17 febbraio 2023, es.1) Programmazione lineare

Discutere il seguente problema di Programmazione lineare: trovare il massimo di $p(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 8x_4 + 3x_5$ con i vincoli $x_k \geq 0$ $(1 \leq k \leq 5)$ e

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 7x_4 + 3x_5 = 24 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 14 \end{cases}$$

Per iniziare l' algoritmodel simplesso, si scelga come base di A^* (spazio delle colonne della matrice dei coefficienti del sistema), $\mathcal{B}_1 = \{A_3, A_1\}$.

Soluzione

Avendo scelto come base di A^* $\mathcal{B}_1 = \{A_3, A_1\}$, dobbiamo operare sulla matrice dei coefficienti del sistema dei vincoli, ossia $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 7 & 3 & 24 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 1 & 14 \end{pmatrix}$ per ottenere $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispettivamente nella terza colonna e nella prima. Con qualche calcolo si perviene alla tabella del simplesso relativa alla base $\mathcal{B}_1$:

		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	B
$x_{v_1} = x_3$	$c_{v_1} = c_3 = 2$	0	-1	1	1	4	2
$x_{v_2} = x_1$	$c_{v_2} = c_1 = 4$	1	1	0	1	-1	4
		0	1	0	-2	1	20
		$(z_1 - c_1)$	$(z_2 - c_2)$	$(z_3 - c_3)$	$(z_4 - c_4)$	$(z_5 - c_5)$	(z)

Abbiamo $z_4 - c_4 = -2 < 0$, e la colonna sovrastante ha entrambi i termini positivi. Allora bisogna operare la " trasformazionepivotale" facendo entrare nella base il vettore A_4 . Per decidere quale vettore esce valutiamo $\frac{\beta_1}{\alpha_{1,4}} = 2$, $\frac{\beta_2}{\alpha_{2,4}} = 4$; il primo di questi è il minore, quindi esce $A_{v_1} = a_3$.
Con semplici calcoli si ottiene la nuova tabella del simplesso relativa alla base $\mathcal{B}_2 = \{A_4, A_1\}$:

		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	B
$x_{v_1} = x_3$	$c_{v_1} = c_4 = 8$	0	-1	1	1	4	2
$x_{v_2} = x_4$	$c_{v_2} = c_1 = 4$	1	2	-1	0	-5	2
		0	-1	2	0	9	24
		$(z_1 - c_1)$	$(z_2 - c_2)$	$(z_3 - c_3)$	$(z_4 - c_4)$	$(z_5 - c_5)$	(z)

Abbiamo $z_2 - c_2 = -1 < 0$, e la colonna sovrastante contiene un termine positivo. Allora bisogna nuovamente operare la " trasformazione pivotale" facendo entrare nella base il vettore A_2 . Esce necessariamente il vettore $A_{v_2} = A_1$ perché $\alpha_{2,2} = 2$ è il solo termine positivo della seconda colonna.
Con semplici calcoli si ottiene la nuova tabella del simplesso relativa alla base $\mathcal{B}_3 = \{A_4, A_2\}$:

		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	B
$x_{v_1} = x_1$	$c_{v_1} = c_4 = 8$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	3
$x_{v_2} = x_4$	$c_{v_2} = c_2 = 1$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	1
		$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{13}{2}$	25
		$(z_1 - c_1)$	$(z_2 - c_2)$	$(z_3 - c_3)$	$(z_4 - c_4)$	$(z_5 - c_5)$	(z)

Siccome adesso tutti gli $z_j - c_j$ sono ≥ 0 , l' algoritmoè terminato; la funzione obiettivo ha massimo nella regione ammissibile, il massimo vale $z = 25$ ed è assunto per $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 1, 0, 3, 0)$.

17 febbraio 2023, es.2) Distribuzioni

Sia, per $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \text{sen}\,|x|$ e sia $T = T_f$ la distribuzione associata a f.

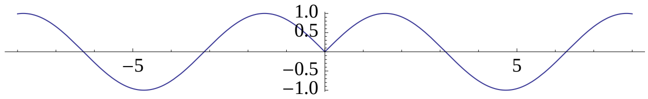
a) Disegnare il grafico di f ; ricavare l'espressione di $f'(x)$ e di $f''(x)$, per i valori di x nei quali tali derivate esistono, e rappresentare i rispettivi grafici.

b) Descrivere la distribuzione $T + T''$ in $D'(\mathbb{R})$, scrivendo esplicitamente le espressioni di $\langle T + T'', \varphi \rangle$, per una generica $\varphi \in D(\mathbb{R})$.

Soluzione.

Grafico di f :

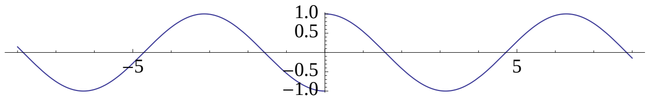
```
f[x_] := { Sin[x]   x > 0
         { Sin[-x]  x < 0 ;  Plot[f[x], {x, -8, 8}, AspectRatio → Automatic]
```



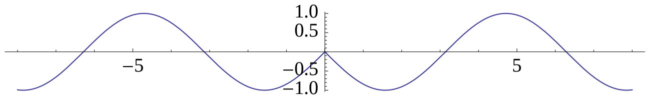
Abbiamo adesso, tenendo presente che *coseno* è una funzione pari, $f'(x) = \cos|x| \cdot \text{Sign}(x) = \cos x \cdot \text{Sign}(x)$, per $x \neq 0$; non esiste $f'(0)$.

Poi, per $x \neq 0$, $f''(x) = -\text{sen}\,|x| \cdot (\text{Sign}(x))^2 = -\text{sen}\,|x| = \; -f$.

```
Plot[f'[x], {x, -8, 8}, AspectRatio → Automatic]
```




```
Plot[f''[x], {x, -8, 8}, AspectRatio → Automatic]
```



La distribuzione T'' è costituita da una parte di tipo funzione, che è $T_{f''} = T_{-f} = -T_f$, più un addendo non di tipo funzione risultante dalla derivazione del "salto" di f' in 0, con ampiezza 2: cioè $2\,\delta$; dunque $T + T'' = T_f - T_f + 2\,\delta = 2\,\delta$. Perciò per ogni $\varphi \in D(\mathbb{R})$ avremo: $\langle T + T'', \varphi \rangle = \langle 2\,\delta', \varphi \rangle = 2\,\varphi(0)$.

17 febbraio 2023, es.3) Funzioni convesse

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2.

a) Dimostrare che: se f è convessa e inoltre per ogni x è $f(x) \geq 0$, allora è convessa anche f^2 (cioè la funzione che associa $x \mapsto (f(x))^2$).

b) Dimostrare che: se f è convessa e crescente, allora è convessa anche $f \circ f$ (cioè la funzione che associa $x \mapsto f(f(x))$).

Soluzione.

a) Supponiamo f convessa e non negativa; sia $p(x) = f(x)^2$. Allora:

$$p' = 2\,f\,f'; \quad p'' = 2\,f'\,f' + 2\,f\,f''$$

da cui segue la positività di p'', perché l'espressione ottenuta è somma di due addendi, il primo ≥ 0 perché è un quadrato, il secondo ≥ 0 perché prodotto di due fattori non negativi, in base all'ipotesi. Dunque p è convessa.

b) Supponiamo f convessa e crescente; sia $q(x) = f(f(x))$. Allora

$$q'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x); \quad q''(x) = f''(f(x)) \cdot (f'(x))^2 + f'(f(x)) \cdot f''(x).$$

Si nota che q'' assume valori non negativi perché sono non negativi i due addendi al secondo membro, in base alle ipotesi di crescenza e convessità di f. Dunque q è convessa.

17 febbraio 2023, es.4) Una disuguaglianza e la verifica di un limite.

a) Dimostrare che per ogni $\alpha > 0$ e per ogni $x > 0$ risulta $x^{\alpha} > \alpha \ln x$.
b) Servendosi della disuguaglianza di a) (anche se non si fosse riusciti a dimostrarla), verificare in base alla definizione di limite che $\lim_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{10}} - \ln x\right) = +\infty$. (Suggerimento: usare (a) con $\alpha = \frac{1}{20}$).

Soluzione.

a) Fissato $\alpha > 0$ sia, per $x > 0$, $f(x) = x^{\alpha} - \alpha \ln x$. Allora $f'(x) = \alpha\, x^{\alpha-1} - \frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha}{x}(x^{\alpha} - 1)$; $f'(x) > 0$ se $x > 1$. Per $x = 1$, f assume il suo minimo assoluto, che vale 1; perciò $f(x) \geq 1$ (quindi > 0) per ogni $x > 0$.

b) Dobbiamo dimostrare che: $\forall\, M > 0\ \exists\, S \geq 0,\ \forall\, x \left(x > S \Rightarrow x^{\frac{1}{10}} - \ln x > M\right)$.

Sia dunque fissato $M > 0$. Per quanto provato in (a), per ogni $x > 0$ è $x^{\frac{1}{20}} > \frac{1}{20} \ln x$, quindi $\ln x < 20\, x^{\frac{1}{20}}$, e allora $x^{\frac{1}{10}} - \ln x > x^{\frac{1}{10}} - 20\, x^{\frac{1}{20}} = x^{\frac{1}{20}}\left(x^{\frac{1}{20}} - 20\right)$. Se $x > 1$ allora è anche $x^{\frac{1}{20}} > 1$ e quindi $x^{\frac{1}{20}}\left(x^{\frac{1}{20}} - 20\right) > x^{\frac{1}{20}} - 20$. Perciò per ogni $x > 1$ è $x^{\frac{1}{10}} - \ln x > x^{\frac{1}{20}} - 20$.

Risulta $x^{\frac{1}{20}} - 20 > M \Leftrightarrow x^{\frac{1}{20}} > M + 20 \Leftrightarrow x > (M + 20)^{20}$. Posto $S = (M + 20)^{20}$ (che certamente è > 1) abbiamo, se $x > S$, che $x^{\frac{1}{10}} - \ln x > x^{\frac{1}{20}} - 20 > M$. È quindi soddisfatta la definizione di limite.

17 febbraio 2023, es.5) Le rate per l'auto

Giulio acquista un'auto il cui prezzo di listino è 20 000 € e usufruisce di un finanziamento bancario al tasso 6% per l'intero importo, da ripagare con tre rate anuali immediate posticipate di uguale importo.
a) Calcolare l' importodei ciascuna rata annuale e compilare il piano di ammortamento del debito in cui siano indicati per ogni annualità la quota capitale, la quota interesse, il debito estinto e il debito residuo.
b) Alla scadenza del terzo anno Giulio non dispone dell'importo necessario per pagare l'ultima rata; paga soltanto 2000 €, e chiede alla banca di saldare il debito rimanente in unica soluzione, tra 15 mesi. La banca accetta, e fissa in 6000 € la cifra che Giulio dovrà pagare tra 15 mesi per estinguere il suo debito. Calcolare qual è il tasso praticato dalla banca per quest'ultima operazione.

Soluzione.

a) Calcoliamo la rata annuale S. S è tale che sia 20000 il valore attuale della rendita di tre annualità posticipate di importo S, al tasso

```
i = 0.06;
```

$$\texttt{Solve}\left[20\,000 == \sum_{k=1}^{3} S * (1 + i)^{-k},\ S\right]$$

```
{{S → 7482.2}}
```

```
S = 7482.20;
```

Il “ debitoresiduo” al tempo 0 è

$$F_0 = 20\,000;$$

la quota di interesse nellla prima rata è

$$I_1 = F_0 * i$$

```
1200.
```

cosicché la quota di capitale è

```
C1 = S - I1
```

6282.2

Il debito residuo alla scadenza del primo anno è

```
F1 = F0 - C1
```

13717.8

e il debito estinto è

```
E1 = C1
```

6282.2

Analogamente si compilano le successive due righe del piano di ammortamento, che alla fine appare come segue:

tempi (t_k)	*Rata* (R_k)	*Q interesse* (I_k)	*Quota capitale* (C_k)	*Debito estinto* (E_k)	*Debito residuo* (F_k)	*Tasso i*
0	0	0	0	0	20000	0,06
1	7.482,20	1.200,00	6.282,20	6.282,20	13.717,80	*n (num rate)*
2	7.482,20	823,07	6.659,13	12.941,32	7.058,68	3
3	7.482,20	423,52	7.058,68	20.000,00	0,00	
			-			*Calcolo rata*
		-				7.482,20

b) Poiché alla fine del terzo anno Giulio paga soltanto 2000 €, in quel momento rimane in debito con la banca di 5482, 20 €. La somma di 6000 € che sarà pagata 15 mesi dopo è il montante del capitale di 5482, 20 € impiegato per 15 mesi; il tasso i di questa operazione è quindi tale che $6000 = 5482.20 \cdot (1+i)^{\frac{15}{12}}$.

```
Clear[i]; Solve[6000 == 5482.20 * (1 + i)^(15/12), i]
```

{{i → 0.0748729}}

17 febbraio 2023, es.6) L'assicurazione sanitaria per le cure odontoiatriche

Maria ha programmato un viaggio negli U.S.A., trascorrerà un mese a Los Angeles. Pochi giorni prima della partenza un molare le causa qualche problema; il suo dentista di fiducia non ha la possibilità di curarla prima della partenza, ma l'avvisa del pericolo che la cura potrebbe rendersi urgente e indispensabile proprio durante il soggiorno americano; egli valuta 20% la probabilità dello spiacevole evento. La cura in un ospedale statunitense costerebbe a Maria 5000 \$. Al costo di 1000 \$ Maria può sottoscrivere un'assicurazione sanitaria per il periodo in cui sarà in U.S.A.; in questo caso, se si renderà necessaria la cura urgente, Maria pagherà all'ospedale soltanto una franchigia di 500 \$.

a) Stabilire se è conveniente per Maria sottoscrivere l'assicurazione sanitaria oppure no, in base al criterio della speranza matematica del guadagno (che nel problema qui trattato assume valori comunque ≤ 0).

b) Stessa questione, se il criterio decisionale è la massima utilità attesa di guadagno, applicando la funzione utilità $u(x) = 1 - e^{-\frac{x}{10}}$ in cui x esprime l'importo monetario in *centinaia di \$*.

Soluzione.

a) Sia D l'evento "sarà necessaria la cura odontoiatrica". La seguente tabella riassume le diverse possibilità, se Maria decide di non sottoscrivere l'assicurazione oppure di sottoscriverla; gli importi monetari sono indicati in *centinaia di \$*.

decisione / Evento	no assicurazione	sì assicurazione	probabilità
D	−50	−15	0.2
non D	0	−10	0.8
Valori medi	−10	−11	

Secondo questo criterio di scelta conviene quindi *non* sottoscrivere l'assicurazione, e sperare che il molare non dia grossi problemi fino al rientro in patria.

b) Dobbiamo effettuare un confronto simile a quello di (a), non più tra le speranze matematiche associate a ciascuna decisione bensì tra le rispettive utilità attese. Compiliamo quindi la tabella con le utilità; il calcolo dei valori in tabella è svolto subito sotto.

decisione / Evento	no assicurazione	sì assicurazione	probabilità
D	$u(-50) = -147.4$	$u(-15) = -3.482$	0.2
non D	$u(0) = 0$	$u(-10) = -1.718$	0.8
Valori medi	$E(u(X_1)) = -29.483$	$E(u(X_2)) = -2.071$	

Valori delle utilità:

```
u[x_] := 1 - e^(-x/10); N[{u[-50], u[-15], u[-10]}]
{-147.413, -3.48169, -1.71828}
```

Calcolo delle utilità attese:

```
N[{0.2 * u[-50], 0.2 * u[-15] + 0.8 * u[-10]}]
{-29.4826, -2.07096}
```

Il criterio di decisione in base all'utilità attesa suggerisce quindi di sottoscrivere l'assicurazione sanitaria.