) + i\pi + i2k\pi\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,,$$

cioè

$$z = \pi + 2k\pi - i\,\frac{1}{2}\,\log 2\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

(7) $\quad z = 0\,,\ z = \pm i\,\dfrac{4}{\sqrt{3}}\,,\ z = \pm i4\sqrt{3}\,.$

(8) $\quad z = \dfrac{\log 2}{4} + \left(k + \dfrac{1}{8}\right)\pi + i\left(-\dfrac{\log 2}{4} + \left(k + \dfrac{1}{8}\right)\pi\right)\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$

(9) $\quad z = -\,4^{1/3}3^{1/6}\,,\ z = 2^{-1/3}3^{1/6} \pm i\,2^{-1/3}3^{2/3}\,,\ z = 4^{1/3}\exp\Bigl(i\,\dfrac{7+12k}{18}\,\pi\Bigr)\,,$ $k = 1, 2, 3\,.$

(10) $\quad \pm\sqrt[4]{17}\ \exp\left(i\,\dfrac{1}{2}\left(\pi - \arctan\dfrac{1}{4}\right)\right)\,,\ \pm\sqrt[4]{29}\ \exp\left(-i\,\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{5}{2}\right)$

(11) $\quad \log\sqrt{\dfrac{25}{2}} + i\Bigl(-\arctan\dfrac{1}{7} + (2k+1)\pi\Bigr)\,,\ \log\sqrt{\dfrac{41}{2}} + i\bigl(-\arctan 9 + (2k+1)\pi\bigr)\,,$ $k \in \mathbb{Z}\,.$

(12) $\quad \sqrt[3]{3}\exp\Bigl(i\,\dfrac{1+2k}{3}\,\pi\Bigr)\,,\ \sqrt[6]{13}\exp\Bigl(i\,\dfrac{\arctan(2/3) + (1+2k)\pi}{3}\Bigr)\,, \qquad k = 0, 1, 2\,.$

(13) $\quad z = \dfrac{1}{2}\,\log\bigl(17 - 4\sqrt{3}\bigr) + i\Bigl(\arctan\Bigl(\dfrac{1}{2} - \sqrt{3}\Bigr) + (1+2k)\pi\Bigr)\,,$

$z = \dfrac{1}{2}\,\log\bigl(17 + 4\sqrt{3}\bigr) + i\Bigl(-\arctan\Bigl(\dfrac{1}{2} + \sqrt{3}\Bigr) + 2k\pi\Bigr)\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$

(14) $\quad z = \pm\sqrt[4]{5}\ \exp\Bigl(i\,\dfrac{\arctan 2 + \pi}{2}\Bigr)\,,\ z = \pm\sqrt[4]{\dfrac{5}{3}}\ \exp\Bigl(i\,\dfrac{\pi - \arctan(1/2)}{2}\Bigr)\,,$

$z = \pm\sqrt[4]{5}\ \exp\Bigl(i\,\dfrac{\arctan 2}{2}\Bigr)\,.$

(15) $\quad z = \dfrac{1}{2}\log 2 + i\Bigl(\dfrac{3}{4}\pi + 2k\pi\Bigr)\,,\ z = \dfrac{1}{2}\log 5 + i\bigl(-\arctan 2 + (2k+1)\pi\bigr)\,,\ k \in \mathbb{Z}\,.$

(16) $\quad z = \log\sqrt{21} + i\left(-\arctan\dfrac{2}{\sqrt{3}} + (2k+1)\pi\right)$, $z = \log\big(3\sqrt{3}\big) + i\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $z = \log\big(\sqrt{3}\big) + i\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $\qquad k \in \mathbb{Z}$.

(17) Poiché la serie è a termini positivi, è convergente se e solo se è assolutamente convergente.

È abbastanza complicato verificare direttamente se è soddisfatta la condizione, necessaria per la convergenza della serie, che il termine n-simo converga a 0; vista la forma del termine n-simo risulta conveniente applicare il criterio del rapporto.

Indicato con a_n il termine n-simo della serie si ha:

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{n+2}(n+1)!}{(2n+3)!}\,\frac{(2n+1)!}{n^{n+1}n!} = \\
&= \frac{(n+1)^n(n+1)^2}{n^n n}\,\frac{n!(n+1)}{n!}\,\frac{(2n+1)!}{(2n+1)!(2n+2)(2n+3)} = \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{(n+1)^3}{n(2n+2)(2n+3)} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{(n+1)^3}{n(2n+2)(2n+3)}\,.
\end{aligned}$$

Per $n \to +\infty$ il primo fattore ha limite e, mentre il secondo ha limite $1/4$, quindi il limite del prodotto è $e/4$, che è minore di 1; perciò, per il criterio del rapporto, la serie converge.

Pertanto la serie è convergente e assolutamente convergente.

(18) Il termine n-simo della serie è un quoziente; il denominatore è somma di due radici (non nulle) e quindi è positivo, mentre il numeratore è differenza di due radici, ma qualunque sia $n \in \mathbb{N}^*$ si ha $n^2 + 2n \geq n^2 + 2$ e quindi il numeratore è non negativo. La serie è quindi a termini non negativi, perciò converge se e solo se converge assolutamente.

Studiamo il comportamento del termine n-simo per $n \to +\infty$. Si ha, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
&\sqrt[3]{n^2+2n} - \sqrt[3]{n^2+2} = \sqrt[3]{n^2\left(1+\frac{2}{n}\right)} - \sqrt[3]{n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)} = \\
&= n^{2/3}\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}} - n^{2/3}\sqrt[3]{1+\frac{2}{n^2}} = \\
&= n^{2/3}\left(\left(1+\frac{1}{3}\,\frac{2}{n} + o(n^{-1})\right) - \left(1+\frac{1}{3}\,\frac{2}{n^2} + o(n^{-3})\right)\right) = n^{2/3}\left(\frac{2}{3}\,\frac{1}{n} + o(n^{-1})\right) \sim \\
&\sim \frac{2}{3}\,n^{-1/3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sqrt[3]{n^2+n} + \sqrt[3]{n^2+1} = \sqrt[3]{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)} + \sqrt[3]{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \\
&= n^{2/3}\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} + n^{2/3}\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}} \sim 2n^{2/3}.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\frac{\sqrt[3]{n^2+2n}-\sqrt[3]{n^2+2}}{\sqrt[3]{n^2+n}+\sqrt[3]{n^2+1}} \sim \frac{(2/3)n^{-1/3}}{2n^{2/3}} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{n}\,.$$

Pertanto, a meno di una costante moltiplicativa, il termine n-simo della serie è equivalente a quello della serie armonica, che non converge. Per il criterio del confronto asintotico la serie non converge.

Pertanto la serie non è convergente e non è assolutamente convergente.

(19) Poiché, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, si ha $\big(\arctan(3/n)\big)^{2/n} > 0$, la serie ha i termini di segno alterno.

Studiamo anzitutto la assoluta convergenza. Si ha, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\left|(-1)^n\left(\arctan\left(\frac{3}{n}\right)\right)^{2/n}\right| = \exp\left(\frac{2}{n}\log\left(\arctan\left(\frac{3}{n}\right)\right)\right).$$

Per $n \to +\infty$ si ha $\arctan(3/n) = 3/n + o(n^{-2})$, quindi

$$\log\left(\arctan\left(\frac{3}{n}\right)\right) = \log\left(\frac{3}{n} + o(n^{-2})\right) = \log\left(\frac{3}{n}\big(1+o(n^{-1})\big)\right) =$$

$$= \log\left(\frac{3}{n}\right) + \log\big(1+o(n^{-1})\big) = -\log n + \log 3 + o(n^{-1}) \sim -\log n\,.$$

Pertanto

$$\frac{2}{n}\log\left(\arctan\left(\frac{3}{n}\right)\right) \sim \frac{2}{n}(-\log n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\,.$$

Quindi

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\arctan\left(\frac{3}{n}\right)\right)^{2/n} = e^0 = 1\,,$$

perciò il termine n-simo della serie non ha limite 0.

Pertanto la serie non è convergente e non è assolutamente convergente.

(20) La serie è a termini non negativi; per stabilirne la convergenza studiamo il comportamento del termine n-simo per $n \to +\infty$.

Se $a \in \mathbb{R}^*_+$ allora $\lim\limits_{n\to+\infty} n^a = +\infty$ e quindi anche

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\log(1+n^a) = +\infty\,,$$

perciò non è verificata la condizione necessaria per la convergenza, quindi la serie non converge.

Se $a = 0$ allora il termine n-simo della serie è $n^2\log 2$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\log 2 = +\infty$, perciò non è verificata la condizione necessaria per la convergenza, serie non converge.

Se $a \in \mathbb{R}^*_-$ allora $\lim\limits_{n\to+\infty} n^a = 0$ e quindi, per $n \to +\infty$, $\log(1+n^a) \sim n^a$, perciò

$$n^2\log(1+n^a) \sim n^{a+2}\,;$$

per il criterio del confronto asintotico, la serie converge se e solo se $a+2 < -1$, cioè $a < -3$.

Possiamo concludere che la serie converge se e solo se $a \in \,]-\infty, -3[\,$.

(21) La serie è a termini positivi. Studiamo il comportamento di numeratore e denominatore per $n \to +\infty$.

Per determinare il comportamento del numeratore occorre stabilire quale tra n^a e n^4 è il termine dominante; se $a < 4$ allora $n^4 + n^a \sim n^4$, se $a = 4$ allora $n^4 + n^a = 2n^4$, infine se $a > 4$ si ha $n^4 + n^a \sim n^a$.

Analogamente per il denominatore occorre confrontare n^a con n^8; perciò se $a < 8$ allora $n^8+n^a \sim n^8$, se $a = 8$ allora $n^8+n^a = 2n^8$, infine se $a > 8$ si ha $n^8+n^a \sim n^a$.

Indicato con a_n il termine n-simo della serie, si ha quindi, per $n \to +\infty$,

$$\begin{array}{ll}
\text{se } a < 4 & a_n \sim \dfrac{n^4}{n^8} = \dfrac{1}{n^4}\,, \\[2ex]
\text{se } a = 4 & a_n \sim \dfrac{2n^4}{n^8} = \dfrac{2}{n^4}\,, \\[2ex]
\text{se } 4 < a < 8 & a_n \sim \dfrac{n^a}{n^8} = \dfrac{1}{n^{8-a}}\,, \\[2ex]
\text{se } a = 8 & a_n \sim \dfrac{n^8}{2n^8} = \dfrac{1}{2}\,, \\[2ex]
\text{se } a > 8 & a_n \sim \dfrac{n^a}{n^a} = 1\,.
\end{array}$$

Perciò se $a \leq 4$ allora a_n è equivalente (eventualmente a meno di costanti che sono ininfluenti) a $1/n^4$, termine n-simo di una serie armonica generalizzata convergente, perché $4 > 1$; per il criterio del confronto equivalente per tali valori di a anche la serie studiata converge. Se invece $a \geq 8$ allora a_n ha limite reale diverso da 0 per $n \to +\infty$ e la serie studiata non converge. Infine se $4 < a < 8$ allora a_n è equivalente a $1/n^{8-a}$, termine n-simo di una serie che converge se e solo se $8 - a > 1$, cioè se e solo se $a < 7$, perciò anche la serie studiata converge solo per $a < 7$.

Possiamo concludere che la serie converge se e solo se $a \in \,]0, 7[$.

(22) Studiamo anzitutto l'assoluta convergenza della serie. Si ha

$$\left| \frac{(-1)^n}{2^n\big(\sqrt{n}+2\big)} \,(a^2-4a+2)^n \right| = \frac{1}{2^n\big(\sqrt{n}+2\big)} \,\big|a^2-4a+2\big|^n \,.$$

La forma del termine n-simo suggerisce di utilizzare il criterio della radice. Si ha

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2^n\big(\sqrt{n}+2\big)} \,\big|a^2-4a+2\big|^n} = \frac{1}{2\,\sqrt[n]{\sqrt{n}+2}} \,\big|a^2-4a+2\big| \,.$$

Poiché

$$\sqrt[n]{\sqrt{n}+2} = \exp\left(\frac{1}{n}\,\log\big(\sqrt{n}+2\big)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^0 = 1\,,$$

risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n\big(\sqrt{n}+2\big)} \,\big|a^2-4a+2\big|^n} = \frac{1}{2}\,\big|a^2-4a+2\big| \,.$$

Tale limite risulta minore di 1 se e solo se $-1 < (a^2 - 4a + 2)/2 < 1$, cioè se e solo se a è soluzione del sistema

$$\begin{cases} a^2 - 4a + 2 < 2 \,, \\ a^2 - 4a + 2 > -2 \,, \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} a^2 - 4a < 0 \,, \\ a^2 - 4a + 4 > 0 \,. \end{cases}$$

La prima disequazione è verificata per $a \in \,]0, 4[$. Poiché $a^2 - 4a + 4 = (a - 2)^2$ la seconda è verificata per $a \neq 2$. Pertanto se $a \in \,]0, 2[\, \cup \,]2, 4[$, per il criterio della radice, la serie è assolutamente convergente e quindi convergente.

Da quanto visto segue anche che se $a \in \,]-\infty, 0[\, \cup \,]4, +\infty[$ allora

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n\bigl(\sqrt{n} + 2\bigr)} \;|a^2 - 4a + 2|^n} > 1 \,,$$

quindi, per il criterio della radice, la serie non è assolutamente convergente. Inoltre, per il teorema della permanenza del segno, se $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, allora per n grande si ha $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$, quindi $|a_n| > 1$, pertanto il termine n -simo della serie non converge a 0 . Quindi la serie non è neppure convergente.

Se $a = 2$ abbiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n\bigl(\sqrt{n} + 2\bigr)} \,(-2)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + 2} \,;$$

questa serie non converge, perché è a termini non negativi, con termine n -simo equivalente a quello della serie armonica generalizzata di esponente $1/2$, che non converge. Se $a = 0$ o $a = 4$ allora si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n\bigl(\sqrt{n} + 2\bigr)} \,2^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + 2} \,.$$

Si verifica facilmente che la successione $\bigl(1/\bigl(\sqrt{n} + 2\bigr)\bigr)_{n \in \mathbb{N}}$ è decrescente e convergente a 0 . Quindi, per il criterio di Leibniz, la serie converge.

Possiamo concludere che la serie converge se e solo se $a \in [0, 2[\, \cup \,]2, 4]$.

(23) Converge, converge assolutamente.

(24) Converge, converge assolutamente.

(25) Converge, converge assolutamente.

(26) Converge, converge assolutamente.

(27) Converge, non converge assolutamente.

(28) Converge per $a \in \left[-1/\sqrt{2}, 0\right[\cup \left]0, 1/\sqrt{2}\right]$ e converge assolutamente per $a \in \left]-1/\sqrt{2}, 0\right[\cup \left]0, 1/\sqrt{2}\right[$.

(29) Converge e converge assolutamente per $a \in]0,5[$.

(30) Converge per $a \in]0,3] \cup [4,7[$ e converge assolutamente per $a \in]0,3[\cup]4,7[$.

(31) Converge e converge assolutamente per $a \in]0,1/3[$.

(32) Converge e converge assolutamente per $a \in]2,+\infty[$.

(33) La funzione di cui vogliamo calcolare il limite è somma di due funzioni, ciascuna delle quali ha numeratore uguale a 1 e denominatore che tende a 0. Per stabilire il limite di ciascun addendo occorre studiare il segno dei denominatori vicino a 0. Evidentemente per x in un opportuno intorno di 0, escluso 0, si ha $\cos x - 1 < 0$ e $4 + x^2 > 0$, perciò $(\cos x - 1)(4 + x^2) < 0$ e dunque

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{(\cos x - 1)(4 + x^2)} = -\infty\,;$$

inoltre (sempre per x in un intorno di 0, ma diverso da 0) si ha $2x\,\sin x + x^4 > 0$, perché somma di numeri maggiori di 0, e quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{2x\,\sin x + x^4} = +\infty\,;$$

perciò il limite è nella forma indeterminata $-\infty + \infty$.

Per calcolare il limite occorre studiare il comportamento per $x \to 0$ dei due denominatori. Si ha

$$\begin{aligned}(\cos x - 1)(4 + x^2) &= \Big(-\frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{24}\,x^4 + o(x^5)\Big)(4 + x^2) = \\ &= -2\,x^2 + \frac{1}{6}\,x^4 + o(x^5) - \frac{1}{2}\,x^4 + \frac{1}{24}\,x^6 + o(x^7) = -2x^2 - \frac{1}{3}\,x^4 + o(x^5)\end{aligned}$$

e

$$2x\,\sin x + x^4 = 2x\Big(x - \frac{1}{6}\,x^3 + o(x^4)\Big) + x^4 = 2x^2 + \frac{2}{3}\,x^4 + o(x^5)\,.$$

Perciò

$$\begin{aligned}\frac{1}{(\cos x - 1)(4 + x^2)} + \frac{1}{2x\,\sin x + x^4} &= \frac{1}{-2x^2 - \frac{1}{3}\,x^4 + o(x^5)} + \frac{1}{2x^2 + \frac{2}{3}\,x^4 + o(x^5)} = \\ &= \frac{2x^2 + \frac{2}{3}\,x^4 + o(x^5) - 2x^2 - \frac{1}{3}\,x^4 + o(x^5)}{\left(-2x^2 - \frac{1}{3}\,x^4 + o(x^5)\right)\left(2x^2 + \frac{2}{3}\,x^4 + o(x^5)\right)} = \\ &= \frac{\frac{1}{3}\,x^4 + o(x^5)}{\left(-2x^2 - \frac{1}{3}\,x^4 + o(x^5)\right)\left(2x^2 + \frac{2}{3}\,x^4 + o(x^5)\right)} \sim \frac{\frac{1}{3}\,x^4}{-4x^4} = -\frac{1}{12}\,.\end{aligned}$$

Quindi il limite cercato è uguale a $-\dfrac{1}{12}$.

(34) Per $x \to +\infty$ l'argomento del primo logaritmo a numeratore tende a 1, mentre l'argomento del secondo logaritmo tende a 2, quindi il numeratore ha limite $\log 1 \log 2 = 0$. Il denominatore è invece in forma indeterminata, perché ciascuna delle due radici tende a $+\infty$.

Studiamo anzitutto il numeratore. Si ha, per $x \to +\infty$,

$$\log\left(\frac{x^3+4}{x^3+2}\right) \sim \frac{x^3+4}{x^3+2} - 1 = \frac{2}{x^3+2} \sim 2x^{-3},$$

$$\log\left(\frac{4x^3+1}{2x^3+1}\right) \to \log 2,$$

quindi il numeratore è equivalente a $2\log 2\, x^{-3}$.

Il denominatore, per $x \to +\infty$, è uguale a

$$\begin{aligned}
&|x|\sqrt{1+3x^{-2}} - |x|\sqrt{1+2x^{-2}} - \frac{1}{2x} = \\
&\quad = x\left(1 + \frac{3}{2}\,x^{-2} - \frac{9}{8}\,x^{-4} + o(x^{-4})\right) - x\left(1 + x^{-2} - \frac{1}{2}\,x^{-4} + o(x^{-4})\right) - \frac{1}{2}\,x^{-1} = \\
&\quad = x + \frac{3}{2}\,x^{-1} - \frac{9}{8}\,x^{-3} + o(x^{-3}) - x - x^{-1} + \frac{1}{2}\,x^{-3} - \frac{1}{2}\,x^{-1} \sim -\frac{5}{8}\,x^{-3}.
\end{aligned}$$

Perciò la funzione di cui stiamo calcolando il limite, per $x \to +\infty$, è equivalente a

$$\frac{2\log 2\, x^{-3}}{-\dfrac{5}{8}\,x^{-3}} = -\frac{16}{5}\,\log 2;$$

quindi il limite cercato è uguale a $-\dfrac{16}{5}\,\log 2$.

(35) Il limite è nella forma indeterminata $0/0$. Poiché $\log(1+y) \sim y$, per $y \to 0$, il denominatore è equivalente a $x \cdot 3x^4 = 3x^5$.

Studiamo il primo addendo a numeratore. Per il calcolo del limite possiamo supporre $x > 0$, quindi si ha

$$\sqrt{e^2x^2 - 2x^4 + 2x^6} = e|x|\sqrt{1 - \frac{2}{e^2}\,x^2 + \frac{2}{e^2}\,x^4} = ex\,\sqrt{1 - \frac{2}{e^2}\,x^2 + \frac{2}{e^2}\,x^4}.$$

Poiché $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\dfrac{2}{e^2}\,x^2 + \dfrac{2}{e^2}\,x^4\right) = 0$, per la formula di Taylor abbiamo

$$\begin{aligned}
&\sqrt{e^2x^2 - 2x^4 + 2x^6} = \\
&= ex\left(1 + \frac{1}{2}\Big(-\frac{2}{e^2}\,x^2 + \frac{2}{e^2}\,x^4\Big) - \frac{1}{8}\Big(-\frac{2}{e^2}\,x^2 + \frac{2}{e^2}\,x^4\Big)^2 + o\bigg(\Big(-\frac{2}{e^2}\,x^2 + \frac{2}{e^2}\,x^4\Big)^2\bigg)\right) = \\
&= ex\Big(1 - \frac{1}{e^2}\,x^2 + \frac{1}{e^2}\,x^4 - \frac{1}{2e^4}\,x^4 + o(x^4)\Big) = ex - \frac{1}{e}\,x^3 + \frac{2e^2-1}{2e^3}\,x^5 + o(x^5).
\end{aligned}$$

Inoltre, utilizzando la formula di Taylor, si ha

$$\begin{aligned}\log\Big(e-\frac{1}{e}\,x^2\Big) &= \log\left(e\Big(1-\frac{1}{e^2}\,x^2\Big)\right) = \log e + \log\Big(1-\frac{1}{e^2}\,x^2\Big) = \\ &= 1-\frac{1}{e^2}\,x^2-\frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{e^2}\,x^2\Big)^2+o\left(\Big(-\frac{1}{e^2}\,x^2\Big)^2\right) = \\ &= 1-\frac{1}{e^2}\,x^2-\frac{1}{2e^4}\,x^4+o(x^4)\,.\end{aligned}$$

Quindi si ha

$$\begin{aligned}&\sqrt{e^2x^2-2x^4+2x^6}-ex\log\Big(e-\frac{1}{e}\,x^2\Big) = \\ &\qquad = ex-\frac{1}{e}\,x^3+\frac{2e^2-1}{2e^3}\,x^5+o(x^5)-ex+\frac{1}{e}\,x^3+\frac{1}{2e^3}\,x^5+o(x^5) = \\ &\qquad = \frac{1}{e}\,x^5+o(x^5)\sim\frac{1}{e}\,x^5\,.\end{aligned}$$

Perciò la funzione di cui stiamo calcolando il limite è equivalente, per $x \to 0^+$, a

$$\frac{\frac{1}{e}\,x^5}{3x^5} = \frac{1}{3e}\,;$$

quindi il limite cercato è uguale a $\dfrac{1}{3e}$.

(36) Il limite è nella forma indeterminata $0/0$.
Studiamo il denominatore. Si ha

$$\begin{aligned}&\cos(2x)-\exp(-2x^2) = \\ &\quad = 1-\frac{1}{2}\,(2x)^2+\frac{1}{24}\,(2x)^4+o\big((2x)^5\big)-\left(1-2x^2+\frac{1}{2}\,(-2x^2)^2+o\big((-2x^2)^2\big)\right) = \\ &\quad = 1-2x^2+\frac{2}{3}\,x^4+o(x^5)-\big(1-2x^2+2x^4+o(x^4)\big)\sim \\ &\quad \sim -\frac{4}{3}\,x^4\,.\end{aligned}$$

Studiamo ora il numeratore. Si ha

$$2\cos x - x^2 = 2\Big(1-\frac{1}{2}\,x^2+\frac{1}{24}\,x^4+o(x^5)\Big)-x^2 = 2-2x^2+\frac{1}{12}\,x^4+o(x^5)\,;$$

perciò

$$\exp(2\cos x - x^2) = \exp\Big(2-2x^2+\frac{1}{12}\,x^4+o(x^5)\Big)\,.$$

L'esponente tende a 2 per $x \to 0$, quindi è utile scomporre l'esponenziale nel prodotto di due esponenziali, il primo con esponente 2, il secondo con esponente che tende a 0, cioè

$$\exp(2\cos x - x^2) = e^2 \exp\Big(-2x^2 + \frac{1}{12}\,x^4 + o(x^5)\Big)\,.$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
&\exp\Big(-2x^2 + \frac{1}{12}\,x^4 + o(x^5)\Big) = \\
&\quad = 1 + \Big(-2x^2 + \frac{1}{12}\,x^4 + o(x^5)\Big) + \frac{1}{2}\Big(-2x^2 + \frac{1}{12}\,x^4 + o(x^5)\Big)^2 + \\
&\qquad\qquad + o\left(\Big(-2x^2 + \frac{1}{12}\,x^4 + o(x^5)\Big)^2\right) = \\
&\quad = 1 - 2x^2 + \frac{1}{12}\,x^4 + 2x^4 + o(x^4) = 1 - 2x^2 + \frac{25}{12}\,x^4 + o(x^4)\,,
\end{aligned}$$

perciò

$$\exp(2\cos x - x^2) - e^2 + 2e^2x^2 = e^2\Big(1 - 2x^2 + \frac{25}{12}\,x^4 + o(x^4)\Big) - e^2 + 2e^2x^2 \sim \frac{25e^2}{12}\,x^4\,.$$

Quindi per $x \to 0$ si ha

$$\frac{\exp(2\cos x - x^2) - e^2 + 2e^2x^2}{\cos(2x) - \exp(-2x^2)} \sim \frac{\frac{25e^2}{12}\,x^4}{-\frac{4}{3}\,x^4} = -\,\frac{25e^2}{16}\,;$$

pertanto il limite cercato è uguale a $-\,\dfrac{25e^2}{16}$.

(37) Per $x \to +\infty$ si ha

$$\sqrt[3]{x^3 + 9x^2} = x\,\sqrt[3]{1 + \frac{9}{x}} = x\left(1 + \frac{1}{3}\,\frac{9}{x} - \frac{1}{9}\left(\frac{9}{x}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x + 3 - 9x^{-1} + o(x^{-1})\,,$$

pertanto

$$\sqrt[3]{x^3 + 9x^4} - x - 3 = x + 3 - 9x^{-1} + o(x^{-1}) - x - 3 \sim -9x^{-1}\,.$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
\log\big(3\cosh(5x)\big) &= \log\left(\frac{3}{2}\big(e^{5x} + e^{-5x}\big)\right) = \log\left(\frac{3}{2}\,e^{5x}\big(1 + e^{-10x}\big)\right) = \\
&= \log\frac{3}{2} + 5x + \log\big(1 + e^{-10x}\big) \sim 5x\,.
\end{aligned}$$

Infine

$$\log\left(\frac{3 + x}{x}\right) = \log\left(1 + \frac{3}{x}\right) = \frac{3}{x} - \frac{1}{2}\,\frac{9}{x^2} + o(x^{-2})\,,$$

da cui segue

$$
\begin{aligned}
\log\left(\frac{3+x}{x}\right) - \frac{3}{x+5} &= \frac{3}{x} - \frac{1}{2}\,\frac{9}{x^2} + o(x^{-2}) - \frac{3}{x+5} = \\
&= \frac{3(x+5)-3x}{x(x+5)} - \frac{1}{2}\,\frac{9}{x^2} + o(x^{-2}) = \frac{15}{x^2+5x} - \frac{1}{2}\,\frac{9}{x^2} + o(x^{-2}) = \\
&= \frac{15}{x^2\big(1+o(1)\big)} - \frac{1}{2}\,\frac{9}{x^2} + o(x^{-2}) = \frac{15}{x^2}\big(1+o(1)\big) - \frac{1}{2}\,\frac{9}{x^2} + o(x^{-2}) = \\
&= \frac{30-9}{2x^2} + o(x^{-2}) \sim \frac{21}{2}\,x^{-2}\,.
\end{aligned}
$$

Perciò

$$
\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+9x^2}-x-3}{\log\big(3\cosh(5x)\big)\left(\log\left(\frac{3+x}{x}\right) - \frac{3}{x+5}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-9x^{-1}}{5x\,\frac{21}{2}\,x^{-2}} = -\frac{18}{105} = -\frac{6}{35}\,.
$$

(38) Studiamo il comportamento dei fattori a numeratore per $x \to +\infty$.

Poiché, per $x \to +\infty$, $e^{4x} \to +\infty$ mentre $e^{-4x} \to 0$, si ha

$$
\sinh(4x) = \frac{e^{4x}-e^{-4x}}{2} \sim \frac{1}{2}\,e^{4x}\,.
$$

Analogamente $e^{2x} \to +\infty$ e $e^{-2x} \to 0$, quindi

$$
\begin{aligned}
&\log\big(\sinh(2x)\big) + \log 2 - 2x = \log\left(\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}\right) + \log 2 - 2x = \\
&= \log\big(e^{2x}(1-e^{-4x})\big) - \log 2 + \log 2 - 2x = \log\big(e^{2x}\big) + \log\big(1-e^{-4x}\big) - 2x = \\
&= \log(1-e^{-4x}) \sim -e^{-4x}\,.
\end{aligned}
$$

Raccogliendo il termine dominante in ciascuna radice e utilizzando la formula di Taylor si ha

$$
\begin{aligned}
&\sqrt[3]{x^3+3x^2} - \sqrt[2]{x^2+3x} = \sqrt[3]{x^3(1+3x^{-1})} - \sqrt[2]{x^2(1+3x^{-1})} = \\
&= x\,\sqrt[3]{1+3x^{-1}} - x\sqrt[2]{1+3x^{-1}} = \\
&= x\left(1+\frac{1}{3}\,3x^{-1} + o\big(x^{-1}\big) - \left(1+\frac{1}{2}\,3x^{-1} + o\big(x^{-1}\big)\right)\right) = \\
&= x\left(-\frac{1}{2}\,x^{-1} + o\big(x^{-1}\big)\right) = -\frac{1}{2} + o(1) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\frac{1}{2}\,.
\end{aligned}
$$

Perciò

$$
\begin{aligned}
&\sinh(4x)\Big(\log\big(\sinh(2x)\big) + \log 2 - 2x\Big)\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2} - \sqrt[2]{x^2+3x}\right) \sim \\
&\sim \frac{1}{2}\,e^{4x}(-e^{-4x})\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\,.
\end{aligned}
$$

Studiamo il comportamento del denominatore. Si ha $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan(2x)=\pi/2$. Per $x\to+\infty$ si ha $1/x\to 0$, quindi

$$\log\left(\cos\frac{1}{x}\right)=\log\left(1-\frac{1}{2x^2}+o\big(x^{-3}\big)\right)\sim-\frac{1}{2x^2}+o\big(x^{-3}\big)\sim-\frac{1}{2x^2}\,.$$

Infine

$$\begin{aligned}\sqrt{x^4+x^2}-\sqrt{x^2+4}&=x^2\sqrt{1+x^{-2}}-x\sqrt{1+4x^{-2}}=\\&=x^2\left(\sqrt{1+x^{-2}}-x^{-1}\sqrt{1+4x^{-2}}\right)\sim x^2\,.\end{aligned}$$

Quindi si ha

$$\arctan(2x)\log\left(\cos\frac{1}{x}\right)\left(\sqrt{x^4+x^2}-\sqrt{x^2+4}\,\right)\sim\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)x^2=-\frac{\pi}{4}\,.$$

Numeratore e denominatore hanno limite reale, pertanto il limite è uguale al quoziente tra limite del numeratore e limite del denominatore, cioè è uguale a

$$\frac{\dfrac{1}{4}}{-\dfrac{\pi}{4}}=-\frac{1}{\pi}\,.$$

(39) $$\lim_{x\to0}\frac{\sinh(e^{2x}-1)-\sin(e^{2x}-1)}{\cos(6x)\log(1+2x)\big(\sqrt{1-x^2}-1\big)}=-\frac{8}{3}\,.$$

(40) $$\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x^2+2x^3}-\sqrt[3]{x^3+3x^4}}{\sqrt{x^2-4x^4}-\cos(3x^2)}=\frac{1}{5}\,.$$

(41) $$\lim_{x\to+\infty}x\big(\sqrt{x^6+4x^4}-\sqrt[3]{x^9+6x^7}\,\big)=2\,.$$

(42) $$\lim_{x\to+\infty}x\log\big(e^{x^2}+e^{3x}\big)\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{\sqrt{x^2+4x}}\right)=-2\,.$$

(43) $$\lim_{x\to+\infty}\big(\sqrt{x^6+4x^5+6x^4}-x^3-2x^2\big)\left(\sin\frac{x+4}{x^4+1}-\frac{1}{x^3}\right)\exp\big(6+3\log x\big)=4e^6\,.$$

(44) $$\lim_{x\to0}\frac{\exp\big(\sqrt{1+4x^2}\big)-e\cosh(2x)}{\big(\sqrt{x^4+2x^5-2x^6}-x^2-x^3\big)\big(\cosh(e^x)-\cosh x\big)}=\frac{4e}{9(\cosh 1-1)}\,.$$

(45) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\log\Big(\frac{x+1}{x+2}\Big)+\frac{1}{x}\right)\left(\exp\Big(\frac{x+1}{x+2}\Big)-\exp\Big(\frac{x}{x+2}\Big)\right)\log\big(1+xe^{x^3}\big)=\frac{3e}{2}\,.$$

(46) $$\lim_{x\to0^+}\frac{\big(\exp\big(2\cos(2x)\big)-e^2\big)\big(1+\sqrt{x^2+4x^3}-e^x\big)}{\big(\sqrt{\cos(2x)}-1+x^2\big)\big(\sqrt{1+\cos(2x)}-1+x^2\big)}=\frac{36e^2}{\sqrt{2}-1}\,.$$

(47) $$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+x^{16}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+6}}-\frac{\sqrt{x^2-6}}{x}\right)\left(\cos\left(\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)\right)-\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)\right)=12\,.$$

(48) $$\lim_{x\to0^+}\frac{e^{-x^2}\sin x-x}{e^{-3x}\sin\left(\sqrt{x^2+6x^3}\,\right)-x}=\frac{7}{55}\,.$$

(49) Il dominio naturale di f è $\mathbb{R}$.
La funzione è continua.
Studiamo il comportamento negli estremi del dominio.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}|2x^3|\left(\left(1-\frac{9}{2}x^{-2}\right)+\frac{9x}{|2x^3|}\right)=+\infty\,,$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}|2x^3|\left(\left(1-\frac{9}{2}x^{-2}\right)+\frac{9x}{|2x^3|}\right)=+\infty\,.$$

Evidentemente f non ha asintoti orizzontali o verticali e, poiché per $x\to\pm\infty$ si ha $f(x)\sim 2|x|^3$, non ha neppure asintoti obliqui.

Cerchiamo le intersezioni del grafico di f con gli assi. Si ha $f(0)=0$, quindi il grafico interseca l'asse delle ordinate nell'origine. Inoltre si ha $f(x)=0$ se e solo se $|2x^3-9x|=-9x$; poiché il valore assoluto è sempre non negativo, se x è soluzione deve essere $-9x\geq 0$, cioè $x\leq 0$. Quindi $f(x)$ è nullo se e solo se x è non positivo e verifica una delle due equazioni $2x^3-9x=-9x$ e $2x^3-9x=9x$. La prima equazione è verificata solo per $x=0$, la seconda equivale a $2x^3-18x=0$ e quindi ha le soluzioni $x=0$, $x=-3$ e $x=3$. Deve essere $x\leq 0$, quindi f si annulla in 0 e in -3.

Studiamo la derivata di f. La funzione f è derivabile in tutti i punti che non annullano l'argomento del valore assoluto, cioè è derivabile in x se $2x^3-9x\neq 0$. Si ha $2x^3-9x=x(2x^2-9)$, quindi risulta $2x^3-9x=0$ per $x=0$ e per $x=\pm 3/\sqrt{2}$. Pertanto f è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\left\{-3/\sqrt{2},0,3/\sqrt{2}\right\}$. Se x appartiene a tale insieme si ha
$$f'(x)=(6x^2-9)\,\mathrm{sgn}(2x^3-9x)+9\,.$$
Per studiare il segno di f' è utile determinare per quali x risulta $\mathrm{sgn}(2x^3-9x)=1$ e per quali x risulta $\mathrm{sgn}(2x^3-9x)=-1$. Si ha
$$2x^3-9x=2x\left(x+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{3}{\sqrt{2}}\right),$$
il segno di $2x^3-9x$ risulta dal seguente schema

		$-\frac{3}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{3}{\sqrt{2}}$	
$2x$	$-\ -\ -$	|	$-\ -\ -\ -\ -$	|	$+\ +\ +\ +\ +$	|	$+\ +\ +$
$x+\frac{3}{\sqrt{2}}$	$-\ -\ -$	|	$+\ +\ +\ +\ +$	|	$+\ +\ +\ +\ +$	|	$+\ +\ +$
$x-\frac{3}{\sqrt{2}}$	$-\ -\ -$	|	$-\ -\ -\ -\ -$	|	$-\ -\ -\ -\ -$	|	$+\ +\ +$
$2x^3-9x$	$-\ -\ -$	|	$+\ +\ +\ +\ +$	|	$-\ -\ -\ -\ -$	|	$+\ +\ +$

Perciò $\mathrm{sgn}(2x^3-9x)=1$ se $x\in\left]-3/\sqrt{2},0\right[\cup\left]3/\sqrt{2},+\infty\right[$, e $\mathrm{sgn}(2x^3-9x)=-1$ se $x\in\left]-\infty,-3/\sqrt{2}\,\right[\cup\left]0,3/\sqrt{2}\,\right[$.

Calcoliamo il limite della derivata nei punti $-3/\sqrt{2}$, 0 e $3/\sqrt{2}$ per determinare la derivabilità di f in tali punti.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -3/\sqrt{2}^-} f'(x) &= \lim_{x\to -3/\sqrt{2}^-} -(6x^2-9)+9 = -9\,,\\
\lim_{x\to -3/\sqrt{2}^+} f'(x) &= \lim_{x\to -3/\sqrt{2}^+} (6x^2-9)+9 = 27\,,\\
\lim_{x\to 0^-} f'(x) &= \lim_{x\to 0^-} (6x^2-9)+9 = 0\,,\\
\lim_{x\to 0^+} f'(x) &= \lim_{x\to 0^+} -(6x^2-9)+9 = 18\,,\\
\lim_{x\to 3/\sqrt{2}^-} f'(x) &= \lim_{x\to 3/\sqrt{2}^-} -(6x^2-9)+9 = -9\,,\\
\lim_{x\to 3/\sqrt{2}^+} f'(x) &= \lim_{x\to 3/\sqrt{2}^+} (6x^2-9)+9 = 27\,.
\end{aligned}$$

In ciascuno dei punti considerati il limite sinistro di f' è diverso dal limite destro, perciò anche limite sinistro e limite destro dei rapporti incrementali sono diversi tra loro, quindi il rapporto incrementale non ha limite. Pertanto $-3/\sqrt{2}$, 0 e $3/\sqrt{2}$ sono punti di non derivabilità per f.

Studiamo il segno di f'. Se $x \in \left]-3/\sqrt{2}, 0\right[\cup \left]3/\sqrt{2}, +\infty\right[$, allora si ha

$$f'(x) = (6x^2-9)+9 = 6x^2\,;$$

poiché $x \neq 0$, risulta $f'(x) > 0$. Se $x \in \left]-\infty, -3/\sqrt{2}\right[\cup \left]0, 3/\sqrt{2}\right[$, allora si ha

$$f'(x) = -(6x^2-9)+9 = -6x^2+18 = 6(-x^2+3)\,,$$

che è positivo per $x \in \left]-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right[$ e negativo per $x \in \left]-\infty, -\sqrt{3}\right[\cup \left]\sqrt{3}, +\infty\right[$ e quindi, tenuto conto delle condizioni a cui deve soddisfare x, abbiamo $f'(x) > 0$ per $x \in \left]0, \sqrt{3}\right[$ e $f'(x) < 0$ per $x \in \left]-\infty, -3/\sqrt{2}\right[\cup \left]\sqrt{3}, 3/\sqrt{2}\right[$.

Complessivamente, il segno di f' risulta dal seguente schema

$$\begin{array}{lccccc}
 & & -\frac{3}{\sqrt{2}} & 0 & \sqrt{3} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\
f'(x) & - \; - \; - & | \; + \; + \; + \; + \; + \; + & | \; + \; + \; + \; + \; + & | \; - & | \; + \; + \; +
\end{array}$$

Pertanto f è crescente in $\left[-3/\sqrt{2}, 0\right]$, in $\left[0, \sqrt{3}\right]$ e in $\left[3/\sqrt{2}, +\infty\right[$ ed è decrescente in $\left]-\infty, -3/\sqrt{2}\right]$ e in $\left[\sqrt{3}, 3/\sqrt{2}\right]$.

Il criterio di monotonia non può essere applicato direttamente per stabilire che f è crescente in $\left[-3/\sqrt{2}, \sqrt{3}\right]$, perché la funzione non è derivabile in tutti i punti interni a tale intervallo. Possiamo però ugualmente concludere che f è crescente, a partire dalle informazioni relative agli intervalli $\left[-3/\sqrt{2}, 0\right]$ e $\left[0, \sqrt{3}\right]$. Infatti siano $x, y \in \left[-3/\sqrt{2}, \sqrt{3}\right]$ tali che $x < y$. Se x e y appartengono entrambi a $\left[-3/\sqrt{2}, 0\right]$ o entrambi a $\left[0, \sqrt{3}\right]$, allora sappiamo che $f(x) \leq f(y)$. Se invece $x \in \left[-3/\sqrt{2}, 0\right]$ e $y \in \left[0, \sqrt{3}\right]$, allora si ha $f(x) \leq f(0) \leq f(y)$. Quindi in ogni caso risulta $f(x) \leq f(y)$.

Inoltre $-3/\sqrt{2}$ e $3/\sqrt{2}$ sono punti di minimo locale per f, $\sqrt{3}$ è un punto di massimo locale.

Il valore di f in tali punti è:

$$f\Big(-\frac{3}{\sqrt{2}}\Big) = \left|2\Big(-\frac{3}{\sqrt{2}}\Big)^3 + 9\,\frac{3}{\sqrt{2}}\right| - 9\,\frac{3}{\sqrt{2}} = \left|-\frac{27}{\sqrt{2}} + \frac{27}{\sqrt{2}}\right| - \frac{27}{\sqrt{2}} = -\frac{27}{\sqrt{2}}$$
$$f(\sqrt{3}) = \left|2(\sqrt{3})^3 - 9\sqrt{3}\right| + 9\sqrt{3} = \left|6\sqrt{3} - 9\sqrt{3}\right| + 9\sqrt{3} = 12\sqrt{3},$$
$$f\Big(\frac{3}{\sqrt{2}}\Big) = \left|2\Big(\frac{3}{\sqrt{2}}\Big)^3 - 9\,\frac{3}{\sqrt{2}}\right| + 9\,\frac{3}{\sqrt{2}} = \left|\frac{27}{\sqrt{2}} - \frac{27}{\sqrt{2}}\right| + \frac{27}{\sqrt{2}} = \frac{27}{\sqrt{2}}.$$

Studiamo la convessità di f.

La funzione f' è derivabile in tutto il dominio e si ha

$$f''(x) = 12x\,\mathrm{sgn}(2x^3 - 9x).$$

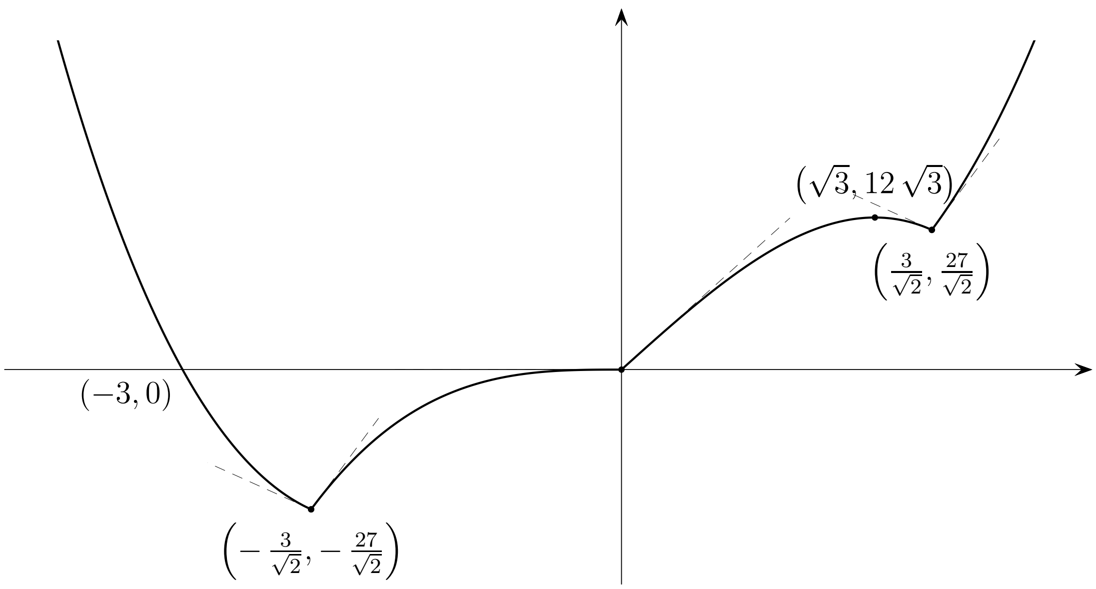
Quindi il segno di $f''(x)$ coincide con quello di $12x(2x^3 - 9x)$, che è uguale a

$$24x^2\Big(x - \frac{3}{\sqrt{2}}\Big)\Big(x + \frac{3}{\sqrt{2}}\Big).$$

Quindi risulta $f''(x) \geq 0$ per $x \in \left]-\infty, -3/\sqrt{2}\right] \cup \left[3/\sqrt{2}, +\infty\right[$ e $f''(x) \leq 0$ per $x \in \left[-3/\sqrt{2}, 3/\sqrt{2}\right] \setminus \{0\}$; perciò f è convessa in $\left]-\infty, -3/\sqrt{2}\right]$ e in $\left[3/\sqrt{2}, +\infty\right[$ ed è concava in $\left[-3/\sqrt{2}, 0\right]$ e in $\left[0, 3/\sqrt{2}\right]$.

Poiché nei punti di cambio di convessità f non è derivabile, non vi sono punti di flesso.

Perciò il grafico di f è, approssimativamente, il seguente:



(50) Poiché il dominio della funzione arcoseno è $[-1,1]$, si ha

$$\operatorname{dom} f = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -1 \le |x^2+4x+3| \le 1 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -1 \le x^2+4x+3 \le 1 \right\}.$$

Dobbiamo quindi risolvere il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} x^2+4x+3 \le 1\,, \\ x^2+4x+3 \ge -1\,, \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x^2+4x+2 \le 0\,, \\ x^2+4x+4 \ge 0\,. \end{cases}$$

Il trinomio x^2+4x+2 si annulla per

$$x = -2 \pm \sqrt{2^2-2} = -2 \pm \sqrt{2}\,,$$

pertanto la prima disequazione è verificata per $x \in \left[-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}\right]$; dall'uguaglianza $x^2+4x+4 = (x+2)^2$ segue che la seconda disequazione è sempre verificata. Pertanto

$$\operatorname{dom} f = \left[-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}\right].$$

Poiché f è composizione di funzioni continue, è continua.

I valori di f negli estremi del dominio sono:

$$\begin{aligned} f\left(-2-\sqrt{2}\right) &= \arcsin\left|\left(-2-\sqrt{2}\right)^2 + 4\left(-2-\sqrt{2}\right)+3\right| = \\ &= \arcsin\left|4+4\sqrt{2}+2-8-4\sqrt{2}+3\right| = \arcsin|1| = \frac{\pi}{2}\,, \\ f\left(-2+\sqrt{2}\right) &= \arcsin\left|\left(-2+\sqrt{2}\right)^2 + 4\left(-2+\sqrt{2}\right)+3\right| = \\ &= \arcsin\left|4-4\sqrt{2}+2-8+4\sqrt{2}+3\right| = \arcsin|1| = \frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

Il grafico di f non interseca l'asse delle ordinate perché $0 \notin \operatorname{dom} f$. Cerchiamo le intersezioni con l'asse delle ascisse; si ha $f(x)=0$ se e solo se

$$\arcsin|x^2+4x+3| = 0\,,$$

che equivale a $x^2+4x+3=0$. Questo trinomio si annulla per

$$x = -2 \pm \sqrt{2^2-3} = -2 \pm 1 = \begin{cases} -3\,, \\ 1\,, \end{cases}$$

quindi f interseca l'asse delle ascisse per $x=-3$ e $x=0$.

Poiché la funzione arcoseno assume valori non negativi quando il suo argomento è non negativo, f è sempre non negativa.

La funzione non ha asintoti orizzontali o obliqui perché il dominio è limitato e non ha asintoti verticali perché, per il teorema di Weierstrass, è limitata.

La funzione f è derivabile in ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che l'argomento del valore assoluto è diverso da 0 e l'argomento dell'arcoseno è diverso da ± 1. Deve quindi essere $x^2+4x+3 \neq 0$ e $|x^2+4x+3| \neq 1$, non si ha mai $|x^2+4x+3| = -1$. Come già trovato in precedenza $x^2+4x+3=0$ per $x=-3$ e per $x=-1$. Si ha $|x^2+4x+3|=1$ se e solo se $x^2+4x+3=1$ oppure $x^2+4x+3=-1$, tali equazioni, già risolte per determinare il dominio di f, hanno le soluzioni $x=-2-\sqrt{2}$ e $x=-2+\sqrt{2}$ la prima e $x=-2$ la seconda. Pertanto f è derivabile nell'insieme

$$\operatorname{dom} f \setminus \left\{ -2-\sqrt{2}, -3, -2, -1, -2+\sqrt{2} \right\},$$

la derivabilità nei punti $-2-\sqrt{2}$, -3, -2, -1, $-2+\sqrt{2}$ sarà studiata in seguito.

Per $x \in \operatorname{dom} f \setminus \{ -2-\sqrt{2}, -3, -2, -1, -2+\sqrt{2} \}$ si ha

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-|x^2+4x+3|^2}} \operatorname{sgn}(x^2+4x+3)\,(2x+4) = \\
&= \operatorname{sgn}(x^2+4x+3) \frac{2x+4}{\sqrt{\big(1-(x^2+4x+3)\big)\big(1+(x^2+4x+3)\big)}} = \\
&= \operatorname{sgn}(x^2+4x+3) \frac{2x+4}{\sqrt{(-x^2-4x-2)(x^2+4x+4)}} = \\
&= \operatorname{sgn}(x^2+4x+3) \frac{2x+4}{\sqrt{(-x^2-4x-2)(x+2)^2}} = \\
&= \operatorname{sgn}(x^2+4x+3) \frac{2(x+2)}{|x+2|\sqrt{-x^2-4x-2}} = \\
&= \operatorname{sgn}(x^2+4x+3) \operatorname{sgn}(x+2) \frac{2}{\sqrt{-x^2-4x-2}}.
\end{aligned}$$

Il segno di $f'(x)$ coincide con il segno di $\operatorname{sgn}(x^2+4x+3)\operatorname{sgn}(x+2)$, che risulta dal seguente schema:

	$-2-\sqrt{2}$		-3		-2		-1		$-2+\sqrt{2}$
$\operatorname{sgn}(x^2+4x+3)$	|	$+$	|	$-\ -\ -\ -$	|	$-\ -\ -\ -$	|	$+$	|
$\operatorname{sgn}(x+2)$	|	$-$	|	$-\ -\ -\ -$	|	$+\ +\ +\ +$	|	$+$	|
$\operatorname{sgn}(x^2+4x+3)\operatorname{sgn}(x+2)$	|	$-$	|	$+\ +\ +\ +$	|	$-\ -\ -\ -$	|	$+$	|

Quindi la funzione f è crescente in $[-3,-2]$ e in $\left[-1,-2+\sqrt{2}\right]$, è decrescente in $\left[-2-\sqrt{2},-3\right]$ e in $[-2,-1]$; inoltre $-2-\sqrt{2}$, -2 e $-2+\sqrt{2}$ sono punti di massimo locale per f, -3 e -1 sono punti di minimo locale per f.

Studiamo la derivabilità di f nei punti $-2-\sqrt{2}$, -3, -2, -1, $-2+\sqrt{2}$. Si ha

$$\lim_{x \to -2-\sqrt{2}^+} f'(x) = -\lim_{x \to -2-\sqrt{2}^+} \frac{2}{\sqrt{-x^2-4x-2}} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to -3^-} f'(x) = -\lim_{x \to -3^-} \frac{2}{\sqrt{-x^2-4x-2}} = -2,$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to -3^+} f'(x) &= \lim_{x\to -3^+} \frac{2}{\sqrt{-x^2-4x-2}} = 2\,,\\
\lim_{x\to -2^-} f'(x) &= \lim_{x\to -2^-} \frac{2}{\sqrt{-x^2-4x-2}} = \sqrt{2}\,,\\
\lim_{x\to -2^+} f'(x) &= -\lim_{x\to -2^+} \frac{2}{\sqrt{-x^2-4x-2}} = -\sqrt{2}\,,\\
\lim_{x\to -1^-} f'(x) &= -\lim_{x\to -3^-} \frac{2}{\sqrt{-x^2-4x-2}} = -2\,,\\
\lim_{x\to -1^+} f'(x) &= \lim_{x\to -3^+} \frac{2}{\sqrt{-x^2-4x-2}} = 2\,,\\
\lim_{x\to -2+\sqrt{2}^-} f'(x) &= \lim_{x\to -2+\sqrt{2}^-} \frac{2}{\sqrt{-x^2-4x-2}} = +\infty\,.
\end{aligned}
$$

Poiché il limite della derivata (se esiste) coincide con il limite del rapporto incrementale, risulta che f non è derivabile in nessuno dei punti elencati sopra, perché nei due estremi del dominio il limite del rapporto incrementale non è reale, mentre in tutti gli altri punti il limite sinistro del rapporto incrementale è diverso dal limite destro.

Calcoliamo il valore di f negli estremanti locali. Sappiamo che si ha:

$$
f\bigl(-2-\sqrt{2}\,\bigr) = f\bigl(-2+\sqrt{2}\,\bigr) = \pi/2\,.
$$

Inoltre

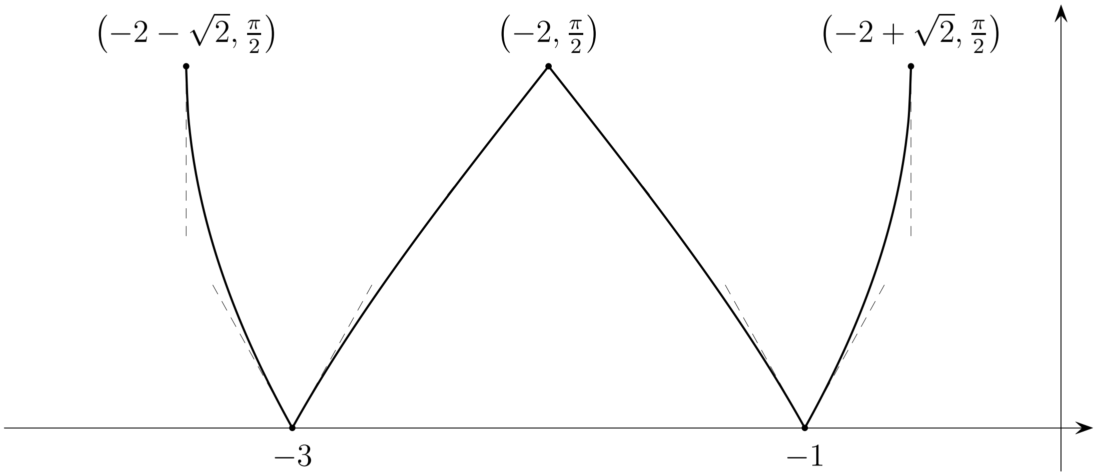
$$
\begin{aligned}
f(-3) &= \arcsin\bigl|(-3)^2+4\cdot(-3)+3\bigr| = \arcsin|0| = 0\,,\\
f(-2) &= \arcsin\bigl|(-2)^2+4\cdot(-2)+3\bigr| = \arcsin|-1| = \frac{\pi}{2}\,,\\
f(-1) &= \arcsin\bigl|(-1)^2+4\cdot(-1)+3\bigr| = \arcsin|0| = 0\,.
\end{aligned}
$$

Studiamo la convessità di f. La funzione f' è derivabile in ogni punto del suo dominio, perché in tale dominio non si annullano gli argomenti delle funzioni segno e radice che compaiono nell'espressione di f', e si ha

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \operatorname{sgn}(x^2+4x+3)\operatorname{sgn}(x+2)\,2\biggl(-\frac{1}{2}\biggr)(-x^2-4x-2)^{-3/2}(-2x-4) =\\
&= \operatorname{sgn}(x^2+4x+3)\,\frac{2(x+2)\operatorname{sgn}(x+2)}{(-x^2-4x-2)^{3/2}} = \operatorname{sgn}(x^2+4x+3)\,\frac{2|x+2|}{(-x^2-4x-2)^{3/2}}\,.
\end{aligned}
$$

Sappiamo che $\operatorname{sgn}(x^2+4x+3) > 0$ per $x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]3,+\infty\right[$, quindi per $x \in \operatorname{dom} f''$ si ha $f''(x) \ge 0$ se e solo se $x \in \left]-2-\sqrt{2},-3\right[\cup \left]-1,-2+\sqrt{2}\,\right[$. Pertanto f è convessa in $\left[-2-\sqrt{2},-3\right]$ e in $\left[-1,-2+\sqrt{2}\,\right]$, è concava in $[-3,-2]$ e in $[-2,-1]$. Infine f non ha punti di flesso, perché i punti di cambio della concavità sono punti in cui la funzione non è derivabile.

Il grafico di f è quindi, approssimativamente, il seguente.



(51) La funzione f è definita per gli x reali tali che $x \neq 0$, (perché per $x = 0$ si annulla il denominatore dell'esponente) e tali che l'argomento della radice $|x+5|-1$ è maggiore o uguale a 0. Si ha $|x+5|-1 \geq 0$ se e solo se $|x+5| \geq 1$ e ciò è verificato se $x+5 \geq 1$ oppure $x+5 \leq -1$, che equivale a $x \geq -4$ o $x \leq -6$. Pertanto

$$\operatorname{dom} f =]-\infty, -6] \cup [-4, 0[\cup]0, +\infty[\; .$$

Il grafico di f non interseca l'asse delle ordinate perché $0 \notin \operatorname{dom} f$. Cerchiamo le intersezioni con l'asse delle ascisse. Si ha $f(x) = 0$ se e solo se $\sqrt{|x+5|-1} = 0$, cioè $|x+5|-1 = 0$ che è verificato se $x = -6$ o $x = -4$.

Poiché è prodotto di funzioni che assumono valori non negativi, f ha sempre valori non negativi.

La funzione f è prodotto di composizioni di funzioni continue, quindi è continua.

Studiamo il comportamento di f negli estremi degli intervalli che ne costituiscono il dominio.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= +\infty\,, \\
f(-6) &= \sqrt{|-6+5|-1}\; e^{-1/6} = 0\,, \\
f(-4) &= \sqrt{|-4+5|-1}\; e^{-1/4} = 0\,, \\
\lim_{x\to0^-} f(x) &= 0\,, \\
\lim_{x\to0^+} f(x) &= +\infty\,, \\
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= +\infty\,.
\end{aligned}$$

La funzione è derivabile in x se x non annulla l'argomento del valore assoluto e non annulla l'argomento della radice. Quindi deve essere $x+5 \neq 0$ e $|x+5|-1 \neq 0$. Se $x \in \operatorname{dom} f$, allora $x \neq -5$ e, come già visto, $|x+5|-1$ si annulla per $x = -6$ e per $x = -4$. Pertanto f è derivabile in $]-\infty, -6[\cup]-4, 0[\cup]0, +\infty[$, mentre la derivabilità in -6 e in -4 verrà studiata in seguito.

Si ha

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{|x+5|-1}}\,\mathrm{sgn}(x+5)\, e^{1/x} + \sqrt{|x+5|-1}\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{1/x} = \\
&= \frac{x^2\,\mathrm{sgn}(x+5) - 2\big((x+5)\,\mathrm{sgn}(x+5)-1\big)}{2x^2\sqrt{|x+5|-1}}\, e^{1/x} = \\
&= \frac{(x^2-2x-10)\,\mathrm{sgn}(x+5)+2}{2x^2\sqrt{|x+5|-1}}\, e^{1/x}\,.
\end{aligned}
$$

Studiamo le derivabilità in -6 e -4. Si ha

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to -6^-} f'(x) &= \lim_{x\to -6^-} \frac{-x^2+2x+12}{2x^2\sqrt{-x-6}}\, e^{1/x} = -\infty\,,\\
\lim_{x\to -4^+} f'(x) &= \lim_{x\to -4^+} \frac{x^2-2x-8}{2x^2\sqrt{x+4}}\, e^{1/x} = +\infty\,.
\end{aligned}
$$

Poiché il limite della derivata coincide con il limite del rapporto incrementale, il limite del rapporto incrementale non è reale, pertanto f non è derivabile in nessuno dei due punti.

Poiché $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ è reale, per conoscere il comportamento di f è utile calcolare il limite corrispondente della derivata. Si ha:

$$
\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-2x-8}{2x^2\sqrt{x+4}}\, e^{1/x} = -\frac{8}{4}\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{1/x}}{x^2} = 0\,.
$$

Per $x \in \mathrm{dom}\, f'$ si ha

$$
f'(x) \geq 0 \iff (x^2-2x-10)\,\mathrm{sgn}(x+5)+2 \geq 0\,,
$$

quindi, distinguendo a seconda che sia $\mathrm{sgn}(x+5)=1$ o $\mathrm{sgn}(x+5)=-1$, $f'(x)$ è non negativa se e solo se x è un elemento del dominio di f' che soddisfa uno dei seguenti sistemi di disequazioni:

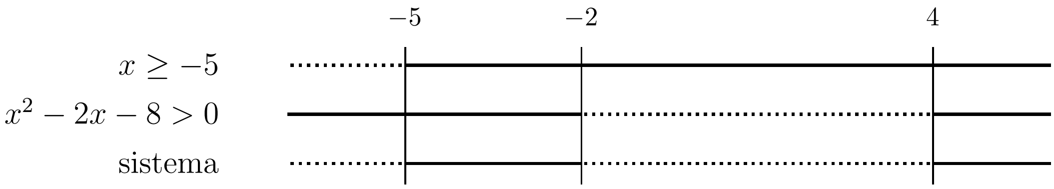
$$
\begin{cases} x \geq -5\,,\\ x^2-2x-8 \geq 0\,; \end{cases}
$$

$$
\begin{cases} x < -5\,,\\ -x^2+2x+12 \geq 0\,. \end{cases}
$$

Il trinomio x^2-2x-8 si annulla per

$$
x = 1 \pm \sqrt{1+8} = 1 \pm 3 = \begin{cases} -2\,,\\ 4\,. \end{cases}
$$

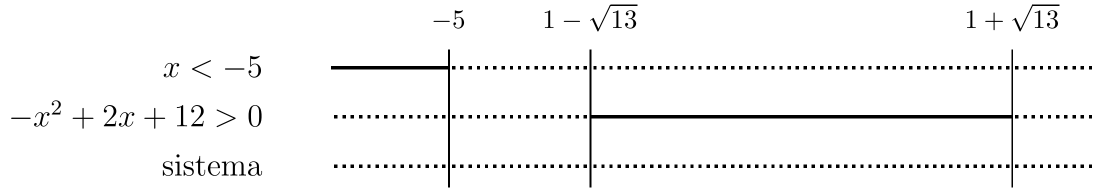
Pertanto le soluzioni del primo sistema risultano dal seguente schema



Quindi l'insieme delle soluzioni è $[-5,-2] \cup [4,+\infty[$. Il trinomio $-x^2+2x+12$ si annulla per

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+12}}{-1} = 1 \mp \sqrt{13}\,,$$

pertanto per il secondo sistema si ha:



perciò questo sistema non ha soluzioni.

Il segno di f' è quindi rappresentato nel seguente schema:

		-6		-4		-2		0		4	
$f'(x)$	$-\ \ -$	$\vert$		$\vert$	$+\ \ +$	$\vert$	$-\ \ -$	$\vert$	$-\ \ -\ \ -\ \ -$	$\vert$	$+\ \ +$

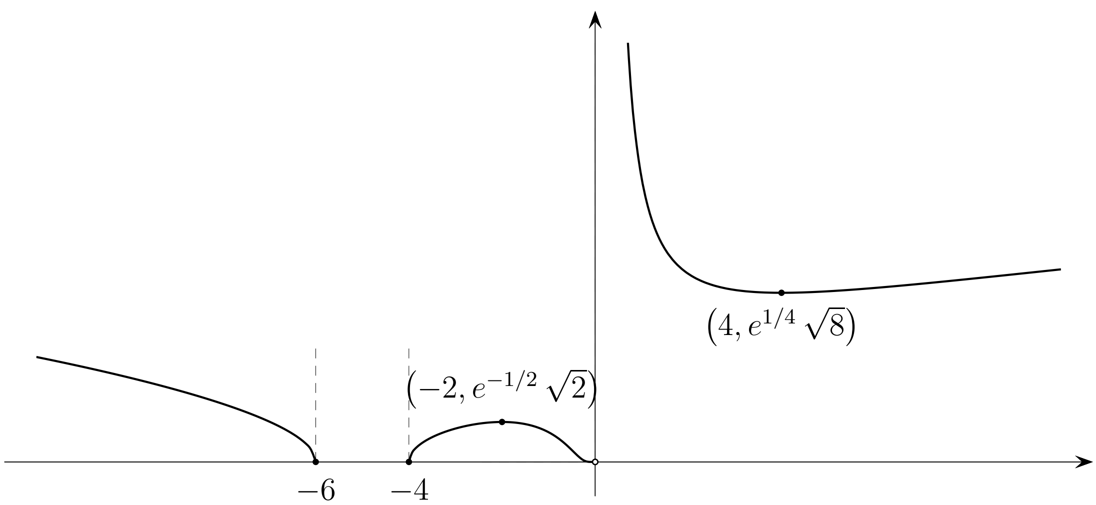
Pertanto f è crescente in $[-4,-2]$ e in $[4,+\infty[$ ed è decrescente in $]-\infty,-6]$, in $[-2,0[$ e in $]0,4]$.

Inoltre -6 , -4 e 4 sono punti di minimo locale per f , -2 è un punto di massimo locale.

Sappiamo che $f(-6)=f(-4)=0$, inoltre:

$$f(-2) = e^{-1/2}\sqrt{|-2+5|-1} = e^{-1/2}\sqrt{2}\,,$$
$$f(4) = e^{1/4}\sqrt{|4+5|-1} = e^{1/4}\sqrt{8}\,.$$

Il grafico di f è quindi, approssimativamente, il seguente.



(52) Poiché l'argomento della radice è sempre non negativo, si ha $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$.

Cerchiamo le intersezioni del grafico con gli assi cartesiani.

Si ha $f(0) = \sqrt{|0-0|} + 0 = 0$.

Inoltre $f(x) = 0$ se e solo se $\sqrt{|x^2 - 2x|} = x$, che equivale a $|x^2-2x| = x^2$ purché sia $x \geq 0$. Risulta $x^2 - 2x \geq 0$ se e solo se $x \in]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$, pertanto per tali x l'equazione $|x^2 - 2x| = x^2$ equivale a $x^2 - 2x = x^2$, che è verificata per $x = 0$. Se invece $x \in]0, 2[$, allora l'equazione $|x^2 - 2x| = x^2$ equivale a $-x^2 + 2x = x^2$, cioè $2x^2 - 2x = 0$ che, nell'intervallo considerato, è verificata per $x = 1$. Pertanto $f(x) = 0$ per $x = 0$ e $x = 1$.

La funzione f è somma di composizione di funzioni continue e quindi è continua.

Studiamo il comportamento di f negli estremi del dominio.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left|1 - \frac{2}{x}\right|} - x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{1 - \frac{2}{x}} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(-x\left(1 - \frac{1}{2}\frac{2}{x} + o(x^{-1})\right) - x\right) = \lim_{x\to-\infty}\big(-x + 1 + o(1) - x\big) =$$

$$= +\infty\,,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left|1 - \frac{2}{x}\right|} - x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{1 - \frac{2}{x}} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(x\left(1 - \frac{1}{2}\frac{2}{x} + o(x^{-1})\right) - x\right) = \lim_{x\to+\infty}\big(x - 1 + o(1) - x\big) = -1\,.$$

Pertanto la retta di equazione $y = -1$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ e la retta di equazione $y = -2x+1$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$, come si prova facilmente esaminando i passaggi fatti per calcolare il limite.

La funzione f è somma e composizione di funzioni che sono derivabili in tutto il dominio, con l'esclusione delle funzioni radice quadrata e valore assoluto che non sono derivabili in 0. Perciò f è derivabile in ogni punto del suo dominio in cui non si annullano né l'argomento del valore assoluto né l'argomento della radice; tali argomenti si annullano per gli x tali che $x^2 - 2x = 0$, cioè per $x = 0$ e $x = 2$. Quindi f è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{0, 2\}$, mentre dobbiamo studiare a parte la derivabilità della funzione in 0 e in 2.

Per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ si ha

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{|x^2 - 2x|}}\operatorname{sgn}(x^2 - 2x)\,(2x - 2) - 1 = \frac{(x - 1)\operatorname{sgn}(x^2 - 2x)}{\sqrt{|x^2 - 2x|}} - 1\,.$$

Per studiare f' osserviamo che si ha $x^2 - 2x > 0$ se e solo se $x > 2$ o $x < 0$, quindi risulta $\operatorname{sgn}(x^2 - 2x) = 1$ per $x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$ e $\operatorname{sgn}(x^2 - 2x) = -1$ per $x \in]0, 2[$, pertanto il comportamento della derivata nei punti 0 e 2 è il seguente:

$$\lim_{x\to0^-} f'(x) = \lim_{x\to0^-}\left(\frac{(x - 1)}{\sqrt{|x^2 - 2x|}} - 1\right) = -\infty\,,$$

$$\lim_{x\to0^+} f'(x) = -\lim_{x\to0^+}\left(\frac{(x - 1)}{\sqrt{|x^2 - 2x|}} - 1\right) = +\infty\,,$$

$$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = -\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{(x-1)}{\sqrt{|x^2-2x|}}-1\right) = -\infty\,,$$
$$\lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to 2^+}\left(\frac{(x-1)}{\sqrt{|x^2-2x|}}-1\right) = +\infty\,;$$

poiché il limite destro o sinistro della derivata (se esiste), coincide con il corrispondente limite del rapporto incrementale, si deduce che f non è derivabile né in 0 né in 2. Sappiamo che $f(0)=0$, inoltre

$$f(2)=\sqrt{|2^2-2\cdot 2|}-2=-2\,.$$

Studiamo il segno della derivata. La disequazione $f'(x)\geq 0$ è abbastanza complessa, è opportuno determinare anzitutto gli zeri della derivata e utilizzare questa informazione per studiare il segno.

Se $x\in\mathbb{R}\setminus\{\,0,2\,\}$, si ha $f'(x)=0$ se e solo se

$$\frac{(x-1)\,\mathrm{sgn}(x^2-2x)}{\sqrt{|x^2-2x|}}=1\,,$$

pertanto deve essere $(x-1)\,\mathrm{sgn}(x^2-2x)>0$. Il segno di questo prodotto risulta dal seguente schema

		0		1		2	
$x-1$	$-\;-\;-\;-\;-$		$-\;-$		$+\;+$		$+\;+\;+\;+\;+$
$\mathrm{sgn}(x^2-2x)$	$+\;+\;+\;+\;+$		$-\;-$		$-\;-$		$+\;+\;+\;+\;+$
$(x-1)\,\mathrm{sgn}(x^2-2x)$	$-\;-\;-\;-\;-$		$+\;+$		$-\;-$		$+\;+\;+\;+\;+$

Quindi se $f'(x)=0$ risulta $x\in\,]0,1[\cup]2,+\infty[$. Per x in tale insieme si ha $f'(x)=0$ se e solo se

$$\frac{(x-1)^2}{|x^2-2x|}=1\,,$$

cioè

$$x^2-2x+1=|x^2-2x|\,.$$

Se $x\in\,]0,1[$ si ha $x^2-2x<0$, quindi l'equazione diventa

$$x^2-2x+1=-x^2+2x\,,$$

cioè

$$2x^2-4x+1=0\,,$$

che è verificata per

$$x=\frac{2\pm\sqrt{2^2-2}}{2}=1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Risulta $1-\bigl(1/\sqrt{2}\bigr)\in\,]0,1[$ e $1+\bigl(1/\sqrt{2}\bigr)\notin\,]0.1[$. Se $x\in\,]2,+\infty[$ si ha $x^2-2x>0$, quindi l'equazione diventa

$$x^2-2x+1=x^2-2x\,,$$

che non ha soluzione. Perciò $f'(x)=0$ se e solo se $x=1-\bigl(1/\sqrt{2}\bigr)$.

Studiamo il segno della derivata. La funzione f' è continua e diversa da 0 in $]-\infty, 0[$, quindi, per il teorema di Bolzano, in tale intervallo f si mantiene sempre positiva o sempre negativa. Si ha $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\infty$, perciò f' è negativa in $]-\infty, 0[$. In $]0, 2[$ la derivata è continua, si annulla solo in $1 - \bigl(1/\sqrt{2}\bigr)$, dunque, ancora per il teorema di Bolzano, essa ha segno costante in $\bigl]0, 1 - \bigl(1/\sqrt{2}\bigr)\bigr[$ e in $\bigl]1 - \bigl(1/\sqrt{2}\bigr), 2\bigr[$. Poiché $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 2^-} f'(x) = -\infty$, la funzione f' è positiva nel primo intervallo e negativa nel secondo. Infine in $]2, +\infty[$ f' è continua e non si annulla, quindi ha segno costante, poiché $\lim_{x\to 2^+} f'(x) = +\infty$ essa è positiva.

Il segno di f' è quindi rappresentato dal seguente schema:

$$\begin{array}{llllllllllllllllll}
 & & & & & 0 & 1-\frac{1}{\sqrt{2}} & & & & & & & 2 & & & & \\
f'(x) & - & - & - & - & | + | & - & - & - & - & - & - & - & | & + & + & + & +
\end{array}$$

Pertanto f è crescente in $\bigl[0, 1 - \bigl(1/\sqrt{2}\bigr)\bigr]$ e in $[2, +\infty[$ ed è decrescente in $]-\infty, 0]$ e in $\bigl[1 - \bigl(1/\sqrt{2}\bigr), 2\bigr]$. Da ciò segue che 0 e 2 sono punti di minimo locale per f, $1 - \bigl(1/\sqrt{2}\bigr)$ è punto di massimo locale.

Il valore della funzione in 0 e in 2 è già stato calcolato;

$$\begin{aligned}
f\biggl(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\biggr) &= \sqrt{\left|\biggl(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\biggr)^2 - 2\biggl(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\biggr)\right|} - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \\
&= \sqrt{\left|1 - 2\,\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} - 2 + 2\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right|} - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\biggl(-\frac{1}{2}\biggr)} - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \\
&= -1 + \sqrt{2}\,.
\end{aligned}$$

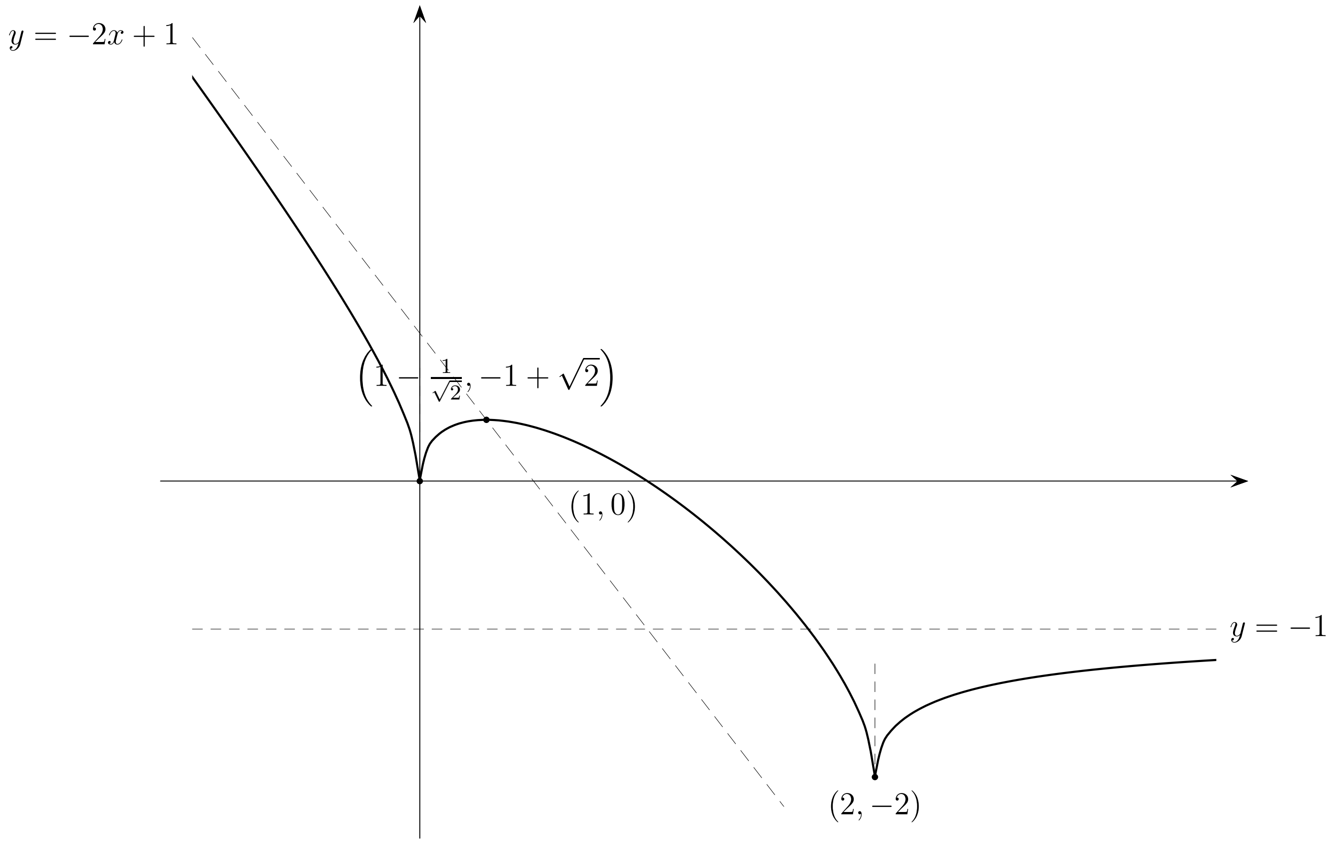
Studiamo la convessità di f mediante la derivata seconda. Se $x \in \operatorname{dom} f'$ gli argomenti delle funzioni radice e valore assoluto che compaiono nell'espressione di f' sono diversi da 0, quindi f' è derivabile in ogni punto del suo dominio, dunque $\operatorname{dom} f'' = \operatorname{dom} f' = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$. Per x in tale insieme, si ha

$$\begin{aligned}
&f''(x) = \\
&= \left(\operatorname{sgn}(x^2 - 2x)\,\sqrt{|x^2 - 2x|} - (x - 1)\operatorname{sgn}(x^2 - 2x)\,\frac{(2x - 2)\operatorname{sgn}(x^2 - 2x)}{2\sqrt{|x^2 - 2x|}}\right) \cdot \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \frac{1}{\bigl(\sqrt{|x^2 - 2x|}\,\bigr)^2} = \\
&= \frac{\operatorname{sgn}(x^2 - 2x)\bigl(\sqrt{|x^2 - 2x|}\bigr)^2 - (x - 1)\operatorname{sgn}(x^2 - 2x)(x - 1)\operatorname{sgn}(x^2 - 2x)}{\bigl(\sqrt{|x^2 - 2x|}\,\bigr)^3} = \\
&= \frac{\operatorname{sgn}(x^2 - 2x)\,|x^2 - 2x| - (x - 1)^2}{|x^2 - 2x|^{3/2}} = \frac{x^2 - 2x - (x^2 - 2x + 1)}{|x^2 - 2x|^{3/2}} = \frac{-1}{|x^2 - 2x|^{3/2}}\,,
\end{aligned}$$

quindi, $\forall x \in \operatorname{dom} f''$, si ha $f''(x) < 0$, pertanto f è concava in ogni intervallo il cui interno è contenuto in $\operatorname{dom} f''$, in particolare f è concava in $]-\infty, 0]$, in $[0, 2]$ e in $[2, +\infty[$.

Poiché f'' è sempre negativa ogni punto in cui f' si annulla è un punto di massimo locale per f ; sappiamo che f' si annulla solo in $1-\left(1/\sqrt{2}\right)$, è così confermato che tale punto è di massimo locale.

Il grafico di f è quindi, approssimativamente, il seguente.



(53) Poiché $\sin x$ compare al denominatore, il dominio naturale di f è costituito dagli x tali che $\sin x \neq 0$. Se $x \in [-\pi,\pi]$ si ha $\sin x = 0$ per $x=0$, $x=\pi$ e $x=-\pi$. Pertanto

$$\operatorname{dom} f \cap [-\pi,\pi] = \left]-\pi,0\right[\cup \left]0,\pi\right[\,.$$

La funzione f è continua, perché prodotto di composizioni di funzioni continue.

La funzione non interseca l'asse delle ordinate, perché $0 \notin \operatorname{dom} f$. Inoltre f non si annulla, perché l'esponenziale è sempre positivo e il seno si annulla in punti non appartenenti al dominio.

Studiamo il comportamento negli estremi del dominio. Si ha

$$\lim_{x\to-\pi^+} f(x) = \lim_{x\to-\pi^+} \sqrt{|\sin x|} \lim_{x\to-\pi^+} \exp\left(\frac{1}{4\sin x}\right) = 0\cdot 0 = 0\,,$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \sqrt{|\sin x|} \lim_{x\to 0^-} \exp\left(\frac{1}{4\sin x}\right) = 0\cdot 0 = 0\,.$$

Per $x \to 0^+$ si ha $\sqrt{\sin x} \to 0$ e $\exp\bigl(1/(4\sin x)\bigr) \to +\infty$, pertanto il limite si presente in forma indeterminata. Ponendo $y = 1/(4\sin x)$, risulta

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{|\sin x|}\ \exp\left(\frac{1}{4\sin x}\right) = \lim_{y\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{4y}}\ e^y = \frac{1}{2}\,\frac{e^y}{\sqrt{y}} = +\infty\,.$$

Analogamente $\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x) = +\infty$.

Pertanto f ha gli asintoti verticali $x = 0$ e $x = \pi$.

In ogni punto di $\operatorname{dom} f$ l'argomento del valore assoluto è non nullo, lo stesso vale per l'argomento della radice, quindi f è derivabile. Si ha

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\cos x\ \operatorname{sgn}(\sin x)}{2\sqrt{|\sin x|}}\ \exp\left(\frac{1}{4\sin x}\right) + \sqrt{|\sin x|}\ \exp\left(\frac{1}{4\sin x}\right)\frac{1}{4}\left(-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right) = \\
&= \exp\left(\frac{1}{4\sin x}\right)\left(\frac{\cos x\ \operatorname{sgn}(\sin x)}{2\sqrt{|\sin x|}} - \frac{1}{4}\,\frac{\cos x}{|\sin x|^{3/2}}\right) = \\
&= \frac{1}{4|\sin x|^{3/2}}\ \exp\left(\frac{1}{4\sin x}\right)\bigl(2\cos x\,|\sin x|\operatorname{sgn}(\sin x) - \cos x\bigr) = \\
&= \frac{1}{4|\sin x|^{3/2}}\ \exp\left(\frac{1}{4\sin x}\right)\cos x\,(2\sin x - 1)\,.
\end{aligned}$$

Si ha $f'(x) \geq 0$ se e solo se $\cos x\,(2\sin x - 1) \geq 0$. Per risolvere questa disequazione osserviamo che in $[-\pi,\pi]$ risulta $\sin x = 1/2$ per $x = \pi/6$ e per $x = 5\pi/6$, da ciò si ricava facilmente che si ha $\sin x \geq 1/2$ per $x \in [\pi/6, 5\pi/6]$. Il segno di f' è quindi rappresentato dal seguente schema:

$$\begin{array}{rccccccccccccc}
 & -\pi & & -\frac{\pi}{2} & & 0 & & \frac{\pi}{6} & & \frac{\pi}{2} & & \frac{5}{6}\pi & & \pi \\
2\sin x - 1 & | & -\ -\ -\ - & | & -\ -\ -\ - & | & - & | & +\ + & | & +\ + & | & - & | \\
\cos x & | & -\ -\ -\ - & | & +\ +\ +\ + & | & + & | & +\ + & | & -\ - & | & - & | \\
f'(x) & | & +\ +\ +\ + & | & -\ -\ -\ - & | & - & | & +\ + & | & -\ - & | & + & |
\end{array}$$

Pertanto f è crescente in $]-\pi,-\pi/2]$, in $[\pi/6,\pi/2]$ e in $[5\pi/6,\pi[$ ed è decrescente in $[-\pi/2,0[$, in $]0,\pi/6]$ e in $[\pi/2,5\pi/6]$, quindi $-\pi/2$ e $\pi/2$ sono punti di massimo locale.

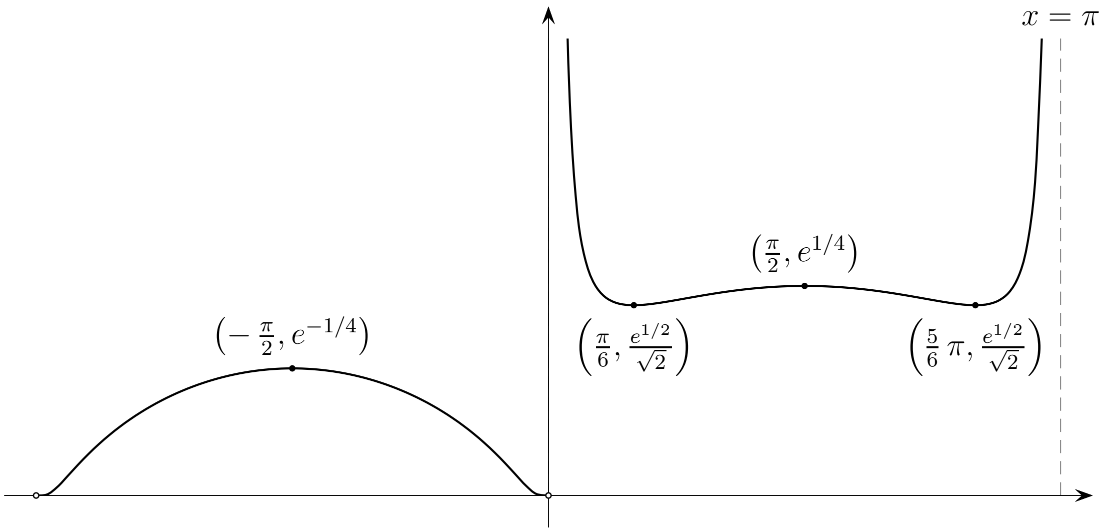
Inoltre $\pi/6$ e $5\pi/6$ sono punti di minimo locale. In tali punti si ha

$$\begin{aligned}
f\left(-\frac{\pi}{2}\right) &= \sqrt{\left|\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right|}\ \exp\left(\frac{1}{4\sin(-\pi/2)}\right) = \sqrt{|-1|}\ \exp\left(\frac{1}{-4}\right) = e^{-1/4}\,, \\
f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \sqrt{\left|\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right|}\ \exp\left(\frac{1}{4\sin(\pi/6)}\right) = \sqrt{\left|\frac{1}{2}\right|}\ \exp\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{1/2}}{\sqrt{2}}\,, \\
f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \sqrt{\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|}\ \exp\left(\frac{1}{4\sin(\pi/2)}\right) = \sqrt{|1|}\ \exp\left(\frac{1}{4}\right) = e^{1/4}\,, \\
f\left(\frac{5}{6}\pi\right) &= \sqrt{\left|\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right|}\ \exp\left(\frac{1}{4\sin(5\pi/6)}\right) = \sqrt{\left|\frac{1}{2}\right|}\ \exp\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{1/2}}{\sqrt{2}}\,.
\end{aligned}$$

Poiché $f(x)$ ha limite reale per $x \to -\pi^+$ e per $x \to 0^-$, è utile calcolare i corrispondenti limiti della derivata. Per $x \to 0^-$ e per $x \to -\pi^-$ il limite di $f'(x)$ si presenta in forma indeterminata. Ponendo $y = 1/(4\sin x)$, si ha

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{4|\sin x|^{3/2}} \exp\left(\frac{1}{4\sin x}\right) \lim_{x\to 0^-} \big(\cos x\,(2\sin x - 1)\big) =$$
$$= -\lim_{y\to-\infty} \frac{1}{4|1/4y|^{3/2}}\, e^y = -\lim_{y\to-\infty} 2|y|^{3/2} e^y = 0\,.$$
$$\lim_{x\to -\pi^+} f'(x) = \lim_{x\to -\pi^+} \frac{1}{4|\sin x|^{3/2}} \exp\left(\frac{1}{4\sin x}\right) \lim_{x\to -\pi^+} \big(\cos x\,(2\sin x - 1)\big) =$$
$$= \lim_{y\to-\infty} \frac{1}{4|1/4y|^{3/2}}\, e^y = \lim_{y\to-\infty} 2|y|^{3/2} e^y = 0\,.$$

Pertanto il grafico di f è, approssimativamente, il seguente.



(54) Poiché la funzione tangente ha dominio $\mathbb{R} \setminus \{\,(\pi/2) + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, affinché x appartenga a $\operatorname{dom} f$ bisogna che esso appartenga al dominio della funzione tangente e che non si annulli il denominatore $-2\tan x + \sin(2x)$. Quindi deve essere $x \neq (\pi/2) + k\pi$, qualunque sia $k \in \mathbb{Z}$, e $-2\tan x + \sin(2x) \neq 0$. Poiché

$$-2\tan x + \sin(2x) = -2\,\frac{\sin x}{\cos x} + 2\sin x\,\cos x = \frac{-2\sin x + 2\sin x\,\cos^2 x}{\cos x} = \frac{-2\sin^3 x}{\cos x}\,,$$

si ha $-2\tan x + \sin(2x) = 0$ se e solo se $\sin x = 0$, cioè $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Quindi $\operatorname{dom} f$ è costituito dai reali che non sono né multipli interi di π né somma di $\pi/2$ con multipli interi di π. Si ha quindi

$$\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\,\frac{\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Dalla periodicità delle funzioni seno, coseno e tangente segue che f è periodica di periodo 2π. Inoltre f è dispari, perché, $\forall x \in \operatorname{dom} f$, si ha

$$f(-x) = \frac{2\cos^2(-x) - 1}{-2\tan(-x) + \sin(-2x)} = \frac{2\cos^2 x - 1}{2\tan x - \sin(2x)} = -f(x)\,.$$

Come richiesto studiamo la funzione in $[-\pi, \pi]$. Essa è dispari, quindi se la si studia in $[0, \pi]$, per simmetria si può ricavare il comportamento in tutto $[-\pi, \pi]$. Osserviamo che

$$\operatorname{dom} f \cap [0, \pi] = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[.$$

La funzione f è continua e derivabile, perché quoziente di somma di funzioni continue e derivabili.

È utile un'espressione di f che contenga solo le funzioni seno e coseno. Si ha:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2\cos^2 x - 1}{-2(\sin x/\cos x) + 2\sin x\cos x} = \frac{\cos x(2\cos^2 x - 1)}{-2\sin x + 2\sin x\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos x\,(1 - 2\cos^2 x)}{2\sin^3 x} . \end{aligned}$$

Cerchiamo le intersezioni del grafico di f con gli assi cartesiani. Poiché $0 \notin \operatorname{dom} f$ non vi sono intersezioni con l'asse delle ordinate. Poiché per $x \in \operatorname{dom} f$ si ha $\cos x \neq 0$, $f(x)$ si annulla se e solo se $1 - 2\cos^2 x = 0$, cioè se $\cos x = \pm 1/\sqrt{2}$. Se $x \in [0, \pi]$ ciò avviene per $x = \pi/4$ e $x = 3\pi/4$.

Poiché per $x \in]0, \pi[$ si ha $\sin x > 0$, il segno di $f(x)$ coincide con il segno del numeratore, quindi risulta dal seguente schema

	0 — $\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$ — $\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$ — $\frac{3}{4}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$ — π
$\cos x$	+ + + +	+ + + +	− − − −	− − − −
$1 - 2\cos^2 x$	− − − −	+ + + +	+ + + +	− − − −
$f(x)$	− − − −	+ + + +	− − − −	+ + + +

Pertanto f è positiva in $]\pi/4, \pi/2[\cup]3\pi/4, \pi[$ ed è negativa in $]0, \pi/4[\cup]\pi/2, 3\pi/4[$.

Studiamo il comportamento di f negli estremi degli intervalli che costituiscono il dominio.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x\,(1-2\cos^2 x)}{2\sin^3 x} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2\sin^3 x} = -\infty , \\ \lim_{x\to \pi/2^-} f(x) &= \lim_{x\to \pi/2^-} \frac{\cos x\,(1-2\cos^2 x)}{2\sin^3 x} = \frac{0\cdot(1-2\cdot 0)}{2\cdot 1} = 0 , \\ \lim_{x\to \pi/2^+} f(x) &= \lim_{x\to \pi/2^+} \frac{\cos x\,(1-2\cos^2 x)}{2\sin^3 x} = \frac{0\cdot(1-2\cdot 0)}{2\cdot 1} = 0 , \\ \lim_{x\to \pi^-} f(x) &= \lim_{x\to \pi^-} \frac{\cos x\,(1-2\cos^2 x)}{2\sin^3 x} = \lim_{x\to \pi^-} \frac{1}{2\sin^3 x} = +\infty . \end{aligned}$$

Le rette $x = 0$ e $x = \pi$ sono quindi asintoti verticali per f.

La funzione f è derivabile e, per $x \in \operatorname{dom} f$, si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\,\frac{(-\sin x + 6\cos^2 x\sin x)\sin^3 x - 3\sin^2 x\cos x\,(\cos x - 2\cos^3 x)}{(\sin^3 x)^2} = \\ &= \frac{(-\sin x + 6\cos^2 x\sin x)\sin x - 3\cos x\,(\cos x - 2\cos^3 x)}{2\sin^4 x} = \end{aligned}$$

$$= \frac{-\sin^2 x + 6\cos^2 x \sin^2 x - 3\cos^2 x + 6\cos^4 x}{2\sin^4 x} =$$
$$= \frac{-\sin^2 x + 6(1-\sin^2 x)\sin^2 x - 3(1-\sin^2 x) + 6(1-\sin^2 x)^2}{2\sin^4 x} =$$
$$= \frac{-\sin^2 x + 6\sin^2 x - 6\sin^4 x - 3 + 3\sin^2 x + 6 - 12\sin^2 x + 6\sin^4 x}{2\sin^4 x} =$$
$$= \frac{-4\sin^2 x + 3}{2\sin^4 x}\,.$$

Il denominatore è sempre positivo, quindi il segno della derivata prima dipende esclusivamente dal segno del numeratore. Si ha $f'(x) \geq 0$ se e solo se $\sin^2 x \leq 3/4$. Poiché nell'intervallo $[0,\pi]$ la funzione seno è non negativa, tale disequazione equivale a $\sin x \leq \sqrt{3}/2$; quest'ultima disuguaglianza è verificata se $x \leq \pi/3$ oppure se $x \geq 2\pi/3$ (continuiamo a considerare solo i valori di x in $[0,\pi]$). Il segno di f' è quindi rappresentato dal seguente schema:

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & 0 & & \frac{\pi}{3} & & \frac{\pi}{2} & & \frac{2}{3}\pi & & \pi \\
f'(x) & | & + \; + \; + \; + \; + & | & - \quad - & | & - \quad - & | & + \; + \; + \; + \; + & |
\end{array}$$

La funzione f è quindi crescente negli intervalli $]0,\pi/3[$ e $]2\pi/3,\pi[$ e decrescente negli intervalli $]\pi/3,\pi/2[$ e $]\pi/2,2\pi/3[$; da ciò segue che $\pi/3$ è un punto di massimo locale per f, $2\pi/3$ è un punto di minimo locale per f.

Poiché che f ha limite finito per x che tende a $\pi/2$, per conoscere l'andamento del grafico vicino a tale punto è utile calcolare il limite di f'. Si ha:

$$\lim_{x\to\pi/2} f'(x) = \lim_{x\to\pi/2} \frac{-4\sin^2 x + 3}{2\sin^4 x} = \frac{-4+3}{2} = -\frac{1}{2}\,.$$

Calcoliamo il valore di f negli estremanti locali.

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\cos(\pi/3)\big(1-2\cos^2(\pi/3)\big)}{2\sin^3(\pi/3)} = \frac{(1/2)\big(1-2(1/2)^2\big)}{2\big(\sqrt{3}/2\big)^3} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\,,$$
$$f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\cos(2\pi/3)\big(1-2\cos^2(2\pi/3)\big)}{2\sin^3(2\pi/3)} = \frac{(-1/2)\big(1-2(-1/2)^2\big)}{2\big(\sqrt{3}/2\big)^3} = -\frac{1}{3\sqrt{3}}\,.$$

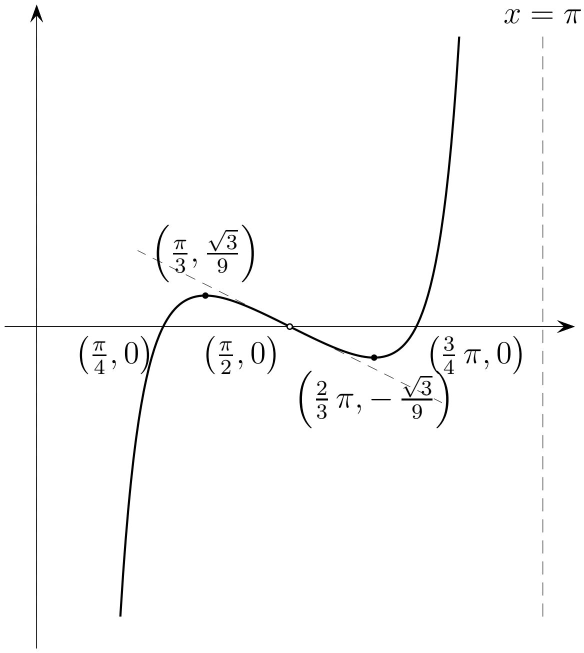
Studiamo la convessità. La funzione f' è derivabile e, per $x \in \operatorname{dom} f$, si ha

$$f''(x) = \frac{1}{2}\,\frac{-8\sin x\cos x\sin^4 x - 4\sin^3 x\cos x(-4\sin^2 x + 3)}{(\sin^4 x)^2} =$$
$$= \frac{-8\sin^2 x\cos x + 16\cos x\sin^2 x - 12\cos x}{2\sin^5 x} = \frac{8\sin^2 x\cos x - 12\cos x}{2\sin^5 x} =$$
$$= \frac{2\cos x(2\sin^2 x - 3)}{\sin^5 x}\,.$$

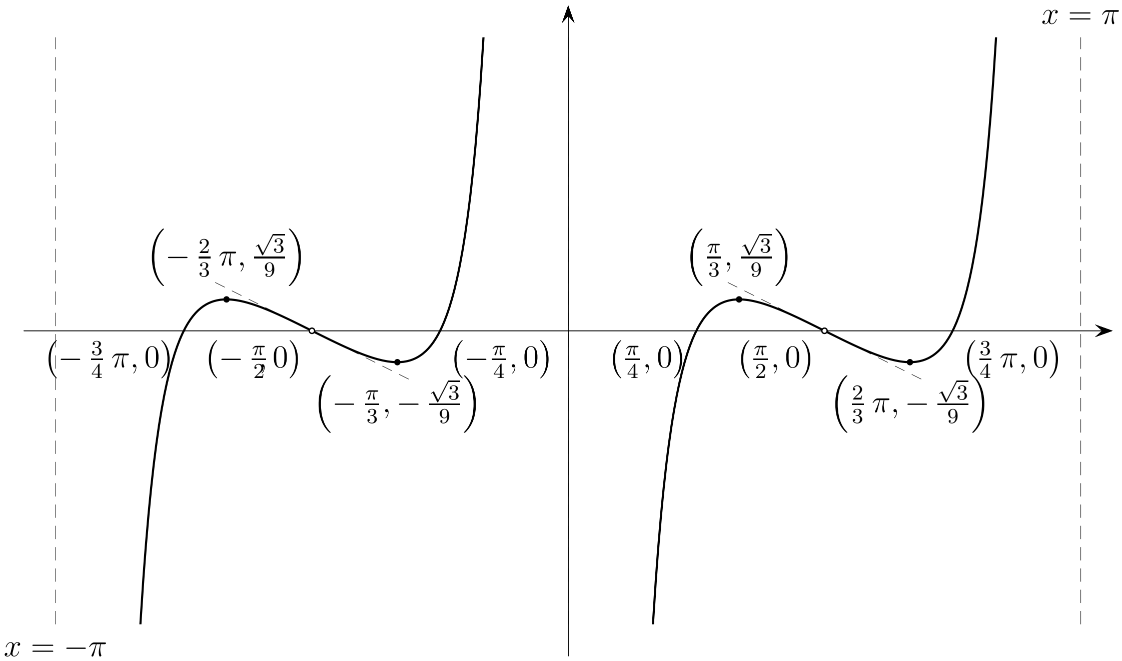
Poiché $\sin x$ è compreso tra -1 e 1, si ha sempre $2\sin^2 x - 3 < 0$, inoltre in $]0,\pi[$ si ha $\sin x > 0$, quindi $f''(x) > 0$ se e solo se $\cos x < 0$, che è vero per $x \in\,]\pi/2,\pi[$. Quindi $f''(x)$ è positivo per $x \in\,]\pi/2,\pi[$ e negativo per $x \in\,]0,\pi/2[$.

Perciò f è convessa in $]\pi/2,\pi[$ ed è concava in $]0,\pi/2[$.

Il grafico di f ristretta a $\operatorname{dom} f \cap [0,\pi]$ è quindi, approssimativamente, il seguente:



Poiché f è dispari, si può facilmente ottenere il grafico di f ristretta a $\operatorname{dom} f \cap [-\pi, 0]$: esso è il simmetrico rispetto all'origine del grafico visto sopra. Perciò il grafico di f ristretta a $\operatorname{dom} f \cap [-\pi, \pi]$ è:



Osserviamo che questo grafico suggerisce che f, oltre a essere periodica di periodo 2π, sia anche periodica di periodo π; verifichiamo se ciò è vero. Anzitutto si ha

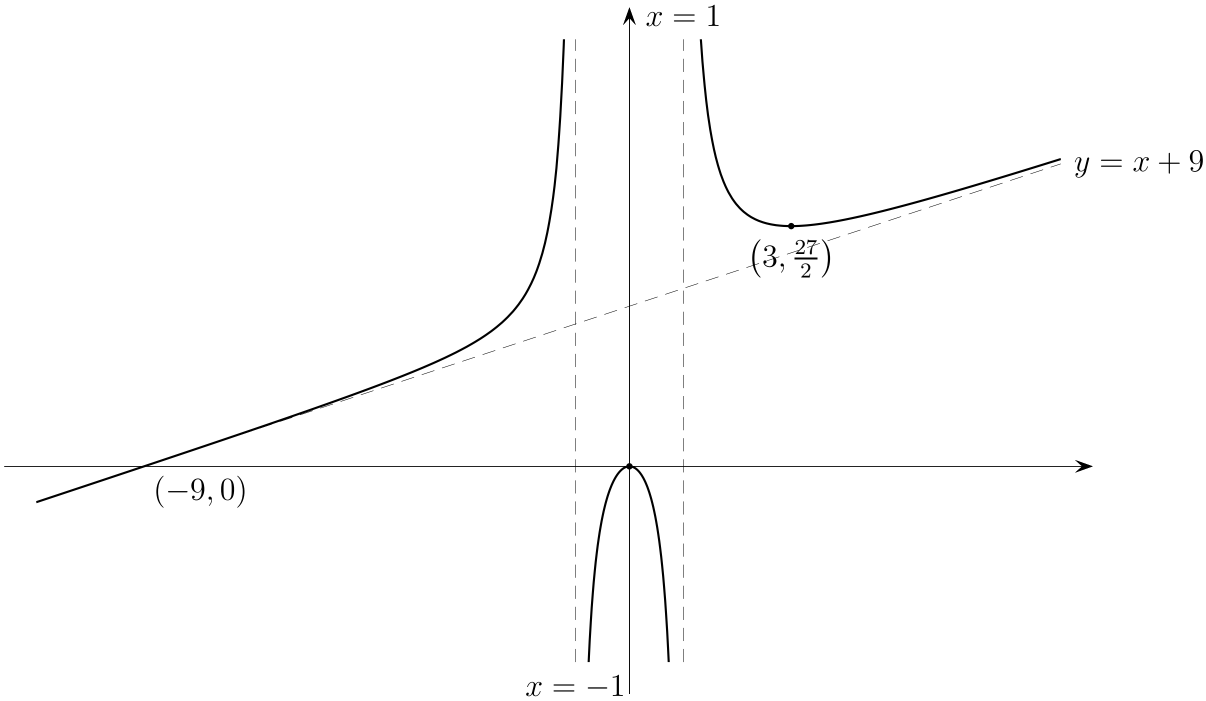
$$x \in \operatorname{dom} f \iff \forall k \in \mathbb{Z},\ x \neq k\,\frac{\pi}{2} \iff \forall k \in \mathbb{Z},\ x+\pi \neq k\pi/2 \iff x+\pi \in \operatorname{dom} f\,,$$

inoltre se $x \in \operatorname{dom} f$ allora

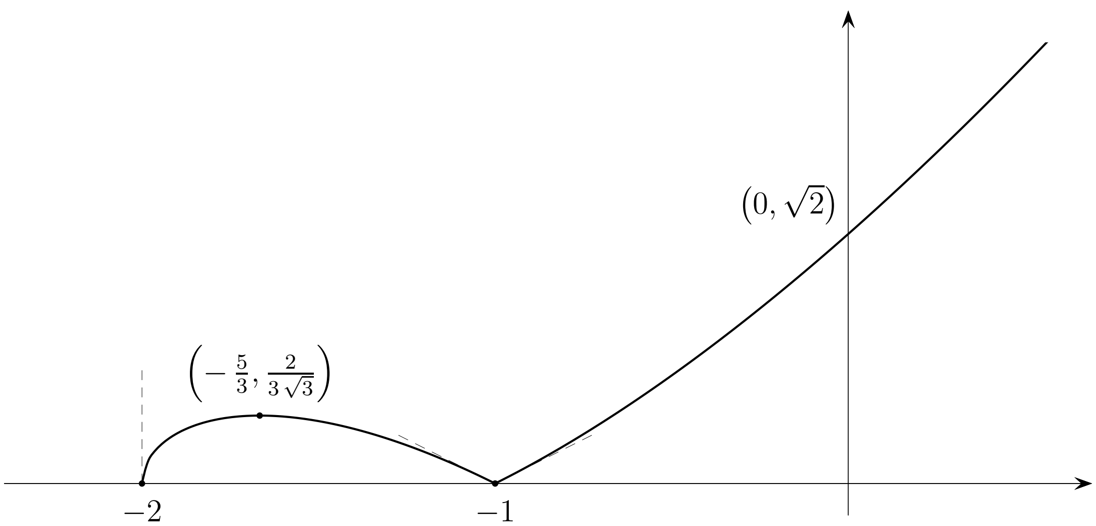
$$f(x+\pi) = \frac{2\cos^2(x+\pi) - 1}{-2\tan(x+\pi) + \sin\bigl(2(x+\pi)\bigr)} = \frac{2(-\cos x)^2 - 1}{-2\tan x + \sin(2x)} = f(x)\,;$$

quindi f è periodica di periodo π .

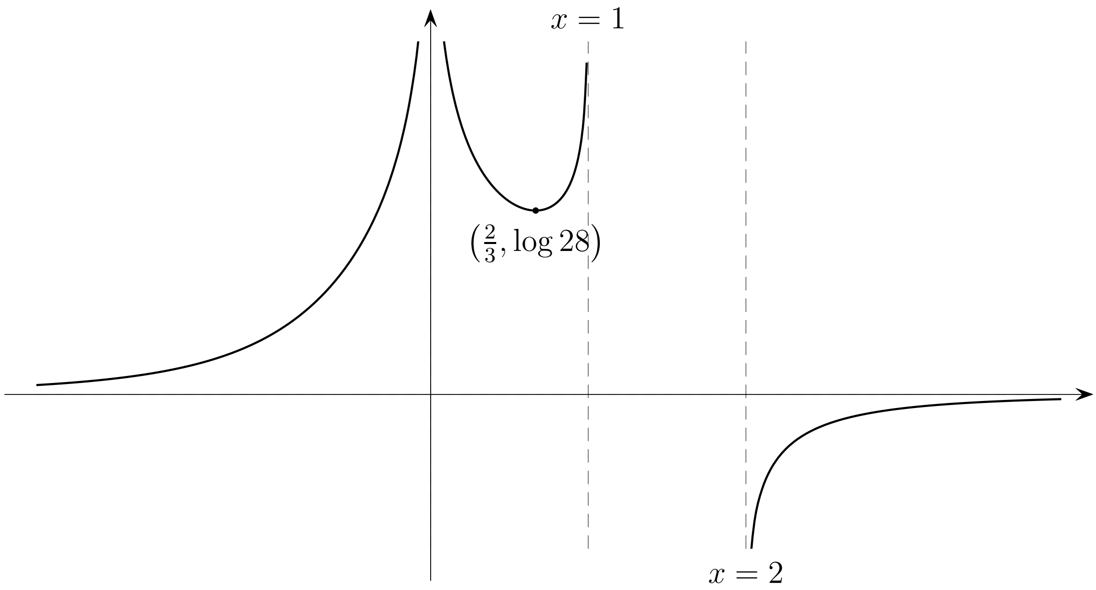
(55)



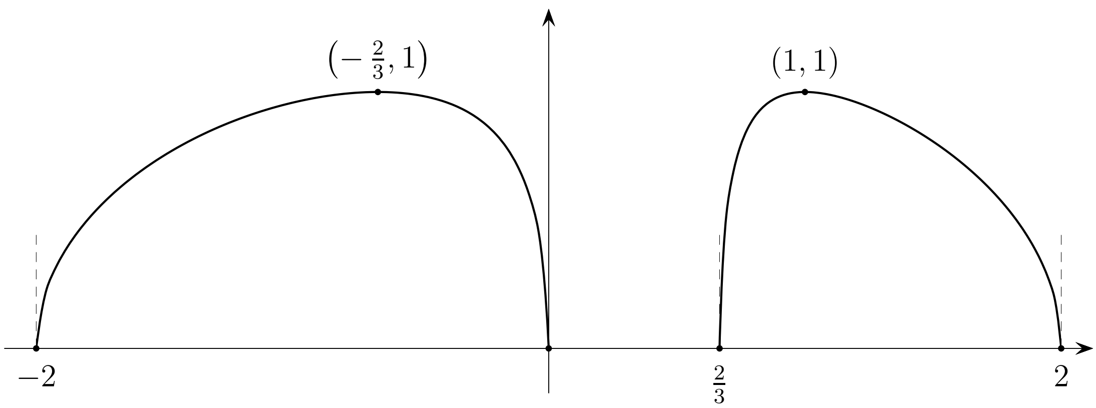
(56)



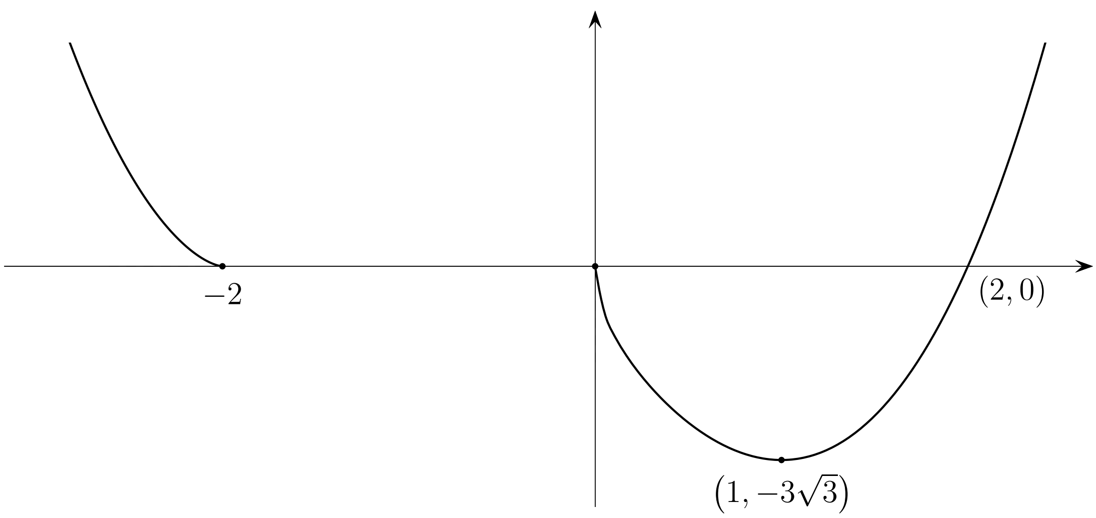
(57)


$x = 1$
$\left(\frac{2}{3}, \log 28\right)$
$x = 2$

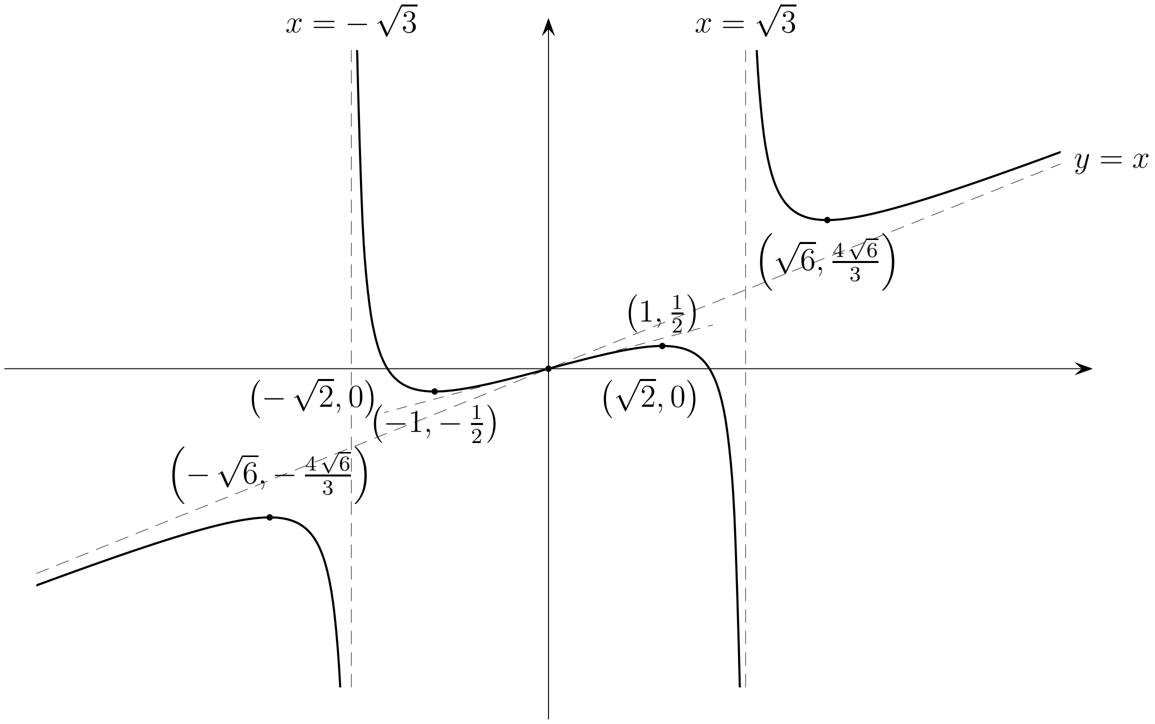
(58)


$\left(-\frac{2}{3}, 1\right)$
$(1, 1)$
-2
$\frac{2}{3}$
2

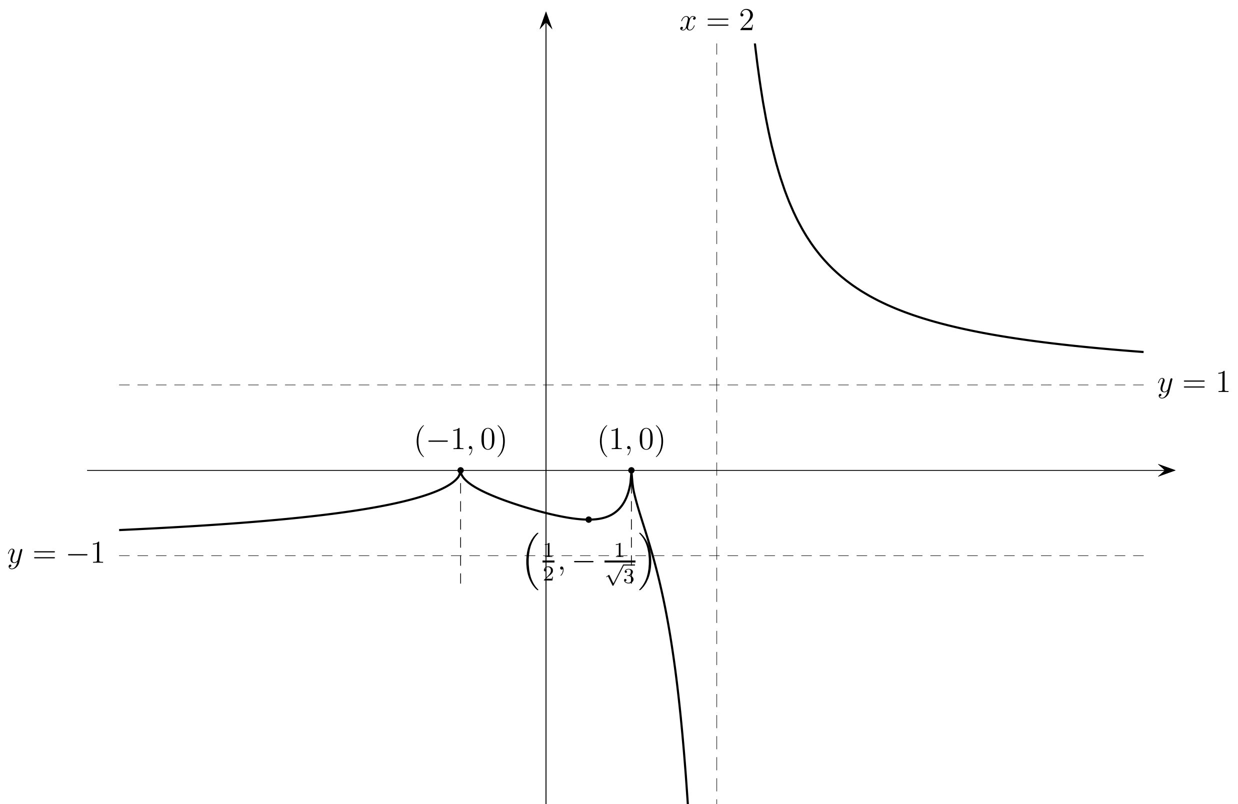
(59)


-2
$(2, 0)$
$\left(1, -3\sqrt{3}\right)$

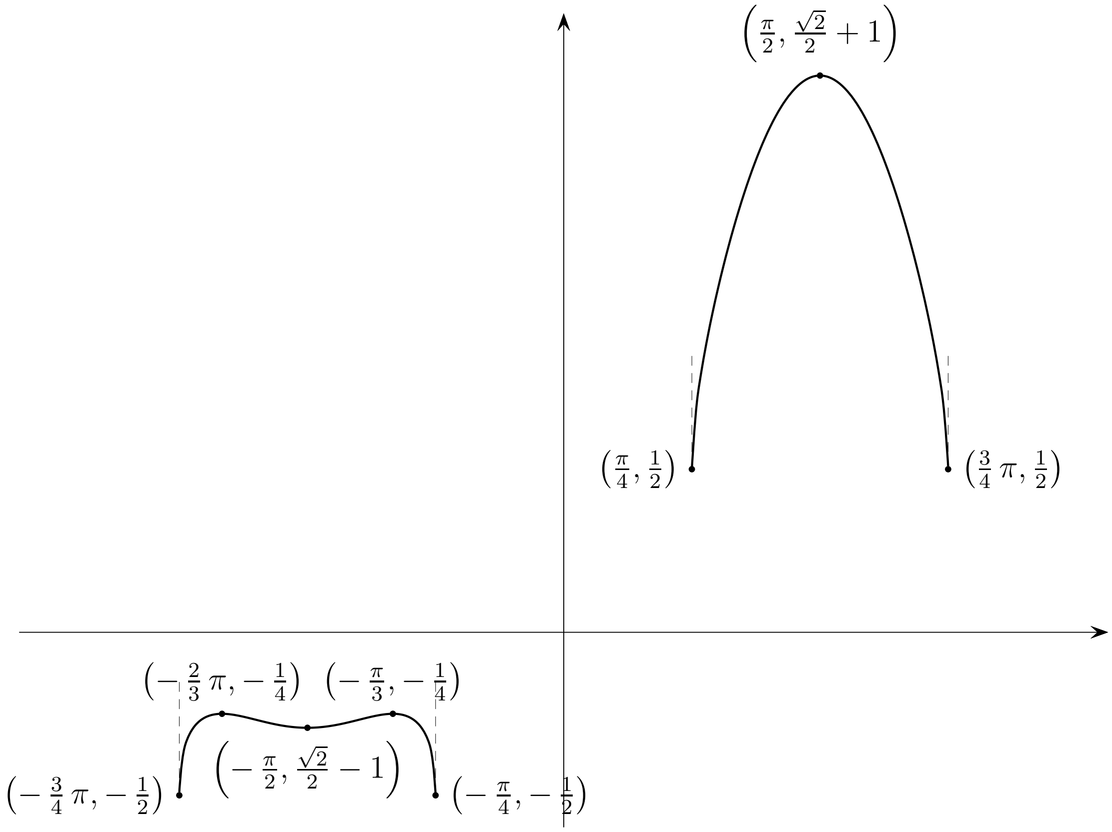
(60)


$x = -\sqrt{3}$
$x = \sqrt{3}$
$y = x$
$\left(\sqrt{6}, \frac{4\sqrt{6}}{3}\right)$
$\left(1, \frac{1}{2}\right)$
$\left(-\sqrt{2}, 0\right)$
$\left(\sqrt{2}, 0\right)$
$\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$
$\left(-\sqrt{6}, -\frac{4\sqrt{6}}{3}\right)$

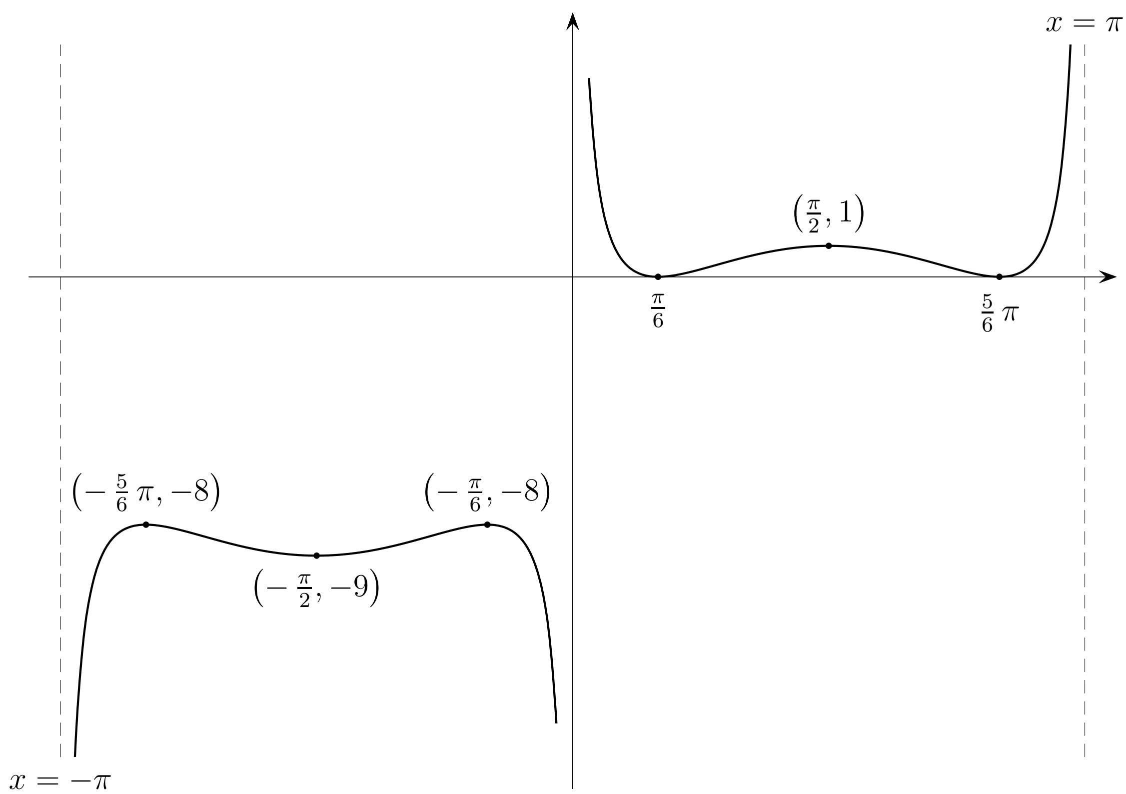
(61)


$x = 2$
$y = 1$
$(-1, 0)$
$(1, 0)$
$y = -1$
$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

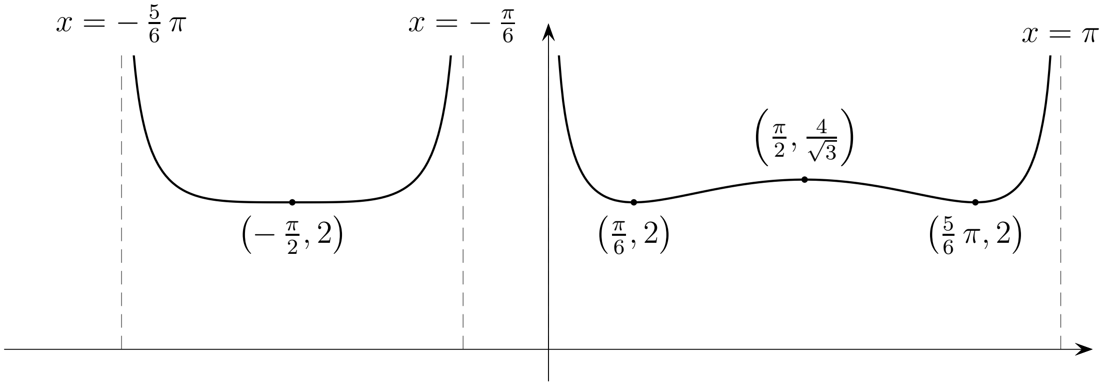
(62)


$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)$
$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$
$\left(\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{2}\right)$
$\left(-\frac{2}{3}\pi, -\frac{1}{4}\right)$
$\left(-\frac{\pi}{3}, -\frac{1}{4}\right)$
$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)$
$\left(-\frac{3}{4}\pi, -\frac{1}{2}\right)$
$\left(-\frac{\pi}{4}, -\frac{1}{2}\right)$

(63)


$x = \pi$
$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$
$\frac{\pi}{6}$
$\frac{5}{6}\pi$
$\left(-\frac{5}{6}\pi, -8\right)$
$\left(-\frac{\pi}{6}, -8\right)$
$\left(-\frac{\pi}{2}, -9\right)$
$x = -\pi$

(64)



(65) Scomponiamo la funzione integranda nella somma di frazioni più semplici. La scomposizione può essere fatta con un semplice trucco

$$\frac{x+3}{x(4x+3)} = \frac{4x+3-3x}{x(4x+3)} = \frac{4x+3}{x(4x+3)} + \frac{-3x}{x(4x+3)} = \frac{1}{x} - \frac{3}{4x+3}\,.$$

Quindi una primitiva della funzione integranda è

$$x \mapsto \log|x| - \frac{3}{4}\log|4x+3|\,;$$

Pertanto l'integrale è uguale a

$$\left[\log|x| - \frac{3}{4}\log|4x+3|\right]_1^4 = \log|4| - \frac{3}{4}\log|4\cdot 4+3| - \log|1| + \frac{3}{4}\log|1\cdot 4+3| =$$
$$= \log 4 - \frac{3}{4}\log 19 + \frac{3}{4}\log 7\,.$$

(66) La funzione integranda è il prodotto tra una funzione in cui la variabile x compare solo come argomento del logaritmo e la derivata della funzione logaritmo, cioè, posto $\phi(x) = \log x$, si ha

$$\frac{\log x}{3x(\log^2 x + 4)} = \frac{\phi(x)}{3\left(\left(\phi(x)\right)^2 + 4\right)}\,\phi'(x)\,.$$

Pertanto, effettuando la sostituzione $t = \phi(x) = \log x$; si ottiene

$$\int_1^2 \frac{\log x}{3x(\log^2 x + 4)}\,dx = \int_0^{\log 2} \frac{t}{3(t^2+4)}\,dt\,.$$

A meno di costanti moltiplicative, il numeratore della funzione integranda è la derivata del denominatore, quindi si trova facilmente un primitiva. Si ha

$$\int_0^{\log 2} \frac{t}{3(t^2+4)}\,dt = \int_0^{\log 2} \frac{1}{6}\,\frac{2t}{t^2+4}\,dt = \left[\frac{1}{6}\log(t^2+4)\right]_0^{\log 2} =$$
$$= \frac{1}{6}\log(\log^2 2 + 4) - \frac{1}{6}\log 4\,.$$

(67) La derivata della funzione coseno è la funzione $x \mapsto -\sin x$, quindi la funzione integranda è il prodotto tra una funzione in cui la variabile compare solo come argomento del coseno e la derivata di tale funzione. È allora evidente che la sostituzione $t = \cos x$ porta trasforma l'integrale in uno più semplice. Abbiamo

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos x}{\cos x + 2}\, dx &= -\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\cos x + 2}(-\sin x)\, dx = -\int_{\cos 0}^{\cos(\pi/2)} \frac{t}{t+2}\, dt = \\ &= -\int_1^0 \frac{t+2-2}{t+2}\, dt = \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{t+2}\right) dt = \\ &= \big[t - 2\log|t+2|\big]_0^1 = 1 - 2\log 3 + 2\log 2\,.\end{aligned}$$

(68) La funzione integranda è il prodotto di due funzioni di ciascuna delle quali si trova facilmente una primitiva: il primo fattore ammette la primitiva x^2, mentre il secondo fattore si presenta nella forma $\phi'(x)(\phi(x))^{-3}$ (con $\phi(x) = 5\sin x + 2\cos x$) e quindi una sua primitiva è $-(\phi(x))^{-2}/2$. Si può quindi integrare per parti in due modi diversi; evidentemente è opportuno derivare il fattore $2x$, perché con tale scelta rimane da integrare una funzione in cui la variabile x compare esclusivamente come argomento delle funzioni seno e coseno, cosa che non accade nell'altro caso.

Si ottiene dunque:

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi/6} 2x\, \frac{-2\sin x + 5\cos x}{(5\sin x + 2\cos x)^3}\, dx = \\ &\qquad = \left[2x\, \frac{-1}{2(5\sin x + 2\cos x)^2}\right]_0^{\pi/6} - \int_0^{\pi/6} 2\, \frac{-1}{2(5\sin x + 2\cos x)^2}\, dx = \\ &\qquad = \left[\frac{-x}{(5\sin x + 2\cos x)^2}\right]_0^{\pi/6} + \int_0^{\pi/6} \frac{1}{(5\sin x + 2\cos x)^2}\, dx\,.\end{aligned}$$

Il primo addendo è uguale a:

$$\begin{aligned}\frac{-\pi/6}{\big(5\sin(\pi/6) + 2\cos(\pi/6)\big)^2} - 0 &= \frac{-\pi/6}{\left(\dfrac{5}{2} + 2\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = -\frac{\pi}{6}\left(\frac{2}{5 + 2\sqrt{3}}\right)^2 = \\ &= -\frac{\pi}{6}\, \frac{4}{25 + 20\sqrt{3} + 12} = -\frac{2\pi}{111 + 60\sqrt{3}}\,.\end{aligned}$$

Consideriamo ora l'integrale ancora da calcolare. La funzione integranda è quoziente tra una costante e una funzione omogenea di grado 2 in seno e coseno. È quindi possibile esprimerla tramite la funzione tangente, visto che l'intervallo di integrazione è incluso nel dominio di tale funzione. Si ha

$$\frac{1}{(5\sin x + 2\cos x)^2} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{(5\sin x + 2\cos x)^2} = \frac{\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1}{\left(5\,\dfrac{\sin x}{\cos x} + 2\right)^2} = \frac{\tan^2 x + 1}{(5\tan x + 2)^2}\,;$$

è quindi opportuno effettuare la sostituzione $\tan x = t$. Visto che x varia tra 0 e $\pi/6$, quindi appartiene all'immagine della funzione arcotangente, si ha $x = \arctan t$

e quindi la derivata del cambiamento di variabile è $1/(1+t^2)$. Perciò

$$\int_0^{\pi/6} \frac{1}{(5\sin x + 2\cos x)^2}\,dx = \int_0^{\pi/6} \frac{\tan^2 x + 1}{(5\tan x + 2)^2}\,dx =$$
$$= \int_{\tan 0}^{\tan(\pi/6)} \frac{t^2+1}{(5t+2)^2}\,\frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{(5t+2)^2}\,dt =$$
$$= \left[\frac{-1}{5(5t+2)}\right]_0^{1/\sqrt{3}} = \frac{-1}{5\left(\dfrac{5}{\sqrt{3}}+2\right)} + \frac{1}{5\cdot 2} = \frac{-\sqrt{3}}{25+10\sqrt{3}} + \frac{1}{10}\,.$$

Quindi

$$\int_0^{\pi/6} 2x\,\frac{-2\sin x + 5\cos x}{(5\sin x + 2\cos x)^3}\,dx = \left[\frac{-x}{(5\sin x + 2\cos x)^2}\right]_0^{\pi/6} - \left[\frac{1}{5(5t+2)}\right]_0^{1/\sqrt{3}} =$$
$$= -\frac{2\pi}{111+60\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{25+10\sqrt{3}} + \frac{1}{10}\,.$$

(69) Nella funzione integranda compare la radice quadrata del polinomio $-x^2+4$; occorre innanzitutto effettuare una sostituzione che elimini tale radice. Per questo effettuiamo la sostituzione $x=\phi(t)=2\sin t$; poiché $x/2\in[1/2,1]\subseteq \operatorname{dom}\arcsin$, si ottiene $t=\phi^{-1}(t)=\arcsin(x/2)$. Poiché $t\in[\pi/6,\pi/2]$ si ha $\cos t\ge 0$, quindi

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{-x^2+4}}{x}\,dx = \int_{\arcsin 1}^{\arcsin 2} \frac{\sqrt{4-(2\sin t)^2}}{2\sin t}\,2\cos t\,dt =$$
$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{2\cos t}{2\sin t}\,2\cos t\,dt = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{2\cos^2 t}{\sin t}\,dt\,.$$

La funzione integranda può essere facilmente scritta come prodotto tra una funzione razionale di $\cos t$ e $\sin t$; quindi la sostituzione $\cos t = s$ trasforma l'integrale in quello di in una funzione razionale. Si ha infatti

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{2\cos^2 t}{\sin t}\,dt = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{2\cos^2 t}{\sin^2 t}\,\sin t\,dt = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{2\cos^2 t}{1-\cos^2 t}\,\sin t\,dt$$

e con la sostituzione $\cos t = s$, tenuto conto che la derivata della funzione coseno è l'opposto della funzione seno, si ottiene

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{2\cos^2 t}{1-\cos^2 t}\,\sin t\,dt = -\int_{\cos(\pi/6)}^{\cos(\pi/2)} \frac{2s^2}{1-s^2}\,ds = \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{2s^2}{1-s^2}\,ds\,.$$

Il polinomio a numeratore ha lo stesso grado di quello a denominatore, quindi bisogna anzitutto scrivere la frazione come somma di un polinomio e di una frazione il cui numeratore abbia grado minore di quello del denominatore. Si ha:

$$\frac{2s^2}{1-s^2} = \frac{2s^2-2+2}{1-s^2} = -2 + \frac{2}{1-s^2}\,.$$

Inoltre

$$\frac{2}{1-s^2} = \frac{(1+s)+(1-s)}{1-s^2} = \frac{1+s}{1-s^2} + \frac{1-s}{1-s^2} = \frac{1}{1-s} + \frac{1}{1+s}\,.$$

Pertanto si ha

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{\sqrt{-x^2+4}}{x}\,dx &= \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{2s^2}{1-s^2}\,ds = \int_0^{\sqrt{3}/2} \left(-2 + \frac{1}{1+s} + \frac{1}{1-s}\right) ds = \\ &= \big[-2s + \log|1+s| - \log|1-s|\big]_0^{\sqrt{3}/2} = \\ &= -\sqrt{3} + \log\frac{\sqrt{3}+2}{2} - \log\frac{2-\sqrt{3}}{2} = \\ &= -\sqrt{3} + \log\frac{\sqrt{3}+2}{2-\sqrt{3}} = -\sqrt{3} + \log\big(7+4\sqrt{3}\big)\,.\end{aligned}$$

(70) Nella funzione integranda compare la radice quadrata del quoziente di due polinomi di primo grado; per eliminare la radice è opportuno effettuare una sostituzione in modo che la nuova variabile di integrazione sia tale radice quadrata. Perciò poniamo $t = \sqrt{(x+1)/(3x-1)}$, quindi $(3x-1)t^2 = x+1$, da cui si ricava $(3t^2-1)x = t^2+1$. Pertanto effettuiamo la sostituzione $x = \phi(t) = (t^2+1)/(3t^2-1)$. Si ha

$$\phi'(t) = \frac{2t(3t^2-1) - 6t(t^2+1)}{(3t^2-1)^2} = \frac{6t^3 - 2t - 6t^3 - 6t}{(3t^2-1)^2} = \frac{-8t}{(3t^2-1)^2}\,;$$

per $x = 1/2$ risulta $t = \sqrt{3}$, per $x = 1$ risulta $t = 1$, per cui si ha

$$\int_{1/2}^1 \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{3x-1}}\,dx = \int_{\sqrt{3}}^1 \frac{1}{\frac{t^2+1}{3t^2-1}}\;t\;\frac{-8t}{(3t^2-1)^2}\,dt = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{8t^2}{(t^2+1)(3t^2-1)}\,dt\,.$$

Dobbiamo integrare una funzione razionale. Anzitutto è necessario fattorizzare il denominatore. Il polinomio t^2+1 è irriducibile, mentre il polinomio $3t^2-1$ si scompone in $\big(\sqrt{3}\;t+1\big)\big(\sqrt{3}\;t-1\big)$, perciò la funzione integranda si scompone in fratti semplici nella forma

$$\frac{8t^2}{(t^2+1)(3t^2-1)} = \frac{a}{\sqrt{3}\,t+1} + \frac{b}{\sqrt{3}\,t-1} + \frac{ct+d}{t^2+1}\,,$$

con a, b, c e d opportuni numeri reali. Riducendo a denominatore comune l'espressione a destra, il numeratore diventa

$$\begin{aligned}&a\big(\sqrt{3}\,t-1\big)(t^2+1) + b\big(\sqrt{3}\,t+1\big)(t^2+1) + (ct+d)(3t^2-1) = \\ &= \sqrt{3}\,at^3 + \sqrt{3}\,at - at^2 - a + \sqrt{3}\,bt^3 + \sqrt{3}\,bt + bt^2 + b + 3ct^3 - ct + 3dt^2 - d = \\ &= \big(\sqrt{3}\,a + \sqrt{3}\,b + 3c\big)t^3 + (-a+b+3d)t^2 + \big(\sqrt{3}\,a + \sqrt{3}\,b - c\big)t + (-a+b-d)\,.\end{aligned}$$

Questo numeratore deve essere uguale a $8t^2$, quindi a, b, c e d debbono soddisfare il seguente sistema

$$\begin{cases} \sqrt{3}\,a + \sqrt{3}\,b + 3c = 0\,, \\ -a + b + 3d = 8\,, \\ \sqrt{3}\,a + \sqrt{3}\,b - c = 0\,, \\ -a + b - d = 0\,. \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro la terza equazione dalla prima e la quarta dalla seconda si ottiene $4c = 0$ e $4d = 8$, da cui $c = 0$ e $d = 2$. La prima equazione diventa $\sqrt{3}\,a + \sqrt{3}\,b = 0$, quindi $a = -b$, sostituendo nell'ultima si ha $2b - 2 = 0$, quindi $b = 1$ e $a = -1$.

Abbiamo perciò

$$\begin{aligned}
&\int_{1/2}^{1} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{3x-1}}\,dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{8t^2}{(t^2+1)(3t^2-1)}\,dt = \\
&= \int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{-1}{\sqrt{3}\,t+1} + \frac{1}{\sqrt{3}\,t-1} + \frac{2}{t^2+1} \right) dt = \\
&= \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}\log\left|\sqrt{3}\,t+1\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\log\left|\sqrt{3}\,t-1\right| + 2\arctan t \right]_1^{\sqrt{3}} = \\
&= -\frac{1}{\sqrt{3}}\log 4 + \frac{1}{\sqrt{3}}\log 2 + 2\arctan\sqrt{3} + \\
&\qquad + \frac{1}{\sqrt{3}}\log\bigl(\sqrt{3}+1\bigr) - \frac{1}{\sqrt{3}}\log\bigl(\sqrt{3}-1\bigr) - 2\arctan 1 = \\
&= -\frac{1}{\sqrt{3}}\log 2 + 2\,\frac{\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\log\frac{\bigl(\sqrt{3}+1\bigr)^2}{3-1} - 2\,\frac{\pi}{4} = \\
&= -\frac{2}{\sqrt{3}}\log 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\log\bigl(\sqrt{3}+1\bigr) + \frac{\pi}{6}\,.
\end{aligned}$$

(71) $\displaystyle\int_1^2 (x+1)\,\frac{e^x - 3\,e^{-x}}{(e^x+4+3\,e^{-x})^2}\,dx =$

$$= \left[-(x+1)\,\frac{1}{e^x+4+3\,e^{-x}} + \frac{1}{2}\log(e^x+1) - \frac{1}{2}\log(e^x+3) \right]_1^2 =$$

$$= -3\,\frac{1}{e^2+4+3\,e^{-2}} + 2\,\frac{1}{e+4+3\,e^{-1}} + \frac{1}{2}\log\frac{(e^2+1)(e+3)}{(e^2+3)(e+1)}\,.$$

(72) $\displaystyle\int_2^5 \frac{x+3}{x^2+9}\,dx = \left[\frac{1}{2}\log(x^2+9) + \arctan\frac{x}{3} \right]_2^5 =$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{34}{13} + \arctan\frac{5}{3} - \arctan\frac{2}{3}\,.$$

(73) $\displaystyle\int_0^{1/2} (6x^2+2)\,\arcsin x\,dx =$

$$= \left[(2x^3+2x)\arcsin x + \frac{2}{3}\,x^2\sqrt{1-x^2} + \frac{10}{3}\sqrt{1-x^2} \right]_0^{1/2} = \frac{5}{24}\,\pi + \frac{7\sqrt{3}}{4} - \frac{10}{3}\,.$$

(74) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\sqrt{1+8x^2}}{1+4x^2}\,dx = \left[\frac{1}{4}\sqrt{1+8x^2} - \frac{1}{4}\arctan\bigl(\sqrt{1+8x^2}\,\bigr)\right]_0^1 =$

$\displaystyle = 1 - \frac{1}{4}\arctan 5 + \frac{\pi}{16}\,.$

(75) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cosh x + 4\sinh x}{\cosh x - \sinh x}\,dx = \left[\frac{5}{4}\,e^{2x} - \frac{3}{2}\,x\right]_0^1 = \frac{5}{4}\,e^2 - \frac{11}{4}\,.$

(76) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+2x^2+2}}\,dx =$

$\displaystyle = \left[\frac{1}{2}\sqrt{x^4+2x^2+2} - \frac{1}{2}\log\bigl(\sqrt{x^4+2\,x^2+2} + x^2 + 1\bigr)\right]_0^1 =$

$\displaystyle = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{5}+2}\right).$

(77) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cosh x + 4\sinh x}{\cosh x - \sinh x}\,dx = \left[\frac{5}{4}\,e^{2x} - \frac{3}{2}\,x\right]_0^1 = \frac{5}{4}\,e^2 - \frac{11}{4}\,.$

(78) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^2 \arctan\bigl(\sqrt{x^2-1}\,\bigr)\,dx = \Bigl[x\arctan\bigl(\sqrt{x^2-1}\,\bigr) - \operatorname{settcosh} x\Bigr]_{\sqrt{2}}^2 =$

$\displaystyle = \frac{2}{3}\,\pi - \log\bigl(2+\sqrt{3}\,\bigr) - \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \log\bigl(\sqrt{2}+1\bigr)\,.$

(79) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x + \sin x\,\cos x}{-2\cos x + \cos x\,\sin^2 x}\,dx =$

$\displaystyle = \left[\log(\cos x) - \frac{1}{2}\log(\cos^2 x + 1) + \arctan(\cos x)\right]_0^{\pi/4} =$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{2}\log 3 - \frac{\pi}{4} + \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$

(80) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x - 2\cos x}{2\sin x + \cos x}\,dx = \bigl[-\log(2\sin x + \cos x)\bigr]_0^{\pi/3} = -\log\left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right).$