- **versione 0**

1) Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + 6y(t) \end{cases} ; \quad \begin{cases} x(0) = 5 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Soluzione

```
A = (3 2
     2 6); Print[{Eigenvalues[A], Eigenvectors[A]}]
```

{{7, 2}, {{1, 2}, {-2, 1}}}

```
Expand[DSolve[{
   x'[t] == 3 x[t] + 2 y[t],
   y'[t] == 2 x[t] + 6 y[t]},
  {x[t], y[t]}, t]]
```

$$\left\{\left\{x[t] \to \frac{4}{5} e^{2t} C[1] + \frac{1}{5} e^{7t} C[1] - \frac{2}{5} e^{2t} C[2] + \frac{2}{5} e^{7t} C[2], \; y[t] \to -\frac{2}{5} e^{2t} C[1] + \frac{2}{5} e^{7t} C[1] + \frac{1}{5} e^{2t} C[2] + \frac{4}{5} e^{7t} C[2]\right\}\right\}$$

(osservazione: tutti i denominatori 5 possono essere soppressi, incorporandoli nelle costanti C[1] e C[2])

```
Expand[DSolve[{
   x'[t] == 3 x[t] + 2 y[t],
   y'[t] == 2 x[t] + 6 y[t],
   x[0] == 5,
   y[0] == 0},
  {x[t], y[t]}, t]]
```

$$\left\{\left\{x[t] \to 4 e^{2t} + e^{7t}, \; y[t] \to -2 e^{2t} + 2 e^{7t}\right\}\right\}$$

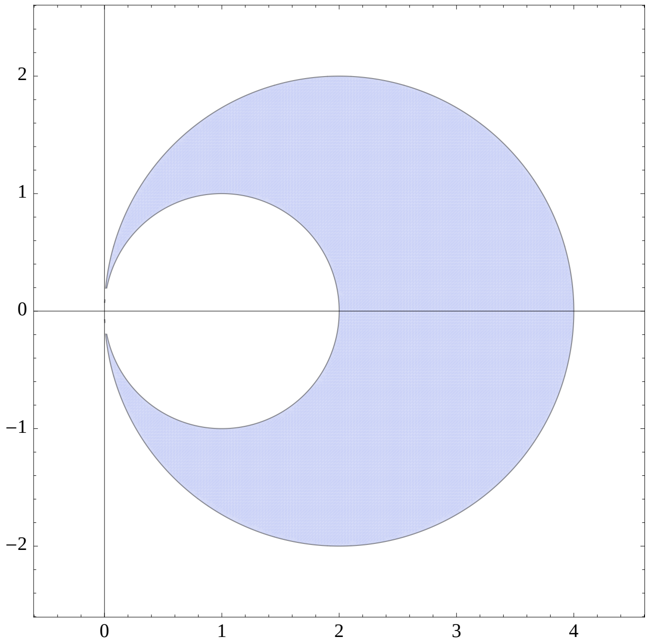
2) Sia $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \,;\, 2x \le x^2 + y^2 \le 4x\right\}$. Calcolare $\int\int_A \frac{x}{x^2+y^2}\, dx\, dy$.

È conveniente effettuare il cambiamento di variabili $\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ x = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$.

Soluzione

```
aa = RegionPlot[{2 x ≤ x^2 + y^2 ≤ 4 x}, {x, -0.5, 4.5}, {y, -2.5, 2.5}, PlotPoints → 200];
```

```
Show[aa, Axes -> True]
```



La controimmagine B dell'insieme A relativa al cambiamento di variabili in coordinate polari vede θ variare tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$; per ogni θ in questo intervallo, da $2x \le x^2 + y^2 \le 4x$ si ricava $2\rho\cos\theta \le \rho^2 \le 4\rho\cos\theta$ e quindi, siccome $\rho \ge 0$, segue $2\cos\theta \le \rho \le 4\cos\theta$. Pertanto:

$$\int\int_A \frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta}\frac{\rho\cos\theta}{\rho^2}\cdot\rho\,d\rho\right)d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\theta\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos(2\theta))\,d\theta = \pi.$$

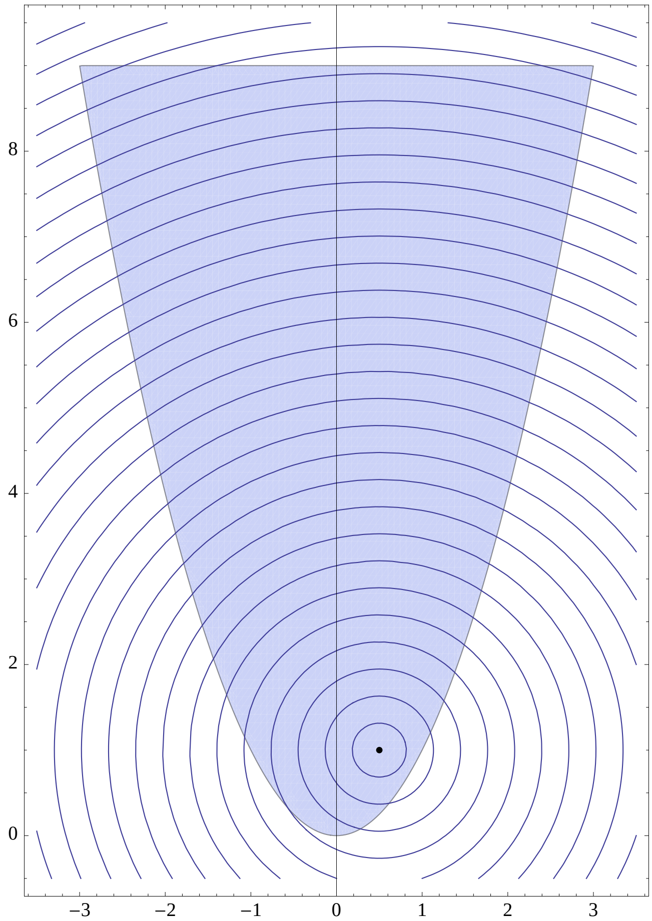
3) Sia $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \le y \le 9\right\}$, $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - 2y$. Determinare il minimo e il massimo valore che f assume nell'insieme A. (È consigliabile considerare come sono fatte le linee di livello di f)

Soluzione

```
f[x_, y_] := x^2 + y^2 - x - 2 y;
```

```
aa = RegionPlot[{x^2 ≤ y ≤ 9}, {x, -3.5, 3.5}, {y, -0.5, 9.5}, PlotPoints → 100];
ab = Table[
   ContourPlot[x^2 + y^2 - x - 2 y == -1.25 + .1 k^2, {x, -3.5, 3.5}, {y, -0.5, 9.5}], {k, 0, 30}];
ac = Graphics[Point[{0.5, 1}]];
```

```
Show[aa, ab, ac, Axes → True, AspectRatio → Automatic]
```



Le linee di livello $\mathcal{L}_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - x - 2y = k\}$ sono circonferenze con centro $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ e raggio $\sqrt{\frac{5}{4} + k}$, per $k \geq -\frac{5}{4}$. Il raggio è tanto maggiore quanto più cresce il livello k. Poiché $\left(\frac{1}{2}, 1\right) \in A$, $f\left(\frac{1}{2}, 1\right) = -\frac{5}{4}$ è il minimo valore assunto da f in A. Il massimo di f in A è il k corrispondente alla linea di livello (circonferenza) più grande, avente ancora almeno un punto in comune con A. Si tratta di

```
f[-3, 9]
```

```
75
```

4) Risolvere la seguente equazione nel campo complesso: $(z + i)^4 = (3z - 2i)^4$.

Soluzione

Conviene scrivere l'equazione nella forma $\left(\frac{z+i}{3z-2i}\right)^4 = 1$, chiamare $p = \frac{z+i}{3z-2i}$ e risolvere $p^4 = 1$, che ha per soluzioni $p \in \{1, i, -1, -i\}$. Poi si ricava p:

```
Solve[(z + ⅈ)/(3 z - 2 ⅈ) == p, z]
```

$$\left\{\left\{z \to \frac{i\,(1 + 2\,p)}{-1 + 3\,p}\right\}\right\}$$

e infine sostituire a p ciascuno dei quattro valori ottenuti sopra. Si ottiene

```
Solve[(z + ⅈ)^4 == (3 z - 2 ⅈ)^4, z]
```

$$\left\{\left\{z \to -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right\}, \left\{z \to \frac{i}{4}\right\}, \left\{z \to \frac{3\,i}{2}\right\}, \left\{z \to \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right\}\right\}$$

5) Sia $\gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \frac{2t}{1+t^2},\ \ y = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ t \in [0, 1]\right\}$. Calcolare la lunghezza di γ.

Soluzione

La curva γ è parametrizzata da $\varphi(t) = \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$, $t \in [0, 1]$.

La sua lunghezza è data da: $\int_0^1 \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + (\varphi_2'(t))^2}\, dt$. Qui sotto il calcolo

```
φ[t_] := {2 t/(1 + t^2), (1 - t^2)/(1 + t^2)}; Print[Together[φ'[t]]]
```

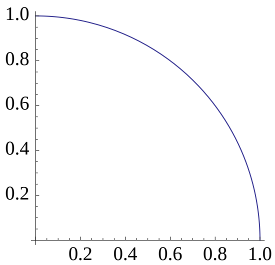
$$\left\{-\frac{2\left(-1 + t^2\right)}{\left(1 + t^2\right)^2}, -\frac{4\,t}{\left(1 + t^2\right)^2}\right\}$$

```
Together[φ'[t][[1]]^2 + φ'[t][[2]]^2]
```

$$\frac{4}{\left(1 + t^2\right)^2}$$

e quindi la lunghezza di γ è: $\int_0^1 \sqrt{\frac{4}{(1+t^2)^2}}\, dt = \int_0^1 \frac{2}{1+t^2}\, dt = 2 \arctan 1 = \frac{\pi}{2}$.

```
ParametricPlot[φ[t], {t, 0, 1}, AspectRatio → Automatic]
```



γ è in effetti un quarto di circonferenza.

- **versione 1**

1) Risolvere il problema di Cauchy:

$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + 7y(t) \end{cases}$; $\begin{cases} x(0) = 5 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Soluzione

```
A = {{4, 2}, {2, 7}}; Print[{Eigenvalues[A], Eigenvectors[A]}]
```

{{8, 3}, {{1, 2}, {-2, 1}}}

```
Expand[DSolve[{
   x'[t] == 4 x[t] + 2 y[t],
   y'[t] == 2 x[t] + 7 y[t]},
  {x[t], y[t]}, t]]
```

$\left\{\left\{x[t] \to \frac{4}{5} e^{3t} C[1] + \frac{1}{5} e^{8t} C[1] - \frac{2}{5} e^{3t} C[2] + \frac{2}{5} e^{8t} C[2],\right.\right.$
$\left.\left. y[t] \to -\frac{2}{5} e^{3t} C[1] + \frac{2}{5} e^{8t} C[1] + \frac{1}{5} e^{3t} C[2] + \frac{4}{5} e^{8t} C[2]\right\}\right\}$

(osservazione: tutti i denominatori 5 possono essere soppressi, incorporandoli nelle costanti C[1] e C[2])

```
Expand[DSolve[{
   x'[t] == 4 x[t] + 2 y[t],
   y'[t] == 2 x[t] + 7 y[t],
   x[0] == 5,
   y[0] == 0},
  {x[t], y[t]}, t]]
```

$\{\{x[t] \to 4 e^{3t} + e^{8t}, y[t] \to -2 e^{3t} + 2 e^{8t}\}\}$

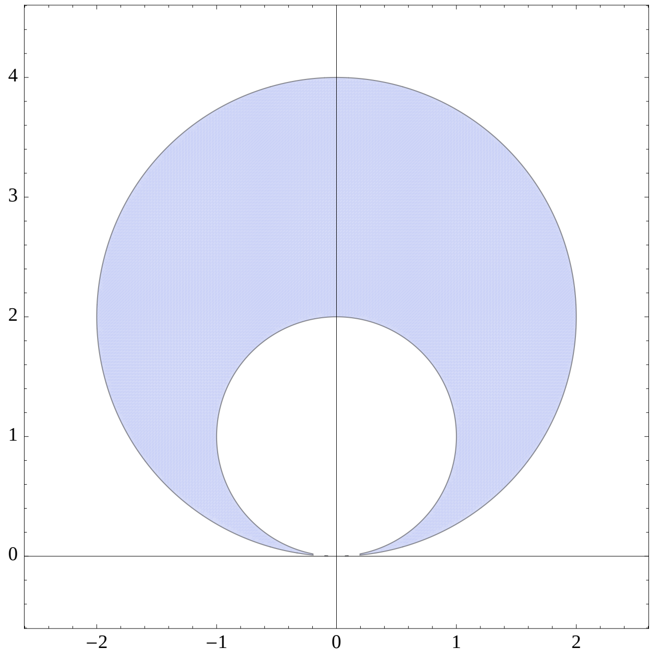
2) Sia $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 ;\ 2y \le x^2 + y^2 \le 4y\}$. Calcolare $\int\int_A \frac{y}{x^2+y^2}\, dx\, dy$.

È conveniente effettuare il cambiamento di variabili $\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ x = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$.

Soluzione

```
aa = RegionPlot[{2 y ≤ x^2 + y^2 ≤ 4 y}, {x, -2.5, 2.5}, {y, -0.5, 4.5}, PlotPoints → 200];
```

```
Show[aa, Axes -> True]
```



La controimmagine B dell'insieme A relativa al cambiamento di variabili in coordinate polari vede θ variare tra 0 e π; per ogni θ in questo intervallo, da $2y \leq x^2 + y^2 \leq 4y$ si ricava $2\rho \operatorname{sen}\theta \leq \rho^2 \leq 4\rho \operatorname{sen}\theta$ e quindi, siccome $\rho \geq 0$, segue $2 \operatorname{sen}\theta \leq \rho \leq 4 \operatorname{sen}\theta$. Pertanto:

$$\int\int_A \frac{y}{x^2+y^2}\, dx\, dy = \int_0^\pi \left(\int_{2\operatorname{sen}\theta}^{4\operatorname{sen}\theta} \frac{\rho \operatorname{sen}\theta}{\rho^2} \cdot \rho\, d\rho\right) d\theta = \int_0^\pi 2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta = \int_0^\pi (1 - \cos(2\theta))\, d\theta = \pi.$$

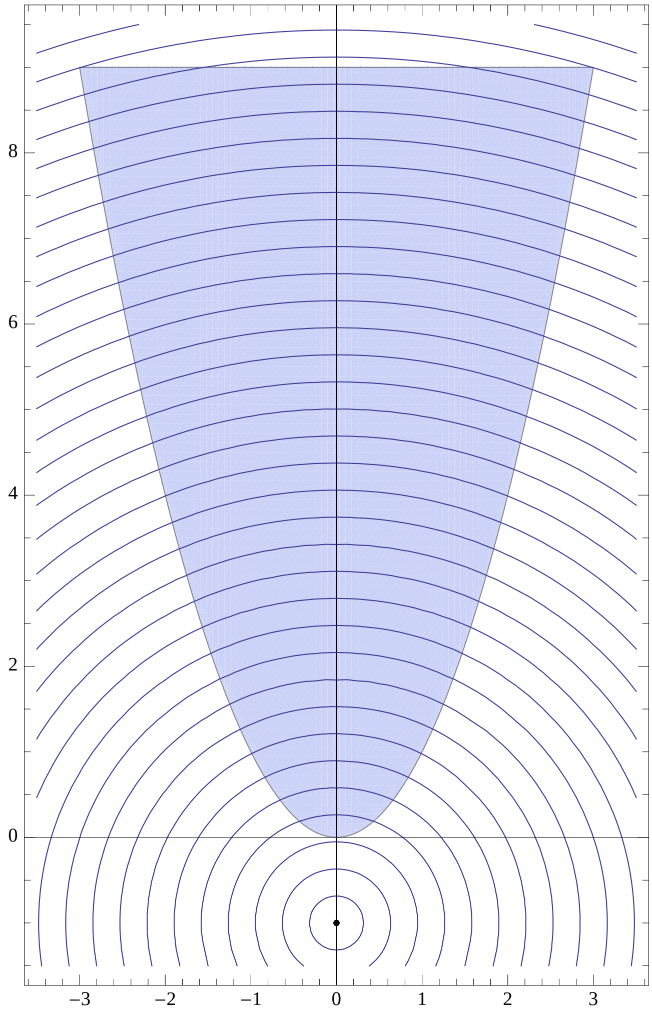
3) Sia $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 \leq y \leq 9\right\}$, $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2y$. Determinare il minimo e il massimo valore che f assume nell'insieme A. (È consigliabile considerare come sono fatte le linee di livello di f)

Soluzione

```
f[x_, y_] := x^2 + y^2 + 2 y;
```

```
aa = RegionPlot[{x^2 ≤ y ≤ 9}, {x, -3.5, 3.5}, {y, -1.5, 9.5}, PlotPoints → 100];
ab = Table[ContourPlot[x^2 + y^2 + 2 y == -1 + .1 k^2, {x, -3.5, 3.5}, {y, -1.5, 9.5}], {k, 0, 34}];
ac = Graphics[Point[{0, -1}]];
```

```
Show[aa, ab, ac, Axes → True, AspectRatio → Automatic]
```



Le linee di livello $\mathcal{L}_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid\ x^2 + y^2 + 2\,y = k\}$ sono circonferenze con centro $(0, -1)$ e raggio $\sqrt{1 + k}$, per $k \geq -1$.
Il raggio è tanto maggiore quanto più cresce il livello k.
Il minimo raggio per cui la circonferenza interseca A è 1; in questo caso $\mathcal{L}_k$ è tangente alla parabola in (0,0); il minimo di f in A è pertanto $f(0, 0) = 0$.
Il massimo di f in A è il k corrispondente alla linea di livello (circonferenza) più grande, avente ancora almeno un punto in comune con A. È la circonferenza che passa per (3, 9) e per (−3, 9); perciò il massimo vale

```
f[3, 9]
```

```
108
```

4) Risolvere la seguente equazione nel campo complesso: $(z - i)^4 = (3\,z + 2\,i)^4$.

Soluzione

Conviene scrivere l'equazione nella forma $\left(\frac{z-i}{3\,z+2\,i}\right)^4 = 1$, chiamare $p = \frac{z-i}{3\,z+2\,i}$ e risolvere $p^4 = 1$, che ha per soluzioni $p \in \{1,\ i,\ -1,\ -i\}$. Poi si ricava p:

```
Solve[(z - i)/(3 z + 2 i) == p, z]
```

$$\left\{\left\{z \to -\frac{i\,(1+2\,p)}{-1+3\,p}\right\}\right\}$$

e infine sostituire a p ciascuno dei quattro valori ottenuti sopra. Si ottiene

```
Solve[(z - i)^4 == (3 z + 2 i)^4, z]
```

$$\left\{\left\{z \to -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right\}, \left\{z \to -\frac{i}{4}\right\}, \left\{z \to -\frac{3\,i}{2}\right\}, \left\{z \to \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right\}\right\}$$

5) Sia $\gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid\ x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \ y = \frac{2\,t}{1+t^2},\ \ t \in [-1, 1]\right\}$. Calcolare la lunghezza di γ.

Soluzione

La curva γ è parametrizzata da $\varphi(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \frac{2\,t}{1+t^2}\right),\ t \in [-1, 1]$.

La sua lunghezza è data da: $\int_0^1 \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + (\varphi_2'(t))^2}\ dt$. Qui sotto il calcolo

```
φ[t_] := {(1 - t^2)/(1 + t^2), (2 t)/(1 + t^2)}; Print[Together[φ'[t]]]
```

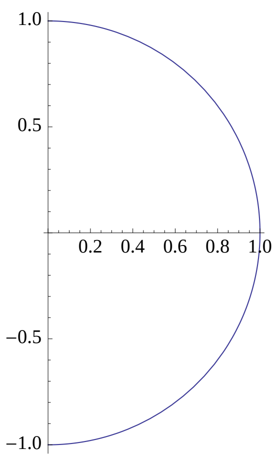
$$\left\{-\frac{4\,t}{\left(1+t^2\right)^2},\ -\frac{2\left(-1+t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^2}\right\}$$

```
Together[φ'[t][[1]]^2 + φ'[t][[2]]^2]
```

$$\frac{4}{\left(1+t^2\right)^2}$$

e quindi la lunghezza di γ è: $\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{4}{\left(1+t^2\right)^2}}\ dt = \int_{-1}^1 \frac{2}{1+t^2}\ dt = 4 \arctan 1 = \pi$.

```
ParametricPlot[φ[t], {t, -1, 1}, AspectRatio → Automatic]
```



γ è in effetti una semicirconferenza.