11 gennaio 2023, es.1: Programmazione lineare

Discutere il seguente problema di Programmazione lineare: trovare il massimo di $p(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 + 3\,x_2 + 2\,x_3 + x_4 + 2\,x_5$ con i vincoli $x_k \geq 0\ (1 \leq k \leq 5)$ e

$$\begin{cases} 3\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ 4\,x_1 + 4\,x_2 + 2\,x_3 + x_4 - x_5 = 5 \\ 7\,x_1 - 2\,x_2 + x_3 + x_4 + 4\,x_5 = 18 \end{cases}$$

Si assuma come base iniziale per lo spazio delle colonne A^*, $\mathcal{B}_1 = \{A_3, A_5, A_4\}$ (in questo ordine).

Soluzione.

Seguendo le indicazioni del testo scegliamo come prima base dello spazio A^* generato dalle colonne di A, matrice dei coefficienti del sistema scritto sopra, l' insieme $\mathcal{B}_1 = \{A_3, A_5, A_4\}$; con questa scelta si ottiene la prima tabella del simplesso mediante operazioni tra le righe della matrice completa del sistema dei vincoli, cioè la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 4 & 4 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & -2 & 1 & 1 & 4 & 18 \end{pmatrix}.$$

		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	B
$x_{v_1} = x_3$	$c_{v_1} = c_3 = 2$	2	1	1	0	0	2
$x_{v_2} = x_5$	$c_{v_2} = c_5 = 2$	1	-1	0	0	1	3
$x_{v_3} = x_4$	$c_{v_3} = c_4 = 1$	1	1	0	1	0	4
		6	-2	0	0	0	14
		$(z_1 - c_1)$	$(z_2 - c_2)$	$(z_3 - c_3)$	$(z_4 - c_4)$	$(z_5 - c_5)$	(z)

Abbiamo $z_2 - c_2 = -2 < 0$, e la colonna sovrastante contiene termini positivi. Allora bisogna operare la " trasformazione pivotale" facendo entrare nella base il vettore A_2 .

Il criterio di uscita impone di calcolare $\frac{\beta_1}{\alpha_{1,2}} = 2$; $\frac{\beta_3}{\alpha_{3,2}} = 4$; il minimo di questi due valori è $\frac{\beta_1}{\alpha_{1,2}} = 2$, quindi il vettore che esce da B_1 è $A_{v_1} = A_3$. Con semplici calcoli si ottiene la nuova tabella del simplesso relativa alla base $\mathcal{B}_2 = \{A_2, A_5, A_4\}$:

		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	B
$x_{v_1} = x_2$	$c_{v_1} = c_2 = 3$	2	1	1	0	0	2
$x_{v_2} = x_5$	$c_{v_2} = c_5 = 2$	3	0	1	0	1	5
$x_{v_3} = x_4$	$c_{v_3} = c_4 = 1$	-1	0	-1	1	0	2
		10	0	2	0	0	18
		$(z_1 - c_1)$	$(z_2 - c_2)$	$(z_3 - c_3)$	$(z_4 - c_4)$	$(z_5 - c_5)$	(z)

Siccome adesso tutti gli $z_j - c_j$ sono ≥ 0 , l' algoritmo è terminato; la funzione obiettivo ha massimo nella regione ammissibile, il massimo vale $z = 18$ ed è assunto per $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 2, 0, 2, 5)$.

11 gennaio 2023, es.2: Distribuzioni

Sia, per $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \left| 3 - x - 3x^2 + x^3 \right|$, e sia $T = T_f$ la distribuzione associata a tale funzione.

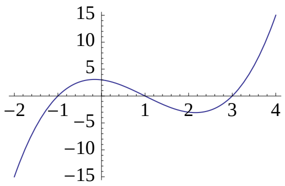
a) Descrivere la distribuzione T', derivata di T in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, scrivendo l'espressione che definisce $\langle T', \varphi \rangle$ per una generica $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

a) Descrivere la distribuzione T'', derivata seconda di T in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, scrivendo l'espressione che definisce $\langle T'', \varphi \rangle$ per una generica $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Soluzione.

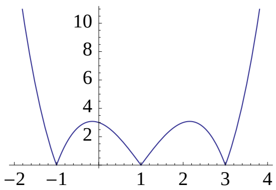
```
Print[Factor[3 - x - 3 x^2 + x^3]]; Plot[3 - x - 3 x^2 + x^3, {x, -2, 4}]
```

$(-3 + x)(-1 + x)(1 + x)$



$$f[x\_] := \begin{cases} 3 - x - 3x^2 + x^3 & -1 < x < 1 \lor x > 3 \\ -\left(3 - x - 3x^2 + x^3\right) & x < -1 \lor 1 < x < 3 \end{cases};$$

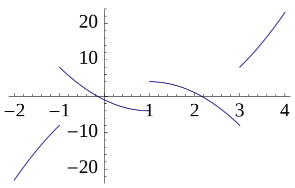
```
Plot[f[x], {x, -2, 4}]
```



a) Si ha $f'(x) = \operatorname{sign}\left(3 - x - 3x^2 + x^3\right) \cdot \left(-1 - 6x + 3x^2\right)$, per x diverso da -1, 1, 3; in questi tre punti f' non esiste; f' è comunque una funzione localmente somabile, quindi $\left(T_f\right)' = T_{f'}$, vale a dire che per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle T', \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sign}\left(3 - x - 3x^2 + x^3\right) \cdot \left(-1 - 6x + 3x^2\right) \cdot \varphi(x)\, dx$$

```
Plot[f'[x], {x, -2, 4}]
```



b) Si ha $f''(x) = \operatorname{sign}\left(3 - x - 3x^2 + x^3\right) \cdot (-6 + 6x)$, per x diverso da -1, 1, 3; per tali valori di x f' ha tre singolarità di prima specie con "salti", ossia differenze tra limite da destra e limite da sinistra, uguali rispettivamente a 16, 8, 16.

T'', derivata di T', contiene tre addendi δ nei punti -1, 1 e 3; si ottiene:

$T'' = (T')' = T_{f''} + 16\,\delta(x+1) + 8\,\delta(x-1) + 16\,\delta(x-3)$, cioè, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle T'', \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sign}\left(3 - x - 3x^2 + x^3\right) \cdot (-6 + 6x) \cdot \varphi(x)\, dx + 16\,\varphi(-1) + 8\,\varphi(1) + 16\,\varphi(3).$$

11 gennaio 2023, es.3: alcune proprietà di $\sqrt{x}$

a) Dimostrare che per ogni $x,\ y \in \mathbb{R}$, con $0 \le x < y$ è $\sqrt{y} - \sqrt{x} \le \sqrt{y-x}$.

b) Dimostrare che $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$ è uniformemente continua in $[0, +\infty[$.

Soluzione.

a) Se $x = 0$ la disuguaglianza in oggetto è ovvia, e vale come uguaglianza.
Se $0 < x < y$ allora $\sqrt{y} - \sqrt{x} < \sqrt{y-x} \Longleftrightarrow x + y - 2\sqrt{x\,y} < y - x \Longleftrightarrow 2\,x < 2\sqrt{x\,y} \Longleftrightarrow x^2 < x\,y \Longleftrightarrow x < y$.

L'ultima disuguaglianza è vera, per come sono stati scelti x e y; è così provato quanto si voleva.

b) Dobbiamo provare che $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0,\ \forall\,x,\ y \in [0, +\infty[,\ \left(\left|y - x\right| < \delta \Longrightarrow \left|\sqrt{y} - \sqrt{x}\right| < \varepsilon\right)$.

Sia dunque $\varepsilon > 0$, e siano $x,\ y \in [0, +\infty[$. Non è restrittivo supporre $x < y$. La disuguaglianza provata in (a) dice che $\sqrt{y} - \sqrt{x} \le \sqrt{y-x}$. Avremo $\sqrt{y-x} < \varepsilon \Longleftrightarrow y - x < \varepsilon^2$. Perciò se $0 < y - x < \varepsilon^2$ allora $\sqrt{y} - \sqrt{x} < \varepsilon$.
Abbiamo così provato la uniforme continuità della funzione, assumendo $\delta = \varepsilon^2$.

11 gennaio 2023, es.4: Verifica di un limite.

Verificare applicando la definizione di limite, che $\operatorname{Lim}_{x \to 7} \frac{\sqrt{x+2}}{x-4} = 1$.

Soluzione.

Si tratta di provare che:

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0,\ \forall\,x \in \mathbb{R}\left(0 < \left|x - 7\right| < \delta \Rightarrow \left|\frac{\sqrt{x+2}}{x-4} - 1\right| < \varepsilon\right).$$

Sia $\varepsilon > 0$. Supponiamo fin da ora $6 < x < 8$. Si ha

$$\frac{\sqrt{x+2}}{x-4} - 1 = \frac{\sqrt{x+2} - x + 4}{x-4} = \frac{\left(\sqrt{x+2} - x + 4\right)\left(\sqrt{x+2} + x - 4\right)}{\sqrt{x+2} + x - 4} = \frac{x + 2 - x^2 - 16 + 8\,x}{\sqrt{x+2} + x - 4} = \frac{(2-x)\,(x-7)}{\sqrt{x+2} + x - 4}.$$

Se $6 < x < 8$ allora $|2 - x| = x - 2 < 8 - 2 = 6$; poi $\sqrt{x+2} + x - 4 > \sqrt{6+2} + 6 - 4 > 4$ e perciò

$$\left|\frac{(2-x)\,(x-7)}{\sqrt{x+2} + x - 4}\right| < \frac{6}{4}\left|x - 7\right| = \frac{3}{2}\left|x - 7\right|$$

Risulta $\frac{3}{2}\left|x - 7\right| < \varepsilon$ se $\left|x - 7\right| < \frac{2}{3}\,\varepsilon$; perciò posto $\delta = \min\left\{1,\ \frac{2}{3}\,\varepsilon\right\}$ avremo, se $|x - 7| < \delta$,

$$\left|\frac{(2-x)\,(x-7)}{\sqrt{x+2} + x - 4}\right| < \frac{3}{2}\left|x - 7\right| < \varepsilon.$$

Ciò completa la verifica.

11 gennaio 2023, es.5: Una fortunata vincita

Dieci anni fa Gastone ha ottenuto 40 000 € in prestito da una banca, al tasso annuo 3%. La restituzione pattuita consiste in 20 rate annuali immediate posticipate di importo fisso 2500 € (quindi la prima rata è stata pagata 9 anni fa, e oggi la decima) più una rata finale, un anno dopo, a saldo di quanto dovuto.

a) Calcolare l’ importo *R* della rata finale da pagare 21 anni dopo la concessione del prestito, per estinguere il debito.

b) Oggi Gastone ha vinto 100 000 € con un "gratta e vinci" e ha deciso di estinguere anticipatamente il debito. La Banca accetta l'estinzione anticipata, ma a causa di mutate condizioni di mercato applica per il calcolo della quota dovuta il tasso 2%. Calcolare quanto deve pagare Gastone (oltre alla quota ordinaria di 2500 €).

Soluzione.

a) *R* deve essere calcolata in modo che sia uguale a 40 000 € il valore attuale del complesso dei pagamenti che saranno effettuati, ossia

$$\text{Solve}\left[40000 == 2500 * \frac{1 - 1.03^{-20}}{0.03} + R * 1.03^{-21}, R\right]$$

{{R → 5220.57}}

Questo è l'importo da pagare come 21-esima rata, per estinguere il debito.

b) Sia *S* l'importo che Gastone deve pagare in aggiunta alla decima rata, per estinguere oggi il suo debito. *S* è il valore attuale *calcolato con tasso 2%*, dei pagamenti ai quali Gastone sarebbe tenuto allo scadere di ciascuno dei prossimi 11 anni: 2500 € per i primi 10 anni, 5220.57 € al termine dell'undicesimo anno.

$$2500 * \frac{1 - 1.02^{-10}}{0.02} + 5220.57 * 1.02^{-11}$$

26 655.2

Questo è l'importo da aggiungere alla decima rata, per estinguere il debito.

11 gennaio 2023, es.6: Gambadilegno sarà rilasciato?

Pietro Gambadilegno è da tempo in prigione per vari reati da lui commessi; tuttavia pare che il giudice intenda concedergli gli "arresti domiciliari" per buona condotta. La decisione è già stata presa, ma sarà resa nota soltanto domani. Trudy, fidanzata di Pietro, ritiene che con probabilità 70% Pietro tornerà a casa, e progetta di organizzare una bella festa per accoglierlo; questo le costerebe 5000 $, ma sa che Pietro ne sarà commosso e le darà 15 000 $, prelevandoli dal bottino nascosto di una precedente rapina, mai ritrovato dalla polizia; non le darà invece nulla se non avrà luogo la festa in suo onore.

a) La segretaria del giudice conosce già la decisione del suo principale, e la comunicherà a Trudy in cambio di una buona mancia; in questo modo Trudy non correrebbe il rischio di organizzare inutilmente la festa, perdendo 5000 $.
Calcolare qual è l'importo massimo che Trudy deve essere disposta a pagare per l'informazione, in base al criterio della massima speranza matematica di guadagno.

b) La segretaria del giudice quantifica in 500 $ l'importo richiesto per informare Trudy della decisione del giudice; Trudy ha però deciso di valutare i propri guadagni attraverso la funzione utilità $u(x) = 1 - e^{-\frac{x}{5}}$, con x espresso in *migliaia di* $. Stabilire se a Trudy conviene oppure no pagare alla segretaria quanto dal lei richiesto. (Suggerimento: ricompilare la tabella dei guadagni legati a ciascuna decisione, modificandone i valori tenendo conto della spesa certa di 500 $)

Soluzione.

a) Sia E l'evento "Pietro sarà rilasciato"; dunque $P(E) = 0.6$. Il guadagno atteso per Trudy espresso in migliaia di \$, secondo che la sua decisione sia di organizzare la festa o di non organizzarla, è

	d_1 (niente festa)	d_2 (festa)	probabilità
E	0	10	0.7
$\overline{E}$	0	−5	0.3
Guadagno atteso	0	5.5	

La decisione suggerita da questo criterio è quindi di organizzare la festa, con un valore atteso del guadagno pari a 5500 \$.

Se Trudy avrà l'informazione certa della decisione del giudice, si asterrà dal'organizzare la festa in caso di diniego al rilascio del detenuto; il suo guadagno atteso sarà allora $10 \cdot 0.7 + 0 \cdot 0.3 = 7$. Il valore della informazione perfetta è quindi $7 - 5.5 = 1.5$, cioè 1500 \$.

b) Adesso Trudy applica la funzione utilità

```
u[x_] := 1 - e^(-x/5);
```

Se non acquista l'informazione e decide di non fare la festa, l'utilità attesa è 0; se decide di fare la festa l'utilità attesa è

```
0.7 * u[10] + 0.3 * u[-5]
```

```
0.0897808
```

Quindi Trudy farà la festa, con una utilità attesa il cui valore è quest'ultimo sopra indicato.

Se Trudy paga 500 \$ alla segretaria per acquisire l'informazione, ogni suo possibile guadagno (positivo o negativo) viene diminuito di tale importo; quindi la nuova situazione è descritta dalla seguente tabella:

	d_1 (niente festa)	d_2 (festa)	probabilità
E	−0.5	9.5	0.7
$\overline{E}$	−0.5	−5.5	0.3

Tenendo conto della informazione perfetta, avremo un utilità attesa uguale a

```
0.7 * u[9.5] + 0.3 * u[-0.5]
```

```
0.563751
```

superiore a quella calcolata senza l'acquisizione (onerosa) dell'informazione. Quindi a Trudy conviene pagare 500 \$ per ottenere l'informazione.