versione 0

1) Risolvere il problema di Cauchy:

$y'' - 8y' + 12y = 20\cos(2x)$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$

Soluzione

```
DSolve[{
  y''[x] - 8 y'[x] + 12 y[x] == 20 Cos[2 x],
  y[0] == 2, y'[0] == 6}, y[x], x]
```

$$\left\{\left\{y[x] \to \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 5e^{6x} + 2\,\mathrm{Cos}[2x] - 4\,\mathrm{Sin}[2x]\right)\right\}\right\}$$

2) Sia $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ -2 \le x \le 0,\ \ y \le 0,\ \ z \ge 0,\ \ x + y - z \ge -3\}$. Calcolare il volume di A

Soluzione

A è un tronco di piramide con le basi parallele al piano yz; la base maggiore poggia su tale piano.

Volume di $A = \int\int\int_A 1\, dx\, dy\, dz = \int_{-2}^{0} (\text{area di } A_x)\, dx$, effettuando la riduzione dell'integrale triplo con sezioni piane perpendicolari all'asse x.

$A_x = \{(y, z) \in \mathbb{R}^3;\ \ y \le 0,\ \ z \ge 0,\ \ y - z \ge -3 - x\}$ è il triangolo del piano yz con vertici $(-3 - x,\ 0)$, $(0,\ 3 + x)$, $(0, 0)$ la cui area è $\frac{1}{2}(x + 3)^2$ (si noti che $-3 - x \le 0$). Allora il volume di A è

$$\int_{-2}^{0} \frac{1}{2}(x + 3)^2\, dx$$

$$\frac{13}{3}$$

3) Determinare e classificare i punti critici per la funzione $f(x, y) = (x + y)\, e^{x + \frac{y^2}{2}}$

Soluzione

In[1]:=
```
f[x_, y_] := (x + y) e^(x + y^2/2);
Print[f[x, y]]
```

$$e^{x + \frac{y^2}{2}}(x + y)$$

In[3]:=
```
grad = Simplify[{Together[D[f[x, y], x]], Together[D[f[x, y], y]]}]; Print[grad];
Reduce[grad == {0, 0}, {x, y}]
```

$$\left\{e^{x + \frac{y^2}{2}}(1 + x + y),\ e^{x + \frac{y^2}{2}}\left(1 + x\,y + y^2\right)\right\}$$

Out[4]= $x == -2\ \&\&\ y == 1$

In[5]:=
```
H[x_, y_] = {{D[f[x, y], x, x], D[f[x, y], x, y]}, {D[f[x, y], x, y], D[f[x, y], y, y]}};
H[x, y];
Print[Simplify[MatrixForm[H[x, y]]]];
Print[MatrixForm[H[-2, 1]]];
Print[Det[H[-2, 1]]]
```

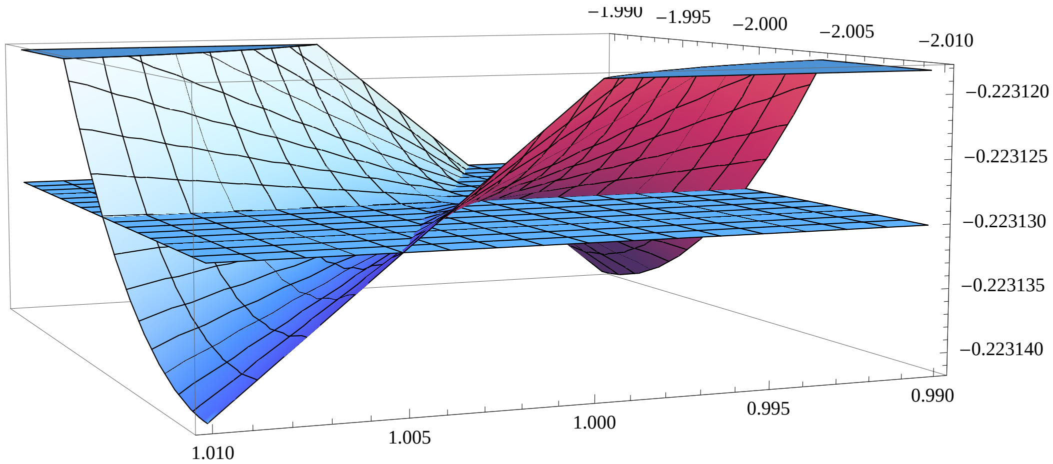
$$\begin{pmatrix} e^{x+\frac{y^2}{2}}(2+x+y) & e^{x+\frac{y^2}{2}}\left(1+y+x\,y+y^2\right) \\ e^{x+\frac{y^2}{2}}\left(1+y+x\,y+y^2\right) & e^{x+\frac{y^2}{2}}\left(x+3\,y+x\,y^2+y^3\right) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{e^{3/2}} & \frac{1}{e^{3/2}} \\ \frac{1}{e^{3/2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{e^3}$$

Il punto critico $(-2, 1)$ è punto di sella per f. La figura mostra il grafico di f nelle vicinanze del punto critico, insieme con il piano tangente in tale punto.

```
d2 = 0.01; d1 = .01; Plot3D[{f[-2, 1], f[x, y]}, {x, -2 - d1, -2 + d1}, {y, 1 - d2, 1 + d2}]
```



4) Sia $z = \frac{(3+i)^2}{1+i}$. Rappresentare z nel piano complesso e calcolare il modulo e un argomento di z.

Soluzione

z=

$7 - i$

modulo e argomento:

|z|=

$5\sqrt{2}$

Un argomento di z è

$-\text{ArcTan}\left[\frac{1}{7}\right]$

5) Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0\}$, e per $(x, y) \in A$, $F(x, y) = \left(\frac{1}{x} - y, \ \frac{1}{y^2} - x + 1\right)$. Stabilire se F è chiuso, se è conservativo, e nel caso lo sia, calcolare un potenziale di F.

Soluzione

```
F[x_, y_] := {1/x - y, 1/y^2 - x + 1};
Print[{Together[∂y F[x, y][[1]]], ∂x F[x, y][[2]]}]
```

```
{-1, -1}
```

Il campo è chiuso. Il dominio assegnato per F è A che è stellato; allora F è conservativo. Un potenziale di F è una funzione p di classe C^1 da D a $\mathbb{R}$ tale che $\nabla p = F$, cioè

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{x} - y\,, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{y^2} - x + 1$$

Integrando rispetto a x la prima di queste relazioni otteniamo

$$p(x,\,y) = \ln x - x\,y + C(y)$$

in cui $C(y)$ indica una quantità costante rispetto a x, ma che potrebbe avere una dipendenza da y. Adesso deriviamo entrambi i membri rispetto a y:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -x + C'(y) \;\; \text{desiderato} \;\; = \frac{1}{y^2} - x + 1$$

Se ne trae $C'(y) = \frac{1}{y^2} + 1$ e quindi $C(y) = -\frac{1}{y} + y + D$ con D costante. Un potenziale di F è, per esempio, scegliendo $D = 0$,

$$p(x,\,y) = \ln x - x\,y - \frac{1}{y} + y$$

Verifica:

```
p[x_, y_] := Log[x] - x y - 1/y + y;
Print[Simplify[{∂x p[x, y], ∂y p[x, y]}]]
```

```
{1/x - y, 1 - x + 1/y^2}
```

versione 1

1) Risolvere il problema di Cauchy:

$y'' + 8\,y' + 12\,y = 20\,\text{sen}(2\,x);\quad y(0) = -2,\quad y'(0) = 4$

Soluzione

```
Expand[DSolve[{
   y''[x] + 8 y'[x] + 12 y[x] == 20 Sin[2 x],
   y[0] == -2, y'[0] == 4}, y[x], x]]
```

$$\left\{\left\{y[x] \to -\frac{1}{4}\,e^{-6x} - \frac{3\,e^{-2x}}{4} - \text{Cos}[2x] + \frac{1}{2}\,\text{Sin}[2x]\right\}\right\}$$

2) Sia $A = \left\{(x,\,y,\,z) \in \mathbb{R}^3;\; x \le 0,\;\; -2 \le y \le 0,\;\; z \ge 0,\;\; x + y - z \ge -4\right\}$. Calcolare il volume di A

Soluzione

A è un tronco di piramide con le basi parallele al piano xz; la base maggiore poggia su tale piano.

Volume di $A = \int\int\int_A 1\, dx\, dy\, dz = \int_{-2}^{0} \left(\text{area di } A_y\right) dy$, effettuando la riduzione dell'integrale triplo con sezioni piane perpendicolari all'asse y.

$A_y = \left\{(x, z) \in \mathbb{R}^3;\ \ x \le 0,\ \ z \ge 0,\ \ x - z \ge -4 - y\right\}$ è il triangolo del piano xz con vertici $(-4 - y,\ 0)$, $(0,\ 4 + y)$, $(0, 0)$ la cui area è $\frac{1}{2}(y + 4)^2$ (si noti che $-4 - y \le 0$). Allora il volume di A è

$$\int_{-2}^{0} \frac{1}{2}(y + 4)^2\, dy$$

$$\frac{28}{3}$$

3) Determinare e classificare i punti critici per la funzione $f(x, y) = (x + y)\, e^{\frac{x^2}{2} + 2y}$

Soluzione

```
In[13]:= f[x_, y_] := (x + y) e^(x^2/2 + 2 y);
         Print[f[x, y]]
```

$$e^{\frac{x^2}{2} + 2y}(x + y)$$

```
In[15]:= grad = Simplify[{Together[D[f[x, y], x]], Together[D[f[x, y], y]]}]; Print[grad];
         Reduce[grad == {0, 0}, {x, y}]
```

$$\left\{e^{\frac{x^2}{2} + 2y}\left(1 + x^2 + x\, y\right),\ e^{\frac{x^2}{2} + 2y}(1 + 2x + 2y)\right\}$$

Out[16]= $x == 2\ \&\&\ y == -\frac{5}{2}$

```
In[17]:= H[x_, y_] = {{D[f[x, y], x, x], D[f[x, y], x, y]}, {D[f[x, y], x, y], D[f[x, y], y, y]}};
         H[x, y];
         Print[Simplify[MatrixForm[H[x, y]]]];
         Print[MatrixForm[H[-2, 1]]];
         Print[Det[H[2, -5/2]]]
```

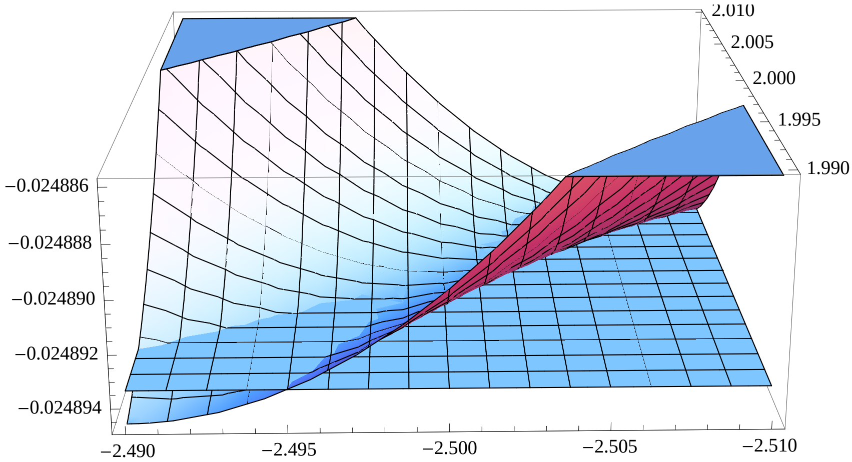
$$\begin{pmatrix} e^{\frac{x^2}{2} + 2y}\left(3x + x^3 + y + x^2 y\right) & e^{\frac{x^2}{2} + 2y}\left(2 + x + 2x^2 + 2x\, y\right) \\ e^{\frac{x^2}{2} + 2y}\left(2 + x + 2x^2 + 2x\, y\right) & 4\, e^{\frac{x^2}{2} + 2y}(1 + x + y) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -9\, e^4 & 4\, e^4 \\ 4\, e^4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{e^6}$$

Il punto critico $\left(2, \frac{-5}{2}\right)$ è punto di sella per f. La figura mostra il grafico di f nelle vicinanze del punto critico, insieme con il piano tangente in tale punto.

```
d2 = 0.01; d1 = .01; Plot3D[{f[2, -5/2], f[x, y]}, {x, 2 - d1, 2 + d1}, {y, -5/2 - d2, -5/2 + d2}]
```



4) Sia $z = \frac{(3+i)^2}{1+i}$. Rappresentare z nel piano complesso e calcolare il modulo e un argomento di z.

Soluzione

```
z = (-3 + i)/(2 + i)^2;
Print["z="]; Print[Re[z] + i Im[z]];
Print["modulo e argomento:"]
Print["|z|="]; Print[Abs[z]];
Print["Un argomento di z è"];
Print[Arg[z]]
```

z=

$-\frac{1}{5} + \frac{3\,i}{5}$

modulo e argomento:

|z|=

$\sqrt{\frac{2}{5}}$

Un argomento di z è

π - ArcTan[3]

5) Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0,\ y > 0\}$, e per $(x, y) \in A$, $F(x, y) = \left(\frac{1}{x^2} - 2y + 1,\ \frac{2}{y^3} - 2x\right)$. Stabilire se F è chiuso, se è conservativo, e nel caso lo sia, calcolare un potenziale di F.

Soluzione

```
F[x_, y_] := {1/x^2 - 2 y + 1, 2/y^3 - 2 x};
Print[{Together[∂y F[x, y][[1]]], ∂x F[x, y][[2]]}]
```

{-2, -2}

Il campo è chiuso. Il dominio assegnato per F è A che è stellato; allora F è conservativo. Un potenziale di F è una funzione p di classe C^1 da D a $\mathbb{R}$ tale che $\nabla p = F$, cioè

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{x^2} - 2y + 1, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{2}{y^3} - 2x$$

Integrando rispetto a x la prima di queste relazioni otteniamo

$$p(x, y) = -\frac{1}{x} - 2xy + x + C(y)$$

in cui $C(y)$ indica una quantità costante rispetto a x, ma che potrebbe avere una dipendenza da y. Adesso deriviamo entrambi i membri rispetto a y:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -2x + C'(y) \;\; \text{desiderato} \;\; = \frac{2}{y^3} - 2x$$

Se ne trae $C'(y) = \frac{2}{y^3}$ e quindi $C(y) = -\frac{1}{y^2} + D$ con D costante. Un potenziale di F è, per esempio, scegliendo $D = 0$,

$$p(x, y) = -\frac{1}{x} - 2xy + x - \frac{1}{y^2}$$

Verifica:

```
p[x_, y_] := -1/x - 2 x y + x - 1/y^2;
Print[Simplify[{∂x p[x, y], ∂y p[x, y]}]]
```

$$\left\{1 + \frac{1}{x^2} - 2y, \; -2x + \frac{2}{y^3}\right\}$$