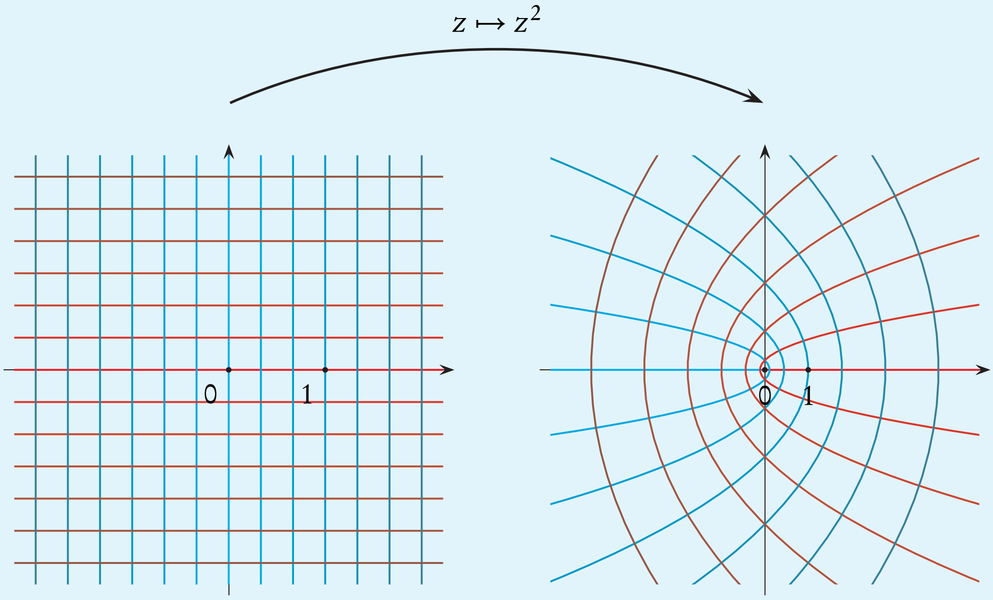
Giovanni Dore

Appunti del corso di

Analisi Matematica 1B

Esercizi



Alma Mater Studiorum - Università di Bologna
Corso di Laurea in Matematica
Anno Accademico 2022/2023

In copertina:
rappresentazione della funzione elevamento al quadrato in campo complesso.
Ogni retta nel piano a sinistra viene trasformata in una curva (parabola o semiretta)
dello stesso colore nel piano a destra.

INDICE

1 Funzioni 1
1.1 Esercizi 1
1.2 Soluzioni e risultati 33

2 Numeri complessi 85
2.1 Esercizi 85
2.2 Soluzioni e risultati 95

3 Integrali 109
3.1 Esercizi 109
3.2 Soluzioni e risultati 135

4 Integrali generalizzati 159
4.1 Esercizi 159
4.2 Soluzioni e risultati 166

5 Serie 171
5.1 Esercizi 171
5.2 Soluzioni e risultati 179

1
Funzioni

1.1 Esercizi

Dominio e simmetrie

Se è assegnata una formula in cui compare una variabile (solitamente x), ad esempio:

$$x^3\,, \qquad \frac{x}{e^x-1}\,, \qquad \sqrt{x^2-5}+3x\,, \qquad \sqrt{1-\log x}\,,$$

risulta naturale considerare la funzione individuata da tale formula. Con questo si intende la funzione, reale di variabile reale, definita per tutti gli $x \in \mathbb{R}$ per cui la formula ha senso. L'insieme di tali x, che risulta essere il domino della funzione definita dalla formula, è detto **dominio naturale** della funzione.

Per determinare il dominio naturale di una funzione è necessario determinare i numeri reali tali che nella formula considerata:

- ogni frazione ha denominatore diverso da 0,
- ogni potenza a esponente intero non positivo ha base diversa da 0,
- ogni potenza a esponente positivo non intero ha base non negativa,
- ogni potenza a esponente negativo non intero ha base positiva,
- ogni funzione elementare con dominio diverso da $\mathbb{R}$ ha argomento appartenente al dominio.

Ricordiamo che le funzioni elementari con dominio diverso da $\mathbb{R}$ sono:

- radice, che ha dominio $[0,+\infty[$,
- $\log$ (in qualunque base), che ha dominio $\mathbb{R}^+$,
- $\tan$, che ha dominio $\mathbb{R}\setminus\big\{(\pi/2)+k\pi \,\big|\, k\in\mathbb{Z}\big\}$,
- $\cot$, che ha dominio $\mathbb{R}\setminus\{k\pi \,|\, k\in\mathbb{Z}\}$,
- arcsen e $\arccos$, che hanno dominio $[-1,1]$,
- $\operatorname{settcosh}$, che ha dominio $[1,+\infty[$,
- $\operatorname{setttanh}$, che ha dominio $]-1,1[$,

1.1.1 Esempio. Determiniamo il dominio naturale delle funzioni definite dalle formule riportate sopra.

La formula x^3 ha senso $\forall x \in \mathbb{R}$; pertanto il dominio naturale della funzione $x \mapsto x^3$ è $\mathbb{R}$.

La formula $x/(e^x - 1)$ ha senso se il denominatore non si annulla, cioè per $e^x \neq 1$, che equivale a $x \neq 0$; quindi il dominio naturale della funzione $x \mapsto x/(e^x - 1)$ è $\mathbb{R}^*$.

La formula $\sqrt{x^2 - 5} + 3x$ ha senso se l'argomento della radice è non negativo, quindi il dominio naturale della funzione $x \mapsto \sqrt{x^2 - 5} + 3x$ è $\left]-\infty, -\sqrt{5}\right] \cup \left[\sqrt{5}, +\infty\right[$.

La formula $\sqrt{1 - \log x}$ ha senso se l'argomento del logaritmo è positivo e l'argomento della radice è non negativo, quindi deve essere $x > 0$ e $1 - \log x \geq 0$; la seconda disequazione è verificata se e solo se $\log x \leq 1$, cioè $x \leq e$. Quindi il dominio naturale della funzione $x \mapsto \sqrt{1 - \log x}$ è $\left]0, e\right]$. ◀

Una funzione, o, per la precisione, il suo grafico, può avere particolari simmetrie.

Studiamo il grafico di una funzione reale di variabile reale che sia simmetrico rispetto all'asse delle ascisse.

Il simmetrico rispetto all'asse delle ascisse del punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è $(-x, y)$. Quindi il grafico di una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ è simmetrico quando

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \in \operatorname{Gr}(f) \iff (-x, y) \in \operatorname{Gr}(f);$$

questa condizione equivale a

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \big(x \in A \wedge y = f(x)\big) \iff \big(-x \in A \wedge y = f(-x)\big).$$

Tale condizione equivale a chiedere che, $\forall x \in \mathbb{R}$, sia $x \in A \iff -x \in A$ e che, $\forall x \in A$, sia $f(-x) = f(x)$.

Poiché la trasformazione $x \mapsto -x$ è la simmetria dell'asse reale rispetto all'origine, la condizione su A significa che A è simmetrico rispetto all'origine.

Osserviamo che la condizione $x \in A \iff -x \in A$, è equivalente a $x \in A \implies -x \in A$. Infatti se vale questa, si ha $-x \in A \implies -(-x) \in A$, ma $-(-x) = x$.

Queste osservazioni si traducono nella seguente definizione.

Sia $f : A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}$ simmetrico rispetto all'origine; se

$$\forall x \in A, \quad f(-x) = f(x),$$

allora diciamo che f è una **funzione pari**.

Il nome è dovuto al fatto che, come si verifica facilmente, le funzioni potenza con esponente intero pari godono di tale proprietà.

1.1.2 Esempio. Sia f_1 la funzione definita da

$$f_1(x) = |x| + \sqrt{1 - x^2}.$$

Il dominio naturale di f_1 è costituito dagli $x \in \mathbb{R}$ per cui è non negativo il numero sotto radice, cioè $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 - x^2 \geq 0\}$, pertanto $\mathscr{D}(f_1) = [-1, 1]$. Evidentemente $x \in [-1, 1]$ se e solo se $-x \in [-1, 1]$. Inoltre, se x appartiene a tale insieme, allora

$$f_1(-x) = |-x| + \sqrt{1 - (-x)^2} = |x| + \sqrt{1 - x^2} = f_1(x).$$

Pertanto f_1 è una funzione pari. ◀

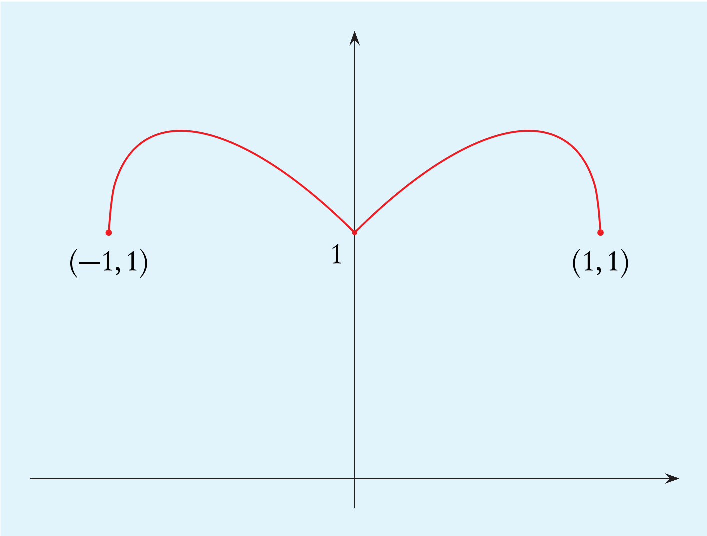


Figura 1.1.1
Il grafico della funzione pari f_1 (v. esempio 1.1.2) è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.

Analogamente studiamo il grafico di una funzione reale di variabile reale che sia simmetrico rispetto all'origine.

Il simmetrico rispetto all'origine del punto $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ è $(-x,-y)$. Quindi il grafico di una funzione $f: A\to\mathbb{R}$ è simmetrico quando

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad (x,y)\in \mathrm{Gr}(f) \iff (-x,-y)\in\mathrm{Gr}(f);$$

questa condizione equivale a

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \big(x\in A\wedge y=f(x)\big) \iff \big(-x\in A\wedge -y=f(-x)\big).$$

Tale condizione equivale a chiedere che, $\forall x\in\mathbb{R}$, sia $x\in A \iff -x\in A$ e che, $\forall x\in A$, sia $f(-x)=-f(x)$.

Queste osservazioni si traducono nella seguente definizione.

Sia $f: A\to\mathbb{R}$, con $A\subseteq\mathbb{R}$ simmetrico rispetto all'origine; se

$$\forall x\in A,\quad f(-x)=-f(x),$$

allora diciamo che f è una **funzione dispari**.

Il nome è dovuto al fatto che, come si verifica facilmente, le funzioni potenza con esponente intero dispari godono di tale proprietà.

1.1.3 Esempio. Sia f_2 la funzione definita da

$$f_2(x)=x\big(|x|-2\big).$$

Poiché la funzione valore assoluto ha dominio $\mathbb{R}$, il dominio naturale di f_2 è $\mathbb{R}$. Tale dominio è simmetrico rispetto all'origine. Inoltre, $\forall x\in\mathbb{R}$, si ha

$$f_2(-x)=(-x)\big(|-x|-2\big)=-\big(x\big(|x|-2\big)\big)=-f_2(x).$$

Pertanto f_2 è una funzione dispari. ◀

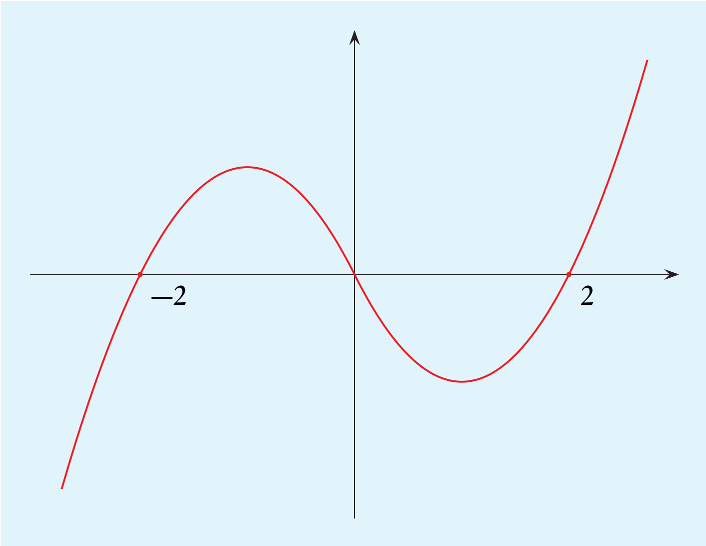


Figura 1.1.2
Il grafico della funzione dispari f_2 (v. esempio 1.1.3) è simmetrico rispetto all'origine.

Studiamo ora il grafico di una funzione che sia invariante per traslazioni in direzione parallela all'asse delle ascisse.

Sia $T \in \mathbb{R}^+$. Effettuando una traslazione di ampiezza T parallelamente all'asse delle ascisse in direzione positiva, il punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ viene traslato nel punto $(x+T,y)$. Quindi il grafico di una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ è invariante per una traslazione di ampiezza T parallela all'asse delle ascisse in direzione positiva quando

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \in \mathrm{Gr}(f) \iff (x+T,y) \in \mathrm{Gr}(f),$$

questa condizione equivale a

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \big(x \in A \wedge y = f(x)\big) \iff \big(x+T \in A \wedge y = f(x+T)\big).$$

Tale condizione equivale a chiedere che, $\forall x \in \mathbb{R}$, sia $x \in A \iff x+T \in A$ e che, $\forall x \in A$, sia $f(x+T) = f(x)$.

Queste osservazioni si traducono nella seguente definizione.

Siano $T \in \mathbb{R}^+$ e $f: A \to \mathbb{R}$, con A tale che, $\forall x \in \mathbb{R}$, si ha $x \in A \iff x+T \in A$; se

$$\forall x \in A, \quad f(x+T) = f(x),$$

allora diciamo che f è una **funzione periodica di periodo T** o **funzione T-periodica**.

1.1.4 Esempio. Sia f_3 la funzione definita da

$$f_3(x) = x - [x]$$

Poiché la funzione parte intera ha dominio $\mathbb{R}$, il dominio naturale di f_3 è $\mathbb{R}$. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta

$$f_3(x+1) = x+1-[x+1] = x+1-\big([x]+1\big) = x-[x] = f_3(x).$$

Pertanto f_3 è periodica di periodo 1. ◀

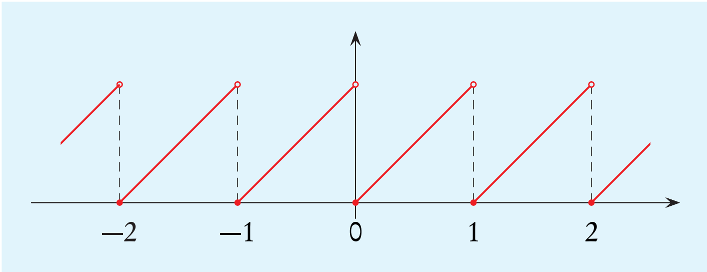


Figura 1.1.3
Il grafico della funzione periodica f_3 (v. esempio 1.1.4) è invariante per traslazioni orizzontali di ampiezza 1.

1) Determinare il dominio naturale della funzione definita da:

$$f(x) = \operatorname{arcsen}\left(1 - \sqrt{6\,\frac{x-5}{x-6}}\right).$$

2) Determinare il dominio naturale della funzione definita da:

$$f(x) = \sqrt{\log\left|\frac{3}{x-2}\right|}.$$

3) Determinare il dominio naturale della funzione definita da:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x^2 - 3x + 2 - |x^2 + x - 2|}}.$$

4) Determinare il dominio naturale delle seguenti funzioni:

a. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+4x+3}}{x+2}$

b. $f(x) = \sqrt{2x^2-1} - \sqrt{x+1}$

c. $f(x) = \log\left(x^2 + x + 1 - |3x|\right)$

d. $f(x) = \sqrt{\sqrt{1-x} - x - 4}$

e. $f(x) = \log\left(\dfrac{1-x^2}{x^2-3x}\right)$

f. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+2x}{x^2-9}}$

g. $f(x) = \log\left(\sqrt{1 - \dfrac{2}{x}} + \dfrac{\sqrt{3}}{x}\right)$

h. $f(x) = \sqrt{\log 6 - \log(-x^2 + 3x + 10)}$

i. $f(x) = \sqrt{x^2-4}\ \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1}{4x+8}\right)$

j. $f(x) = \dfrac{\sqrt{|x+2|-3}}{1+\sqrt{x^2-9}}$

k. $f(x) = \log\left(3x + 8 - \sqrt{x^2-4}\right)$

l. $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\sqrt{3x^2+2x}\right)$

Asintoti

Un asintoto per una funzione reale di variabile reale è una retta a cui il grafico della funzione "si avvicina all'infinito".

Precisiamo questa idea. Consideriamo un punto del grafico la cui distanza dall'origine tende a $+\infty$ e studiamo la sua distanza da una retta fissata. Quindi, assegnata $f\colon A \to \mathbb{R}$, consideriamo la funzione, con lo stesso dominio di f, che a x fa corrispondere la distanza del punto $\big(x, f(x)\big)$ dall'origine, cioè la funzione $x \mapsto \sqrt{x^2 + \big(f(x)\big)^2}$. Sia $c \in PL(A)$ tale che per $x \to c$, eventualmente da sinistra o da destra, sia $\sqrt{x^2 + \big(f(x)\big)^2} \to +\infty$. Ciò avviene per $x \to \pm\infty$, oppure per $x \to c \in \mathbb{R}$ (o $x \to c^-$ o $x \to c^+$) se si ha $f(x) \to \pm\infty$. Vediamo se in questi casi il punto $\big(x, f(x)\big)$ si avvicina a una determinata retta, nel senso che la distanza del punto dalla retta tende a 0, per $x \to c$.

Nel caso $x \to \pm\infty$, la distanza del punto $\big(x, f(x)\big)$ dalla retta di equazione $y = mx + p$ è $\big|f(x) - mx - p\big| / \sqrt{1 + m^2}$, che tende a 0 se e solo se $f(x) - mx - p \to 0$. È utile distinguere il caso $m = 0$ da $m \neq 0$.

Diciamo che la retta di equazione $y = p$ è **asintoto orizzontale** per f quando risulta

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = p \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = p\,.$$

Diciamo che la retta di equazione $y = mx + p$ è **asintoto obliquo** per f quando risulta

$$\lim_{x \to -\infty} \big(f(x) - mx - p\big) = 0 \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - mx - p\big) = 0.$$

Se per $x \to c$, o $x \to c^\pm$, $f(x) \to \pm\infty$, evidentemente il punto $\big(x, f(x)\big)$ si avvicina alla retta di equazione $x = c$. Quindi diciamo che la retta di equazione $x = c$ è **asintoto verticale** per f quando, per $x \to c^+$ o per $x \to c^-$ si ha $f(x) \to \pm\infty$.

1.1.5 Esempio. Sia

$$f_4\colon \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \qquad f_4(x) = \frac{x}{x-2}\,.$$

Risulta

$$\lim_{x \to -\infty} f_4(x) = 1\,, \qquad \lim_{x \to 2^-} f_4(x) = -\infty\,,$$
$$\lim_{x \to 2^+} f_4(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x \to +\infty} f_4(x) = 1\,.$$

Pertanto la retta di equazione $x = 2$ è asintoto verticale per f_4, mentre la retta di equazione $y = 1$ è asintoto orizzontale per f_4. ◀

Per stabilire che la retta di equazione $x = c$ è un asintoto verticale per una funzione f è sufficiente sapere che $\lim_{x \to c^\pm} f(x) = \pm\infty$. Per stabilire che la retta di equazione $y = m$ è un asintoto orizzontale per una funzione f è sufficiente sapere che $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = m$. Si tratta in entrambi i casi di avere informazioni su limiti di f. Diverso è il discorso per la ricerca di asintoti obliqui.

La condizione per cui la retta di equazione $y=mx+p$ è asintoto obliquo equivale a

$$f(x)=mx+p+o(1), \qquad \text{per } x\to\pm\infty .$$

Da questa uguaglianza segue

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{mx+p+o(1)}{x}=m+\frac{p}{x}+\frac{o(1)}{x}\xrightarrow[x\to\pm\infty]{} m .$$

Inoltre risulta $\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-mx\big)=p$. Pertanto, se la retta di equazione $y=mx+p$ è asintoto obliquo per f, allora, per $x\to-\infty$ o per $x\to+\infty$, risulta $f(x)/x\to m$ e $f(x)-mx\to p$. Viceversa, se, per $x\to-\infty$ o per $x\to+\infty$, si ha $f(x)/x\to m$ e $f(x)-mx\to p$, allora si ha $f(x)-mx-p\to 0$, quindi la retta di equazione $y=mx+p$ è asintoto obliquo per f.

1.1.6 Esempio. Sia

$$f_5\colon\,]-\infty,-4]\cup[0,+\infty[\,\to\mathbb{R}, \qquad f_5(x)=\sqrt{x^2+4x}.$$

Per $x\to+\infty$ si ha $1/x\to 0$, quindi

$$f_5(x)=|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}}=x\left(1+\frac{1}{2}\frac{4}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=x+2+o(1).$$

Pertanto la retta di equazione $y=x+2$ è asintoto obliquo per f_5.

Procedendo invece con il calcolo di limiti, si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+4x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+(4/x)}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+(4/x)}=1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f_5(x)-x\big)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+4x}+x\right)}{\sqrt{x^2+4x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x-x^2}{|x|\sqrt{1+(4/x)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{x\left(\sqrt{1+(4/x)}+1\right)}=2.$$

Riotteniamo così che la retta di equazione $y=x+2$ è asintoto obliquo per f_5.

Analogamente, per $x\to-\infty$ si ha

$$f_5(x)=|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}}=-x\left(1+\frac{1}{2}\frac{4}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=-x-2+o(1).$$

Pertanto la retta di equazione $y=-x-2$ è asintoto obliquo per f_5. ◀

Come risulta da quanto esposto sopra, per determinare gli asintoti orizzontali e obliqui di una funzione occorre studiarne il comportamento a $-\infty$ (se il dominio è inferiormente illimitato) e a $+\infty$ (se il dominio è superiormente illimitato). Per determinare gli asintoti verticali occorre studiare se la funzione è divergente per x che tende, eventualmente da sinistra o da destra, a un numero reale c. Ciò può avvenire se c è un punto di discontinuità per la funzione oppure se è un punto che non appartiene al dominio, ma è di accumulazione per il dominio. In particolare, se il dominio è unione di intervalli, hanno interesse gli estremi reali di tali intervalli che non appartengono agli intervalli stessi.

5) Determinare gli asintoti della funzione definita da:

$$f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}}\left(\frac{\pi}{2} + \arctan x\right).$$

6) Determinare gli asintoti della funzione definita da:

$$f(x) = \frac{x^2+3x+4}{x}\exp\left(-\frac{1}{|x-2|}\right).$$

7) Determinare gli asintoti della funzione definita da:

$$f(x) = \frac{3-x}{1-x}\arctan\left(\frac{x-6}{x-4}\right).$$

8) Determinare gli asintoti delle seguenti funzioni:

a. $f(x) = \log(e^{2x}+3)$

b. $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x^2-9}+3}{x^2-5x}$

c. $f(x) = \dfrac{x^2+3x-|x|}{\sqrt{x^2+2x}}$

d. $f(x) = (x+3)\log\left(2+\dfrac{6}{x}\right)$

e. $f(x) = \sqrt{x^2+5x}\,\log\left(\dfrac{5x}{|x-2|}\right)$

f. $f(x) = (x-5)\exp\left(\dfrac{4}{x+4}\right)$

g. $f(x) = \dfrac{x^2 e^{5/x}}{\sqrt{x^2-2x}}$

h. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-4}+3x^3+5x^2}{x^2-3x}$

i. $f(x) = x\sqrt{x^2+2x}\,(e^{-3/x}-1)$

j. $f(x) = \dfrac{x+\sqrt{x^2+2x+3}}{e^{4/x}+1}$

Monotonia ed estremanti locali

Lo strumento principale per studiare la monotonia di una funzione è il criterio di monotonia, che assicura che una funzione definita in un intervallo I, continua in I e derivabile in $\operatorname{int} I$, se ha derivata non negativa in $\operatorname{int} I$ allora è crescente, mentre se ha derivata non positiva allora è decrescente. Sottolineiamo che le ipotesi del teorema richiedono che il dominio sia un intervallo.

Ricordiamo anche il criterio di stretta monotonia, che afferma che, se si impone l'ipotesi più restrittiva che la derivata sia positiva, allora la funzione è strettamente crescente e, analogamente, se la derivata è negativa, allora la funzione è strettamente decrescente.

Elenchiamo alcune condizioni necessarie e condizioni sufficienti perché un punto del dominio di una funzione sia estremante locale.

Il teorema di Fermat stabilisce una condizione necessaria: se $c \in \operatorname{int}\mathscr{D}(f)$ è estremante locale e f è derivabile in c, allora $f'(c) = 0$. Pertanto l'insieme degli estremanti di una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ è incluso nell'unione dei seguenti tre insiemi:

$$A \cap \partial A,$$
$$\{x \in \operatorname{int} A \mid f \text{ non è derivabile in } x\},$$
$$\{x \in \operatorname{int} A \mid f \text{ è derivabile in } x \text{ e } f'(x) = 0\}.$$

I teoremi che stabiliscono condizioni sufficienti affinché un punto sia estremante locale si suddividono in due categorie: quelli che utilizzano informazioni sulla monotonia della funzione o, equivalentemente, sulla sua derivata prima e quelli che utilizzano anche informazioni sulla derivata seconda.

La condizione sufficiente di ordine zero assicura che, fissati $f: A \to \mathbb{R}$ e $c \in A$, se esiste $\delta \in \mathbb{R}^+$ tale che f è crescente in $]c-\delta, c] \cap A$ ed è decrescente in $[c, c+\delta[\cap A$, allora c è punto di massimo locale. Una analoga condizione sufficiente affinché c sia un punto di minimo locale si ottiene scambiando crescenza e decrescenza.

Dalla condizione di ordine zero, mediante il criterio di monotonia, si ottiene immediatamente la condizione sufficiente del I ordine. Questa assicura che, dati $f: I \to \mathbb{R}$, con I intervallo, e $c \in I$, se f è continua in I e derivabile in $I \setminus \{c\}$ ed esiste $\delta \in \mathbb{R}^+$ tale che $f'(x) \geq 0$ per $x \in]c-\delta, c[\cap I$ e $f'(x) \leq 0$ per $x \in]c, c+\delta[\cap I$, allora c è punto di massimo locale. Un'analoga condizione sufficiente affinché c sia un punto di minimo locale si ottiene scambiando il segno della derivata.

La condizione vale anche se c è massimo o minimo di I, in tal caso uno dei due insiemi $]c-\delta, c[\cap I$ e $]c, c+\delta[\cap I$ è vuoto, quindi ha senso solo una delle due condizioni sul segno di f'.

Evidentemente la condizione del I ordine per l'esistenza di un punto di massimo locale è verificata quando esistono un intervallo $]a, c[$, con $a < c$, in cui f' è positiva e un intervallo $]c, b[$, con $b > c$, in cui f' è negativa. In tal caso si può scegliere $\delta = \min\{c-a, b-c\}$. Analogamente per l'esistenza di un punto di minimo locale.

La condizione sufficiente del II ordine assicura che, dati $f: I \to \mathbb{R}$, con I intervallo, e $c \in I$, se f è derivabile 2 volte in c e risulta $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, allora c è punto di minimo locale; se invece $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, allora c è punto di massimo locale.

1.1.7 Esempio. Sia

$$f_6: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_6(x) = x^3 - 2x^2 + 2x.$$

La funzione f_6 è derivabile e, $\forall x \in \mathbb{R}$, si ha $f_6'(x) = 3x^2 - 4x + 2$. Questo trinomio ha discriminante -10, perciò è sempre positivo. Quindi, $\forall x \in \mathbb{R}$, si ha $f_6'(x) > 0$, pertanto f è strettamente crescente.

Non vi sono estremanti locali per f_6, perché solo il minimo e il massimo del dominio possono essere estremanti locali per una funzione strettamente monotona, ma $\mathscr{D}(f_6) = \mathbb{R}$ non ha né minimo né massimo. ◀

1.1.8 Esempio. Sia

$$f_7: \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R} \qquad f_7(x) = \frac{x}{\sqrt{|x^2 - 1|}}.$$

La funzione f_7 è derivabile in x se x non annulla né l'argomento del valore assoluto né quello della radice. Evidentemente tali argomenti sono non nulli in ogni punto del dominio di f_7, che quindi è derivabile. Si ha, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$,

$$f_7'(x) = \left(\sqrt{|x^2-1|} - x\,\frac{x\,\mathrm{sgn}(x^2-1)}{\sqrt{|x^2-1|}}\right)\frac{1}{\left(\sqrt{|x^2-1|}\right)^2} = \frac{|x^2-1| - x^2\,\mathrm{sgn}(x^2-1)}{|x^2-1|^{3/2}} =$$
$$= \frac{\mathrm{sgn}(x^2-1)(x^2-1) - x^2\,\mathrm{sgn}(x^2-1)}{|x^2-1|^{3/2}} = -\frac{\mathrm{sgn}(x^2-1)}{|x^2-1|^{3/2}}\,.$$

Il denominatore è positivo, quindi $f_7'(x) > 0$ se e solo se $\mathrm{sgn}(x^2-1) < 0$, cioè $x^2-1<0$ Pertanto se $x \in \,]-1,1[$, allora $f_7'(x)>0$, quindi f_7 è strettamente crescente in $]-1,1[$. Se $x \in \,]-\infty,-1[$, allora $f_7'(x)<0$, quindi f_7 è strettamente decrescente in $]-\infty,-1[$. Se $x \in \,]1,+\infty[$, allora $f_7'(x)<0$, quindi f_7 è strettamente decrescente in $]1,+\infty[$.

La funzione f_7 non ha estremanti locali. Infatti è derivabile e il dominio è aperto, pertanto, per il teorema di Fermat, in ogni estremante locale f_7' è nullo, ma f_7' non si annulla. ◀

1.1.9 Esempio. Sia

$$f_8 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_8(x) = \frac{x+1}{x^2+3}\,.$$

La funzione f_8 è derivabile e, $\forall x \in \mathbb{R}$, si ha

$$f_8'(x) = \frac{x^2+3-2x(x+1)}{(x^2+3)^2} = \frac{-x^2-2x+3}{(x^2+3)^2}\,.$$

Il denominatore è positivo, il trinomio a numeratore si annulla per

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-(-1)3}}{-1} = \frac{1\pm 2}{-1} = \begin{cases} 1\,, \\ -3\,. \end{cases}$$

Poiché il coefficiente di x^2 è negativo, risulta $f_8'(x) > 0$ se $x \in \,]-3,1[$ e $f_8'(x)<0$ se $x \in \,]-\infty,-3[\,\cup\,]1,+\infty[$. Quindi la funzione $f_8|_{[-3,1]}$ è derivabile e ha derivata positiva in tutti i punti interni al dominio, quindi, per il criterio di monotonia stretta, è strettamente crescente. Per motivi analoghi f_8 è strettamente decrescente in $]-\infty,-3]$ e in $[1,+\infty[$.

Osserviamo che dal fatto che f_8 sia decrescente in $]-\infty,-3]$ e in $[1,+\infty[$ non segue che essa sia decrescente nell'unione di tali insiemi. Infatti si verifica facilmente che per $x \in \,]-\infty,-3]$ risulta $f_8(x)<0$, mentre per $x \in [1,+\infty[$ risulta $f_8(x)>0$, quindi f_8 non è decrescente in $]-\infty,-3]\cup[1,+\infty[$.

Poiché esiste un intervallo che ha massimo -3 in cui f_8 è strettamente decrescente e un intervallo che ha minimo -3 in cui f_8 è strettamente decrescente, si determina facilmente $\delta \in \mathbb{R}^+$ tale che f_8 è strettamente decrescente in $]-3-\delta,-3]$ ed è strettamente crescente $[-3,-3+\delta[$; si può ad esempio scegliere $\delta = 1$. Quindi -3 è punto di minimo locale per f_8.

Analogamente, poiché esiste un intervallo che ha massimo 1 in cui f_8 strettamente crescente ed esiste un intervallo che ha minimo 1 in cui f_8 è strettamente decrescente, 1 è un punto di massimo locale per f_8.

Ripetiamo lo studio degli estremanti locali utilizzando la condizione necessaria del II ordine. Sappiamo che $f_8'(-3) = f_8'(1) = 0$. La funzione f_8' è derivabile e, $\forall x \in \mathbb{R}$, si ha

$$f_8''(x) = \frac{(-2x-2)(x^2+3)^2 - 4x(x^2+3)(-x^2-2x+3)}{(x^2+3)^4} =$$
$$= \frac{-2x^3-6x-2x^2-6+4x^3+8x^2-12x}{(x^2+3)^3} = \frac{2x^3+6x^2-18x-6}{(x^2+3)^3}.$$

Quindi

$$f_8''(-3) = \frac{-54+54+54-6}{12^3} = \frac{48}{12^3} > 0,$$
$$f_8''(1) = \frac{2+6-18-6}{4^3} = -\frac{16}{4^3} < 0.$$

Pertanto otteniamo nuovamente che -3 è un punto di minimo locale e 1 è un punto di massimo locale per f_8. ◀

1.1.10 Esempio. Sia

$$f_9 \colon \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[\to \mathbb{R}, \qquad f_9(x) = \left|\sqrt{2x+3} - x\right|.$$

Le funzioni radice quadrata e valore assoluto sono derivabili nel dominio escluso 0, quindi f_9 è derivabile in $x \in \mathscr{D}(f_9)$ se $2x+3 \neq 0$, e $\sqrt{2x+3} - x \neq 0$. Si ha $2x+3 = 0$ se e solo se $x = -3/2$. Si ha $\sqrt{2x+3} - x = 0$ se e solo se $x \geq 0$ e $2x+3 = x^2$. L'equazione $2x+3 = x^2$ equivale a $x^2 - 2x - 3 = 0$, che è verificata per

$$x = 1 \pm \sqrt{1^2 - (-3)} = 1 \pm 2 = \begin{cases} -1, \\ 3. \end{cases}$$

Poiché deve essere $x \geq 0$, si ha la soluzione $x = 3$. Pertanto f_9 è derivabile in

$$\mathscr{D}(f_9) \setminus \left\{-\frac{3}{2}, 3\right\} = \left]-\frac{3}{2}, 3\right[\cup \left]3, +\infty\right[.$$

Lo studio della derivabilità in $-3/2$ e 3 non ha interesse per la determinazione della monotonia della funzione.

Per x nell'insieme indicato sopra risulta

$$f_9'(x) = \operatorname{sgn}\left(\sqrt{2x+3} - x\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2x+3}} - 1\right).$$

Studiamo il segno di f_9'.

Si ha $\sqrt{2x+3} - x \geq 0$ se e solo se x è soluzione del sistema

$$\begin{cases} 2x+3 \geq 0, \\ x \leq 0, \end{cases}$$

oppure è soluzione dell'equazione $2x+3 \geq x^2$. Il sistema è verificato per $x \in [-3/2, 0]$. L'equazione equivale a $x^2 - 2x - 3 \leq 0$. Sappiamo che il trinomio ha le radici -1 e 3, quindi è non positivo in $[-1,3]$. Pertanto, considerando solo i punti in cui abbiamo già stabilito la derivabilità di f_9, si ha $\sqrt{2x+3}-x \geq 0$ per $x \in]-3/2,3[$ e $\sqrt{2x+3}-x \leq 0$ in $]3,+\infty[$.

La disequazione $1/\sqrt{2x+3} \geq 1$ è verificata per gli x maggiori o uguali a $-3/2$ tali che $2x+3 \leq 1$, cioè $x \leq -1$.

Pertanto il segno di f_9' risulta dal seguente schema

	$-\frac{3}{2}$	-1	3	
$\operatorname{sgn}\left(\sqrt{2x+3}-x\right)$		$+$	$+\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +$	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$
$\dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}-1$		$+$	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$
$f_9'(x)$		$+$	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$	$+\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +$

Poiché f_9 è continua in $[-3/2,-1]$ e derivabile in $]-3/2,-1[$, con derivata positiva in ogni punto di tale intervallo, per il criterio di monotonia è crescente (e anche strettamente crescente) in $[-3/2,-1]$. Per motivi analoghi, f_9 è crescente in $[3,+\infty[$ e decrescente in $[-1,3]$.

Il punto $-3/2$ è il minimo del dominio di f_9 e nel suo intorno destro $[-3/2,-1[$ la funzione è crescente, quindi, per la condizione sufficiente di ordine zero per gli estremanti locali, $-3/2$ è punto di minimo locale.

Scelto $\delta = 1/2$, in $]-1-\delta,-1]$ f_9 è crescente, mentre in $[-1,-1+\delta[$ f_9 è decrescente, quindi -1 è punto di massimo locale; per motivi analoghi, 3 è punto di minimo locale.

In questo caso la condizione sufficiente del II ordine non può essere utilizzata per stabilire che $-3/2$ e 3 sono estremanti locali, perché f_9 non è derivabile in tali punti. Infatti

$$\lim_{x\to -3/2} f_9'(x) = \lim_{x\to -3/2} \operatorname{sgn}\left(\sqrt{2x+3}-x\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2x+3}}-1\right) = \lim_{x\to -3/2}\left(\frac{1}{\sqrt{2x+3}}-1\right) = +\infty .$$

Pertanto

$$\lim_{x\to -3/2} R_{f_9}\left(x,-\frac{3}{2}\right) = \lim_{x\to -3/2} f_9'(x) = +\infty ,$$

quindi f_9 non è derivabile in $-3/2$. Inoltre

$$\lim_{x\to 3^-} f_9'(x) = \lim_{x\to 3^-} \operatorname{sgn}\left(\sqrt{2x+3}-x\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2x+3}}-1\right) = \lim_{x\to 3^-}\left(\frac{1}{\sqrt{2x+3}}-1\right) = -\frac{2}{3},$$

$$\lim_{x\to 3^+} f_9'(x) = \lim_{x\to 3^+} \operatorname{sgn}\left(\sqrt{2x+3}-x\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2x+3}}-1\right) = -\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{1}{\sqrt{2x+3}}-1\right) = \frac{2}{3}.$$

Quindi

$$\lim_{x\to 3^-} R_{f_9}(x,3) = \lim_{x\to 3^-} f_9'(x) = -\frac{3}{2}, \qquad \lim_{x\to 3^+} R_{f_9}(x,3) = \lim_{x\to 3^+} f_9'(x) = \frac{3}{2},$$

pertanto i limiti sinistro e destro del rapporto incrementale sono diversi, perciò f_9 non è derivabile in 3. ◀

9) Determinare gli intervalli di crescenza e di decrescenza e i punti di massimo e di minimo locale della funzione definita da:

$$f(x) = \frac{|x^2 - 4x + 3|}{x + 1}.$$

10) Determinare gli intervalli di crescenza e di decrescenza e i punti di massimo e di minimo locale della funzione definita da:

$$f(x) = x \exp(-2x^2 + 3x).$$

11) Determinare gli intervalli di crescenza e di decrescenza e i punti di massimo e di minimo locale della funzione definita da:

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + 56} - \sqrt{x^2 - 4}.$$

12) Determinare gli intervalli di crescenza e di decrescenza e i punti di massimo e di minimo locale della funzione definita da:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 5x + 4}{x}}.$$

13) Determinare gli intervalli di crescenza e di decrescenza e i punti di massimo e di minimo locale della funzione definita da:

$$f(x) = \log(x^2 + 2x) - |x + 4|.$$

14) Determinare gli intervalli di crescenza e di decrescenza e i punti di massimo e di minimo locale della funzione definita da:

$$f(x) = \tan x + 3 \cot x.$$

15) Determinare gli intervalli di crescenza e di decrescenza e i punti di massimo e di minimo locale delle seguenti funzioni:

a. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

b. $f(x) = \sqrt{x+1} - x$

c. $f(x) = \dfrac{1}{1 - \log x}$

d. $f(x) = 2x - \operatorname{arcsen} x$

e. $f(x) = \dfrac{\exp\left(\sqrt{-x+5}\right)}{x-2}$

f. $f(x) = x\left(\log \dfrac{x}{e^2}\right)^3$

g. $f(x) = e^x \dfrac{x}{x-2}$

h. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3} - 2x^2$

i. $f(x) = x\sqrt{|\log x|}$

j. $f(x) = |8x^2 + 2x - 1| \exp(-4x^2 + 2x)$

k. $f(x) = \dfrac{x+7}{\sqrt{x^2+11}-4}$

l. $f(x) = \dfrac{|x+3|+2}{x^2-9}$

m. $f(x) = \dfrac{\exp(x^2/2)}{2|x+1|+1}$

n. $f(x) = |x^2+3x|e^{-2x}$

o. $f(x) = |x+4|\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$

p. $f(x) = 2\arctan(x^2) + \arctan\left(\dfrac{1}{2(x^2-9)}\right)$

q. $f(x) = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x + 2}$

r. $f(x) = \sin x \sqrt{\cos x}$

Convessità e punti di flesso

Per studiare le convessità di una funzione possiamo utilizzare i criteri di convessità; solitamente risulta utile quello del II ordine, che assicura che una funzione definita in un intervallo I, continua in I e derivabile 2 volte in $\operatorname{int} I$, se ha derivata seconda non negativa in $\operatorname{int} I$ allora è convessa, mentre se ha derivata seconda non positiva allora è concava.

Il punto c appartenente all'interno del dominio della funzione f è un **punto di flesso** per f quando f è derivabile in c e $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$ tale che $]c-\delta, c+\delta[\subseteq \mathscr{D}(f)$ e

$$\forall x \in]c-\delta, c+\delta[\setminus \{c\}, \quad \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq f'(x),$$

oppure

$$\forall x \in]c-\delta, c+\delta[\setminus \{c\}, \quad \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq f'(x).$$

La prima condizione equivale a chiedere che sia

$$\big(\forall x \in]c-\delta, c[,\ f(x)-f(c) \geq f'(x)(x-c)\big) \wedge \big(\forall x \in]c, c+\delta[,\ f(x)-f(c) \leq f'(x)(x-c)\big),$$

cioè

$$\big(\forall x \in]c-\delta, c[,\ f(x) \geq f(c)+f'(x)(x-c)\big) \wedge \big(\forall x \in]c, c+\delta[,\ f(x) \leq f(c)+f'(x)(x-c)\big).$$

Geometricamente ciò significa che in $]c-\delta, c[$ il grafico di f è "al di sopra" della retta tangente al grafico in $\big(c, f(c)\big)$, mentre in $]c, c+\delta[$ il grafico di f è "al di sotto" della retta tangente. In altre parole, nel punto $\big(c, f(c)\big)$ il grafico di f attraversa la retta tangente.

Analogamente la seconda condizione equivale a

$$\big(\forall x \in]c-\delta, c[,\ f(x) \leq f(c)+f'(x)(x-c)\big) \wedge \big(\forall x \in]c, c+\delta[,\ f(x) \geq f(c)+f'(x)(x-c)\big).$$

In questo caso la posizione del grafico rispetto alla retta tangente è invertita e, come prima, il grafico attraversa la retta tangente.

Siano $f: I \to \mathbb{R}$, con I intervallo, e $c \in \operatorname{int} I$ tale che f è derivabile in c. Se esiste $\delta \in \mathbb{R}^+$ tale che $]c-\delta, c+\delta[\subseteq I$, f è convessa in $]c-\delta, c]$ e concava in $[c, c+\delta[$, allora, per le proprietà delle funzioni convesse e concave, risulta verificata la condizione

$$\big(\forall x \in]c-\delta, c[,\ f(x) \geq f(c)+f'(x)(x-c)\big) \wedge \big(\forall x \in]c, c+\delta[,\ f(x) \leq f(c)+f'(x)(x-c)\big),$$

quindi c è punto di flesso per f.

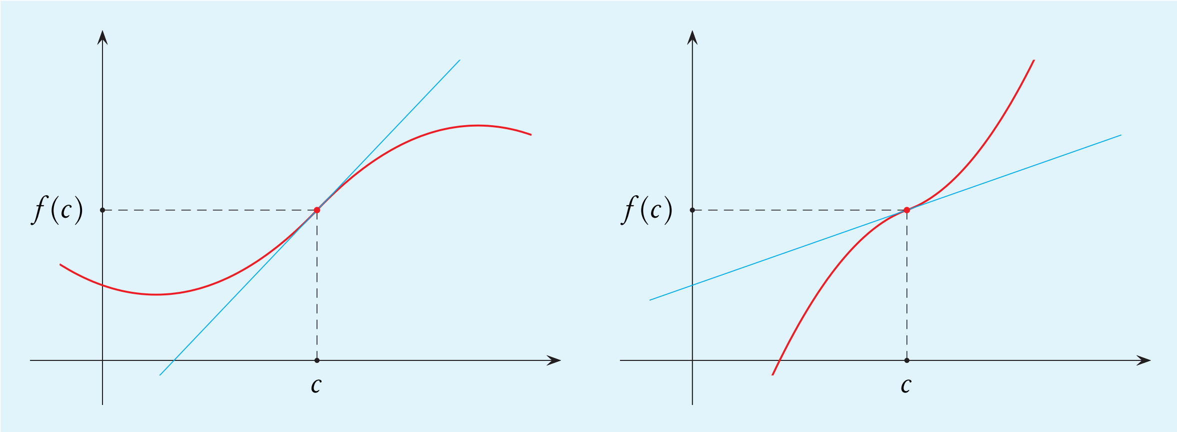


Figura 1.1.4
Punti di flesso. A sinistra il grafico di una funzione per cui il rapporto incrementale $R_f(x,c)$ è minore o uguale a $f'(c)$, per x vicino a c. A destra invece $R_f(x,c) \geq f'(c)$, per x vicino a c.

Analogamente, c è punto di flesso se esiste $\delta \in \mathbb{R}^+$ tale che $]c-\delta, c+\delta[\subseteq I$, f è concava in $]c-\delta, c]$ e convessa in $[c, c+\delta[$.

1.1.11 Esempio. Sia

$$f_{10} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_{10}(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + 4x\,.$$

La funzione f_{10} è derivabile 2 volte e, $\forall x \in \mathbb{R}$, si ha

$$f'_{10}(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 4\,,$$
$$f''_{10}(x) = 12x^2 + 6x - 6\,.$$

Si ha $12x^2 + 6x - 6 = 0$ se e solo se $2x^2 + x - 1 = 0$, e questo è verificato per

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2(-1)}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} -1\,, \\ \dfrac{1}{2}\,. \end{cases}$$

Pertanto f''_{10} è positivo in $]-\infty, -1[\cup]1/2, +\infty[$ ed è negativo in $]-1, 1/2[$. Quindi f_{10} è convessa in $]-\infty, -1]$ e in $[1/2, +\infty[$, è concava in $[-1, 1/2]$.

I punti -1 e $1/2$ sono punti interni al dominio di f_{10} in cui la funzione è derivabile, ognuno dei due separa un intervallo in cui f''_{10} è concava da un intervallo in cui f_{10} è convessa, pertanto sono punti di flesso per f_{10}. ◀

1.1.12 Esempio. Sia

$$f_{11} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_{11}(x) = x^2 - 2|x|\,.$$

La funzione f_{11} è continua ed derivabile 2 volte in $\mathbb{R}^*$ e, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, si ha

$$f'_{11}(x) = 2x - 2\,\mathrm{sgn}(x)\,,$$
$$f''_{11}(x) = 2\,.$$

Pertanto $f''_{11}(x)$ è positivo per $x \in \mathbb{R}^*$.

Quindi f_{11} è convessa in $]-\infty,0]$ e in $[0,+\infty[$.

Osserviamo che questo non consente di concludere che f_{11} è convessa nel suo dominio. Si ha $f_{11}(-1)=-1$ e $f_{11}(1)=-1$ e

$$f_{11}\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)(-1)+\frac{1}{2}\cdot 1\right)=f_{11}(0)=0\,,$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)f_{11}(-1)+\frac{1}{2}f_{11}(1)=\left(1-\frac{1}{2}\right)(-1)+\frac{1}{2}(-1)=-1\,.$$

Pertanto, posto $x=-1$, $y=1$, $t=1/2$, non si ha

$$f_{11}\big((1-t)x+ty\big)\leq(1-t)f_{11}(x)+tf_{11}(y)\,.$$

Perciò f_{11} non è convessa. ◀

16) Determinare gli intervalli di concavità e di convessità e i punti di flesso della funzione definita da:

$$f(x)=|4x^2-8x+3|\,e^x\,.$$

17) Determinare gli intervalli di concavità e di convessità e i punti di flesso della funzione definita da:

$$f(x)=\log\big(|x^2+2x|+3\big)\,.$$

18) Determinare gli intervalli di concavità e di convessità e i punti di flesso della funzione definita da:

$$f(x)=(x-1)\sqrt{2x^2-4x+1}\,.$$

19) Determinare gli intervalli di concavità e di convessità e i punti di flesso delle seguenti funzioni:

a. $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x^2+x+3}$

b. $f(x)=x^4+6x-8-4|x^2-x|$

c. $f(x)=\log\left(\dfrac{x}{6|x|-5}\right)$

d. $f(x)=\log\big(|x^2-3|\big)+x^2-3$

e. $f(x)=\dfrac{x^3+2x+|x|}{x^2+9}$

f. $f(x)=|x^2-8x+15|\sqrt{x}$

g. $f(x)=\exp\left(\dfrac{x+2}{|x+4|}\right)$

h. $f(x)=\sqrt{x^2-4}-2|x-4|$

Studio di funzione

Gli strumenti descritti finora servono per individuare alcune proprietà del grafico di una funzione. Vediamo come utilizzarli per studiare il comportamento generale di una funzione e tracciarne un grafico qualitativo.

Per lo studio del grafico di una funzione non vi sono regole precise da applicare in ogni caso; diamo alcune indicazioni, tenendo conto che non sempre è possibile (o agevole) ottenere tutte le informazioni elencate.

- Determinare il dominio naturale.
- Determinare eventuali simmetrie.
- Determinare le intersezioni con gli assi e il segno.
- Studiare il comportamento nei punti limite del dominio.
- Studiare la continuità e il comportamento nei punti di discontinuità.
- Determinare gli asintoti.
- Studiare la derivabilità e calcolare la derivata.
- Studiare il segno della derivata.
- Studiare la monotonia e determinare gli estremanti e gli estremi locali.
- Studiare l'esistenza della derivata seconda e calcolarla.
- Studiare il segno della derivata seconda.
- Studiare concavità, convessità e determinare i punti di flesso.
- Tracciare un grafico qualitativo.

Osserviamo che una particolare informazione sulla funzione studiata può essere ottenuta più volte in passi successivi dello studio, oppure una informazione può dare indicazioni sui risultati che si ottengono nei passi successivi. Ad esempio, se si è stabilito che una funzione è positiva in un certo intervallo, i limiti della funzione agli estremi dell'intervallo non possono essere negativi. In questi casi la ridondanza dell'informazione è utile come verifica di non avere commesso errori.

1.1.13 Esempio. Studiamo la funzione definita da

$$f_{12}(x) = \frac{x^3 - 2x}{x^2 - 3}.$$

Il dominio naturale di f_{12} è costituito dagli $x \in \mathbb{R}$ tali che il denominatore $x^2 - 3$ è diverso da 0, cioè dagli x diversi da $\pm\sqrt{3}$, quindi

$$\mathscr{D}(f_{12}) = \left]-\infty, -\sqrt{3}\right[\cup \left]-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right[\cup \left]\sqrt{3}, +\infty\right[.$$

Il dominio di f_{12} è simmetrico rispetto all'origine e, $\forall x \in \mathscr{D}(f_{12})$, risulta

$$f_{12}(-x) = \frac{(-x)^3 - 2(-x)}{(-x)^2 - 3} = \frac{-x^3 + 2x}{x^2 - 3} = -f_{12}(x),$$

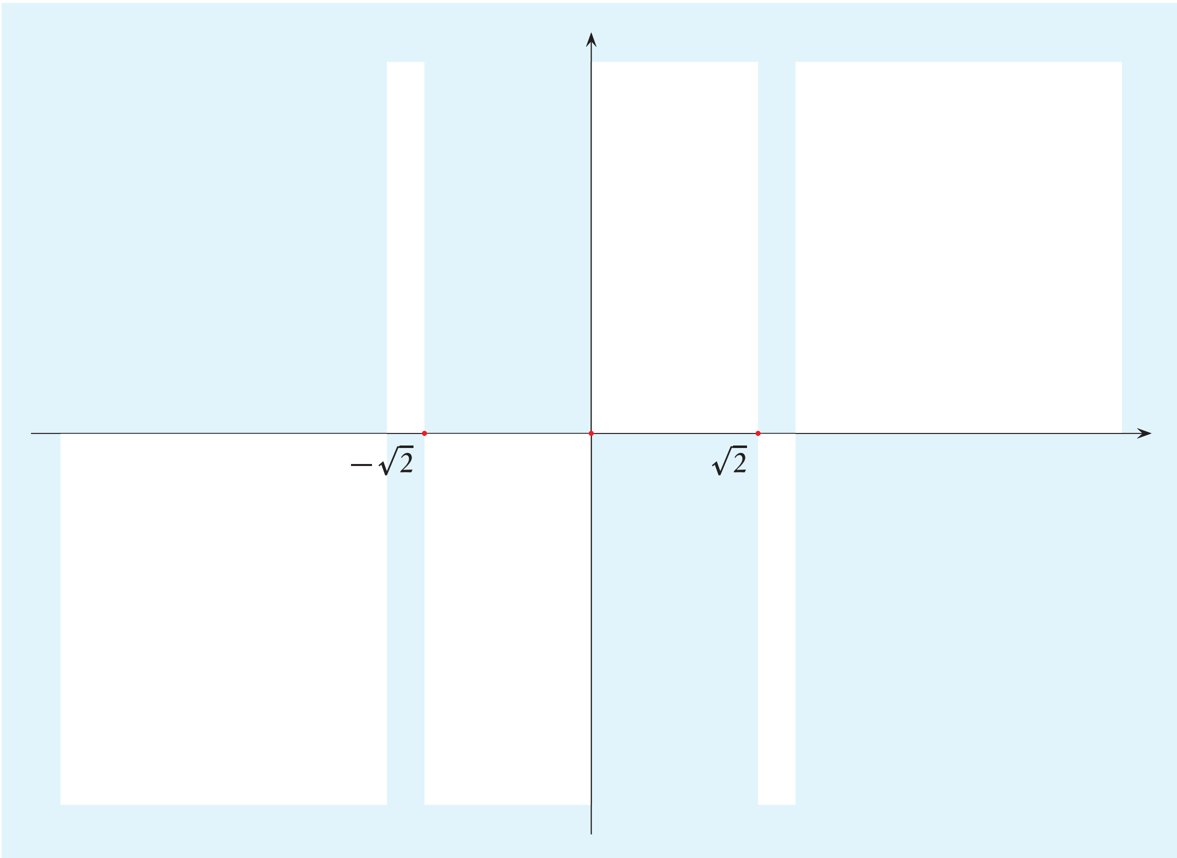
pertanto f_{12} è dispari.

Determiniamo le intersezioni del grafico di f con gli assi cartesiani. Si ha $f_{12}(0) = 0$, quindi $\mathrm{Gr}(f)$ interseca l'asse delle ordinate nell'origine. Si ha $f_{12}(x) = 0$ se e solo se si annulla il numeratore, cioè se $x(x^2-2)=0$, quindi $\mathrm{Gr}(f)$ interseca l'asse delle ascisse nei punti di ascissa $-\sqrt{2}$, 0 e $\sqrt{2}$.

Il segno di f_{12} risulta dal seguente schema

		$-\sqrt{3}$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$\sqrt{3}$	
x	$-\ -\ -$		$-$		$-\ -\ -\ -\ -$		$+\ +\ +\ +\ +$		$+$		$+\ +\ +$
x^2-2	$+\ +\ +$		$+$		$-\ -\ -\ -\ -$		$-\ -\ -\ -\ -$		$+$		$+\ +\ +$
x^2-3	$+\ +\ +$		$-$		$-\ -\ -\ -\ -$		$-\ -\ -\ -\ -$		$-$		$+\ +\ +$
$f_{12}(x)$	$-\ -\ -$		$+$		$-\ -\ -\ -\ -$		$+\ +\ +\ +\ +$		$-$		$+\ +\ +$

Pertanto $\mathrm{Gr}(f_{12})$ è contenuto nelle parti chiare del piano rappresentate nella seguente figura e passa per i punti indicati.



Studiamo il comportamento di f_{12} nei punti limite del dominio, cioè negli estremi degli intervalli che suo cono il dominio. I punti limite non appartengono al dominio, quindi studiamo i limiti di $f_{12}(x)$ per x che tende a tali punti limite. Si verifica facilmente che si ha:

$$\lim_{x\to-\infty} f_{12}(x)=-\infty\,, \qquad \lim_{x\to-\sqrt{3}^-} f_{12}(x)=-\infty\,, \qquad \lim_{x\to-\sqrt{3}^+} f_{12}(x)=+\infty\,,$$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}^-} f_{12}(x)=-\infty\,, \qquad \lim_{x\to\sqrt{3}^+} f_{12}(x)=+\infty\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} f_{12}(x)=+\infty\,.$$

Pertanto le rette di equazione $x=-\sqrt{3}$ e $x=\sqrt{3}$ sono asintoti verticali per f_{12}.

Stabiliamo se esistono asintoti obliqui. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f_{12}(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-2x}{x(x^2-3)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^3}=1;$$

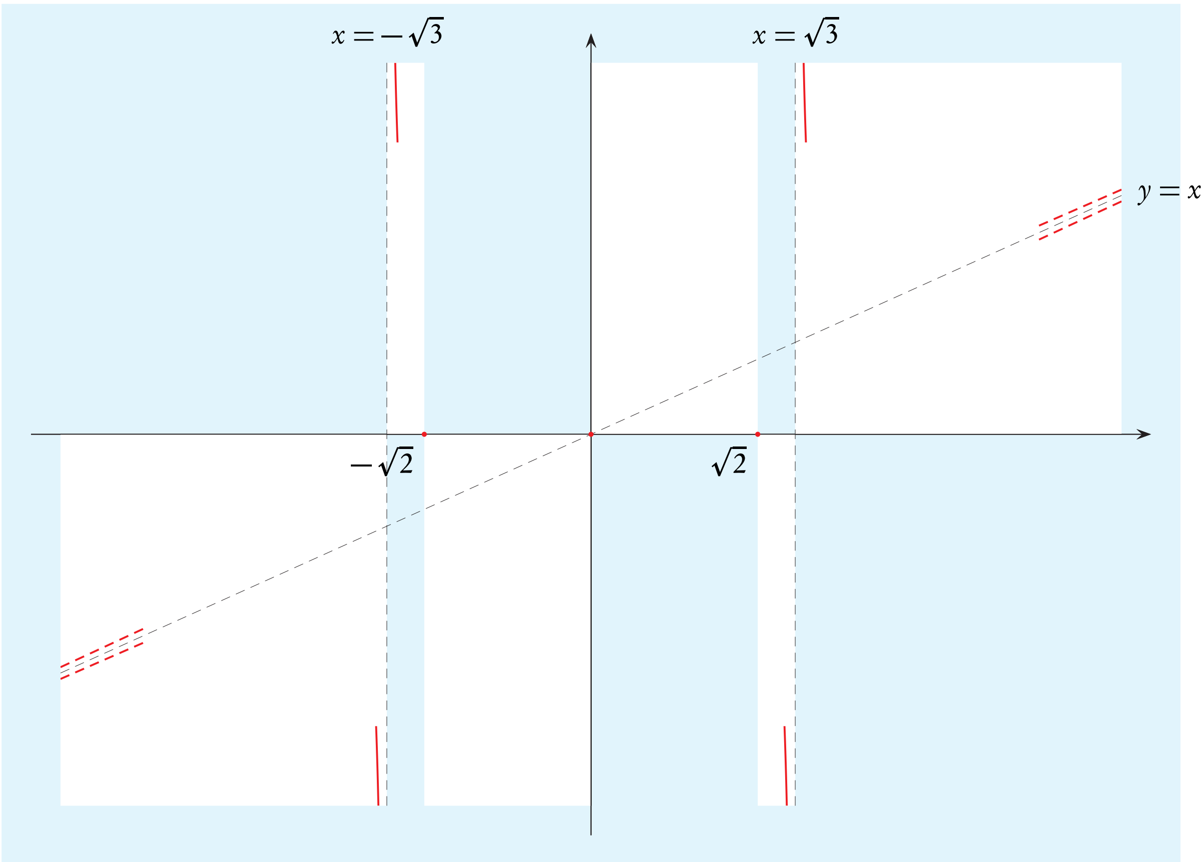
inoltre

$$\lim_{x\to-\infty}\big(f_{12}(x)-x\big)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3-2x}{x^2-3}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-2x-x(x^2-3)}{x^2-3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2-3}=0.$$

Pertanto la retta di equazione $y=x$ è asintoto obliquo, per $x\to-\infty$, per f_{12}. Poiché f_{12} è dispari, tale retta è asintoto obliquo anche per $x\to+\infty$. Infatti

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f_{12}(x)-x\big)=\lim_{y\to-\infty}\big(f_{12}(-y)+y\big)=-\lim_{y\to-\infty}\big(f_{12}(y)-y\big)=0.$$

Riportiamo le informazioni ottenute nella seguente figura.



La funzione f_{12} è razionale fratta, quindi derivabile; $\forall x\in\mathscr{D}(f_{12})$, si ha

$$f'_{12}(x)=\frac{(3x^2-2)(x^2-3)-2x(x^3-2x)}{(x^2-3)^2}=\frac{3x^4-9x^2-2x^2+6-2x^4+4x^2}{(x^2-3)^2}=$$
$$=\frac{x^4-7x^2+6}{(x^2-3)^2}.$$

Il denominatore è sempre positivo, quindi, per determinare il segno di f'_{12}, è sufficiente studiare il segno del numeratore. Si ha $x^4-7x^2+6x^2=0$ per

$$x^2=\frac{7\pm\sqrt{7^2-4\cdot 6}}{2}=\frac{7\pm 5}{2}=\begin{cases}1,\\ 6.\end{cases}$$

Pertanto $x^4-7x^2+6x^2=(x^2-1)(x^2-6)$; il segno di f'_{12} risulta quindi dal seguente schema.

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
 & & -\sqrt{6} & & -\sqrt{3} & & -1 & & 1 & & \sqrt{3} & & \sqrt{6} & \\
x^2-1 & +\;+\;+ & | & +\;+ & | & +\;+ & | & -\;-\;-\;-\;-\;-\;- & | & +\;+ & | & +\;+ & | & +\;+\;+ \\
x^2-6 & +\;+\;+ & | & -\;- & | & -\;- & | & -\;-\;-\;-\;-\;-\;- & | & -\;- & | & -\;- & | & +\;+\;+ \\
f'_{12}(x) & +\;+\;+ & | & -\;- & | & -\;- & | & +\;+\;+\;+\;+\;+\;+ & | & -\;- & | & -\;- & | & +\;+\;+
\end{array}$$

Pertanto f_{12} è crescente in $\left]-\infty,-\sqrt{6}\right]$, in $[-1,1]$ e in $\left[\sqrt{6},+\infty\right[$ ed è decrescente in $\left[-\sqrt{6},-\sqrt{3}\right[$, in $\left]-\sqrt{3},-1\right]$, in $\left[1,\sqrt{3}\right[$ e in $\left]\sqrt{3},\sqrt{6}\right]$. Inoltre $-\sqrt{6}$ e 1 sono punti di massimo locale, -1 e $\sqrt{6}$ sono punti di minimo locale. Calcoliamo il valore di f_{12} in tali punti. Poiché f_{12} è dispari, è sufficiente calcolare il valore nei punti positivi, cambiando il segno si ottiene il valore nei corrispondenti punti negativi.

$$f_{12}(1)=\frac{1-2}{1-3}=\frac{1}{2},$$
$$f_{12}\left(\sqrt{6}\right)=\frac{6\sqrt{6}-2\sqrt{6}}{6-3}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}};$$

quindi $f_{12}(-1)=-1/2$ e $f_{12}\left(-\sqrt{6}\right)=-4\sqrt{2}/\sqrt{3}$.

Studiamo la convessità di f_{12}. La funzione f'_{12} è derivabile e, per $x\in\mathscr{D}(f_{12})$, si ha

$$\begin{aligned}
f''_{12}(x)&=\frac{(4x^3-14x)(x^2-3)^2-4x(x^2-3)(x^4-7x^2+6)}{(x^2-3)^4}=\\
&=\frac{(4x^3-14x)(x^2-3)-4x(x^4-7x^2+6)}{(x^2-3)^3}=\\
&=\frac{4x^5-12x^3-14x^3+42x-4x^5+28x^3-24x}{(x^2-3)^3}=\frac{2x^3+18x}{(x^2-3)^3}=\frac{2x(x^2+9)}{(x^2-3)^3}.
\end{aligned}$$

Poiché x^2+9 è sempre positivo e $(x^2-3)^3$ è positivo se e solo se lo è x^2-3, il segno di $f''_{12}(x)$ è uguale al segno di $x(x^2-3)$, pertanto risulta dal seguente schema:

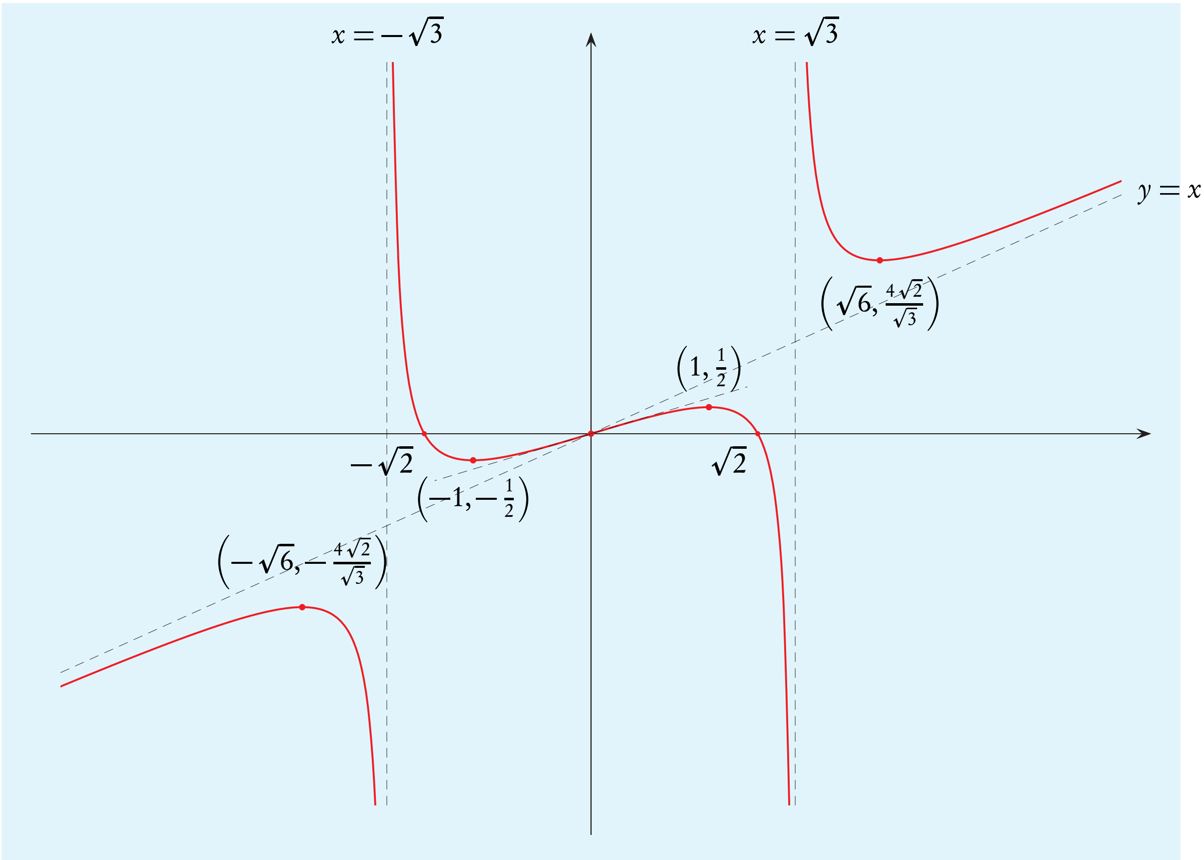
$$\begin{array}{lccccccc}
 & & -\sqrt{3} & & 0 & & \sqrt{3} & \\
x & -\;-\;-\;-\;- & | & -\;-\;-\;-\;- & | & +\;+\;+\;+\;+ & | & +\;+\;+\;+\;+ \\
x^2-3 & +\;+\;+\;+\;+ & | & -\;-\;-\;-\;- & | & -\;-\;-\;-\;- & | & +\;+\;+\;+\;+ \\
f''_{12}(x) & -\;-\;-\;-\;- & | & +\;+\;+\;+\;+ & | & -\;-\;-\;-\;- & | & +\;+\;+\;+\;+
\end{array}$$

Quindi f_{12} è convessa in $\left]-\sqrt{3},0\right]$ e in $\left]\sqrt{3},+\infty\right[$, è concava in $\left]-\infty,-\sqrt{3}\right[$ e in $\left[0,\sqrt{3}\right[$. Inoltre 0 è punto di flesso per f_{12}.

Osserviamo che $-\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$ non appartengono a $\mathscr{D}(f_{12})$, quindi non sono punti di flesso, anche se f_{12} alla loro sinistra è concava e alla loro destra è convessa.

Determiniamo la retta tangente al grafico di f_{12} nel punto di flesso. Si ha $f_{12}(0)=0$ e $f_{12}'(0)=2/3$, quindi la tangente ha equazione $y=(2/3)x$.

Il grafico di f_{12} è quindi, approssimativamente, il seguente.



1.1.14 Esempio. Studiamo la funzione definita da

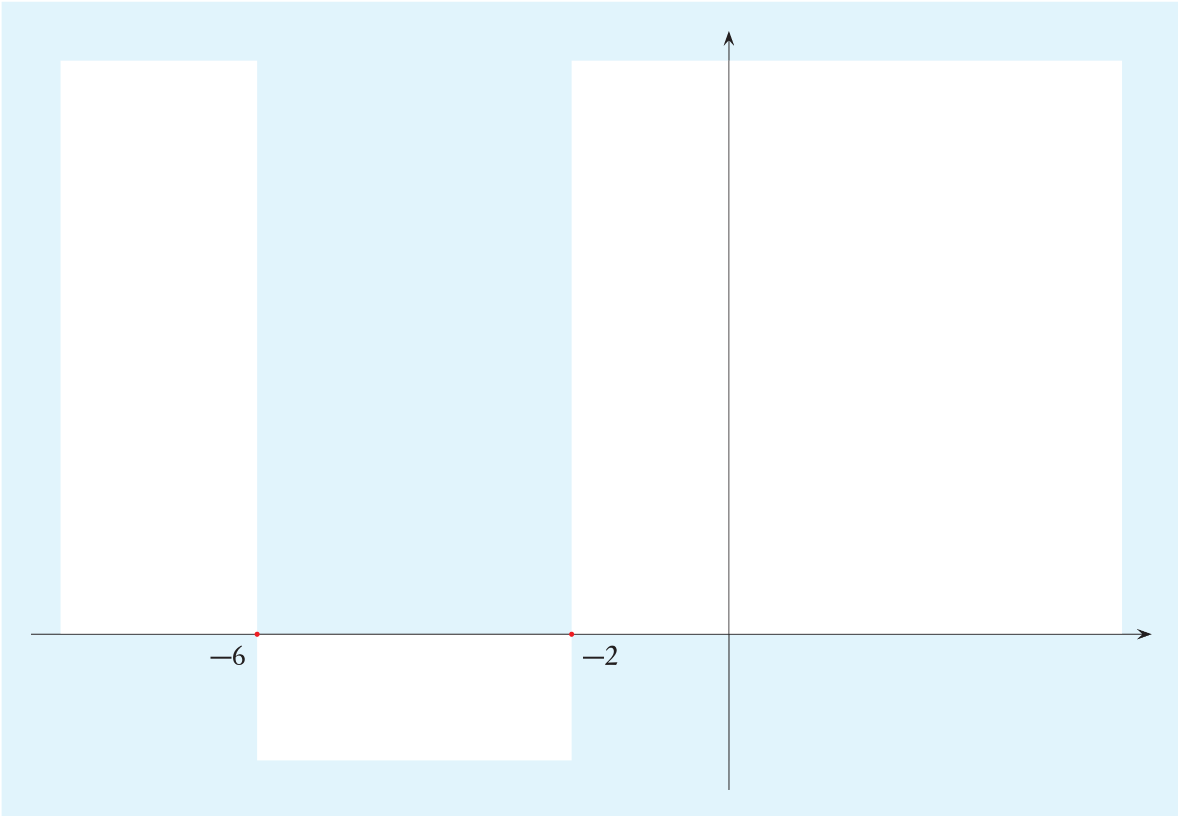
$$f_{13}(x)=\big(|x+4|-2\big)e^{1/x}.$$

Il dominio naturale di f_{13} è costituito dagli $x\in\mathbb{R}$ tali che il denominatore dell'esponente è diverso da 0, quindi $\mathscr{D}(f_{13})=\mathbb{R}^*$.

Poiché l'esponenziale è sempre positivo, $f_{13}(x)=0$ se e solo se $|x+4|-2=0$, cioè $|x+4|=2$, che è verificato se è $x+4=2$ o $x+4=-2$, quindi $x=-2$ o $x=-6$.

Si ha $f_{13}(x)\geq 0$ se e solo se $|x+4|-2\geq 0$, che equivale a $|x+4|\geq 2$. Questa disequazione è verificata se $x+4\geq 2$ oppure $x+4\leq -2$, cioè per $x\in\left]-\infty,-6\right]\cup\left[-2,+\infty\right[$.

Pertanto $\mathrm{Gr}(f_{13})$ è contenuto nelle parti chiare del piano rappresentate nella seguente figura e passa per i punti indicati.



Studiamo il comportamento di f_{13} nei punti limite del suo dominio, cioè negli estremi degli intervalli che costituiscono il dominio. I punti limite non appartengono al dominio, quindi studiamo i limiti di $f_{13}(x)$ per x che tende a tali punti limite. Si verifica facilmente che si ha:

$$\lim_{x\to-\infty} f_{13}(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to 0^-} f_{13}(x) = 0\,,$$
$$\lim_{x\to 0^+} f_{13}(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} f_{13}(x) = +\infty\,.$$

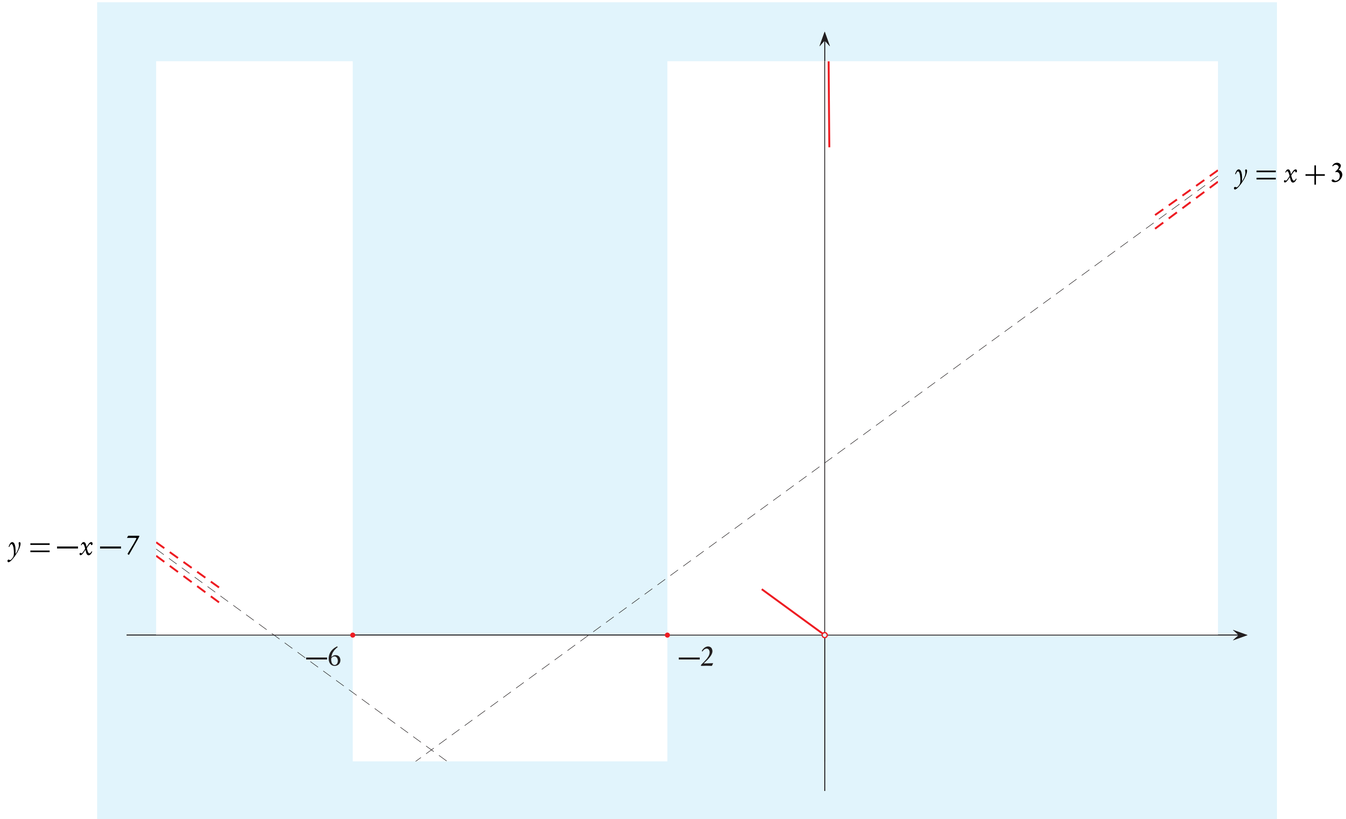
La retta di equazione $x=0$ è asintoto verticale per f_{13}. Determiniamo eventuali asintoti obliqui. Per $x\to-\infty$ si ha $1/x\to 0$, quindi

$$f_{13}(x) = \big(-(x+4)-2\big)e^{1/x} = (-x-6)\left(1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -x-6-1+o\left(\frac{1}{x}\right),$$

pertanto la retta di equazione $y=-x-7$ è asintoto obliquo per f_{13} per $x\to-\infty$. Analogamente, per $x\to+\infty$ si ha

$$f_{13}(x) = \big((x+4)-2\big)e^{1/x} = (x+2)\left(1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x+2+1+o\left(\frac{1}{x}\right),$$

pertanto la retta di equazione $y=x+3$ è asintoto obliquo per f_{13} per $x\to+\infty$. Riportiamo le informazioni ottenute nella seguente figura.



La funzione f_{13} è continua.

Calcoliamo la derivata di f_{13} per studiare la monotonia. La funzione è derivabile in ogni punto del dominio che non annulla l'argomento del valore assoluto, quindi è derivabile in $\mathscr{D}(f_{13})\setminus\{-4\}=\mathbb{R}\setminus\{-4,0\}$. Per x in tale insieme si ha

$$f_{13}'(x)=\operatorname{sgn}(x+4)e^{1/x}+\big(|x+4|-2\big)e^{1/x}\Big(-\frac{1}{x^2}\Big)=$$
$$=\frac{x^2\operatorname{sgn}(x+4)-\operatorname{sgn}(x+4)(x+4)+2}{x^2}\,e^{1/x}=\frac{\operatorname{sgn}(x+4)(x^2-x-4)+2}{x^2}\,e^{1/x}$$

Risulta $f_{13}'(x)\geq 0$ se e solo se $\operatorname{sgn}(x+4)(x^2-x-4)+2$.

Se $x>-4$, allora $\operatorname{sgn}(x+4)=1$, pertanto $\operatorname{sgn}(x+4)(x^2-x-4)+2=x^2-x-2$. Questo trinomio si annulla per

$$x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(-2)}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases}-1,\\ 2.\end{cases}$$

Pertanto, considerando solo $x>-4$, il trinomio è positivo per $x\in\,]-4,-1[\,\cup\,]2,+\infty[$ ed è negativo per $x\in\,]-1,2[$.

Se $x<-4$, allora $\operatorname{sgn}(x+4)=-1$, pertanto $\operatorname{sgn}(x+4)(x^2-x-4)+2=-x^2+x+6$. Questo trinomio si annulla per

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(-1)6}}{-2}=\frac{-1\pm 5}{-2}=\begin{cases}3,\\ -2.\end{cases}$$

Poiché -4 è minore di entrambe le radici e il trinomio ha coefficiente di x^2 negativo, esso è negativo per $x<-4$. Quindi il segno di f_{13}' risulta dal seguente schema

$$\begin{array}{lcccccccc} & & -4 & & -1 & & 0 & & 2 & \\ f_{13}'(x) & - - - - - & | & + + + + + & | & - & | & - - - & | & + + + + + \end{array}$$

Pertanto f_{13} è crescente in $[-4,-1]$ e in $[2,+\infty[$, è decrescente in $]\infty,-4]$, in $[-1,0[$ e in $]0,2]$. Inoltre -1 è punto di massimo locale, -4 e 2 sono punti di minimo locale. Calcoliamo il valore di f_{13} negli estremanti locali. Si ha:

$$\begin{aligned} f_{13}(-4) &= \big(|-4+4|-2\big)e^{-1/4} = -2e^{-1/4}, \\ f_{13}(-1) &= \big(|-1+4|-2\big)e^{-1} = e^{-1}, \\ f_{13}(2) &= \big(|2+4|-2\big)e^{1/2} = 4e^{1/2}. \end{aligned}$$

Studiamo la derivabilità di f_{13} in -4. Se esiste il limite della derivata, allora esiste anche il limite del rapporto incrementale e i due limiti coincidono, pertanto studiamo il comportamento della derivata. Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-4^-} f_{13}'(x) &= \lim_{x\to-4^-} \frac{-(x^2-x-4)+2}{x^2}\, e^{1/x} = -\frac{7}{8}\, e^{-1/4}, \\ \lim_{x\to-4^+} f_{13}'(x) &= \lim_{x\to-4^+} \frac{(x^2-x-4)+2}{x^2}\, e^{1/x} = \frac{9}{8}\, e^{-1/4}. \end{aligned}$$

Il limite sinistro della derivata è diverso dal limite destro, quindi anche il limite sinistro del rapporto incrementale è diverso dal limite destro, pertanto f_{13} non è derivabile in -4.

Per $x\to 0^-$ si ha $f_{13}(x)\to 0$, per avere maggiori informazioni sul comportamento del grafico a sinistra di 0 è utile conoscere il corrispondente limite della derivata. Si ha

$$\lim_{x\to 0^-} f_{13}'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-(x^2-x-4)+2}{x^2}\, e^{1/x} = 0.$$

Quindi il grafico di f_{13} si avvicina all'origine con tangente che tende a diventare orizzontale.

Studiamo la convessità della funzione attraverso la derivata seconda. La funzione f_{13}' è derivabile e, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-4,0\}$, si ha

$$\begin{aligned} f_{13}''(x) &= \frac{\operatorname{sgn}(x+4)(2x-1)x^2 - 2x\big(\operatorname{sgn}(x+4)(x^2-x-4)+2\big)}{x^4}\, e^{1/x} + \\ &\quad + \frac{\operatorname{sgn}(x+4)(x^2-x-4)+2}{x^2}\, e^{1/x}\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) = \\ &= \frac{\operatorname{sgn}(x+4)(2x^3-x^2-2x^3+2x^2+8x-x^2+x+4)-4x-2}{x^4}\, e^{1/x} = \\ &= \frac{\operatorname{sgn}(x+4)(9x+4)-4x-2}{x^4}\, e^{1/x}. \end{aligned}$$

Pertanto si ha $f_{13}''(x) > 0$ se e solo se $\operatorname{sgn}(x+4)(9x+4)-4x-2 > 0$. Se $x>-4$, allora $\operatorname{sgn}(x+4)(9x+4)-4x-2 = 5x+2$ che è positivo per $x>-2/5$. Se $x<-4$, allora $\operatorname{sgn}(x+4)(9x+4)-4x-2 = -13x-6$ che, per tali x, è positivo. Quindi $f_{13}''(x)$

è positivo per $x \in]-\infty,-4[\cup]-2/5,0[\cup]0,+\infty[$ ed è negativo per $x \in]-4,-2/5[$. Pertanto f_{13} è convessa in $]-\infty,-4]$, in $[-2/5,0[$ e in $]0,+\infty[$, è concava in $[-4,-2/5]$.

Osserviamo che nei punti critici -1 e 2 si ha $f''_{13}(-1) < 0$ e $f''_{13}(2) > 0$, da cui si ottiene nuovamente che -1 è punto di massimo locale e 2 è punto di minimo locale.

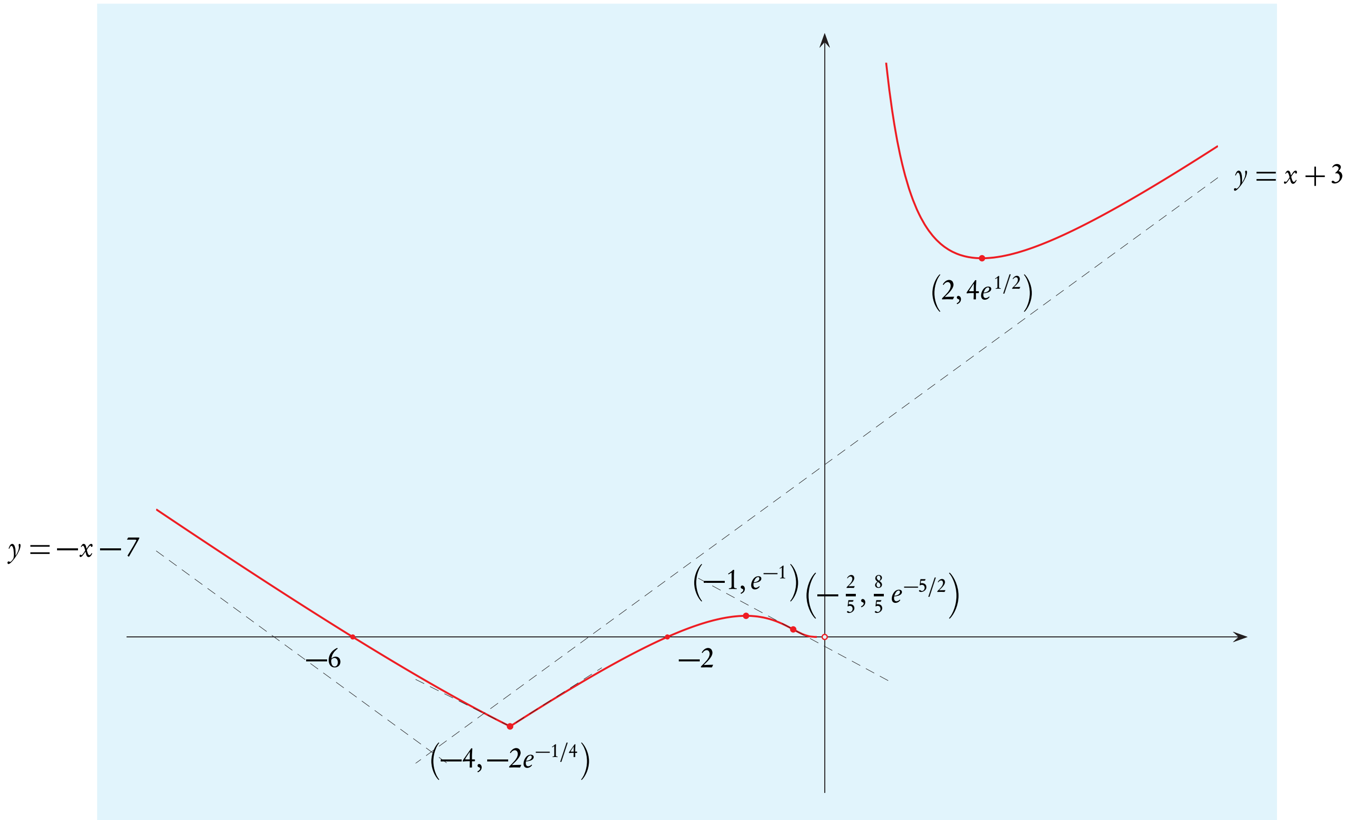
Il punto $-2/5$ è di flesso, perché è un punto di derivabilità interno al dominio ed esiste un intervallo a sinistra del punto in cui f_{13} è concava e un intervallo a destra in cui f_{13} è convessa. Anche in -4 la funzione cambia concavità, ma questo non è punto di flesso, perché f_{13} non è derivabile in tale punto.

Determiniamo la retta tangente a $\mathrm{Gr}(f_{13})$ nel punto di flesso. Si ha

$$f_{13}\left(-\frac{2}{5}\right) = \left(\left|-\frac{2}{5}+4\right|-2\right)e^{-5/2} = \frac{8}{5}\,e^{-5/2},$$

$$\begin{aligned}f'_{13}\left(-\frac{2}{5}\right) &= \frac{\operatorname{sgn}\left(-2/5+4\right)\left((-2/5)^2-(-2/5)-4\right)+2}{(-2/5)^2}e^{-5/2} = \\ &= \frac{4+10-100+50}{4}e^{-5/2} = -9e^{-5/2}.\end{aligned}$$

Il grafico di f_{13} è quindi, approssimativamente, il seguente.



20) Studiare, nel suo dominio naturale, la funzione definita da:

$$f(x) = |2x^3 - 9x| + 9x$$

(si richiede lo studio della convessità).

21) Studiare, nel suo dominio naturale, la funzione definita da:

$$f(x) = |x+6| \exp\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

(si richiede lo studio della convessità).

22) Studiare, nel suo dominio naturale, la funzione definita da:

$$f(x) = \operatorname{arcsen}|x^2 + 4x + 3|$$

(si richiede lo studio della convessità).

23) Studiare, nel suo dominio naturale, la funzione definita da:

$$f(x) = \sqrt{|x+5| - 1}\, e^{1/x} .$$

24) Studiare, nel suo dominio naturale, la funzione definita da:

$$f(x) = \sqrt{|x^2 - 2x|} - x$$

(si richiede lo studio della convessità).

25) Studiare, nel loro dominio naturale, le seguenti funzioni:

a. $f(x) = \dfrac{x^3 + 9x^2}{x^2 - 1}$

b. $f(x) = |x+1|\sqrt{x+2}$

c. $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\dfrac{x^2 + 5x + 4}{x}}\right)$

d. $f(x) = \log\left(1 - \dfrac{4}{x^3 - x^2}\right)$

e. $f(x) = \arctan\left(\dfrac{|x^2 - 4|}{(x-1)^2}\right)$

f. $f(x) = \cos\left(\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{3x^2 - x - 2}{5x - 2}\right)\right)$

g. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}\,(x^2 - 4)$

h. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{|x^2 - 4|}}$

i. $f(x) = (1 - 4x^2)\exp\left(|x^2 - 2|\right)$
(si richiede lo studio della convessità)

j. $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - x - 2 - |x^2 - x - 2|}{x^2 - 2}$
(si richiede lo studio della convessità)

k. $f(x) = 2\sqrt{x^2 - 2x} - 3|x|$
(si richiede lo studio della convessità)

26) Studiare, nell'intersezione del suo dominio naturale con l'intervallo $[-\pi, \pi]$, la funzione definita da:

$$f(x) = \frac{2\cos^2 x - 1}{-2\tan x + \operatorname{sen}(2x)}$$

(si richiede lo studio della convessità).

27) Studiare, nell'intersezione del suo dominio naturale con l'intervallo $[-\pi, \pi]$, la funzione definita da:

$$f(x) = \sqrt{|\operatorname{sen} x|}\, \exp\left(\frac{1}{4 \operatorname{sen} x}\right).$$

28) Studiare, nell'intersezione del loro dominio naturale con l'intervallo $[-\pi, \pi]$, le seguenti funzioni:

a. $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen}^2 x - \frac{1}{2}} + \operatorname{sen} x |\operatorname{sen} x|$

b. $f(x) = \dfrac{(2 \operatorname{sen} x - 1)^2}{\operatorname{sen} x}$

c. $f(x) = \cos x \cot x + 5|\operatorname{sen} x|$

d. $f(x) = \sqrt{2 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x} + \dfrac{1}{\sqrt{2 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x}}$

Immagine di una funzione

Se una funzione reale di variabile reale è definita in un intervallo ed è continua, allora il teorema dei valori intermedi assicura che l'immagine è un intervallo. Un intervallo è noto se si conoscono i suoi estremi e, nel caso che essi siano reali, se si sa se appartengono o no all'intervallo. Quindi per determinare l'immagine di una funzione continua il cui dominio è un intervallo è sufficiente determinare estremo inferiore e estremo superiore della funzione e stabilire se essi sono, rispettivamente, minimo o massimo.

1.1.15 Esempio. Sia

$$f_{14} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_{14}(x) = \frac{1}{x^2 + 3}.$$

Il dominio di f_{14} è un intervallo ed essa è continua, pertanto $Im(f_{14})$ è un intervallo. Si ha $f(0) = 1/3$ e, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 3 \geq 3$, da cui segue $f(x) \leq 1/3$; quindi $\max f_{14} = 1/3$. Evidentemente f_{14} ha valori positivi, quindi $\inf f_{14} \geq 0$. Inoltre $\lim_{x \to +\infty} f_{14}(x) = 0$, pertanto ogni numero reale positivo non è maggiorante di f_{14}, quindi $\inf f_{14} \leq 0$. Perciò si ha $\inf f_{14} = 0$. Abbiamo osservato che f_{14} ha valori positivi, quindi $0 \notin Im(f_{14})$. Pertanto $Im(f_{14})$ è un intervallo che ha estremo inferiore 0 e massimo $1/3$ e 0 non appartiene all'intervallo. Perciò

$$Im(f_{14}) = \left]0, \frac{1}{3}\right].$$

◀

Se una funzione è continua e il suo dominio è unione di un numero finito di intervalli disgiunti, si può determinare l'immagine della restrizione della funzione a ciascuno degli intervalli che costituiscono il dominio. L'unione di tali immagini è l'immagine della funzione.

1.1.16 Esempio. Sia

$$f_{15}\colon]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[\,\to\mathbb{R}, \qquad f_{15}(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}\,.$$

Poiché f_{15} è quoziente di composizione di funzioni continue è continua. La sua immagine è unione dei due intervalli $f_{15}\big(]-\infty,-1[\big)$ e $f_{15}\big(]1,+\infty[\big)$.

Per determinare gli estremi di f_{15} in ciascuno dei due intervalli che costituiscono il suo dominio, studiamo la monotonia della funzione, attraverso il criterio di monotonia. La funzione f_{15} è derivabile e, $\forall x\in\mathscr{D}(f_{15})$, si ha

$$f_{15}'(x)=\left(\sqrt{x^2-1}-(x-1)\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)\frac{1}{x^2-1}=\frac{x^2-1-(x^2-x)}{(x^2-1)^{3/2}}=\frac{x-1}{(x^2-1)^{3/2}}\,.$$

Il denominatore è sempre positivo, quindi il segno di $f_{15}'(x)$ coincide con il segno di $x-1$.

Se $x\in\,]-\infty,-1[$, allora $f_{15}'(x)<0$, quindi f_{15} è strettamente decrescente in tale intervallo. Pertanto, per il teorema sul limite delle funzioni monotone, si ha

$$\begin{aligned}\inf f_{15}\big(]-\infty,-1[\big)&=\lim_{x\to-1}f_{15}(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}=-\infty\,,\\ \sup f_{15}\big(]-\infty,-1[\big)&=\lim_{x\to-\infty}f_{15}(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{|x|\sqrt{1-(1/x^2)}}=-1\,.\end{aligned}$$

Inoltre per tali x risulta $\sqrt{x^2-1}<|x|=-x<-x+1$; pertanto $f_{15}(x)<-1$, perciò $-1\notin f_{15}\big(]-\infty,-1[\big)$. Quindi $f_{15}\big(]-\infty,-1[\big)=\,]-\infty,-1[$.

Se $x\in\,]1,+\infty[$, allora $f_{15}'(x)>0$, quindi f_{15} è strettamente crescente in tale intervallo. Pertanto, per il teorema sul limite delle funzioni monotone, si ha

$$\begin{aligned}\inf f_{15}\big(]1,+\infty[\big)&=\lim_{x\to1}f_{15}(x)=\lim_{x\to1}\frac{\big(\sqrt{x-1}\big)^2}{\sqrt{x-1}\,\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}=0\,,\\ \sup f_{15}\big(]1,+\infty[\big)&=\lim_{x\to+\infty}f_{15}(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{|x|\sqrt{1-(1/x^2)}}=1\,.\end{aligned}$$

Se $x\in\,]1,+\infty[$, allora risulta $f_{15}(x)=\sqrt{x-1}/\sqrt{x+1}$, quindi si ha $0<f_{15}(x)<1$, pertanto né 0 né 1 appartengono a $f_{15}\big(]1,+\infty[\big)$. Quindi $f_{15}\big(]1,+\infty[\big)=\,]0,1[$.

Perciò

$$Im(f_{15})=\,]-\infty,-1[\,\cup\,]0,1[\,.$$

◀

Le indicazioni date finora riguardano la ricerca dell'immagine di funzioni coninue. Se una funzione ha dei punti di discontinuità, si possono determinare l'immagine della restrizione della funzione all'insieme dei punti in cui essa è continua e l'insieme dei valori assunti dalla funzione nei punti di discontinuità. L'unione di tali insiemi è l'immagine della funzione.

29) Determinare l'immagine della funzione definita da:

$$f(x) = x^8 - \frac{10}{3}(x^4 - 1)^{3/2}.$$

30) Determinare l'immagine della funzione definita da:

$$f(x) = \frac{2\sqrt{x^2 + 5x + 4} - \sqrt{x^2 - 10x + 16}}{x}.$$

31) Determinare l'immagine della funzione definita da:

$$f(x) = \sqrt{\cos x + \frac{1}{2}} + 2\sqrt{\frac{1}{2} - \cos x}.$$

32) Determinare l'immagine delle seguenti funzioni:

a. $f(x) = 7\,\mathrm{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right) + (x+6)\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$

b. $f(x) = \frac{3}{x} + \frac{4x}{1+x^2} + 6\arctan x$

c. $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x^2 - x}}$

d. $f(x) = x\exp\left(2\sqrt{\frac{x-2}{x}}\right)$

e. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} - |2x + 6|$

f. $f(x) = \frac{2\sqrt{x^2 - 3x + 2} + 3x - 3}{x}$

g. $f(x) = \frac{2\,\mathrm{sen}^2 x + \sqrt{6}\,\mathrm{sen}\, x + 1}{2\,\mathrm{sen}^2 x - 1}$

h. $f(x) = \frac{\sqrt{3} + \tan x}{\sqrt{3} - \cot x}$

Zeri di una funzione

Spesso non è facile determinare esplicitamente gli zeri di una funzione, ma studiandone alcune caratteristiche è possibile determinare il numero di tali zeri e anche individuare intervalli in cui essi si trovano.

Se una funzione f è continua e strettamente monotona in un intervallo $[a, b]$, e negli estremi dell'intervallo ha valori di segno diverso, allora, per il teorema di Bolzano, in tale intervallo f si annulla, inoltre si annulla una sola volta, perché una funzione strettamente monotona è iniettiva. Supponiamo invece che sia $f(a)$ che $f(b)$ siano positivi; per la monotonia, f assume valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$, pertanto non può annullarsi. Analoga è la situazione se $f(a)$ e $f(b)$ sono entrambi negativi.

Un ragionamento analogo si può fare se l'intervallo, di estremi a e b, non è chiuso o non è limitato, studiando il segno di $\lim_{x\to a} f(x)$ anziché il segno di $f(a)$ e il segno di $\lim_{x\to b} f(x)$ anziché il segno di $f(b)$.

Se si scompone il dominio di una funzione nell'unione di intervalli in ciascuno dei quali la funzione è continua e strettamente monotona, si può ripetere il ragionamento fatto sopra per ciascuno degli intervalli. Per il criterio di stretta monotonia lo studio della stretta monotonia di una funzione può essere ricondotto allo studio del segno della derivata.

In alcuni casi è possibile studiare gli zeri di una funzione anche senza determinare il segno della derivata, ma conoscendo soltanto i punti in cui tale derivata si annulla. Infatti se una funzione f è continua in un intervallo $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$, con derivata sempre diversa da zero, allora f può annullarsi al più una volta. Infatti se avesse due zeri, allora, per il teorema di Rolle, la derivata si annullerebbe. Pertanto se $f(a)$ e $f(b)$ hanno segno opposto, allora, per il teorema di Bolzano, f si annulla in un solo punto.

Se invece $f(a)$ e $f(b)$ sono entrambi positivi, allora f non si annulla. Infatti non può esistere $d \in]a,b[$ tale che $f(d) < 0$, perché in tal caso f si annullerebbe una volta in $]a,d[$ e una volta in $]d,b[$, ma sappiamo che non può annullarsi due volte in $]a,b[$. Pertanto f è non negativa, ma se esistesse $c \in]a,b[$ tale che $f(c) = 0$, allora c sarebbe punto di minimo locale per f quindi, per il teorema di Fermat, si avrebbe $f'(c) = 0$, contro l'ipotesi che f' non si annulla. Pertanto f è diversa da zero in $[a,b]$. Analogamente se $f(a)$ e $f(b)$ sono entrambi negativi, allora f non si annulla.

Anche in questo caso un ragionamento analogo vale se l'intervallo non è chiuso o non è limitato, studiando il segno di $\lim_{x\to a} f(x)$ e di $\lim_{x\to b} f(x)$.

1.1.17 Esempio. Sia

$$f_{16} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_{16}(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 2.$$

Determiniamo il numero di zeri di f_{16}.

La funzione f_{16} è derivabile e, $\forall x \in \mathbb{R}$, si ha

$$f_{16}'(x) = 3x^2 + 4x - 4.$$

La derivata si annulla per

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 + 3 \cdot 4}}{3} = \frac{-2 \pm 4}{3} = \begin{cases} -2, \\ \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Il trinomio $3x^2 + 4x - 4$ è negativo nell'intervallo individuato dalle due radici e positivo all'esterno di tale intervallo. Quindi f_{16} è strettamente crescente in $]-\infty,-2]$ e in $[2/3,+\infty[$, mentre è strettamente decrescente in $[-2,2/3]$.

Si ha $\lim_{x\to-\infty} f_{16}(x) = -\infty$ e $f_{16}(-2) = 10$, pertanto nell'intervallo $]-\infty,-2]$ la funzione f_{16} assume sia valori negativi che valori positivi ed è continua; per il teorema di Bolzano f_{16} si annulla in tale intervallo. Inoltre f_{16} è strettamente crescente, e quindi iniettiva, in tale intervallo, pertanto si annulla solo una volta.

Si ha $f_{16}(-2) = 10$ e $f_{16}(2/3) = 14/27$; f_{16} è strettamente decrescente in $[-2,2/3]$, quindi in tale intervallo f_{16} assume valori maggiori o uguali a $f_{16}(2/3)$, quindi è sempre positiva.

Poiché f_{16} è crescente in $[2/3,+\infty[$, in tale intervallo assume valori maggiori o uguali a $f_{16}(2/3)$, pertanto è sempre positiva.

Pertanto f_{16} ha un solo zero che appartiene a $]-\infty,-2[$. ◀

1.1.18 Esempio. Sia

$$f_{17}\colon \left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[\cup\,]0,+\infty[\,\to\mathbb{R},\qquad f_{17}(x)=\log\left(2+\frac{1}{x}\right)+x+2.$$

Determiniamo il numero di zeri di f_{17}.

La funzione f_{17} è derivabile e, $\forall x\in\mathscr{D}(f)$, si ha

$$f'_{17}(x)=\frac{-1/x^2}{2+1/x}+1=-\frac{1}{2x^2+x}+1=\frac{2x^2+x-1}{2x^2+x}.$$

In $\mathscr{D}(f)$ il denominatore è positivo. Il numeratore si annulla per

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2+4\cdot 2}}{4}=\frac{-1\pm 3}{4}=\begin{cases}-1,\\ \dfrac{1}{2},\end{cases}$$

quindi è positivo per $x\in\,]-\infty,-1[\,\cup\,]1/2,+\infty[$ ed è negativo per $x\in\,]-1,1/2[$. Pertanto f'_{17} è positivo in $]-\infty,-1[\,\cup\,]1/2,+\infty[$ ed è negativo in $]-1,-1/2[\,\cup\,]0,1/2[$.

Per il criterio di stretta monotonia, f_{17} è strettamente crescente in $]-\infty,-1]$, inoltre risulta $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ e $f(-1)=1>0$. Quindi in tale intervallo f_{17} assume sia valori positivi che valori negativi ed è strettamente monotona, quindi si annulla una sola volta.

Nell'intervallo $[-1,-1/2[$ f_{17} è strettamente decrescente; inoltre si ha $f_{17}(-1)=1>0$ e $\lim_{x\to-1/2}f_{17}(x)=-\infty$. Quindi anche in questo intervallo f_{17} si annulla una sola volta.

Nell'intervallo $]0,1/2]$ f_{17} è strettamente decrescente; si ha $f_{17}(1/2)=\log 4+5/2>0$. Pertanto per x in tale intervallo si ha $f_{17}(x)\geq f_{17}(1/2)>0$, quindi f_{17} non si annulla.

Nell'intervallo $[1/2,+\infty[$ f_{17} è strettamente crescente; pertanto per x in tale intervallo si ha $f_{17}(x)\geq f_{17}(1/2)>0$, quindi f_{17} non si annulla.

Pertanto f_{17} si annulla in 2 punti, uno appartenente a $]-\infty,-1[$ e l'altro appartenente a $]-1,-1/2[$. ◀

33) Trovare per quanti valori di x appartenenti al dominio naturale si annulla la funzione definita da:

$$f(x)=\log x+\ \log|x-4|+|2-x|$$

34) Trovare per quanti valori di x appartenenti al dominio naturale si annulla la funzione definita da:

$$f(x)=2\arcsen\left(\frac{1}{x}\right)+\sqrt{x^2-1}-2$$

35) Trovare per quanti valori di x appartenenti al dominio naturale si annulla la funzione definita da:

$$f(x)=(x+2)\exp\left(\frac{2x-2}{x^2-4}\right)-3e^{1/2}.$$

36) Trovare per quanti valori di x appartenenti al dominio naturale si annullano le seguenti funzioni:

a. $f(x) = 2\arctan(x+2) + \dfrac{1}{x+2}$

b. $f(x) = x^5 + 2x^3 - 8x + 2$

c. $f(x) = \arccos\dfrac{x}{2} - \sqrt{4-x^2}$

d. $f(x) = \log\left(\dfrac{1-x}{x^2}\right) - \dfrac{6}{1-x}$

e. $f(x) = 2\arctan\left(\dfrac{1}{x-2}\right) + 3\arctan\left(\dfrac{1}{3-x}\right)$

f. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \log(2x^2 + 2x)$

g. $f(x) = \log(1+x^2) + \arctan\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right) - 1$

h. $f(x) = \operatorname{arcsen} x - 3\sqrt{\dfrac{2}{1-x}} + 6$

1.2 Soluzioni e risultati

1) Il dominio naturale di f è costituito dagli $x \in \mathbb{R}$ per cui il denominatore $x-6$ non è nullo, il numero sotto radice è non negativo e l'argomento dell'arcoseno appartiene a $[-1,1]$; quindi $\mathscr{D}(f)$ è l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x-5}{x-6} \geq 0, \\ 1-\sqrt{6\dfrac{x-5}{x-6}} \geq -1, \\ 1-\sqrt{6\dfrac{x-5}{x-6}} \leq 1, \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} \dfrac{x-5}{x-6} \geq 0, \\ \sqrt{6\dfrac{x-5}{x-6}} \leq 2, \\ \sqrt{6\dfrac{x-5}{x-6}} \geq 0. \end{cases}$$

L'ultima disequazione è verificata da tutti gli x che verificano la prima disequazione. La seconda disequazione è verificata dagli x che soddisfano la prima disequazione e tali che

$$6\frac{x-5}{x-6} \leq 4,$$

che, successivamente, equivale a

$$3\frac{x-5}{x-6} - 2 \leq 0,$$
$$\frac{3(x-5)-2(x-6)}{x-6} \leq 0,$$
$$\frac{x-3}{x-6} \leq 0.$$

Il sistema è quindi equivalente a

$$\begin{cases} \dfrac{x-5}{x-6} \geq 0, \\ \dfrac{x-3}{x-6} \leq 0. \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni della prima disequazione è $]-\infty,5] \cup]6,+\infty[$, quello della seconda è $[3,6[$; l'intersezione di tali insiemi è $[3,5]$.

Quindi si ha

$$\mathscr{D}(f) = [3,5].$$

2) Il dominio naturale di f è costituito dagli $x \in \mathbb{R}$ tali che il denominatore $x-2$ è diverso da 0 e l'argomento della radice è non negativo. La presenza della funzione logaritmo non comporta condizioni ulteriori, perché l'argomento è sempre positivo. Quindi deve essere

$$x \neq 2 \quad \wedge \quad \log\left|\frac{3}{x-2}\right| \geq 0.$$

Poiché il logaritmo è non negativo se e solo se il suo argomento è maggiore o uguale a 1, la disequazione equivale a

$$\left|\frac{3}{x-2}\right| \geq 1.$$

Per risolvere questa disequazione è utile osservare che, per $x \neq 2$, essa equivale a

$$\left|\frac{x-2}{3}\right| \leq 1,$$

cioè $|x-2| \leq 3$, che è verificata se e solo se $2-3 \leq x \leq 2+3$, cioè $-1 \leq x \leq 5$.

Quindi si ha

$$\mathscr{D}(f) = [-1,2[\,\cup\,]2,5].$$

3) La radice quadrata è definita quando il suo argomento è non negativo, poiché essa è a denominatore deve essere diversa da 0, quindi il dominio naturale di f è costituito dagli $x \in \mathbb{R}$ per cui è positivo l'argomento della radice; cioè tali che $2x^2-3x+2 > |x^2+x-2|$, che equivale a

$$\begin{cases} x^2+x-2 < 2x^2-3x+2, \\ x^2+x-2 > -(2x^2-3x+2), \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x^2-4x+4 > 0, \\ 3x^2-2x > 0. \end{cases}$$

Poiché $x^2-4x+4 = (x-2)^2$, la prima disequazione è verificata per $x \neq 2$; la seconda è verificata quando $x > 2/3$ oppure $x < 0$.

Quindi si ha

$$\mathscr{D}(f) = \left]-\infty,0\right[\,\cup\,\left]\frac{2}{3},2\right[\,\cup\,\left]2,+\infty\right[.$$

4)

a. $]-\infty,-3]\cup[-1,+\infty[$

b. $\left[-1,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\cup\left[\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right[$

c. $\left]-\infty,-2-\sqrt{3}\right[\cup\left]-2+\sqrt{3},1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$

d. $\left]-\infty,\frac{-9+\sqrt{21}}{2}\right]$

e. $]-1,0[\,\cup\,]1,3[$

f. $]-\infty,-3[\,\cup\,[-2,0]\,\cup\,]3,+\infty[$

g. $]-\infty,-1[\cup[2,+\infty[$

h. $]-2,-1]\cup[4,5[$

i. $\left]-\infty,-\frac{9}{4}\right]\cup[2,+\infty[$

j. $]-\infty,-5]\cup[3,+\infty[$

k. $\left]\frac{-6+\sqrt{2}}{2},-2\right]\cup[2,+\infty[$

l. $\left[-1,-\frac{2}{3}\right]\cup\left[0,\frac{1}{3}\right]$

5) Il dominio naturale di f è costituito dagli $x\in\mathbb{R}$ tali che l'argomento della radice è positivo. Perciò

$$\mathscr{D}(f)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^2-1>0\}=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\,.$$

Studiamo il comportamento di f negli estremi dei due intervalli che costituiscono $\mathscr{D}(f)$. Si ha

$$f(x)=\frac{|x|}{|x|\sqrt{1-(1/x^2)}}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x\right)=\frac{1}{\sqrt{1-(1/x^2)}}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x\right)$$

perciò per $x\to-\infty$ si ha

$$f(x)\sim\frac{\pi}{2}+\arctan x\to\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0;$$

mentre per $x\to+\infty$ si ha

$$f(x)\sim\frac{\pi}{2}+\arctan x\to\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi\,.$$

Quindi le rette $y=0$ e $y=\pi$ sono asintoti orizzontali per f.

Si ha

$$\lim_{x\to-1}|x|\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x\right)=1\left(\frac{\pi}{2}+\arctan(-1)\right)=\frac{\pi}{4},$$
$$\lim_{x\to1}|x|\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x\right)=1\left(\frac{\pi}{2}+\arctan 1\right)=\frac{3}{4}\pi;$$

inoltre

$$\lim_{x\to-1}\sqrt{x^2-1}=\lim_{x\to1}\sqrt{x^2-1}=0,$$

e $\sqrt{x^2-1}>0$. Pertanto

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to1}f(x)=+\infty;$$

perciò le rette $x=-1$ e $x=1$ sono asintoti verticali per f.

Quindi gli asintoti di f sono le rette di equazione $y=0$, $y=\pi$, $x=-1$ e $x=1$.

6) Il dominio naturale di f è costituito dagli x tali che ciascuno dei denominatori delle frazioni che compaiono nella definizione di f sia non nullo, perciò

$$\mathscr{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0,2\} =]-\infty, 0[\cup]0,2[\cup]2,+\infty[.$$

Studiamo i limiti di $f(x)$ per x che tende a uno degli estremi degli intervalli che costituiscono $\mathscr{D}(f)$.

Per $x \to \pm\infty$ si ha $1/|x-2| \to 0$, pertanto

$$\exp\left(\frac{-1}{|x-2|}\right) = 1 - \frac{1}{|x-2|} + o\left(\frac{-1}{|x-2|}\right) = 1 - \frac{1}{|x-2|} + o(x^{-1});$$

quindi, per $x \to \pm\infty$, si ha

$$f(x) = (x+3+4x^{-1})\left(1 - \frac{1}{|x-2|} + o(x^{-1})\right) = x - \frac{x}{|x-2|} + 3 + o(1).$$

Perciò per $x \to -\infty$ si ha

$$f(x) = x + 3 - \frac{x}{2-x} + o(1) = x + 4 + o(1),$$

mentre per $x \to +\infty$ si ha

$$f(x) = x + 3 - \frac{x}{x-2} + o(1) = x + 2 + o(1).$$

Quindi le rette di equazione $y = x+4$ e $y = x+2$ sono asintoti obliqui.

Poiché

$$\lim_{x\to 0}(x^2+3x+4)\exp\left(-\frac{1}{|x-2|}\right) = 4\exp\left(-\frac{1}{2}\right) > 0,$$

si ha

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty,$$

quindi la retta di equazione $x = 0$ è asintoto verticale.

Infine $-1/|x-2| \to -\infty$, per $x \to 2$, quindi $\exp(-1/|x-2|) \to 0$, pertanto $f(x) \to 0$; perciò la retta di equazione $x = 2$ non è asintoto verticale.

Quindi gli asintoti di f sono le rette di equazione $x = 0$, $y = x+4$ e $y = x+2$.

7) Il dominio naturale di f è costituito dagli $x \in \mathbb{R}$ tali che i due denominatori $1-x$ e $x-4$ sono diversi da 0, quindi

$$\mathscr{D}(f) =]-\infty, 1[\cup]1,4[\cup]4,+\infty[.$$

Studiamo i limiti di $f(x)$ per x che tende ad uno degli estremi degli intervalli che costituiscono $\mathscr{D}(f)$.

Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3-x}{1-x} \arctan\left(\frac{x-6}{x-4}\right) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

e analogamente $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pi/4$; quindi la retta di equazione $y = \pi/4$ è asintoto orizzontale per f.

Per $x \to 1$ si ha $3-x \to 2$, $1-x \to 0$ e $\arctan\big((x-6)/(x-4)\big) \to \arctan 2 > 0$. Il limite di $f(x)$ dipende dal segno del denominatore $1-x$. Tale denominatore è positivo per $x<1$ e negativo per $x>1$, perciò si ha

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{3-x}{1-x} \arctan\left(\frac{x-6}{x-4}\right) = +\infty\,,$$
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{3-x}{1-x} \arctan\left(\frac{x-6}{x-4}\right) = -\infty\,,$$

quindi la retta di equazione $x=1$ è asintoto verticale per f.

Per $x \to 4$ si ha

$$\frac{3-x}{1-x} \to \frac{3-4}{1-4} = \frac{1}{3}\,,$$

mentre la funzione arcotangente è limitata, quindi $f(x)$ non può essere divergente per $x \to 4$ né da sinistra né da destra. Perciò la retta di equazione $x=4$ non è asintoto verticale per f.

Quindi gli asintoti di f sono le rette di equazione $y=\pi/4$ e $x=1$.

8)

a. $y=2x$, $y=\log 3$

b. $y=1$, $y=-1$, $x=5$

c. $x=-2$, $y=x+1$, $y=-x-3$

d. $x=0$, $y=\log 2\, x+3+3\log 2$

e. $x=2$, $y=\log 5\, x+\dfrac{5\log 5}{2}+2$

f. $y=x-1$, $x=-4$

g. $x=2$, $y=x+6$

h. $y=3x+14$, $x=3$

i. $y=3x-\dfrac{3}{2}$, $y=-3x+\dfrac{3}{2}$

j. $y=-\dfrac{1}{2}$, $y=x-\dfrac{3}{2}$

9) Il dominio di f è costituito dagli x reali tali che il denominatore $x+1$ è diverso da 0. Pertanto

$$\mathscr{D}(f) = \,]-\infty,-1[\,\cup\,]-1,+\infty[$$

Nei punti del dominio che non annullano l'argomento del valore assoluto f è derivabile. Tale argomento si annulla per

$$x = 2 \pm \sqrt{2^2-3} = 2 \pm 1 = \begin{cases} 1\,, \\ 3\,; \end{cases}$$

perciò f è derivabile in $\mathscr{D}(f) \setminus \{1,3\}$. Per x in tale insieme si ha

$$f'(x) = \frac{\operatorname{sgn}(x^2-4x+3)(2x-4)(x+1) - |x^2-4x+3|}{(x+1)^2} =$$
$$= \frac{\operatorname{sgn}(x^2-4x+3)(2x^2-2x-4) - (x^2-4x+3)\operatorname{sgn}(x^2-4x+3)}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{\operatorname{sgn}(x^2-4x+3)(x^2+2x-7)}{(x+1)^2}.$$

Il denominatore è positivo in $\mathscr{D}(f)$, quindi il segno di f coincide col segno del numeratore. Il trinomio x^2+2x-7 si annulla per

$$x=-1\pm\sqrt{1^2+7}=-1\pm\sqrt{8},$$

quindi $x^2+2x-7\geq 0$ per $x\in\left]-\infty,-1-\sqrt{8}\right]\cup\left[-1+\sqrt{8},+\infty\right[$. Sappiamo che il trinomio x^2-4x+3 si annulla per $x=1$ e $x=3$, perciò $x^2-4x+3\geq 0$ per $x\in\left]-\infty,1\right]\cup\left[3,+\infty\right[$. Il segno di f' risulta quindi dal seguente schema

$$\begin{array}{rccccccccccc}
 & & -1-\sqrt{8} & & -1 & & 1 & & -1+\sqrt{8} & & 3 & \\
x^2+2x-7 & +\;+ & | & -\;-\;-\;-\;-\;- & | & -\;-\;-\;- & | & - & | & +\;+ & | & +\;+ \\
x^2-4x+3 & +\;+ & | & +\;+\;+\;+\;+\;+ & | & +\;+\;+\;+ & | & - & | & -\;- & | & +\;+ \\
f'(x) & +\;+ & | & -\;-\;-\;-\;-\;- & | & -\;-\;-\;- & | & + & | & -\;- & | & +\;+
\end{array}$$

Quindi f è crescente in $\left]-\infty,-1-\sqrt{8}\right]$, in $\left[1,-1+\sqrt{8}\right]$ e in $\left[3,+\infty\right[$, è decrescente in $\left[-1-\sqrt{8},-1\right[$, in $\left]-1,1\right]$ e in $\left[-1+\sqrt{8},3\right]$.

Per la condizione sufficiente di ordine zero, $-1-\sqrt{8}$ e $-1+\sqrt{8}$ sono punti di massimo locale, 1 e 3 sono punti di minimo locale.

10) Si ha $\mathscr{D}(f)=\mathbb{R}$.

La funzione f è derivabile e, $\forall x\in\mathbb{R}$, si ha

$$f'(x)=\exp(-2x^2+3x)+x\exp(-2x^2+3x)(-4x+3)=(-4x^2+3x+1)\exp(-2x^2+3x).$$

Poiché l'esponenziale è sempre positivo, si ha $f'(x)\geq 0$ se e solo se $-4x^2+3x+1\geq 0$. Il trinomio $-4x^2+3x+1$ si annulla per

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2+4\cdot 4}}{-8}=\frac{-3\pm 5}{-8}=\begin{cases}1,\\ -\dfrac{1}{4};\end{cases}$$

Perciò è non negativo per $x\in[-1/4,1]$ ed è non positivo per $x\in\left]-\infty,-1/4\right]\cup\left[1,+\infty\right[$. Pertanto f è crescente in $[-1/4,1]$ ed è decrescente in $\left]-\infty,-1/4\right]$ e in $\left[1,+\infty\right[$.

Poiché esiste un intervallo con massimo $-1/4$ in cui f è decrescente ed esiste un intervallo con minimo $-1/4$ in cui f è crescente, $-1/4$ è punto di minimo locale; per motivi analoghi 1 è punto di massimo locale.

11) Il dominio di f è costituito dagli $x\in\mathbb{R}$ per cui è non negativo l'argomento delle radici quadrate. Si ha $2x^2+56>0$, qualunque sia $x\in\mathbb{R}$, mentre $x^2-4\geq 0$ se e solo se $x\in\left]-\infty,-2\right]\cup\left[2,+\infty\right[$. Pertanto

$$\mathscr{D}(f)=\left]-\infty,-2\right]\cup\left[2,+\infty\right[.$$

La funzione f è derivabile in $x \in \mathscr{D}(f)$, se x non annulla gli argomenti delle radici, pertanto f è derivabile in $]-\infty,-2[\,\cup\,]2,+\infty[$. Per x in tale insieme si ha

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+56}} - \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{x\big(2\sqrt{x^2-4}-\sqrt{2x^2+56}\big)}{\sqrt{2x^2+56}\,\sqrt{x^2-4}}\,.$$

Il denominatore è positivo, perciò il segno di f' è determinato dal segno di x e da quello di $2\sqrt{x^2-4}-\sqrt{2x^2+56}$. Per $x \in \mathscr{D}(f')$ si ha

$$2\sqrt{x^2-4}-\sqrt{2x^2+56} \geq 0 \iff 2\sqrt{x^2-4} \geq \sqrt{2x^2+56} \iff 4x^2-16 \geq 2x^2+56\,;$$

tale disuguaglianza equivale a $2x^2 \geq 72$, quindi

$$2\sqrt{x^2-4}-\sqrt{2x^2+56} \geq 0 \iff x \in \,]-\infty,-6] \cup [6,+\infty[\,.$$

Perciò il segno di f' risulta dal seguente schema

		-6		-2		2		6	
x	$-\ -\ -$	|	$-\ -\ -$	|		|	$+\ +\ +$	|	$+\ +\ +$
$2\sqrt{x^2-4}-\sqrt{2x^2+56}$	$+\ +\ +$	|	$-\ -\ -$	|		|	$-\ -\ -$	|	$+\ +\ +$
$f'(x)$	$-\ -\ -$	|	$+\ +\ +$	|		|	$-\ -\ -$	|	$+\ +\ +$

Quindi f è crescente in $[-6,-2]$ e in $[6,+\infty[$ ed è decrescente in $]-\infty,-6]$ e in $[2,6]$.

Per la condizione sufficiente di ordine zero per l'esistenza di estremanti locali, da queste informazioni sulla monotonia della funzione segue che -6 e 6 sono punti di minimo locale, -2 e 2 sono punti di massimo locale.

12) Il dominio di f è costituito dagli x reali non nulli, tali che $(x^2+5x+4)/x \geq 0$. Il trinomio x^2+5x+4 si annulla per

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2-4\cdot 4}}{2} = \frac{-5\pm 3}{2} = \begin{cases} -4 \\ -1\,; \end{cases}$$

quindi il segno dell'argomento della radice risulta dal seguente schema

		-4		-1		0	
x^2+5x+4	$+\ +\ +\ +\ +\ +$	|	$-\ -\ -\ -\ -\ -$	|	$+\ +$	|	$+\ +\ +\ +\ +\ +$
x	$-\ -\ -\ -\ -\ -$	|	$-\ -\ -\ -\ -\ -$	|	$-\ -$	|	$+\ +\ +\ +\ +\ +$
$\dfrac{x^2+5x+4}{x}$	$-\ -\ -\ -\ -\ -$	|	$+\ +\ +\ +\ +\ +$	|	$-\ -$	|	$+\ +\ +\ +\ +\ +$

Pertanto $\mathscr{D}(f) = [-4,-1] \cup \,]0,+\infty[\,$.

La funzione f è derivabile in tutti i punti del dominio che non annullano x^2+5x+4, pertanto f è derivabile in $]-4,-1[\,\cup\,]0,+\infty[$. Per x in tale insieme si ha

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+5x+4}{x}\right)^{-1/2} \frac{(2x+5)x-(x^2+5x+4)}{x^2} = \left(\frac{x}{x^2+5x+4}\right)^{1/2} \frac{x^2-4}{2x^2}\,.$$

Perciò, per $]-4,-1[\,\cup\,]0,+\infty[$, si ha $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x^2-4 \geq 0$; quest'ultima disequazione è verificata se e solo se $x \in \,]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[$. Il segno di f' è riportato nel seguente schema

$$\begin{array}{lcccccc} & -4 & & -2 & -1 & 0 & 2 \\ f'(x) & |+\;+\;+\;+| & & -\;-| & & |-\;-\;-\;-| & +\;+\;+\;+\;+\;+\;+ \end{array}$$

Quindi f è crescente in $[-4,-2]$ e in $[2,+\infty[$, è decrescente in $[-2,-1]$ e in $]0,2]$.

Per la condizione sufficiente di ordine zero per l'esistenza di estremanti locali, da queste informazioni sulla monotonia della funzione segue che -2 è punto di massimo locale per f, -4, -1 e 2 sono punti di minimo locale.

13) Il dominio di f è costituito dagli $x \in \mathbb{R}$ tali che è positivo l'argomento del logaritmo, cioè tali che $x^2+2x>0$, quindi $\mathscr{D}(f) =]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$. Inoltre f è derivabile in ogni punto del dominio in cui non si annulla l'argomento del valore assoluto, cioè in ogni punto del dominio escluso -4. Se $x \in \mathscr{D}(f) \setminus \{-4\}$ si ha

$$f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x} - \operatorname{sgn}(x+4).$$

Studiamo il segno di f'. A tale fine è necessario distinguere a seconda che $\operatorname{sgn}(x+4)$ sia -1 o a 1, cioè a seconda che x sia minore o maggiore di -4. Si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+2}{x^2+2x} + 1 = \dfrac{2x+2+x^2+2x}{x^2+2x} = \dfrac{x^2+4x+2}{x^2+2x} & \text{se } x<-4, \\ \dfrac{2x+2}{x^2+2x} - 1 = \dfrac{2x+2-x^2-2x}{x^2+2x} = \dfrac{-x^2+2}{x^2+2x} & \text{se } x>-4. \end{cases}$$

Se $x \in \mathscr{D}(f)$ si ha $x^2+2x>0$, pertanto il segno di $f'(x)$ dipende solo dal segno del numeratore. Il trinomio x^2+4x+2 si annulla per

$$x = -2 \pm \sqrt{2^2-2} = -2 \pm \sqrt{2};$$

poiché $-4 < -2-\sqrt{2}$, per $x<-4$ è positivo. Il polinomio $-x^2+2$ è non negativo per $x \in \left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$, quindi in $\mathscr{D}(f) \cap]-4,+\infty[$ si ha $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x \in \left]0,\sqrt{2}\right]$. Perciò il segno di f' risulta dal seguente schema

$$\begin{array}{lccccc} & -4 & & -2 & 0 & \sqrt{2} \\ f'(x) & +\;+\;+\;+| & -\;-\;-\;-| & & |+\;+\;+| & -\;-\;-\;- \end{array}$$

Pertanto f è crescente in $]-\infty,-4]$ e in $\left]0,\sqrt{2}\right]$, è decrescente in $[-4,-2[$ e in $\left[\sqrt{2},+\infty\right[$. Inoltre -4 e $\sqrt{2}$ sono punti di massimo locale per f e non esistono punti di minimo locale.

14) Il dominio di f è l'intersezione dei domini delle funzioni tangente e cotangente. Pertanto tale dominio è

$$\left(\mathbb{R} \setminus \left\{k\pi + \frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}\right) \cap \left(\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}\right) = \mathbb{R} \setminus \left(\left\{k\pi + \frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}\right) =$$

$$= \mathbb{R} \setminus \left\{k\,\frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Poiché le funzioni tangente e cotangente sono periodiche di periodo π, anche f è periodica di periodo π. Quindi se si conosce la monotonia di f nell'intersezione del dominio con $[-\pi/2,\pi/2]$ si può ottenere facilmente il comportamento in tutto il dominio. Notiamo che l'intersezione di $\mathscr{D}(f)$ con tale intervallo è $]-\pi/2,0[\,\cup\,]0,\pi/2[$.

La funzione f è derivabile e, $\forall x\in\mathscr{D}(f)$, si ha

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{3}{\operatorname{sen}^2 x}=\frac{\operatorname{sen}^2 x-3\cos^2 x}{\cos^2 x\operatorname{sen}^2 x}.$$

Studiamo il segno di f'. Il denominatore è positivo nel dominio di f, quindi il segno di $f'(x)$ coincide con il segno di $\operatorname{sen}^2 x-3\cos^2 x$. Per semplificare lo studio del segno è opportuno trasformare questa espressione in modo che compaia solo la funzione coseno. Si ha

$$\operatorname{sen}^2 x-3\cos^2 x=1-\cos^2 x-3\cos^2 x=1-4\cos^2 x.$$

Per $x\in]-\pi/2,0[\cup]0,\pi/2[$ si ha $\cos x>0$, quindi $1-4\cos^2 x>0$ se e solo se $\cos x<1/2$. Quindi il segno di f' risulta dal seguente schema

	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{3}$		0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	|	+ + +	|	− − − − − − − −	|	− − − − − − − −	|	+ + +	|

Pertanto f è crescente in $]-\pi/2,-\pi/3]$, in $[\pi/3,\pi 2[$ e in ogni intervallo ottenuto da questi con una traslazione di un multiplo intero di π; inoltre f è decrescente in $[-\pi/3,0[$, in $]0,\pi/3]$ e in ogni intervallo ottenuto da questi con una traslazione di un multiplo intero di π. Inoltre $-\pi/3+k\pi$ ($k\in\mathbb{Z}$) è punto di massimo locale per f, $\pi/3+k\pi$ ($k\in\mathbb{Z}$) è punto di minimo locale.

15)

a. f è crescente in $]-\infty,-2]$ e in $[0,+\infty[$, è decrescente in $[-2,-1[$ e in $]-1,0]$; -2 è punto di massimo locale, 0 è punto di minimo locale

b. f è crescente in $\left[-1,-\frac{3}{4}\right]$, è decrescente in $\left[-\frac{3}{4},+\infty\right[$; $-3/4$ è punto di massimo locale; -1 è punto di minimo locale

c. f è crescente in $]0,e[$ e in $]e,+\infty[$; non vi sono estremanti locali

d. f è crescente in $\left[-\sqrt{3}/2,\sqrt{3}/2\right]$, è decrescente in $\left[-1,-\sqrt{3}/2\right]$ e in $\left[\sqrt{3}/2,1\right]$; -1 e $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sono punti di massimo locale; $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e 1 sono punti di minimo locale

e. f è crescente in $]-\infty,-4]$, è decrescente in $[-4,2[$ e in $]2,5]$; -4 è punto di massimo locale; 5 è punto di minimo locale.

f. f è crescente in $[e^{-1},+\infty[$, è decrescente in $]0,e^{-1}]$; e^{-1} è punto di minimo locale

g. f è crescente in $\left]-\infty, 1-\sqrt{3}\right]$ e in $\left[1+\sqrt{3}, +\infty\right[$, è decrescente in $\left[1-\sqrt{3}, 2\right[$ e in $\left]2, 1+\sqrt{3}\right]$; $1-\sqrt{3}$ è punto di massimo locale, $1+\sqrt{3}$ è punto di minimo locale

h. f è crescente in $\left]-\infty, -\frac{7}{4}\right]$ e in $\left[\sqrt{3}, \frac{7}{4}\right]$, è decrescente in $\left[-\frac{7}{4}, -\sqrt{3}\right]$ e in $\left[\frac{7}{4}, +\infty\right[$; $-\frac{7}{4}$ e $\frac{7}{4}$ sono punti di massimo locale, $-\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$ sono punti di minimo locale

i. f è crescente in $\left]0, e^{-1/2}\right]$ e in $\left[1, +\infty\right[$, è decrescente in $\left[e^{-1/2}, 1\right]$; $e^{-1/2}$ è punto di massimo locale, 1 è punto di minimo locale

j. f è crescente in $\left]-\infty, -\frac{\sqrt{7}}{4}\right]$, in $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ e in $\left[\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4}\right]$, è decrescente in $\left[-\frac{\sqrt{7}}{4}, -\frac{1}{2}\right]$, in $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ e in $\left[\frac{\sqrt{7}}{4}, +\infty\right[$; $-\frac{\sqrt{7}}{4}$, 0 e $\frac{\sqrt{7}}{4}$ sono punti di massimo locale, $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ sono punti di minimo locale

k. f è crescente in $\left]-\infty, -\sqrt{5}\right[$ e in $\left]-\sqrt{5}, -\frac{1}{3}\right]$, è decrescente in $\left[-\frac{1}{3}, \sqrt{5}\right[$ e in $\left]\sqrt{5}, +\infty\right[$; $-\frac{1}{3}$ è punto di massimo locale

l. f è crescente in $\left]-\infty, -3\right[$ e in $\left]-3, -1\right]$, è decrescente in $\left[-1, 3\right[$ e in $\left]3, +\infty\right[$; -1 è punto di massimo locale

m. f è crescente in $\left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}, -1\right]$ e in $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$, è decrescente in $\left]-\infty, \frac{-1-\sqrt{17}}{4}\right]$ e in $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$; -1 è punto di massimo locale, $\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$ e $\frac{1}{2}$ sono punti di minimo locale

n. f è crescente in $\left[-3, \frac{-2-\sqrt{10}}{2}\right]$ e in $\left[0, \frac{-2+\sqrt{10}}{2}\right]$, è decrescente in $\left]-\infty, -3\right]$, in $\left[\frac{-2-\sqrt{10}}{2}, 0\right]$ e in $\left[\frac{-2+\sqrt{10}}{2}, +\infty\right[$; $\frac{-2-\sqrt{10}}{2}$ e $\frac{-2+\sqrt{10}}{2}$ sono punti di massimo locale, -3 e 0 sono punti di minimo locale

o. f è crescente in $[-4, 0]$ e in $\left[\frac{7}{2}, +\infty\right[$, è decrescente in $\left]-\infty, -4\right]$, in $[0, 1]$ e in $\left]2, \frac{7}{2}\right]$; 0 è punto di massimo locale, -4, 1 e $\frac{7}{2}$ sono punti di minimo locale

p. f è crescente in $\left[-3\sqrt{2}, -3\right[$, in $\left]-3, -\sqrt{6}\right]$, in $\left[0, \sqrt{6}\right]$ e in $\left[3\sqrt{2}, +\infty\right[$, è decrescente in $\left]-\infty, -3\sqrt{2}\right]$, in $\left[-\sqrt{6}, 0\right]$, in $\left[\sqrt{6}, 3\right[$ e in $\left]3, 3\sqrt{2}\right]$; $-\sqrt{6}$ e $\sqrt{6}$ sono punti di massimo locale, $-3\sqrt{2}$, 0 e $3\sqrt{2}$ sono punti di minimo locale

q. Per ogni $k \in \mathbb{Z}$, f è crescente in $\left[-\frac{5}{6}\pi + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right]$, è decrescente in $\left[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7}{6}\pi + 2k\pi\right]$; $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ è punto di massimo locale, $-\frac{5}{6}\pi + 2k\pi$ è punto di minimo locale

r. Per ogni $k \in \mathbb{Z}$, f è crescente in $\left[-\arccos\frac{1}{\sqrt{3}} + 2k\pi, \arccos\frac{1}{\sqrt{3}} + 2k\pi\right]$, è decrescente in $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\arccos\frac{1}{\sqrt{3}} + 2k\pi\right]$ e in $\left[\arccos\frac{1}{\sqrt{3}} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$; $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ e $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}} + 2k\pi$ sono punti di massimo locale, $-\arccos\frac{1}{\sqrt{3}} + 2k\pi$ e $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ sono punti di minimo locale.

16) Si ha $\mathscr{D}(f) = \mathbb{R}$. La funzione f è derivabile in tutti i punti che non annullano l'argomento del valore assoluto. Il trinomio $4x^2 - 8x + 3$ si annulla per

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3}}{4} = \frac{4 \pm 2}{4} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{3}{2}, \end{cases}$$

pertanto f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{1/2, 3/2\}$. Per x in tale insieme risulta

$$\begin{aligned} f'(x) &= \operatorname{sgn}(4x^2 - 8x + 3)(8x - 8)e^x + |4x^2 - 8x + 3|e^x = \\ &= \operatorname{sgn}(4x^2 - 8x + 3)(8x - 8 + 4x^2 - 8x + 3)e^x = (4x^2 - 5)\operatorname{sgn}(4x^2 - 8x + 3)e^x . \end{aligned}$$

La funzione f' è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{1/2, 3/2\}$ e per x in tale insieme si ha

$$\begin{aligned} f''(x) &= 8x \operatorname{sgn}(4x^2 - 8x + 3)e^x + (4x^2 - 5)\operatorname{sgn}(4x^2 - 8x + 3)e^x = \\ &= (4x^2 + 8x - 5)\operatorname{sgn}(4x^2 - 8x + 3)e^x . \end{aligned}$$

Poiché e^x è sempre positivo, il segno di f'' è determinato dai fattori $4x^2 + 8x - 5$ e $\operatorname{sgn}(4x^2 - 8x + 3)$. Evidentemente $\operatorname{sgn}(4x^2 - 8x + 3)$ ha lo stesso segno di $4x^2 - 8x + 3$. Sappiamo che il trinomio $4x^2 - 8x + 3$ si annulla per $x = 1/2$ e per $x = 3/2$, quindi è non negativo se e solo se $x \in \left]-\infty, 1/2\right] \cup \left[3/2, +\infty\right[$. Il trinomio $4x^2 + 8x - 5$ si annulla per

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 + 4 \cdot 5}}{4} = \frac{-4 \pm 6}{4} = \begin{cases} -\dfrac{5}{2}, \\ \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

quindi è non negativo se e solo se $x \in \left]-\infty, -5/2\right] \cup \left[1/2, +\infty\right[$. Il segno di f'' risulta quindi dal seguente schema:

		$-\frac{5}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$	
$4x^2 + 8x - 5$	+ + + +	|	− − − − − − − − −	|	+ + +	|	+ + + +
$4x^2 - 8x + 3$	+ + + +	|	+ + + + + + + + +	|	− − −	|	+ + + +
$f''(x)$	+ + + +	|	− − − − − − − − −	|	− − −	|	+ + + +

Quindi, per la caratterizzazione del II ordine della convessità, f è convessa in $]-\infty,-5/2]$ e in $[3/2,+\infty[$, è concava in $[-5/2,1/2]$ e in $[1/2,3/2]$. Il punto $-5/2$ è di flesso per f.

Poiché f è concava sia in $[-5/2,1/2]$ che in $[1/2,3/2]$, ci chiediamo se è concava anche nell'unione di questi intervalli. Studiamo la derivabilità di f in $1/2$.

Si ha

$$\lim_{x\to 1/2^-} f'(x) = \lim_{x\to 1/2^-} \big((4x^2-5)e^x\big) = -4e^{1/2},$$
$$\lim_{x\to 1/2^+} f'(x) = \lim_{x\to 1/2^+} -(4x^2-5)e^x = 4e^{1/2}.$$

Perciò

$$\lim_{x\to 1/2^-} \frac{f(x)-f(1/2)}{x-(1/2)} = -4e^{1/2} \neq 4e^{1/2} = \lim_{x\to 1/2^+} \frac{f(x)-f(1/2)}{x-(1/2)},$$

quindi f non è derivabile in $1/2$. Pertanto non possiamo utilizzare il criterio del II ordine per stabilire la concavità in $[-5/2,3/2]$. Abbiamo però informazioni sufficienti per affermare che f non è convessa in tale intervallo. Infatti si ha $\lim_{x\to 1/2^-} R_f(1/2,x) < 0$ e $\lim_{x\to 1/2^+} R_f(1/2,x) > 0$, quindi esiste $x_1 < 1/2$ tale che $R_f(1/2,x_1) < 0$ ed esiste $x_2 > 1/2$ tale che $R_f(1/2,x_2) > 0$, pertanto il rapporto incrementale non è decrescente in $[-5/2,3/2]$, quindi f non è concava in tale intervallo.

In $3/2$ la funzione cambia convessità, ma non sappiamo se f è derivabile in tale punto. Si ha

$$\lim_{x\to 3/2^-} f'(x) = \lim_{x\to 3/2^-} \big(-(4x^2-5)e^x\big) = -4e^{3/2},$$
$$\lim_{x\to 3/2^+} f'(x) = \lim_{x\to 3/2^+} (4x^2-5)e^x = 4e^{3/2}.$$

Perciò

$$\lim_{x\to 3/2^-} \frac{f(x)-f(3/2)}{x-(3/2)} = -4e^{3/2} \neq 4e^{3/2} = \lim_{x\to 3/2^+} \frac{f(x)-f(3/2)}{x-(3/2)},$$

quindi f non è derivabile in $3/2$, perciò tale punto non è di flesso.

17) L'argomento del logaritmo è sempre maggiore o uguale a 3, quindi è positivo, perciò $\mathscr{D}(f) = \mathbb{R}$. Se x non annulla l'argomento del valore assoluto, allora f è derivabile in x. Si ha $x^2+2x=0$ se e solo se $x=0$ o $x=-2$, quindi f è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{-2,0\}$. Per x in tale insieme si ha

$$f'(x) = \frac{\operatorname{sgn}(x^2+2x)(2x+2)}{|x^2+2x|+3}.$$

Questa funzione è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{-2,0\}$ e per x in tale insieme si ha

$$\begin{aligned} f''(x) &= \operatorname{sgn}(x^2+2x)\,\frac{2\big(|x^2+2x|+3\big)-(2x+2)\operatorname{sgn}(x^2+2x)(2x+2)}{(|x^2+2x|+3)^2} = \\ &= \operatorname{sgn}(x^2+2x)\,\frac{2\operatorname{sgn}(x^2+2x)(x^2+2x)+6-\operatorname{sgn}(x^2+2x)(4x^2+8x+4)}{(|x^2+2x|+3)^2} = \\ &= \frac{-2x^2-4x-4+6\operatorname{sgn}(x^2+2x)}{(|x^2+2x|+3)^2}. \end{aligned}$$

Studiamo il segno di $f''(x)$. Per $x \in \,]-2,0[$ risulta $\operatorname{sgn}(x^2+2x) = -1$, mentre per $x \in \,]-\infty,-2[\, \cup \,]0,+\infty[$ si ha $\operatorname{sgn}(x^2+2x) = 1$. Quindi il numeratore nell'espressione scritta sopra è

$$\begin{aligned} &-2x^2-4x-4+6 = -2x^2-4x+2, &&\text{per } x \in \,]-\infty,-2[\, \cup \,]0,+\infty[,\\ &-2x^2-4x-4-6 = -2x^2-4x-10, &&\text{per } x \in \,]-2,0[. \end{aligned}$$

Studiamo il caso $x \in \,]-\infty,-2[\, \cup \,]0,+\infty[$. Il trinomio $-2x^2-4x+2$ si annulla per

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2+2\cdot 2}}{-2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{-2} = -1 \mp \sqrt{2},$$

quindi esso è non positivo per $x \in \left]-\infty,-1-\sqrt{2}\right] \cup \left[-1+\sqrt{2},+\infty\right[$ e non negativo per $x \in \left[-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2}\right]$. Poiché $-1-\sqrt{2} < -2$ e $0 < -1+\sqrt{2}$, si ha

$$\begin{gathered} x \in \left[-1-\sqrt{2},-2\right[\cup \left]0,-1+\sqrt{2}\right] \implies f''(x) \geq 0\\ x \in \left]-\infty,-1-\sqrt{2}\right] \cup \left[-1+\sqrt{2},+\infty\right[\implies f''(x) \leq 0. \end{gathered}$$

Studiamo il caso $x \in \,]-2,0[$. Il trinomio $-2x^2-4x-10$ ha discriminante

$$4^2 - 4\cdot 2\cdot 10 = -64 < 0,$$

quindi esso ha sempre lo stesso segno del coefficiente di x^2, perciò è negativo. Pertanto

$$x \in \,]-2,0[\implies f''(x) \leq 0.$$

Il segno di f'' è riportato nel seguente schema

		$-1-\sqrt{2}$		-2		0		$-1+\sqrt{2}$	
$f''(x)$	$- - - -$	|	$+ +$	|	$- - - - - - - - - -$	|	$+ +$	|	$- - - -$

Quindi f è convessa in $\left[-1-\sqrt{2},-2\right]$ e in $\left[0,-1+\sqrt{2}\right]$, è concava in $\left]-\infty,-1-\sqrt{2}\right]$, in $[-2,0]$ e in $\left[-1+\sqrt{2},+\infty\right[$. I punti $-1-\sqrt{2}$ e $-1+\sqrt{2}$ sono di flesso per f.

Nei punti -2 e 0 la funzione cambia convessità, ma non sappiamo se in tali punti f è derivabile. Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -2^-} f'(x) &= \lim_{x\to -2^-} \frac{2x+2}{x^2+2x+3} = -\frac{2}{3},\\ \lim_{x\to -2^+} f'(x) &= \lim_{x\to -2^+} \frac{-(2x+2)}{-x^2-2x+3} = \frac{2}{3},\\ \lim_{x\to 0^-} f'(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{-(2x+2)}{-x^2-2x+3} = -\frac{2}{3},\\ \lim_{x\to 0^+} f'(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{2x+2}{x^2+2x+3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Poiché, sia in -2 che in 0, limite sinistro e destro della derivata sono diversi tra loro, per il teorema sul limite della derivata ciò vale anche per i rapporti incrementali. Pertanto f non è derivabile né in -2 né in 0, perciò tali punti non sono di flesso.

18) Il dominio naturale di f è costituito dagli $x \in \mathbb{R}$ tali che $2x^2-4x+1$ è non negativo. Tale trinomio si annulla per

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 2 \cdot 1}}{2} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Pertanto

$$\mathscr{D}(f) = \left]-\infty, 1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[1+\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[.$$

La funzione f è derivabile nei punti del dominio per cui non si annulla l'argomento della radice, cioè per $x \neq 1 \pm \left(1/\sqrt{2}\right)$ e, per tali x, si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{2x^2-4x+1} + (x-1)\frac{4x-4}{2\sqrt{2x^2-4x+1}} = \\ &= \frac{2x^2-4x+1+(x-1)(2x-2)}{\sqrt{2x^2-4x+1}} = \frac{4x^2-8x+3}{\sqrt{2x^2-4x+1}}. \end{aligned}$$

La funzione f' è derivabile in tutto il suo dominio e si ha

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left((8x-8)\sqrt{2x^2-4x+1} - (4x^2-8x+3)\frac{4x-4}{2\sqrt{2x^2-4x+1}}\right)\frac{1}{\left(\sqrt{2x^2-4x+1}\right)^2} = \\ &= \frac{(8x-8)(2x^2-4x+1)-(4x^2-8x+3)(2x-2)}{(2x^2-4x+1)^{3/2}} = \\ &= \frac{2(x-1)\big(4(2x^2-4x+1)-(4x^2-8x+3)\big)}{(2x^2-4x+1)^{3/2}} = \frac{2(x-1)(4x^2-8x+1)}{(2x^2-4x+1)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Poiché il denominatore è positivo, si ha $f''(x) \geq 0$ se e solo se $(x-1)(4x^2-8x+1) \geq 0$. Il trinomio $4x^2-8x+1$ si annulla per

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2-4\cdot 1}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{4} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Il segno di f'' risulta quindi dal seguente schema:

		$1-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$1+\frac{1}{\sqrt{2}}$	$1+\frac{\sqrt{3}}{2}$	
$x-1$	$-\ -\ -$	$-$			$+$	$+\ +\ +$	
$4x^2-8x+1$	$+\ +\ +$	$-$			$-$	$+\ +\ +$	
$f''(x)$	$-\ -\ -$	$+$			$-$	$+\ +\ +$	

Pertanto f è convessa in $\left[1-\sqrt{3}/2, 1-1/\sqrt{2}\right]$ e in $\left[1+\sqrt{3}/2, +\infty\right[$ ed è concava in $\left]-\infty, 1-\sqrt{3}/2\right]$ e in $\left[1+1/\sqrt{2}, 1+\sqrt{3}/2\right]$. I punti $1-\sqrt{3}/2$ e $1+\sqrt{3}/2$ sono di flesso.

19)

a. f è convessa in $\left[\dfrac{9-3\sqrt{33}}{4},0\right]$ e in $\left[\dfrac{9+3\sqrt{33}}{4},+\infty\right[$, è concava in $\left]-\infty,\dfrac{9-3\sqrt{33}}{4}\right]$ e in $\left[0,\dfrac{9-3\sqrt{33}}{4}\right]$; $\dfrac{9-3\sqrt{33}}{4}$, 0 e $\dfrac{9+3\sqrt{33}}{4}$ sono punti di flesso

b. f è convessa in $\left]-\infty,-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right]$, in $[0,1]$ e in $[1,+\infty[$, è concava in $\left[-\sqrt{\dfrac{2}{3}},0\right]$; $-\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ è punto di flesso

c. f è convessa in $\left]-\dfrac{5}{6},-\dfrac{5}{12}\right]$ e in $\left]\dfrac{5}{6},+\infty\right[$ è concava in $\left[-\dfrac{5}{12},0\right[$; $-\dfrac{5}{12}$ è punto di flesso

d. f è convessa in $\left]-\infty,-\sqrt{6}\right]$, in $[-1,1]$ e in $\left[\sqrt{6},+\infty\right[$, è concava in $\left[-\sqrt{6},-\sqrt{3}\right]$, in $\left[-\sqrt{3},-1\right]$, in $[1,\sqrt{3}]$ e in $[\sqrt{3},\sqrt{6}]$; $\pm\sqrt{6}$ e ± 1 sono punti di flesso

e. f è convessa in $\left]-\infty,-3\sqrt{3}\right]$ e in $\left[0,3\sqrt{3}\right]$, è concava in $\left[-3\sqrt{3},0\right]$ e in $\left[3\sqrt{3},+\infty\right[$; $-3\sqrt{3}$ e $3\sqrt{3}$ sono punti di flesso

f. f è convessa in $\left[\dfrac{4+\sqrt{41}}{5},3\right]$ e in $[5,+\infty[$, è concava in $\left[0,\dfrac{4+\sqrt{41}}{5}\right]$ e in $[3,5]$; $\dfrac{4+\sqrt{41}}{5}$ è punto di flesso

g. f è convessa in $[-5,-4[$ e in $]-4,-3]$, è concava in $]-\infty,-5]$ e in $[-3,+\infty[$; -5 e -3 sono punti di flesso

h. f è concava in $]-\infty,-2]$, in $[2,4]$ e in $[4,+\infty[$; non vi sono punti di flesso

20) Il dominio naturale di f è $\mathbb{R}$.

Cerchiamo le intersezioni del grafico di f con gli assi. Si ha $f(0)=0$, quindi il grafico interseca l'asse delle ordinate nell'origine. Inoltre $f(x)=0$ se e solo se $|2x^3-9x|=-9x$; il valore assoluto è sempre non negativo, quindi deve essere $-9x\geq 0$, cioè $x\leq 0$. Quindi $f(x)$ è nullo se x è non positivo e verifica una delle due equazioni $2x^3-9x=-9x$ e $2x^3-9x=9x$. La prima equazione è verificata solo per $x=0$, la seconda equivale a $2x^3-18x=0$ e quindi ha le soluzioni $x=0$, $x=-3$ e $x=3$. Deve essere $x\leq 0$, quindi f si annulla in 0 e in -3.

Studiamo il comportamento negli estremi del dominio.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} |2x^3| \left(\left| 1 - \frac{9}{2} x^{-2} \right| + \frac{9x}{|2x^3|} \right) = +\infty\,,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} |2x^3| \left(\left| 1 - \frac{9}{2} x^{-2} \right| + \frac{9x}{|2x^3|} \right) = +\infty\,.$$

Poiché per $x \to \pm\infty$ si ha $f(x) \sim 2|x|^3$ non vi sono asintoti obliqui.

La funzione è continua.

La funzione f è derivabile in tutti i punti che non annullano l'argomento del valore assoluto, cioè tali che $2x^3 - 9x \neq 0$. Poiché $2x^3 - 9x = x(2x^2 - 9)$, si ha $2x^3 - 9x = 0$ per $x = 0$ e per $x = \pm 3/\sqrt{2}$. Perciò f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \left\{-3/\sqrt{2}, 0, 3/\sqrt{2}\right\}$. Per x in tale insieme si ha

$$f'(x) = (6x^2 - 9)\operatorname{sgn}(2x^3 - 9x) + 9\,.$$

Per studiare il segno di f' è utile anzitutto determinare per quali x si ha $\operatorname{sgn}(2x^3 - 9x) = 1$ e per quali si ha $\operatorname{sgn}(2x^3 - 9x) = -1$. Si ha

$$2x^3 - 9x = 2x\left(x + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{3}{\sqrt{2}}\right),$$

quindi il segno di $2x^3 - 9x$ risulta dal seguente schema

	$\quad$ $-\frac{3}{\sqrt{2}}$	$\quad$ 0	$\quad$ $\frac{3}{\sqrt{2}}$	
$2x$	$-\ -\ -\ -$	$-\ -\ -\ -\ -\ -$	$+\ +\ +\ +\ +\ +$	$+\ +\ +\ +$
$x + \frac{3}{\sqrt{2}}$	$-\ -\ -\ -$	$+\ +\ +\ +\ +\ +$	$+\ +\ +\ +\ +\ +$	$+\ +\ +\ +$
$x - \frac{3}{\sqrt{2}}$	$-\ -\ -\ -$	$-\ -\ -\ -\ -\ -$	$-\ -\ -\ -\ -\ -$	$+\ +\ +\ +$
$2x^3 - 9x$	$-\ -\ -\ -$	$+\ +\ +\ +\ +\ +$	$-\ -\ -\ -\ -\ -$	$+\ +\ +\ +$

Perciò $\operatorname{sgn}(2x^3 - 9x) = 1$ se $x \in \left]-3/\sqrt{2}, 0\right[\cup \left]3/\sqrt{2}, +\infty\right[$, e $\operatorname{sgn}(2x^3 - 9x) = -1$ se $x \in \left]-\infty, -3/\sqrt{2}\right[\cup \left]0, 3/\sqrt{2}\right[$.

Calcoliamo il limite della derivata nei punti $-3/\sqrt{2}$, 0 e $3/\sqrt{2}$ per determinare la derivabilità di f in tali punti.

$$\lim_{x\to -3/\sqrt{2}^-} f'(x) = \lim_{x\to -3/\sqrt{2}^-} -(6x^2 - 9) + 9 = -9\,,$$

$$\lim_{x\to -3/\sqrt{2}^+} f'(x) = \lim_{x\to -3/\sqrt{2}^+} (6x^2 - 9) + 9 = 27\,,$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} (6x^2 - 9) + 9 = 0\,,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} -(6x^2 - 9) + 9 = 18\,,$$

$$\lim_{x\to 3/\sqrt{2}^-} f'(x) = \lim_{x\to 3/\sqrt{2}^-} -(6x^2 - 9) + 9 = -9\,,$$

$$\lim_{x\to 3/\sqrt{2}^+} f'(x) = \lim_{x\to 3/\sqrt{2}^+} (6x^2 - 9) + 9 = 27\,.$$

In ciascuno dei punti considerati il limite sinistro di f' è diverso dal limite destro, perciò anche i limiti sinistro e destro del rapporto incrementale sono diversi tra loro. Quindi $-3/\sqrt{2}$, 0 e $3/\sqrt{2}$ sono punti di non derivabilità per f.

Studiamo il segno di f'. Se $x \in \left]-3/\sqrt{2}, 0\right[\cup \left]3/\sqrt{2}, +\infty\right[$, allora si ha

$$f'(x) = (6x^2 - 9) + 9 = 6x^2;$$

poiché $x \neq 0$, risulta $f'(x) > 0$. Se $x \in \left]-\infty, -3/\sqrt{2}\right[\cup \left]0, 3/\sqrt{2}\right[$, allora si ha

$$f'(x) = -(6x^2 - 9) + 9 = -6x^2 + 18 = 6(-x^2 + 3),$$

che è positivo per $x \in \left]-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right[$ e negativo per $x \in \left]-\infty, -\sqrt{3}\right[\cup \left]\sqrt{3}, +\infty\right[$ e quindi, tenuto conto delle condizioni a cui deve soddisfare x, abbiamo $f'(x) > 0$ per $x \in \left]0, \sqrt{3}\right[$ e $f'(x) < 0$ per $x \in \left]-\infty, -3/\sqrt{2}\right[\cup \left]\sqrt{3}, 3/\sqrt{2}\right[$.

Complessivamente, il segno di f' risulta dal seguente schema

$$\begin{array}{lccccccc} & & -\frac{3}{\sqrt{2}} & & 0 & & \sqrt{3} \quad \frac{3}{\sqrt{2}} & \\ f'(x) & - \; - \; - & | & + \; + \; + \; + \; + \; + \; + & | & + \; + \; + \; + \; + & | \; - \; | & + \; + \; + \end{array}$$

Pertanto f è crescente in $\left[-3/\sqrt{2}, 0\right]$, in $\left[0, \sqrt{3}\right]$ e in $\left[3/\sqrt{2}, +\infty\right[$ ed è decrescente in $\left]-\infty, -3/\sqrt{2}\right]$ e in $\left[\sqrt{3}, 3/\sqrt{2}\right]$. Il criterio di monotonia non può essere applicato direttamente per stabilire la crescenza di f in $\left[-3/\sqrt{2}, \sqrt{3}\right]$, perché la funzione non è derivabile in tutti i punti interni a tale intervallo. Possiamo però ugualmente concludere che f è crescente, a partire dalle informazioni relative agli intervalli $\left[-3/\sqrt{2}, 0\right]$ e $\left[0, \sqrt{3}\right]$. Infatti siano $x, y \in \left[-3/\sqrt{2}, \sqrt{3}\right]$ tali che $x < y$. Se x e y appartengono entrambi a $\left[-3/\sqrt{2}, 0\right]$ o entrambi a $\left[0, \sqrt{3}\right]$, allora sappiamo che $f(x) \leq f(y)$. Se invece $x \in \left[-3/\sqrt{2}, 0\right]$ e $y \in \left[0, \sqrt{3}\right]$, allora si ha $f(x) \leq f(0) \leq f(y)$. Quindi in ogni caso $f(x) \leq f(y)$. Utilizzando il criterio di monotonia stretta si può analogamente dimostrare che f è strettamente crescente in $\left[-3/\sqrt{2}, \sqrt{3}\right]$.

Inoltre $-3/\sqrt{2}$ e $3/\sqrt{2}$ sono punti di minimo locale per f, $\sqrt{3}$ è un punto di massimo locale.

Il valore di f in tali punti è:

$$f\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = \left|2\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^3 + 9\frac{3}{\sqrt{2}}\right| - 9\frac{3}{\sqrt{2}} = \left|-\frac{27}{\sqrt{2}} + \frac{27}{\sqrt{2}}\right| - \frac{27}{\sqrt{2}} = -\frac{27}{\sqrt{2}}$$

$$f(\sqrt{3}) = \left|2(\sqrt{3})^3 - 9\sqrt{3}\right| + 9\sqrt{3} = \left|6\sqrt{3} - 9\sqrt{3}\right| + 9\sqrt{3} = 12\sqrt{3},$$

$$f\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = \left|2\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^3 - 9\frac{3}{\sqrt{2}}\right| + 9\frac{3}{\sqrt{2}} = \left|\frac{27}{\sqrt{2}} - \frac{27}{\sqrt{2}}\right| + \frac{27}{\sqrt{2}} = \frac{27}{\sqrt{2}}.$$

Studiamo la convessità di f.

La funzione f' è derivabile in tutto il dominio e si ha

$$f''(x) = 12x\,\mathrm{sgn}(2x^3 - 9x).$$

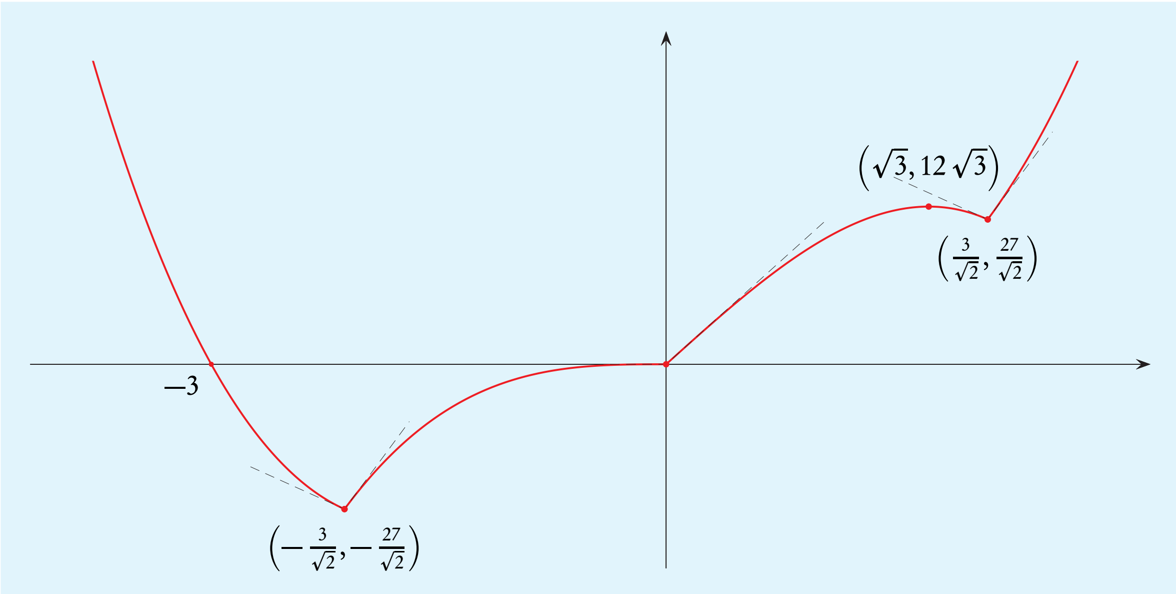
Quindi il segno di $f''(x)$ coincide con quello di $12x(2x^3-9x)$, che è uguale a

$$24x^2\left(x-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left(x+\frac{3}{\sqrt{2}}\right).$$

Quindi per $x \in \left]-\infty,-3/\sqrt{2}\right[\cup \left]3/\sqrt{2},+\infty\right[$ risulta $f''(x) \geq 0$, mentre invece per $x \in \left]-3/\sqrt{2},3/\sqrt{2}\right[\setminus \{0\}$ si ha $f''(x) \leq 0$; pertanto f è convessa in $\left]-\infty,-3/\sqrt{2}\right]$ e in $\left[3/\sqrt{2},+\infty\right[$ ed è concava in $\left[-3/\sqrt{2},0\right]$ e in $\left[0,3/\sqrt{2}\right]$.

Poiché nei punti di cambio di convessità f non è derivabile, non vi sono punti di flesso.

Perciò il grafico di f è, approssimativamente, il seguente:



21) La funzione f è definita per tutti gli x per cui non si annulla il denominatore dell'argomento dell'esponenziale, pertanto si ha

$$\mathscr{D}(f) = \mathbb{R}^*.$$

Cerchiamo le intersezioni del grafico di f con gli assi cartesiani. Poiché 0 non appartiene al dominio della funzione non c'è intersezione con l'asse delle ordinate. L'equazione $f(x)=0$ equivale a $x+6=0$, quindi f si annulla solo per $x=-6$. Poiché f è prodotto di funzioni a valori non negativi è non negativa.

Studiamo il comportamento di f negli estremi degli intervalli che costituiscono il suo dominio. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} |x+6|\,e^1 = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 6 \lim_{x\to 0^-} \exp\left(\frac{x+1}{x}\right) = 0,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 6 \lim_{x\to 0^+} \exp\left(\frac{x+1}{x}\right) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} |x+6|\,e^1 = +\infty.$$

La funzione ha quindi l'asintoto verticale $x = 0$.

Poiché per x che tende a $-\infty$ e a $+\infty$ la funzione diverge, cerchiamo eventuali asintoti obliqui. Per $x \to -\infty$ si ha

$$|x+6|\exp\left(\frac{x+1}{x}\right) = -(x+6)e\exp\left(\frac{1}{x}\right) = -(x+6)e\left(1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) =$$
$$= e\left(-x-6-x\,\frac{1}{x}+o(1)\right) = -ex-7e+o(1);$$

perciò la retta di equazione $y = -ex-7e$ è asintoto obliquo per f per $x \to -\infty$. In modo analogo per $x \to +\infty$ si ha

$$|x+6|\exp\left(\frac{x+1}{x}\right) = (x+6)e\exp\left(\frac{1}{x}\right) = (x+6)e\left(1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) =$$
$$= e\left(x+6+x\,\frac{1}{x}+o(1)\right) = ex+7e+o(1),$$

quindi f ha l'asintoto obliquo $y = ex+7e$ per $x \to +\infty$.

La funzione f è continua, perché prodotto di composizione funzioni continue.

Studiamo la derivata di f. La funzione f è derivabile in x se x non annulla l'argomento del valore assoluto. Pertanto f è derivabile in $\mathscr{D}(f)\setminus\{-6\} = \mathbb{R}\setminus\{-6,0\}$. Per x in tale insieme si ha

$$f'(x) = \operatorname{sgn}(x+6)\exp\left(\frac{x+1}{x}\right) + |x+6|\exp\left(\frac{x+1}{x}\right)\frac{x-(x+1)}{x^2} =$$
$$= \operatorname{sgn}(x+6)\left(1-(x+6)\,\frac{1}{x^2}\right)\exp\left(\frac{x+1}{x}\right) = \operatorname{sgn}(x+6)\,\frac{x^2-x-6}{x^2}\,\exp\left(\frac{x+1}{x}\right).$$

Poiché, $\forall x \in \mathscr{D}(f')$, si ha $x^2 > 0$ e l'esponenziale è maggiore di 0, il segno e di $f'(x)$ coincide con il segno di $(x^2-x-6)\operatorname{sgn}(x+6)$. Gli zeri del trinomio x^2-x-6, sono

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2-4\cdot(-6)}}{2} = \frac{1\pm 5}{2} = \begin{cases} -2, \\ 3, \end{cases}$$

pertanto è positivo se e solo se $x \in \,]-\infty,-2[\,\cup\,]3,+\infty[$.

Il segno della derivata risulta quindi dal seguente schema:

$$\begin{array}{r|c|c|c|c|c}
 & \quad & -6 \quad\quad & -2 & 0 \quad\quad & 3 \\
x^2-x-6 & +\;+\;+ & +\;+\;+\;+\;+\;+ & -\;-\;- & -\;-\;-\;- & +\;+\;+ \\
\operatorname{sgn}(x+6) & -\;-\;- & +\;+\;+\;+\;+\;+ & +\;+\;+ & +\;+\;+\;+ & +\;+\;+ \\
f'(x) & -\;-\;- & +\;+\;+\;+\;+\;+ & -\;-\;- & -\;-\;-\;- & +\;+\;+
\end{array}$$

Pertanto f è crescente in $[-6,-2]$ e in $[3,+\infty[$, è decrescente in $]-\infty,-6]$, in $[-2,0[$ e in $]0,3]$. Inoltre -6 e 3 sono punti di minimo locale, -2 è un punto di massimo locale.

Studiamo la derivabilità di f in -6.

$$\lim_{x\to-6^-} f'(x) = \lim_{x\to-6^-} \frac{(x^2-x-6)\operatorname{sgn}(x+6)}{x^2} \exp\left(\frac{x+1}{x}\right) =$$
$$= \lim_{x\to-6^-} -\frac{x^2-x-6}{x^2} \exp\left(\frac{x+1}{x}\right) = -\frac{(-6)^2+6-6}{(-6)^2} e^{5/6} = -e^{5/6},$$
$$\lim_{x\to-6^+} f'(x) = \lim_{x\to-6^+} \frac{(x^2-x-6)\operatorname{sgn}(x+6)}{x^2} \exp\left(\frac{x+1}{x}\right) =$$
$$= \lim_{x\to-6^+} \frac{x^2-x-6}{x^2} \exp\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{(-6)^2+6-6}{(-6)^2} e^{5/6} = e^{5/6},$$

quindi esistono limite sinistro e destro di $f'(x)$ per $x \to -6$, ma tali limiti sono diversi tra loro, dunque f non è derivabile in -6.

Poiché $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ esiste reale, per studiare l'andamento della funzione, è utile calcolare $\lim_{x\to 0^-} f'(x)$. Per $x \to 0^-$ risulta

$$f'(x) = \frac{x^2-x-6}{x^2} \exp\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{x^2-x-6}{x^2}\, e \exp\left(\frac{1}{x}\right) \sim -6e\,\frac{1}{x^2} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

e

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to-\infty} y^2 e^y = 0.$$

Pertanto $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0$.

Calcoliamo il valore di f negli estremanti locali; sappiamo che $f(-6) = 0$, inoltre si ha:

$$f(-2) = (-2+6)\exp\left(\frac{-2+1}{-2}\right) = 4e^{1/2},$$
$$f(3) = (3+6)\exp\left(\frac{3+1}{3}\right) = 9e^{4/3}.$$

Studiamo la convessità. Evidentemente f' è derivabile in ogni punto del suo dominio, che è $\mathbb{R} \setminus \{-6, 0\}$; per x in tale insieme si ha

$$f''(x) = \operatorname{sgn}(x+6)\left(\frac{(2x-1)x^2 - 2x(x^2-x-6)}{x^4} \exp\left(\frac{x+1}{x}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{(x^2-x-6)}{x^2}\,\frac{x-(x+1)}{x^2} \exp\left(\frac{x+1}{x}\right)\right) =$$
$$= \operatorname{sgn}(x+6)\left(\frac{2x^3-x^2-2x^3+2x^2+12x}{x^4} + \frac{-x^2+x+6}{x^4}\right)\exp\left(\frac{x+1}{x}\right) =$$
$$= \operatorname{sgn}(x+6)\,\frac{13x+6}{x^4} \exp\left(\frac{x+1}{x}\right).$$

Se $x \in \mathscr{D}(f'')$ si ha $x^4 > 0$ e l'esponenziale è positivo, il segno di $f''(x)$ coincide con il segno di $(13x+6)\,\mathrm{sgn}(x+6)$ e risulta dal seguente schema:

		-6		$-\frac{6}{13}$		0	
$13x+6$	$-\ -\ -$		$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$		$+$		$+\ +\ +\ +\ +$
$\mathrm{sgn}(x+6)$	$-\ -\ -$		$+\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +$		$+$		$+\ +\ +\ +\ +$
$f''(x)$	$+\ +\ +$		$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$		$+$		$+\ +\ +\ +\ +$

La funzione f è quindi convessa in $]-\infty,-6]$, in $[-6/13,0[$ e in $]0,+\infty[$ mentre è concava in $[-6,-6/13]$; inoltre $-6/13$ è punto di flesso. Si ha:

$$f\left(-\frac{6}{13}\right)=\left|-\frac{6}{13}+6\right|\exp\left(\frac{-6/13+1}{-6/13}\right)=\frac{72}{13}\,e^{-7/6},$$

$$f'\left(-\frac{6}{13}\right)=\frac{(-6/13)^2-(-6/13)-6}{(-6/13)^2}\,\mathrm{sgn}\left(-\frac{6}{13}+6\right)\exp\left(\frac{-6/13+1}{-6/13}\right)=-25e^{-7/6},$$

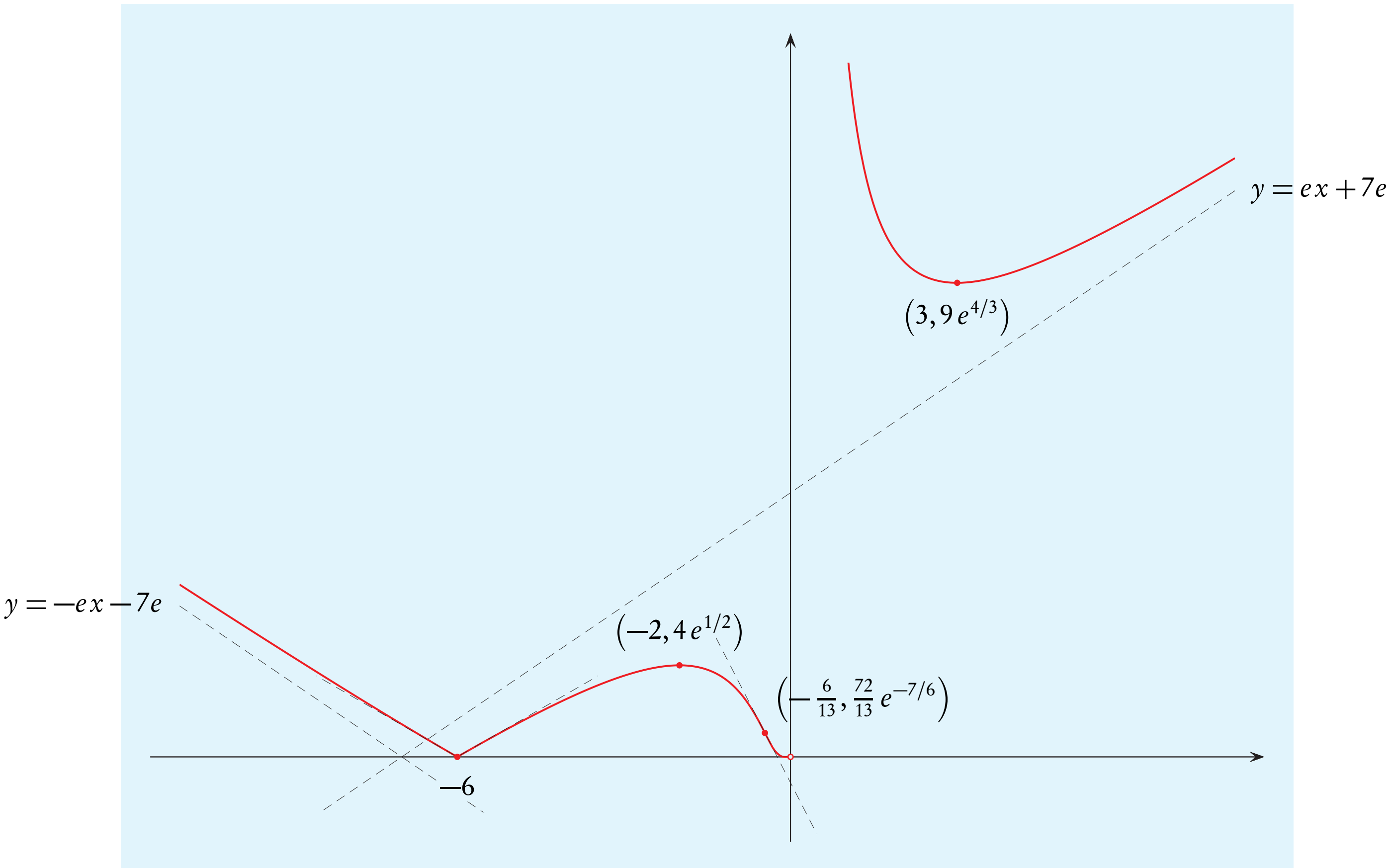
quindi la retta tangente nel punto di flesso ha equazione

$$y=\frac{72}{13}\,e^{-7/6}-25e^{-7/6}\left(x+\frac{6}{13}\right),$$

cioè

$$y=(-25x-6)\,e^{-7/6}.$$

Il grafico di f è quindi, approssimativamente, il seguente:



22) Poiché la funzione arcoseno ha dominio $[-1,1]$, si ha

$$\mathscr{D}(f)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-1\le|x^2+4x+3|\le 1\}=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-1\le x^2+4x+3\le 1\}.$$

Dobbiamo quindi risolvere il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} x^2+4x+3\le 1\,,\\ x^2+4x+3\ge -1\,,\end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x^2+4x+2\le 0\,,\\ x^2+4x+4\ge 0\,.\end{cases}$$

Il trinomio x^2+4x+2 si annulla per

$$x=-2\pm\sqrt{2^2-2}=-2\pm\sqrt{2}\,,$$

pertanto la prima disequazione è verificata per $x\in\left[-2-\sqrt{2},-2+\sqrt{2}\right]$. Dall'uguaglianza $x^2+4x+4=(x+2)^2$ segue che la seconda disequazione è sempre verificata. Pertanto

$$\mathscr{D}(f)=\left[-2-\sqrt{2},-2+\sqrt{2}\right].$$

I valori di f negli estremi del dominio sono:

$$\begin{aligned} f\left(-2-\sqrt{2}\right)&=\operatorname{arcsen}\left|\left(-2-\sqrt{2}\right)^2+4\left(-2-\sqrt{2}\right)+3\right|=\\ &=\operatorname{arcsen}\left|4+4\sqrt{2}+2-8-4\sqrt{2}+3\right|=\operatorname{arcsen}|-1|=\frac{\pi}{2}\,,\\ f\left(-2+\sqrt{2}\right)&=\operatorname{arcsen}\left|\left(-2+\sqrt{2}\right)^2+4\left(-2+\sqrt{2}\right)+3\right|=\\ &=\operatorname{arcsen}\left|4-4\sqrt{2}+2-8+4\sqrt{2}+3\right|=\operatorname{arcsen}|-1|=\frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

Il grafico di f non interseca l'asse delle ordinate perché $0\notin\mathscr{D}(f)$. Cerchiamo le intersezioni con l'asse delle ascisse; si ha $f(x)=0$ se e solo se $\operatorname{arcsen}|x^2+4x+3|=0$, che equivale a $x^2+4x+3=0$. Questo trinomio si annulla per

$$x=-2\pm\sqrt{2^2-3}=-2\pm 1=\begin{cases}-3\,,\\ -1\,.\end{cases}$$

Poiché la funzione arcoseno assume valori non negativi quando il suo argomento è non negativo, f è sempre non negativa.

La funzione non ha asintoti orizzontali o obliqui perché il dominio è limitato e non ha asintoti verticali perché, per il teorema di Weierstrass, è limitata.

Poiché f è composizione di funzioni continue, è continua.

La funzione f è derivabile in ogni $x\in\mathbb{R}$ tale che l'argomento del valore assoluto è diverso da 0 e l'argomento dell'arcoseno è diverso da ± 1. Quindi deve essere $x^2+4x+3\neq 0$ e $|x^2+4x+3|\neq 1$, non si ha mai $|x^2+4x+3|=-1$. Come già trovato in precedenza $x^2+4x+3=0$ per $x=-3$ e per $x=-1$. Si ha $|x^2+4x+3|=1$ se e solo se $x^2+4x+3=1$ oppure $x^2+4x+3=-1$, tali equazioni, già risolte per determinare il dominio di f, hanno le soluzioni $x=-2-\sqrt{2}$ e $x=-2+\sqrt{2}$ la prima e $x=-2$ la seconda. Pertanto f è

derivabile in
$$\mathscr{D}(f)\setminus\left\{-2-\sqrt{2},-3,-2,-1,-2+\sqrt{2}\right\};$$
la derivabilità nei punti $-2-\sqrt{2}$, -3, -2, -1, $-2+\sqrt{2}$ sarà studiata in seguito.

Per $x\in\mathscr{D}(f)\setminus\left\{-2-\sqrt{2},-3,-2,-1,-2+\sqrt{2}\right\}$ si ha
$$f'(x)=\frac{\operatorname{sgn}(x^2+4x+3)(2x+4)}{\sqrt{1-|x^2+4x+3|^2}}.$$
Poiché
$$\begin{aligned}1-|x^2+4x+3|^2&=\big(1-(x^2+4x+3)\big)\big(1+(x^2+4x+3)\big)=\\&=(-x^2-4x-2)(x^2+4x+4)=(-x^2-4x-2)(x+2)^2\end{aligned}$$
risulta
$$f'(x)=\frac{2\operatorname{sgn}(x^2+4x+3)(x+2)}{|x+2|\sqrt{-x^2-4x-2}}=\frac{2\operatorname{sgn}(x^2+4x+3)\operatorname{sgn}(x+2)}{\sqrt{-x^2-4x-2}}.$$
Il segno di $f'(x)$ coincide con il segno di $\operatorname{sgn}(x^2+4x+3)\operatorname{sgn}(x+2)$, che risulta dal seguente schema:

	$-2-\sqrt{2}$	-3	-2	-1	$-2+\sqrt{2}$
$\operatorname{sgn}(x^2+4x+3)$	$+$	$-\ -\ -\ -$	$-\ -\ -\ -$	$+$	
$\operatorname{sgn}(x+2)$	$-$	$-\ -\ -\ -$	$+\ +\ +\ +$	$+$	
$\operatorname{sgn}(x^2+4x+3)\operatorname{sgn}(x+2)$	$-$	$+\ +\ +\ +$	$-\ -\ -\ -$	$+$	

Pertanto f è crescente in $[-3,-2]$ e in $\left[-1,-2+\sqrt{2}\right]$, è decrescente in $\left[-2-\sqrt{2},-3\right]$ e in $[-2,-1]$. Inoltre $-2-\sqrt{2}$, -2 e $-2+\sqrt{2}$ sono punti di massimo locale per f, -3 e -1 sono punti di minimo locale per f.

Studiamo la derivabilità di f nei punti $-2-\sqrt{2}$, -3, -2, -1, $-2+\sqrt{2}$. Si ha
$$\lim_{x\to-2-\sqrt{2}^+}f'(x)=-\lim_{x\to-2-\sqrt{2}^+}\frac{2}{\sqrt{-x^2-4x-2}}=-\infty,$$
$$\lim_{x\to-3^-}f'(x)=-\lim_{x\to-3^-}\frac{2}{\sqrt{-x^2-4x-2}}=-2,$$
$$\lim_{x\to-3^+}f'(x)=\lim_{x\to-3^+}\frac{2}{\sqrt{-x^2-4x-2}}=2,$$
$$\lim_{x\to-2^-}f'(x)=\lim_{x\to-2^-}\frac{2}{\sqrt{-x^2-4x-2}}=\sqrt{2},$$
$$\lim_{x\to-2^+}f'(x)=-\lim_{x\to-2^+}\frac{2}{\sqrt{-x^2-4x-2}}=-\sqrt{2},$$
$$\lim_{x\to-1^-}f'(x)=-\lim_{x\to-3^-}\frac{2}{\sqrt{-x^2-4x-2}}=-2,$$
$$\lim_{x\to-1^+}f'(x)=\lim_{x\to-3^+}\frac{2}{\sqrt{-x^2-4x-2}}=2,$$

$$\lim_{x\to -2+\sqrt{2}^-} f'(x) = \lim_{x\to -2+\sqrt{2}^-} \frac{2}{\sqrt{-x^2-4x-2}} = +\infty\,.$$

Poiché il limite della derivata (se esiste) coincide con il limite del rapporto incrementale, risulta che f non è derivabile in nessuno dei punti elencati sopra, perché nei due estremi del dominio il limite del rapporto incrementale non è reale, mentre in tutti gli altri punti il limite sinistro del rapporto incrementale è diverso dal limite destro.

Calcoliamo il valore di f negli estremanti locali. Sappiamo che si ha:

$$f\big(-2-\sqrt{2}\big) = f\big(-2+\sqrt{2}\big) = \pi/2\,.$$

Inoltre

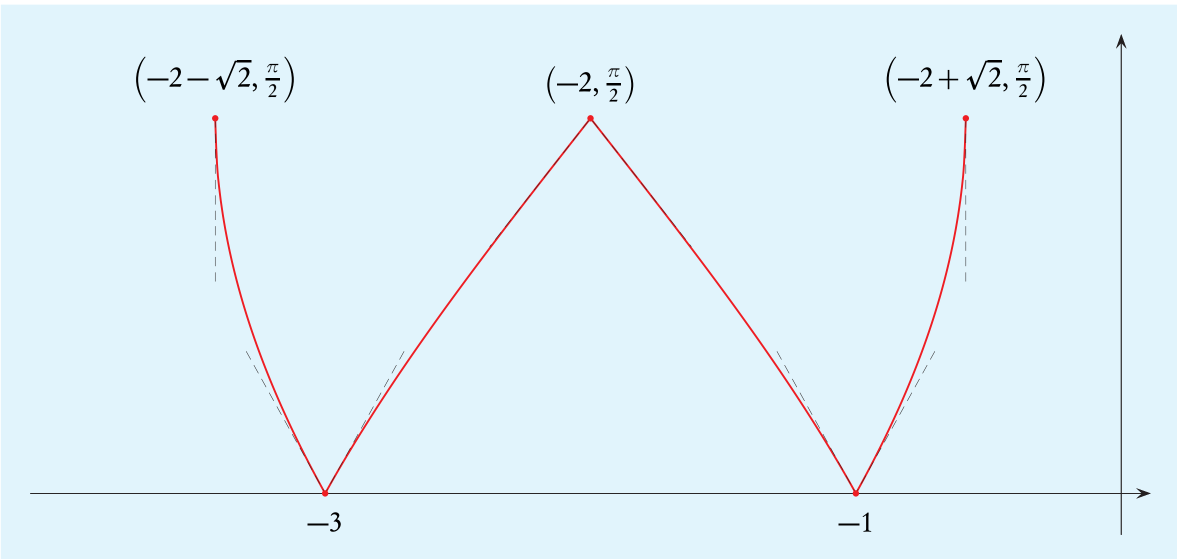
$$\begin{aligned}
f(-3) &= \operatorname{arcsen}\big|(-3)^2+4\cdot(-3)+3\big| = \operatorname{arcsen}|0| = 0\,,\\
f(-2) &= \operatorname{arcsen}\big|(-2)^2+4\cdot(-2)+3\big| = \operatorname{arcsen}|-1| = \frac{\pi}{2}\,,\\
f(-1) &= \operatorname{arcsen}\big|(-1)^2+4\cdot(-1)+3\big| = \operatorname{arcsen}|0| = 0\,.
\end{aligned}$$

Studiamo la convessità di f. La funzione f' è derivabile in ogni punto del suo dominio, perché in tale dominio non si annullano gli argomenti delle funzioni segno e radice che compaiono nell'espressione di f', e si ha

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \operatorname{sgn}(x^2+4x+3)\operatorname{sgn}(x+2)2\Big(-\frac{1}{2}\Big)(-x^2-4x-2)^{-3/2}(-2x-4) =\\
&= \operatorname{sgn}(x^2+4x+3)\,\frac{2(x+2)\operatorname{sgn}(x+2)}{(-x^2-4x-2)^{3/2}} = \operatorname{sgn}(x^2+4x+3)\,\frac{2|x+2|}{(-x^2-4x-2)^{3/2}}\,.
\end{aligned}$$

Sappiamo che $\operatorname{sgn}(x^2+4x+3)>0$ per $x\in\,]-\infty,-1[\,\cup\,]3,+\infty[$, quindi se $x\in\mathscr{D}(f'')$ si ha $f''(x)\geq 0$ se e solo se $x\in\big]-2-\sqrt{2},-3\big[\cup\big]-1,-2+\sqrt{2}\big[$. Pertanto f è convessa in $\big[-2-\sqrt{2},-3\big]$ e in $\big[-1,-2+\sqrt{2}\big]$, è concava in $[-3,-2]$ e in $[-2,-1]$. Infine f non ha punti di flesso, perché i punti di cambio della concavità sono punti di non è derivabilità.

Il grafico di f è quindi, approssimativamente, il seguente.



23) La funzione f è definita per gli x reali diversi da 0, (perché per $x=0$ si annulla il denominatore dell'esponente) e tali che l'argomento della radice $|x+5|-1$ è maggiore o uguale a 0. Si ha $|x+5|-1\geq 0$ se e solo se $|x+5|\geq 1$ e ciò è verificato se $x+5\geq 1$ oppure $x+5\leq -1$, che equivale a $x\geq -4$ o $x\leq -6$. Pertanto

$$\mathscr{D}(f)=\,]-\infty,-6]\cup[-4,0[\,\cup\,]0,+\infty[\,.$$

Il grafico di f non interseca l'asse delle ordinate perché $0\notin\mathscr{D}(f)$. Si ha $f(x)=0$ se e solo se $\sqrt{|x+5|-1}=0$, cioè $|x+5|-1=0$ che è verificato se $x=-6$ o $x=-4$.

Poiché è prodotto di funzioni a valori non negativi, f ha sempre valori non negativi.

Studiamo il comportamento di f negli estremi degli intervalli che costituiscono il suo dominio.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty,\\
&\quad f(-6)=\sqrt{|-6+5|-1}\,e^{-1/6}=0,\\
&\quad f(-4)=\sqrt{|-4+5|-1}\,e^{-1/4}=0,\\
&\lim_{x\to 0^-} f(x)=0,\\
&\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty,\\
&\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.
\end{aligned}$$

Pertanto la retta di equazione $x=0$ è asintoto orizzontale.

La funzione diverge per $x\to\pm\infty$, ma è semplice provare che $f(x)\sim\sqrt{|x|}$, pertanto non vi sono asintoti obliqui.

La funzione f è prodotto di composizioni di funzioni continue, quindi è continua.

La funzione è derivabile in x se x non annulla l'argomento del valore assoluto e non annulla l'argomento della radice. Quindi deve essere $x+5\neq 0$ e $|x+5|-1\neq 0$. Se $x\in\mathscr{D}(f)$, allora si ha $x\neq -5$ e, come già visto, $|x+5|-1$ si annulla per $x=-6$ e per $x=-4$. Pertanto f è derivabile in $]-\infty,-6[\,\cup\,]-4,0[\,\cup\,]0,+\infty[$, mentre la derivabilità in -6 e in -4 verrà studiata in seguito.

Si ha

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\frac{1}{2\sqrt{|x+5|-1}}\operatorname{sgn}(x+5)\,e^{1/x}+\sqrt{|x+5|-1}\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{1/x}=\\
&=\frac{x^2\operatorname{sgn}(x+5)-2\big((x+5)\operatorname{sgn}(x+5)-1\big)}{2x^2\sqrt{|x+5|-1}}\,e^{1/x}=\frac{(x^2-2x-10)\operatorname{sgn}(x+5)+2}{2x^2\sqrt{|x+5|-1}}\,e^{1/x}.
\end{aligned}$$

Studiamo le derivabilità in -6 e in -4. Si ha

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-6^-} f'(x)=\lim_{x\to-6^-}\frac{-x^2+2x+12}{2x^2\sqrt{-x-6}}\,e^{1/x}=-\infty,\\
&\lim_{x\to-4^+} f'(x)=\lim_{x\to-4^+}\frac{x^2-2x-8}{2x^2\sqrt{x+4}}\,e^{1/x}=+\infty.
\end{aligned}$$

Poiché il limite della derivata coincide con il limite del rapporto incrementale, il limite del rapporto incrementale non è reale, pertanto f non è derivabile in nessuno dei due punti.

Poiché $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ è reale, per conoscere il comportamento di f è utile calcolare il limite corrispondente della derivata. Si ha:

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-2x-8}{2x^2\sqrt{x+4}}\, e^{1/x} = -\frac{8}{4} \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{1/x}}{x^2} = 0\,.$$

Per $x \in \mathscr{D}(f')$ si ha

$$f'(x) > 0 \iff (x^2-2x-10)\operatorname{sgn}(x+5)+2>0\,;$$

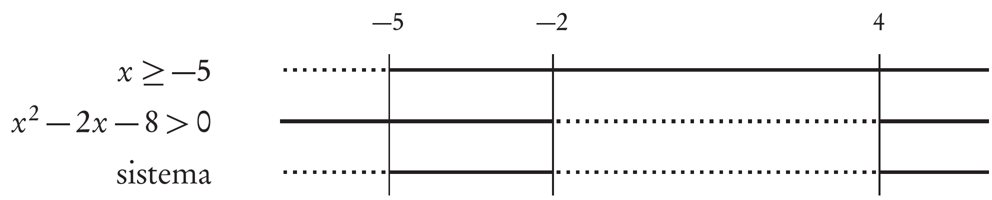
distinguendo a seconda che sia $\operatorname{sgn}(x+5)=1$ o $\operatorname{sgn}(x+5)=-1$, $f'(x)$ è positivo se e solo se x è un elemento del dominio di f' che soddisfa uno dei seguenti sistemi di disequazioni:

$$\begin{cases} x \geq -5\,, \\ x^2-2x-8>0\,; \end{cases}$$
$$\begin{cases} x < -5\,, \\ -x^2+2x+12>0\,. \end{cases}$$

Il trinomio x^2-2x-8 si annulla per

$$x = 1 \pm \sqrt{1+8} = 1 \pm 3 = \begin{cases} -2\,, \\ 4\,; \end{cases}$$

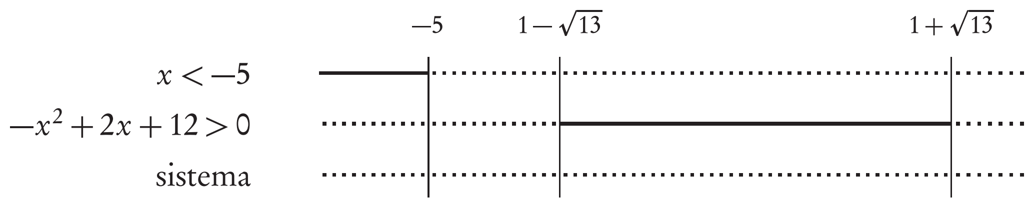
pertanto le soluzioni del primo sistema risultano dal seguente schema



Quindi l'insieme delle soluzioni è $[-5,-2]\cup[4,+\infty[$. Il trinomio $-x^2+2x+12$ si annulla per

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+12}}{-1} = 1 \mp \sqrt{13}\,;$$

pertanto le soluzioni del secondo sistema risultano dal seguente schema



perciò questo sistema non ha soluzioni.

Il segno di f' è quindi rappresentato nel seguente schema:

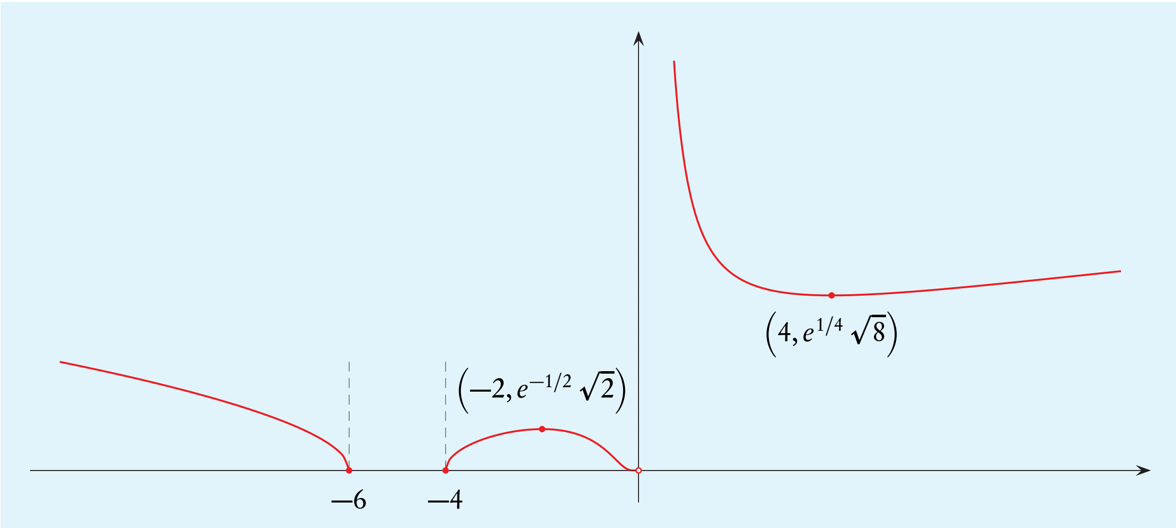
	-6		-4		-2		0		4	
$f'(x)$	$- \; - \; -$ |		| $+ \; + \; +$	|	$- \; - \; -$	|	$- \; - \; - \; - \; - \; - \; -$	|	$+ \; + \; +$	

Pertanto f è crescente in $[-4,-2]$ e in $[4,+\infty[$ ed è decrescente in $]-\infty,-6]$, in $[-2,0[$ e in $]0,4]$. Inoltre -6, -4 e 4 sono punti di minimo locale per f, -2 è un punto di massimo locale.

Sappiamo che $f(-6)=f(-4)=0$, inoltre:

$$f(-2)=\sqrt{|-2+5|-1}\,e^{-1/2}=\sqrt{2}\,e^{-1/2},$$
$$f(4)=\sqrt{|4+5|-1}\,e^{1/4}=\sqrt{8}\,e^{1/4}.$$

Il grafico di f è quindi, approssimativamente, il seguente.



24) Poiché l'argomento della radice è sempre non negativo, si ha $\mathscr{D}(f)=\mathbb{R}$.

Cerchiamo le intersezioni del grafico con gli assi cartesiani.

Si ha $f(0)=\sqrt{|0-0|}+0=0$.

Inoltre $f(x)=0$ se e solo se $\sqrt{|x^2-2x|}=x$, che equivale a $|x^2-2x|=x^2$ purché sia $x\geq 0$. Risulta $x^2-2x\geq 0$ se e solo se $x\in\,]-\infty,0]\cup[2,+\infty[$, pertanto per tali x l'equazione $|x^2-2x|=x^2$ equivale a $x^2-2x=x^2$, che è verificata per $x=0$. Se invece $x\in\,]0,2[$, allora l'equazione $|x^2-2x|=x^2$ equivale a $-x^2+2x=x^2$, cioè $2x^2-2x=0$ che, nell'intervallo considerato, è verificata per $x=1$. Pertanto $f(x)=0$ per $x=0$ e $x=1$.

Studiamo il comportamento di f negli estremi del dominio.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left|1-\frac{2}{x}\right|}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}}-x\right)=$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\left(1-\frac{1}{2}\frac{2}{x}+o(x^{-1})\right)-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x+1+o(1)-x\right)=+\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left|1-\frac{2}{x}\right|}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}}-x\right)=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x\left(1-\frac{1}{2}\frac{2}{x}+o(x^{-1})\right)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-1+o(1)-x\right)=-1.$$

Pertanto la retta di equazione $y = -1$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ e la retta di equazione $y = -2x + 1$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$, come si prova facilmente esaminando i passaggi fatti per calcolare il limite.

La funzione f è somma di composizione di funzioni continue e quindi è continua.

La funzione è derivabile in ogni punto del suo dominio in cui non si annullano né l'argomento del valore assoluto né l'argomento della radice; questi argomenti si annullano per gli x tali che $x^2-2x=0$, cioè per $x=0$ e $x=2$. Quindi f è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$, mentre dobbiamo studiare a parte la derivabilità della funzione in 0 e in 2.

Per $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$ si ha

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{|x^2-2x|}}\operatorname{sgn}(x^2-2x)(2x-2)-1=\frac{(x-1)\operatorname{sgn}(x^2-2x)}{\sqrt{|x^2-2x|}}-1.$$

Per studiare f' osserviamo che si ha $x^2-2x>0$ se e solo se $x>2$ o $x<0$, quindi risulta $\operatorname{sgn}(x^2-2x)=1$ per $x\in\,]-\infty,0[\,\cup\,]2,+\infty[$ e $\operatorname{sgn}(x^2-2x)=-1$ per $x\in\,]0,2[$, pertanto il comportamento della derivata nei punti 0 e 2 è il seguente:

$$\lim_{x\to0^-}f'(x)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{(x-1)}{\sqrt{|x^2-2x|}}-1\right)=-\infty,$$

$$\lim_{x\to0^+}f'(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{-(x-1)}{\sqrt{|x^2-2x|}}-1\right)=+\infty,$$

$$\lim_{x\to2^-}f'(x)=\lim_{x\to2^-}\left(\frac{-(x-1)}{\sqrt{|x^2-2x|}}-1\right)=-\infty,$$

$$\lim_{x\to2^+}f'(x)=\lim_{x\to2^+}\left(\frac{(x-1)}{\sqrt{|x^2-2x|}}-1\right)=+\infty;$$

poiché il limite destro o sinistro della derivata (se esiste), coincide con il corrispondente limite del rapporto incrementale, si deduce che f non è derivabile né in 0 né in 2. Sappiamo che $f(0)=0$, inoltre

$$f(2)=\sqrt{|2^2-2\cdot2|}-2=-2.$$

La disequazione $f'(x)\geq0$ è abbastanza complessa, per risolverla è opportuno determinare anzitutto gli zeri di f'.

Se $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$, si ha $f'(x)=0$ se e solo se

$$\frac{(x-1)\operatorname{sgn}(x^2-2x)}{\sqrt{|x^2-2x|}}=1,$$

quindi deve essere $(x-1)\operatorname{sgn}(x^2-2x)>0$. Il segno di questo prodotto risulta dal seguente schema

		0		1		2	
$x-1$	$-\;-\;-\;-\;-$		$-\;-$		$+\;+$		$+\;+\;+\;+\;+$
$\operatorname{sgn}(x^2-2x)$	$+\;+\;+\;+\;+$		$-\;-$		$-\;-$		$+\;+\;+\;+\;+$
$(x-1)\operatorname{sgn}(x^2-2x)$	$-\;-\;-\;-\;-$		$+\;+$		$-\;-$		$+\;+\;+\;+\;+$

Quindi, se $f'(x)=0$, allora $x\in\,]0,1[\,\cup\,]2,+\infty[$. Per x in tale insieme si ha $f'(x)=0$ se e solo se

$$\frac{(x-1)^2}{|x^2-2x|}=1,$$

cioè

$$x^2-2x+1=|x^2-2x|.$$

Se $x\in\,]0,1[$ si ha $x^2-2x<0$, quindi l'equazione diventa

$$x^2-2x+1=-x^2+2x,$$

cioè

$$2x^2-4x+1=0,$$

che è verificata per

$$x=\frac{2\pm\sqrt{2^2-2}}{2}=1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Risulta $1-1/\sqrt{2}\in\,]0,1[$ e $1+1/\sqrt{2}\notin\,]0,1[$. Se $x\in\,]2,+\infty[$ si ha $x^2-2x>0$, quindi l'equazione diventa

$$x^2-2x+1=x^2-2x,$$

che non ha soluzione. Perciò $f'(x)=0$ se e solo se $x=1-1/\sqrt{2}$.

Studiamo il segno della derivata. La funzione f' è continua e diversa da 0 in $]-\infty,0[$, quindi, per il teorema di Bolzano, in tale intervallo f si mantiene sempre positiva o sempre negativa. Si ha $\lim_{x\to 0^-}f'(x)=-\infty$, perciò f' è negativa in $]-\infty,0[$. In $]0,2[$ la derivata è continua, si annulla solo in $1-1/\sqrt{2}$, dunque, ancora per il teorema di Bolzano, essa ha segno costante in $\left]0,1-1/\sqrt{2}\right[$ e in $\left]1-1/\sqrt{2},2\right[$. Poiché $\lim_{x\to 0^+}f'(x)=+\infty$ e $\lim_{x\to 2^-}f'(x)=-\infty$, la funzione f' è positiva nel primo intervallo e negativa nel secondo. Infine in $]2,+\infty[$ f' è continua e non si annulla, quindi ha segno costante, poiché $\lim_{x\to 2^+}f'(x)=+\infty$ essa è positiva.

Il segno di f' è quindi rappresentato dal seguente schema:

		0	$1-\frac{1}{\sqrt{2}}$		2	
$f'(x)$	$-\ -\ -\ -\ -$	$\vert$	$+$	$\vert\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$	$\vert$	$+\ +\ +\ +\ +$

Pertanto f è crescente in $\left[0,1-1/\sqrt{2}\right]$ e in $[2,+\infty[$ ed è decrescente in $]-\infty,0]$ e in $\left[1-1/\sqrt{2},2\right]$. Inoltre 0 e 2 sono punti di minimo locale per f e $1-1/\sqrt{2}$ è punto di massimo locale.

Il valore della funzione in 0 e in 2 è già stato calcolato;

$$f\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{\left|\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right|}-1+\frac{1}{\sqrt{2}}=$$

$$=\sqrt{\left|1-2\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}-2+2\frac{1}{\sqrt{2}}\right|}-1+\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{\left|-\frac{1}{2}\right|}-1+\frac{1}{\sqrt{2}}=-1+\sqrt{2}.$$

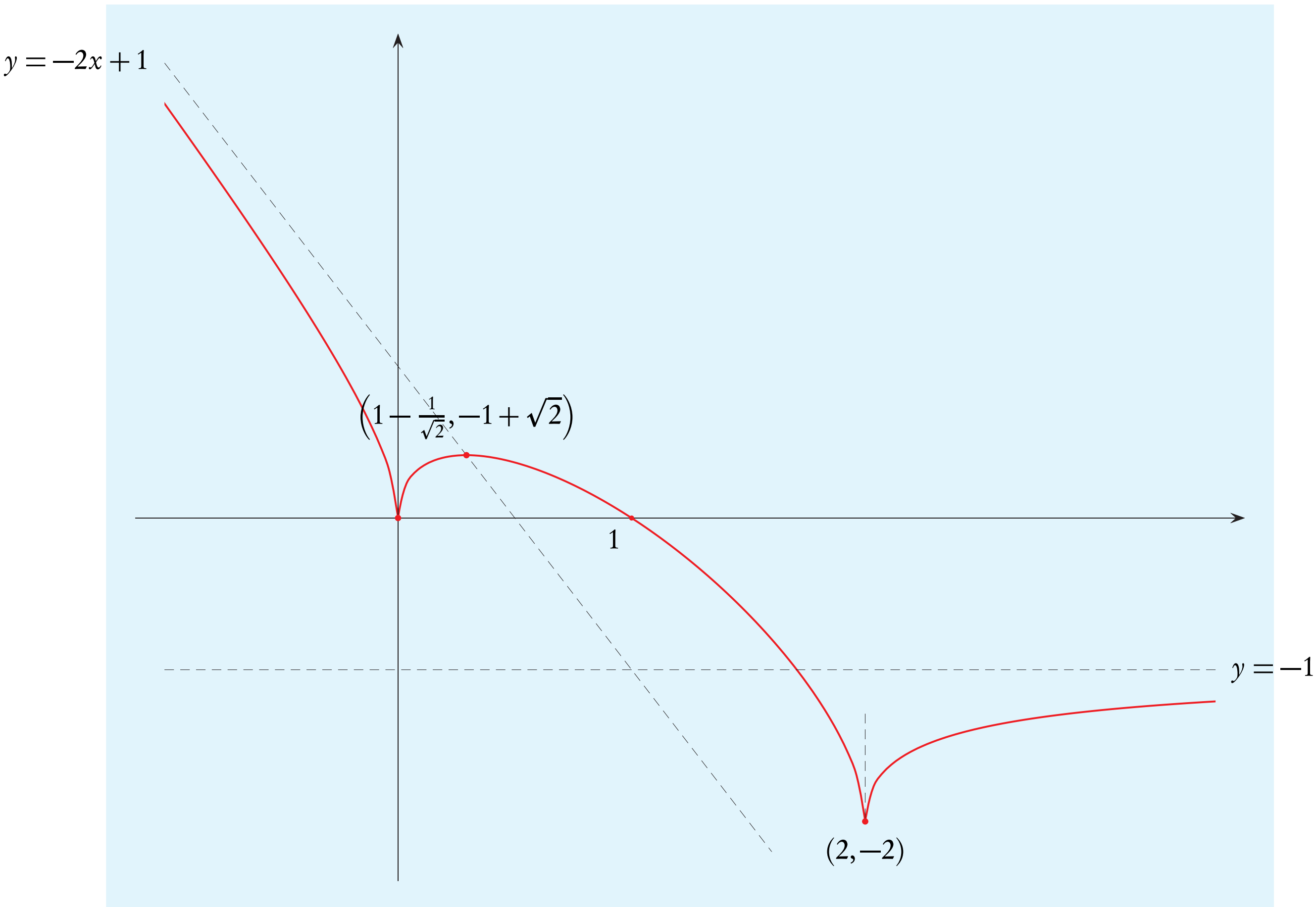
Studiamo la convessità di f mediante la derivata seconda. Se $x \in \mathscr{D}(f')$, allora gli argomenti delle funzioni radice e valore assoluto che compaiono nell'espressione di $f'(x)$ sono diversi da 0, quindi f' è derivabile in ogni punto del suo dominio, pertanto si ha $\mathscr{D}(f'') = \mathscr{D}(f') = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$. Per x in tale insieme, si ha

$$
\begin{aligned}
&f''(x) = \\
&= \operatorname{sgn}(x^2-2x)\left(\sqrt{|x^2-2x|} - (x-1)\frac{(2x-2)\operatorname{sgn}(x^2-2x)}{2\sqrt{|x^2-2x|}}\right)\frac{1}{\left(\sqrt{|x^2-2x|}\right)^2} = \\
&= \frac{\operatorname{sgn}(x^2-2x)\left(\sqrt{|x^2-2x|}\right)^2 - (x-1)\operatorname{sgn}(x^2-2x)(x-1)\operatorname{sgn}(x^2-2x)}{\left(\sqrt{|x^2-2x|}\right)^3} = \\
&= \frac{\operatorname{sgn}(x^2-2x)|x^2-2x| - (x-1)^2}{|x^2-2x|^{3/2}} = \frac{x^2-2x-(x^2-2x+1)}{|x^2-2x|^{3/2}} = \frac{-1}{|x^2-2x|^{3/2}},
\end{aligned}
$$

quindi, $\forall x \in \mathscr{D}(f'')$, si ha $f''(x) < 0$, pertanto f è concava in ogni intervallo il cui interno è contenuto in $\mathscr{D}(f'')$, in particolare f è concava in $]-\infty, 0]$, in $[0, 2]$ e in $[2, +\infty[$.

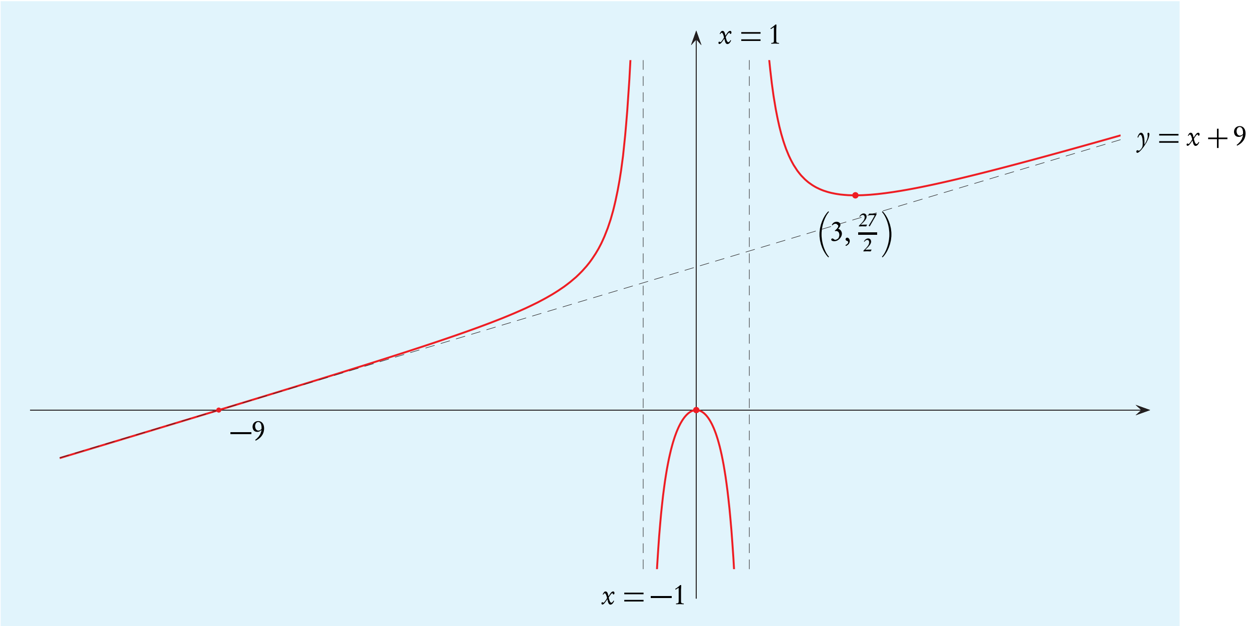
Poiché f'' è sempre negativa, ogni punto in cui f' si annulla è un punto di massimo locale per f; sappiamo che f' si annulla solo in $1 - 1/\sqrt{2}$, è così confermato che tale punto è di massimo locale.

Il grafico di f è quindi, approssimativamente, il seguente.



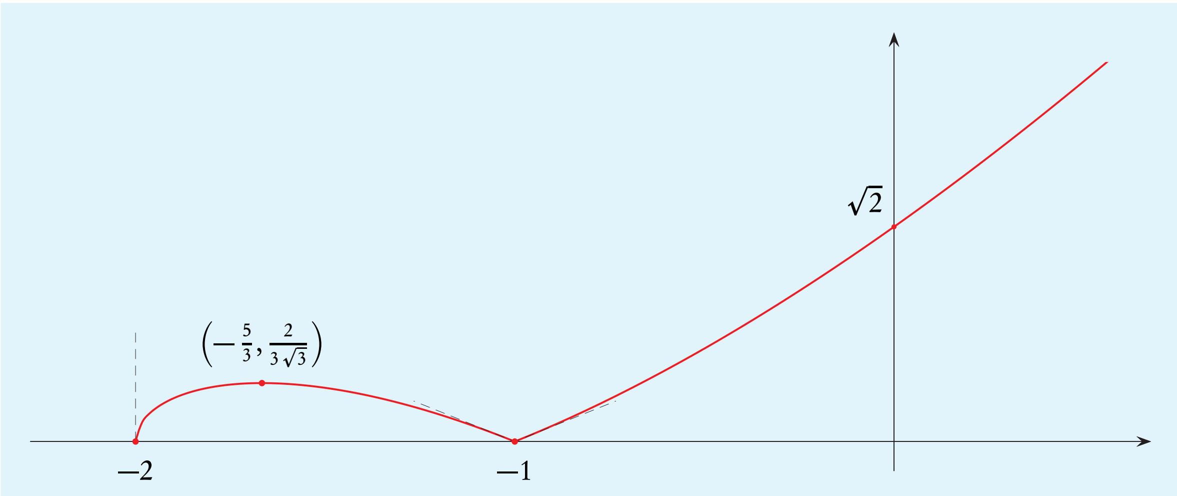
25)

a.



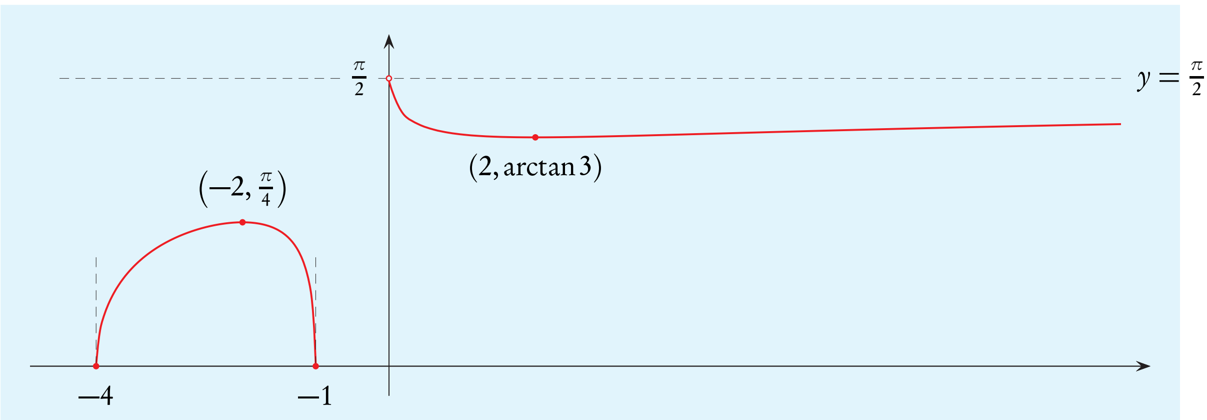
$x = 1$
$y = x + 9$
$\left(3, \frac{27}{2}\right)$
-9
$x = -1$

b.



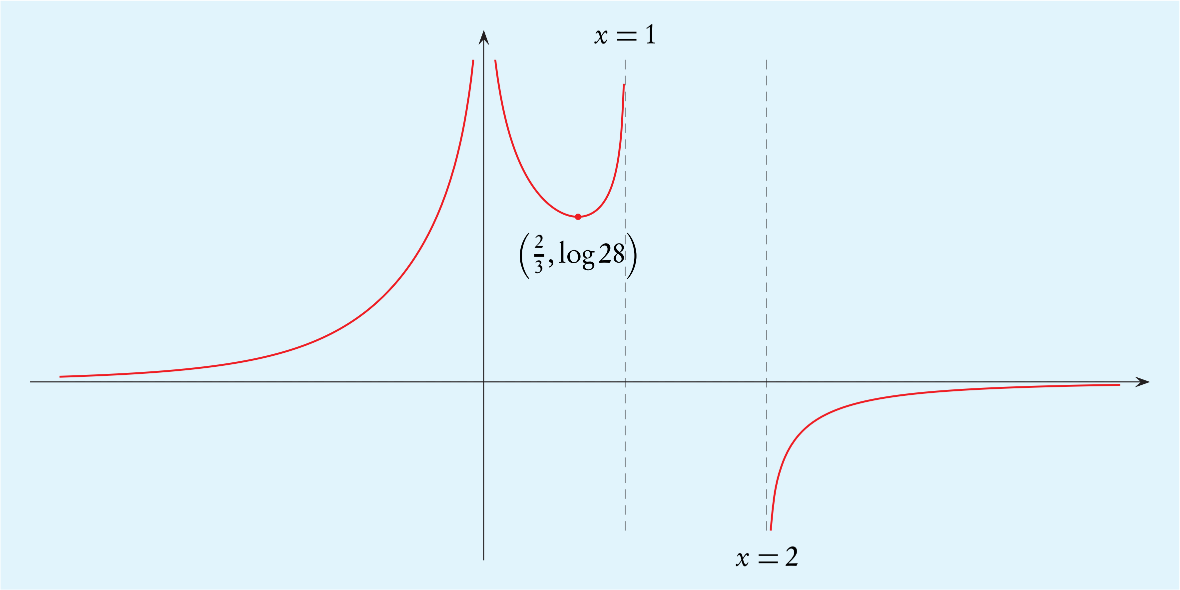
$\sqrt{2}$
$\left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$
-2
-1

c.

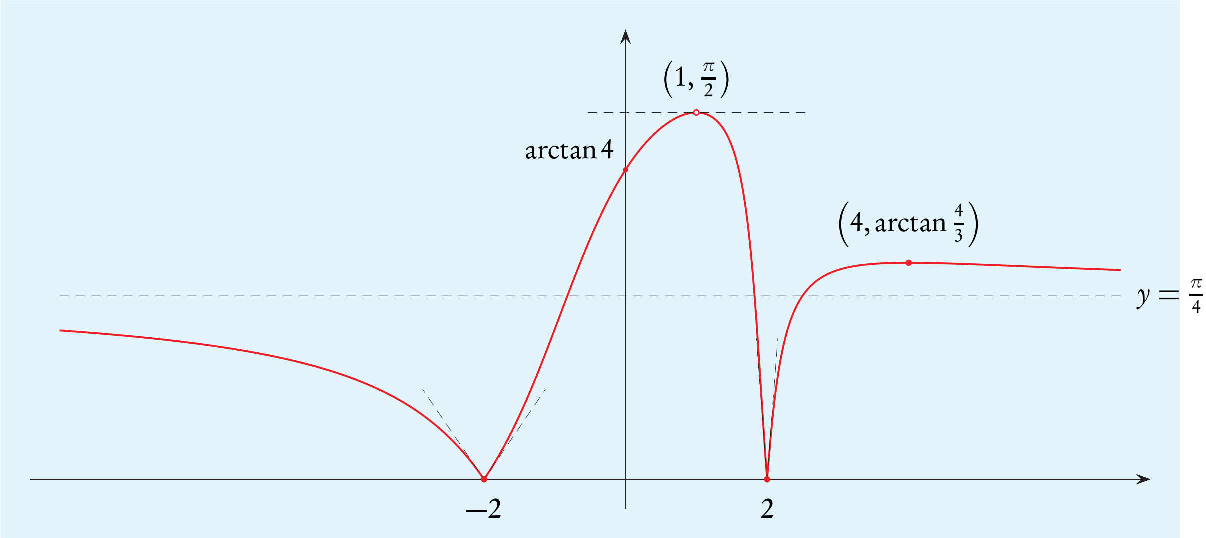


$\frac{\pi}{2}$
$y = \frac{\pi}{2}$
$(2, \arctan 3)$
$\left(-2, \frac{\pi}{4}\right)$
-4
-1

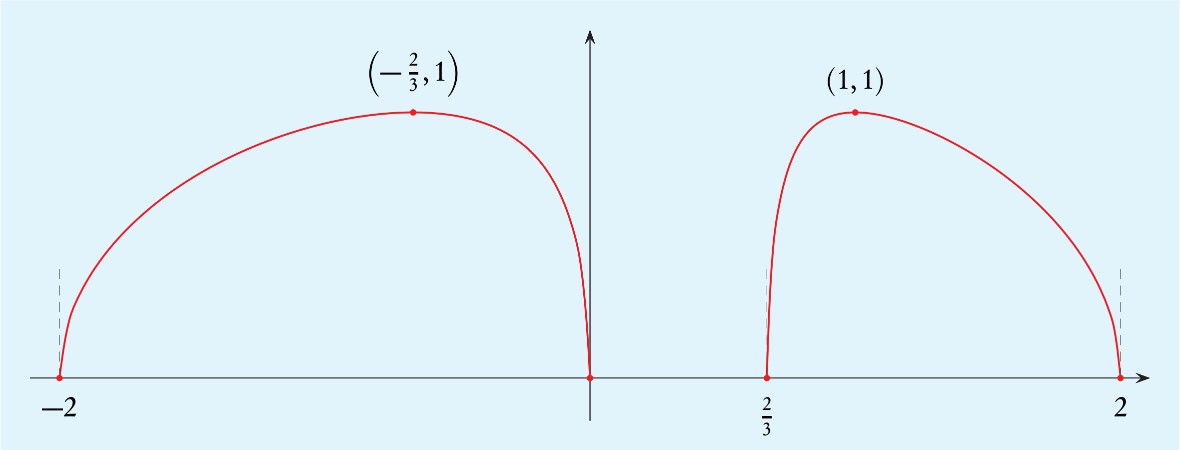
d.


$x = 1$
$\left(\frac{2}{3}, \log 28\right)$
$x = 2$

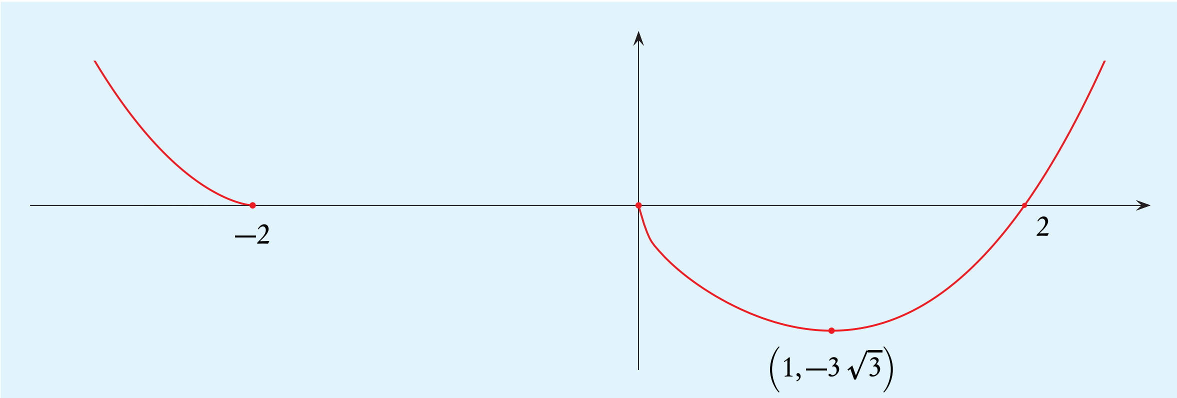
e.


$\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$
arctan 4
$\left(4, \arctan \frac{4}{3}\right)$
$y = \frac{\pi}{4}$
-2
2

f.

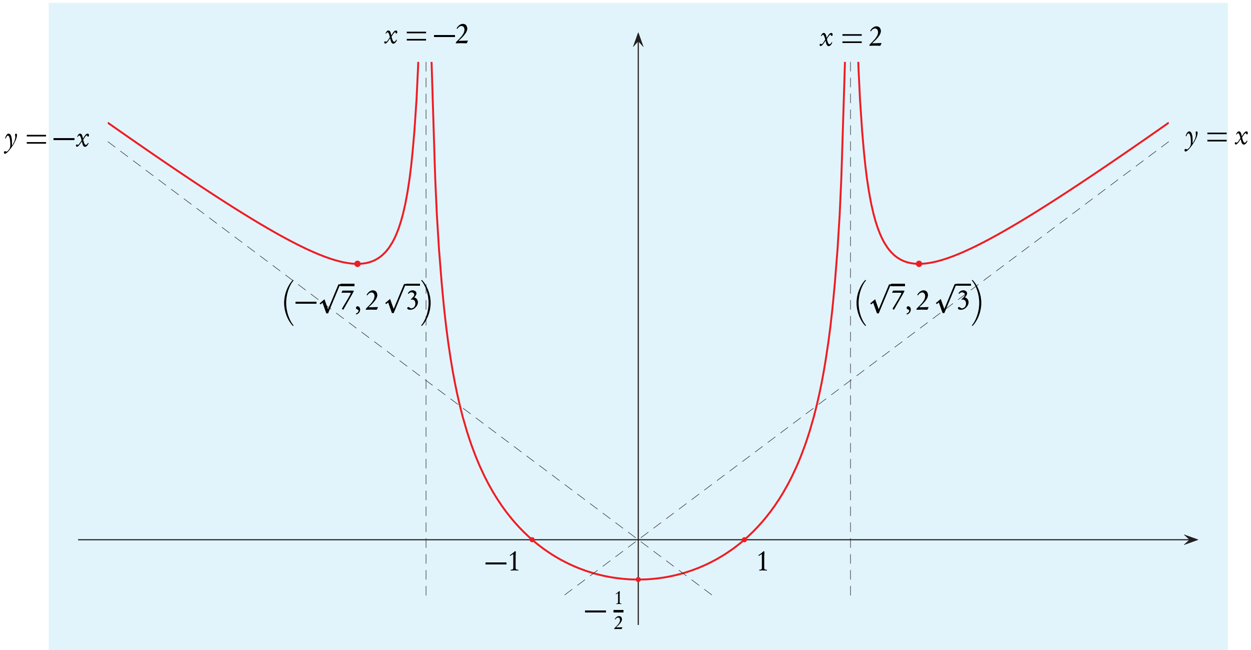

$\left(-\frac{2}{3}, 1\right)$
$(1, 1)$
-2
$\frac{2}{3}$
2

g.



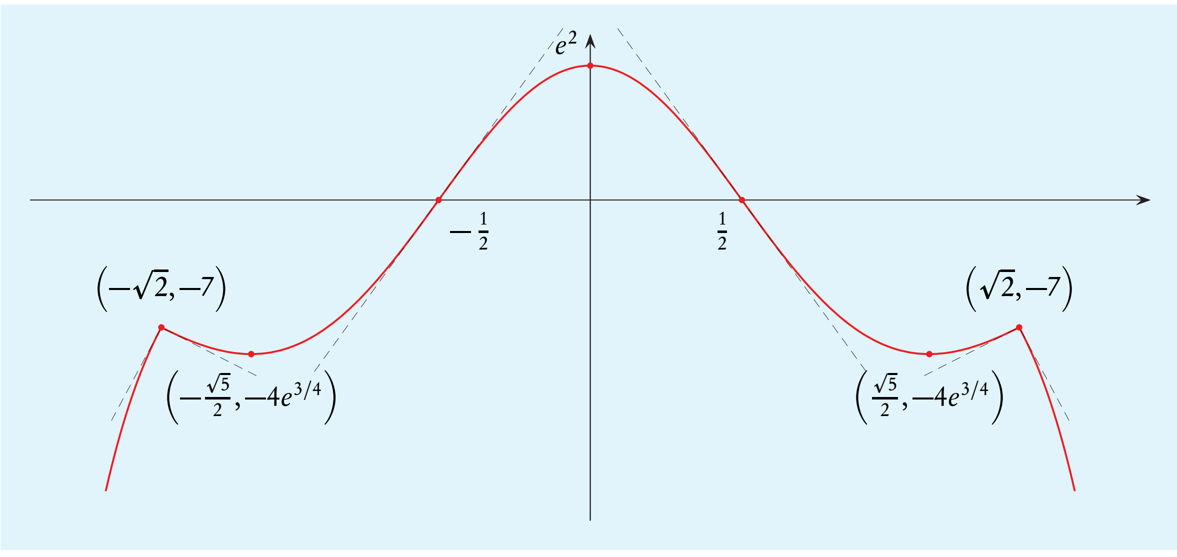
-2
2
$(1, -3\sqrt{3})$

h.



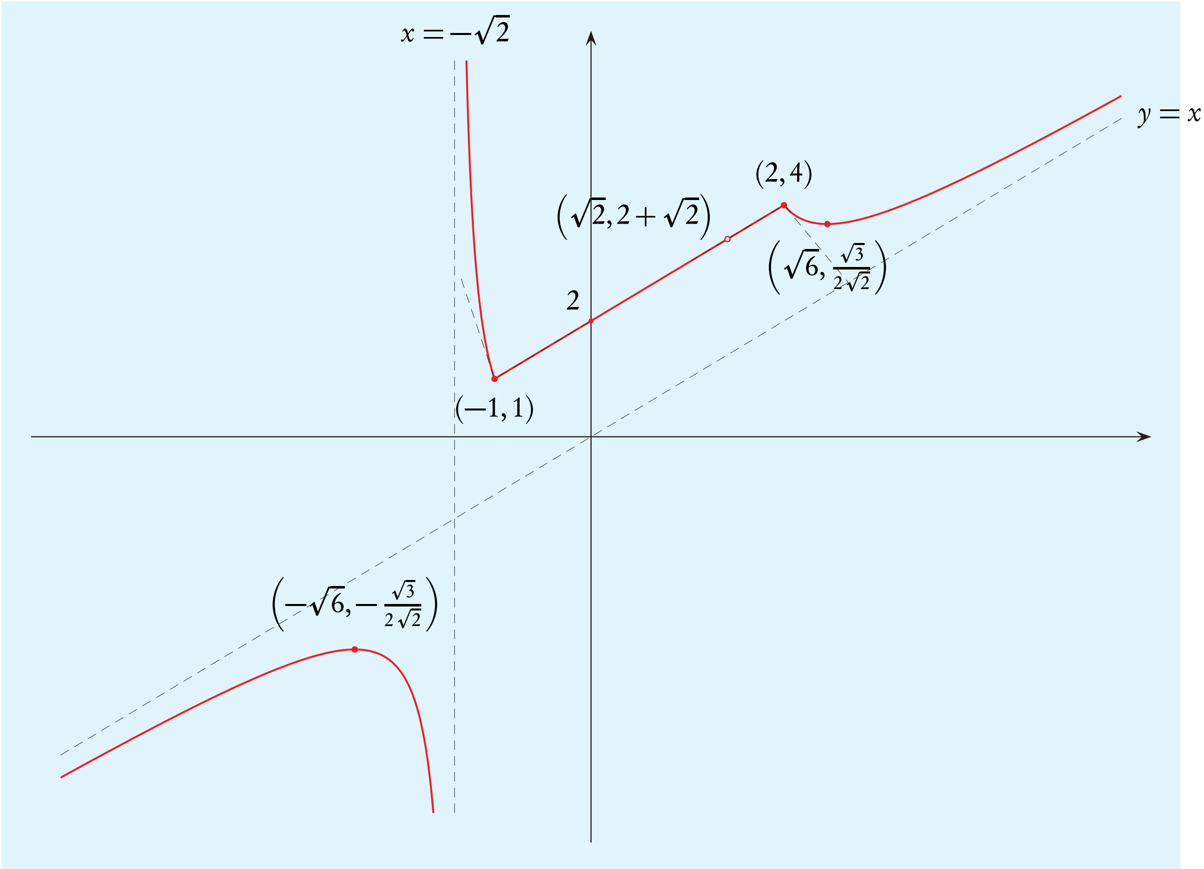
$x = -2$
$x = 2$
$y = -x$
$y = x$
$(-\sqrt{7}, 2\sqrt{3})$
$(\sqrt{7}, 2\sqrt{3})$
-1
1
$-\frac{1}{2}$

i.



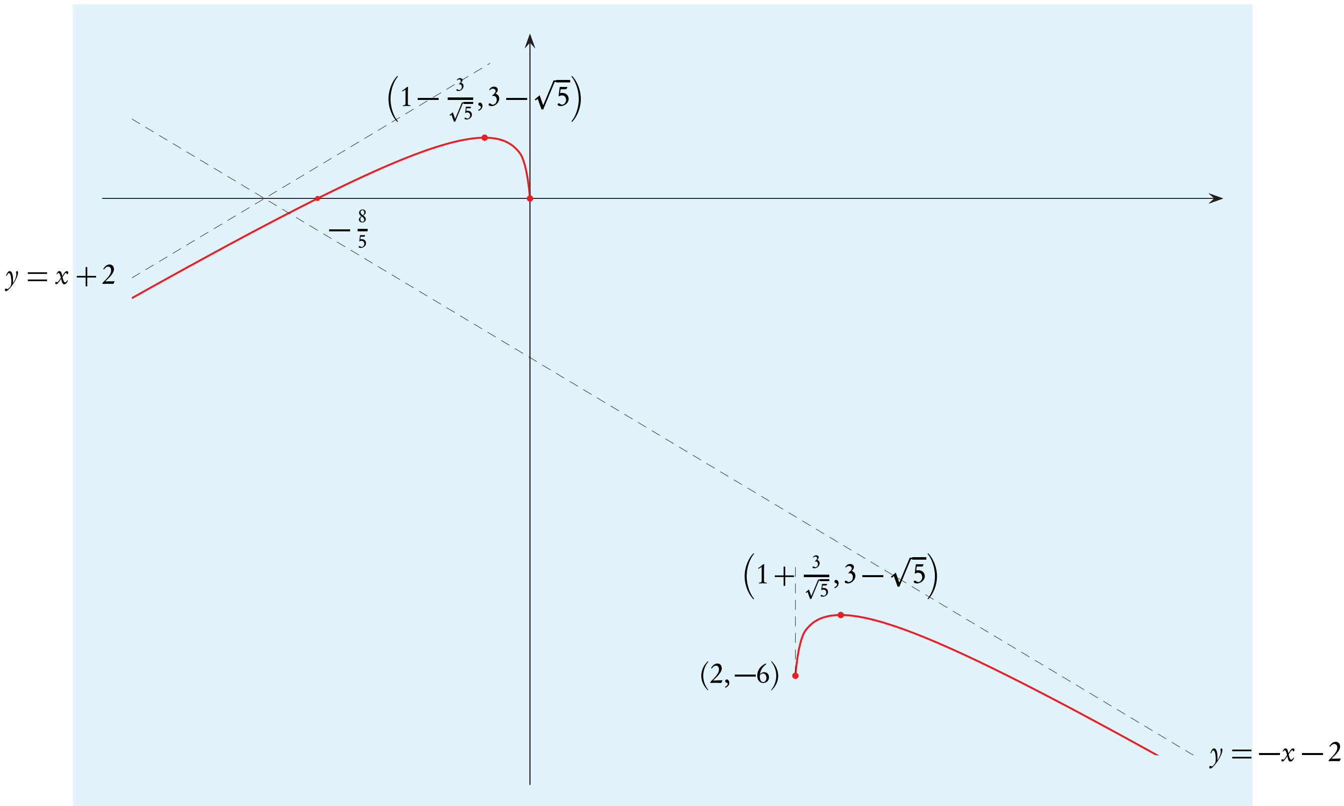
e^2
$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
$(-\sqrt{2}, -7)$
$(\sqrt{2}, -7)$
$(-\frac{\sqrt{5}}{2}, -4e^{3/4})$
$(\frac{\sqrt{5}}{2}, -4e^{3/4})$

j.



$x = -\sqrt{2}$
$y = x$
$(2, 4)$
$\left(\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\right)$
$\left(\sqrt{6}, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)$
2
$(-1, 1)$
$\left(-\sqrt{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)$

k.



$\left(1-\frac{3}{\sqrt{5}}, 3-\sqrt{5}\right)$
$-\frac{8}{5}$
$y = x+2$
$\left(1+\frac{3}{\sqrt{5}}, 3-\sqrt{5}\right)$
$(2, -6)$
$y = -x-2$

26) Poiché la funzione tangente ha dominio $\mathbb{R}\setminus\{\pi/2+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$, affinché x appartenga a $\mathscr{D}(f)$ bisogna che esso appartenga al dominio della funzione tangente e che non si annulli il denominatore $-2\tan x+\operatorname{sen}(2x)$. Quindi deve essere $x\neq\pi/2+k\pi$, qualunque sia $k\in\mathbb{Z}$, e $-2\tan x+\operatorname{sen}(2x)\neq 0$. Poiché

$$-2\tan x+\operatorname{sen}(2x)=-2\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}+2\operatorname{sen}x\cos x=\frac{-2\operatorname{sen}x+2\operatorname{sen}x\cos^2 x}{\cos x}=\frac{-2\operatorname{sen}^3 x}{\cos x},$$

si ha $-2\tan x+\operatorname{sen}(2x)=0$ se e solo se $\operatorname{sen}x=0$, cioè $x=k\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$. Quindi $\mathscr{D}(f)$ è costituito dai reali che non sono né multipli interi di π né somma di $\pi/2$ con multipli interi di π. Si ha quindi

$$\mathscr{D}(f)=\mathbb{R}\setminus\left\{k\,\frac{\pi}{2}\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Dalla periodicità delle funzioni seno, coseno e tangente segue che f è periodica di periodo 2π. Inoltre f è dispari, perché, $\forall x\in\mathscr{D}(f)$, si ha

$$f(-x)=\frac{2\cos^2(-x)-1}{-2\tan(-x)+\operatorname{sen}(-2x)}=\frac{2\cos^2 x-1}{2\tan x-\operatorname{sen}(2x)}=-f(x).$$

Come richiesto studiamo la funzione in $[-\pi,\pi]$. Essa è dispari, quindi possiamo studiarla in $[0,\pi]$ e ricavare il comportamento in tutto $[-\pi,\pi]$ per simmetria. Osserviamo che

$$\mathscr{D}(f)\cap[0,\pi]=\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[.$$

È utile un'espressione di f che contenga solo le funzioni seno e coseno. Come già visto, il denominatore è uguale a $-2\operatorname{sen}^3 x/\cos x$, quindi Si ha:

$$f(x)=\frac{2\cos^2 x-1}{-2\tan x+\operatorname{sen}(2x)}=\frac{\cos x\,(1-2\cos^2 x)}{2\operatorname{sen}^3 x}.$$

Cerchiamo le intersezioni del grafico di f con gli assi cartesiani. Poiché $0\notin\mathscr{D}(f)$ non vi sono intersezioni con l'asse delle ordinate. Poiché per $x\in\mathscr{D}(f)$ si ha $\cos x\neq 0$, $f(x)$ si annulla se e solo se $1-2\cos^2 x=0$, cioè se $\cos x=\pm 1/\sqrt{2}$. Se $x\in[0,\pi]$ ciò avviene per $x=\pi/4$ e $x=3\pi/4$.

Poiché per $x\in\,]0,\pi[$ si ha $\operatorname{sen}x>0$, il segno di $f(x)$ coincide con il segno del numeratore, quindi risulta dal seguente schema

	0 — $\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$ — $\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$ — $\frac{3}{4}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$ — π
$\cos x$	+ + + +	+ + + +	− − − −	− − − −
$1-2\cos^2 x$	− − − −	+ + + +	+ + + +	− − − −
$f(x)$	− − − −	+ + + +	− − − −	+ + + +

Pertanto f è positiva in $]\pi/4,\pi/2[\,\cup\,]3\pi/4,\pi[$ ed è negativa in $]0,\pi/4[\,\cup\,]\pi/2,3\pi/4[$.

Studiamo il comportamento di f nei punti di frontiera del dominio.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x\,(1-2\cos^2 x)}{2\,\mathrm{sen}^3 x} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2\,\mathrm{sen}^3 x} = -\infty\,,$$

$$\lim_{x\to \pi/2^-} f(x) = \lim_{x\to \pi/2^-} \frac{\cos x\,(1-2\cos^2 x)}{2\,\mathrm{sen}^3 x} = \frac{0\cdot(1-2\cdot 0)}{2\cdot 1} = 0\,,$$

$$\lim_{x\to \pi/2^+} f(x) = \lim_{x\to \pi/2^+} \frac{\cos x\,(1-2\cos^2 x)}{2\,\mathrm{sen}^3 x} = \frac{0\cdot(1-2\cdot 0)}{2\cdot 1} = 0\,,$$

$$\lim_{x\to \pi^-} f(x) = \lim_{x\to \pi^-} \frac{\cos x\,(1-2\cos^2 x)}{2\,\mathrm{sen}^3 x} = \lim_{x\to \pi^-} \frac{1}{2\,\mathrm{sen}^3 x} = +\infty\,.$$

Le rette $x=0$ e $x=\pi$ sono quindi asintoti verticali per f.

La funzione f è continua, perché quoziente di somma di funzioni continue.

La funzione f è derivabile e, per $x\in\mathcal{D}(f)$, si ha

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2}\,\frac{(-\mathrm{sen}\,x + 6\cos^2 x\,\mathrm{sen}\,x)\,\mathrm{sen}^3 x - 3\,\mathrm{sen}^2 x\cos x\,(\cos x - 2\cos^3 x)}{(\mathrm{sen}^3 x)^2} = \\
&= \frac{(-\mathrm{sen}\,x + 6\cos^2 x\,\mathrm{sen}\,x)\,\mathrm{sen}\,x - 3\cos x\,(\cos x - 2\cos^3 x)}{2\,\mathrm{sen}^4 x} = \\
&= \frac{-\mathrm{sen}^2 x + 6\cos^2 x\,\mathrm{sen}^2 x - 3\cos^2 x + 6\cos^4 x}{2\,\mathrm{sen}^4 x} = \\
&= \frac{-\mathrm{sen}^2 x + 6(1-\mathrm{sen}^2 x)\,\mathrm{sen}^2 x - 3(1-\mathrm{sen}^2 x) + 6(1-\mathrm{sen}^2 x)^2}{2\,\mathrm{sen}^4 x} = \\
&= \frac{-\mathrm{sen}^2 x + 6\,\mathrm{sen}^2 x - 6\,\mathrm{sen}^4 x - 3 + 3\,\mathrm{sen}^2 x + 6 - 12\,\mathrm{sen}^2 x + 6\,\mathrm{sen}^4 x}{2\,\mathrm{sen}^4 x} = \\
&= \frac{-4\,\mathrm{sen}^2 x + 3}{2\,\mathrm{sen}^4 x}\,.
\end{aligned}$$

Il denominatore è sempre positivo, quindi il segno della derivata dipende esclusivamente dal segno del numeratore; pertanto si ha $f'(x)\ge 0$ se e solo se $\mathrm{sen}^2 x \le 3/4$. Poiché nell'intervallo $[0,\pi]$ la funzione seno è non negativa, tale disequazione equivale a $\mathrm{sen}\,x \le \sqrt{3}/2$; quest'ultima disuguaglianza è verificata se $x\le\pi/3$ oppure se $x\ge 2\pi/3$ (continuiamo a considerare solo $x\in[0,\pi]$). Il segno di f' è quindi rappresentato dal seguente schema:

	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2}{3}\pi$		π
$f'(x)$	$\vert$	$+\;+\;+\;+\;+\;+\;+$	$\vert$	$-\;-\;-$	$\vert$	$-\;-\;-$	$\vert$	$+\;+\;+\;+\;+\;+\;+$	$\vert$

Pertanto f è crescente negli intervalli $]0,\pi/3]$ e $[2\pi/3,\pi[$ e decrescente negli intervalli $[\pi/3,\pi/2[$ e $]\pi/2,2\pi/3]$. Inoltre $\pi/3$ è un punto di massimo locale per f, $2\pi/3$ è un punto di minimo locale per f.

Poiché $f(x)$ ha limite finito per $x\to\pi/2$, per conoscere l'andamento del grafico vicino a tale punto è utile calcolare il limite di $f'(x)$. Si ha:

$$\lim_{x\to\pi/2} f'(x) = \lim_{x\to\pi/2} \frac{-4\,\mathrm{sen}^2 x + 3}{2\,\mathrm{sen}^4 x} = \frac{-4+3}{2} = -\frac{1}{2}\,.$$

Calcoliamo il valore di f negli estremanti locali.

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\cos(\pi/3)\big(1-2\cos^2(\pi/3)\big)}{2\,\mathrm{sen}^3(\pi/3)}=\frac{(1/2)\big(1-2(1/2)^2\big)}{2\big(\sqrt{3}/2\big)^3}=\frac{1}{3\sqrt{3}},$$
$$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{\cos(2\pi/3)\big(1-2\cos^2(2\pi/3)\big)}{2\,\mathrm{sen}^3(2\pi/3)}=\frac{(-1/2)\big(1-2(-1/2)^2\big)}{2\big(\sqrt{3}/2\big)^3}=-\frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

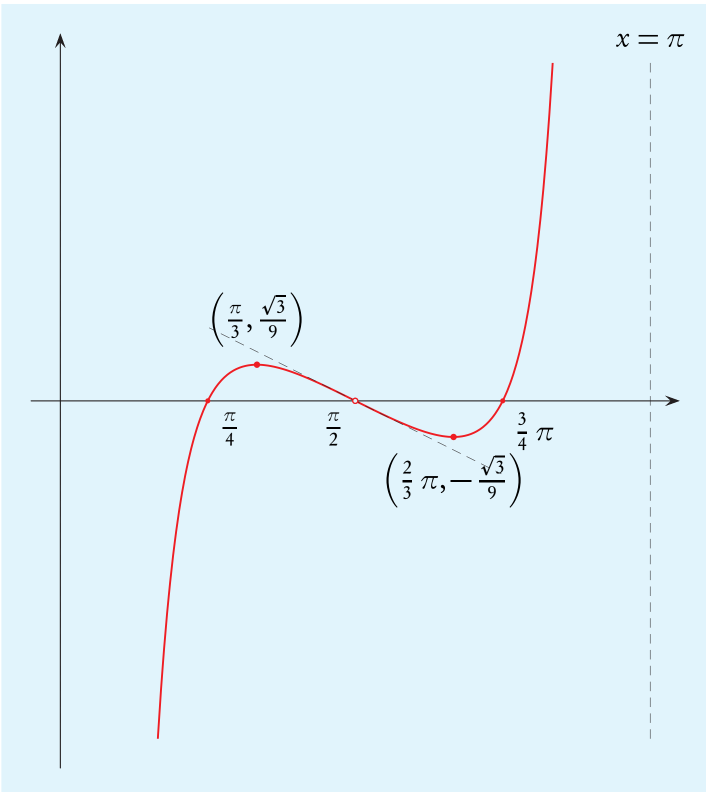
Studiamo la convessità. La funzione f' è derivabile e, per $x\in\mathscr{D}(f)$, si ha

$$\begin{aligned}f''(x)&=\frac{1}{2}\,\frac{-8\,\mathrm{sen}\,x\cos x\,\mathrm{sen}^4 x-4\,\mathrm{sen}^3 x\cos x(-4\,\mathrm{sen}^2 x+3)}{(\mathrm{sen}^4 x)^2}=\\&=\frac{-8\,\mathrm{sen}^2 x\cos x+16\cos x\,\mathrm{sen}^2 x-12\cos x}{2\,\mathrm{sen}^5 x}=\frac{8\,\mathrm{sen}^2 x\cos x-12\cos x}{2\,\mathrm{sen}^5 x}=\\&=\frac{2\cos x(2\,\mathrm{sen}^2 x-3)}{\mathrm{sen}^5 x}.\end{aligned}$$

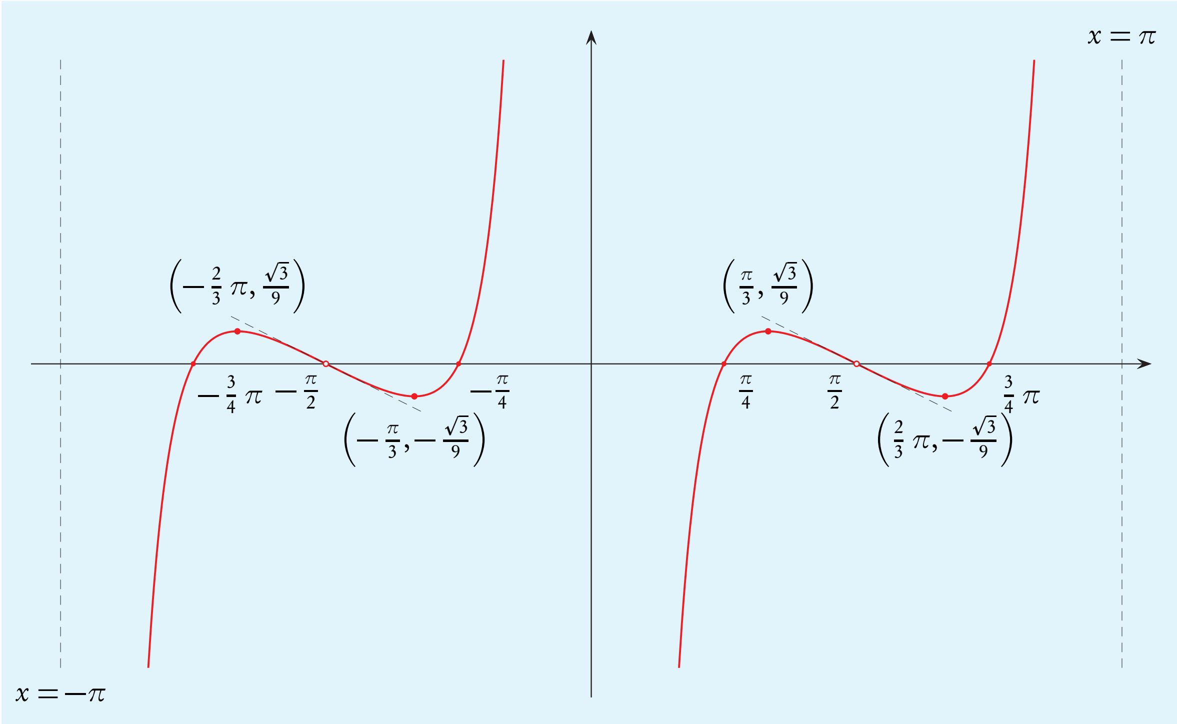
Poiché $\mathrm{sen}\,x$ è compreso tra -1 e 1, si ha sempre $2\,\mathrm{sen}^2 x-3<0$, inoltre in $]0,\pi[$ si ha $\mathrm{sen}\,x>0$, quindi $f''(x)>0$ se e solo se $\cos x<0$, che è vero per $x\in\,]\pi/2,\pi[$. Quindi $f''(x)$ è positivo per $x\in\,]\pi/2,\pi[$ e negativo per $x\in\,]0,\pi/2[$.

Perciò f è convessa in $]\pi/2,\pi[$ ed è concava in $]0,\pi/2[$.

Il grafico di f ristretta a $\mathscr{D}(f)\cap[0,\pi]$ è quindi, approssimativamente, il seguente:



Poiché f è dispari, da questo si può facilmente ottenere il grafico della restrizione di f a $\mathscr{D}(f)\cap[-\pi,0]$: è il simmetrico rispetto all'origine. Perciò il grafico di $f|_{\mathscr{D}(f)\cap[-\pi,\pi]}$ è:



Osserviamo che questo grafico suggerisce che f, oltre a essere periodica di periodo 2π, sia anche periodica di periodo π; verifichiamo se ciò è vero. Anzitutto si ha

$$x \in \mathscr{D}(f) \iff \forall k \in \mathbb{Z},\ x \neq k\,\frac{\pi}{2} \iff \forall k \in \mathbb{Z},\ x+\pi \neq k\pi/2 \iff x+\pi \in \mathscr{D}(f),$$

inoltre se $x \in \mathscr{D}(f)$ allora

$$f(x+\pi) = \frac{2\cos^2(x+\pi)-1}{-2\tan(x+\pi)+\operatorname{sen}\big(2(x+\pi)\big)} = \frac{2(-\cos x)^2-1}{-2\tan x+\operatorname{sen}(2x)} = f(x);$$

quindi f è periodica di periodo π.

27) Poiché $\operatorname{sen} x$ compare al denominatore, il dominio naturale di f è costituito dagli x tali che $\operatorname{sen} x \neq 0$. Se $x \in [-\pi, \pi]$ si ha $\operatorname{sen} x = 0$ per $x=0$, $x=\pi$ e $x=-\pi$. Pertanto

$$\mathscr{D}(f) \cap [-\pi,\pi] = \,]-\pi, 0[\, \cup \,]0, \pi[\,.$$

La funzione non interseca l'asse delle ordinate, perché $0 \notin \mathscr{D}(f)$. Poiché l'esponenziale è sempre positivo e il seno si annulla in punti non appartenenti a $\mathscr{D}(f)$, f non si annulla.

Studiamo il comportamento di f nei punti di frontiera del dominio. Si ha

$$\lim_{x\to-\pi^+} f(x) = \lim_{x\to-\pi^+} \sqrt{|\operatorname{sen} x|}\, \lim_{x\to-\pi^+} \exp\left(\frac{1}{4\operatorname{sen} x}\right) = 0\cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \sqrt{|\operatorname{sen} x|}\, \lim_{x\to0^-} \exp\left(\frac{1}{4\operatorname{sen} x}\right) = 0\cdot 0 = 0.$$

Per calcolare $\lim_{x\to0^+} f(x)$ è utile porre $y = 1/(4\operatorname{sen} x)$; si ha

$$\lim_{x\to0^+} \sqrt{|\operatorname{sen} x|}\, \exp\left(\frac{1}{4\operatorname{sen} x}\right) = \lim_{y\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{4y}}\, e^y = \frac{1}{2}\,\frac{e^y}{\sqrt{y}} = +\infty\,.$$

Analogamente $\lim_{x\to\pi^-} f(x)=+\infty$. Pertanto f ha gli asintoti verticali $x=0$ e $x=\pi$.

La funzione f è continua, perché prodotto di composizioni di funzioni continue.

In ogni punto di $\mathscr{D}(f)$ l'argomento del valore assoluto è non nullo, lo stesso vale per l'argomento della radice, quindi f è derivabile. Si ha, $\forall x\in\mathscr{D}(f)$,

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\frac{\cos x\ \operatorname{sgn}(\operatorname{sen}x)}{2\sqrt{|\operatorname{sen}x|}}\exp\Big(\frac{1}{4\operatorname{sen}x}\Big)+\sqrt{|\operatorname{sen}x|}\exp\Big(\frac{1}{4\operatorname{sen}x}\Big)\frac{1}{4}\Big(-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\Big)=\\
&=\exp\Big(\frac{1}{4\operatorname{sen}x}\Big)\Big(\frac{\cos x\ \operatorname{sgn}(\operatorname{sen}x)}{2\sqrt{|\operatorname{sen}x|}}-\frac{1}{4}\frac{\cos x}{|\operatorname{sen}x|^{3/2}}\Big)=\\
&=\exp\Big(\frac{1}{4\operatorname{sen}x}\Big)\frac{2\cos x|\operatorname{sen}x|\operatorname{sgn}(\operatorname{sen}x)-\cos x}{4|\operatorname{sen}x|^{3/2}}=\exp\Big(\frac{1}{4\operatorname{sen}x}\Big)\frac{\cos x\,(2\operatorname{sen}x-1)}{4|\operatorname{sen}x|^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Si ha $f'(x)\geq 0$ se e solo se $\cos x\,(2\operatorname{sen}x-1)\geq 0$. Considerando $x\in[-\pi,\pi]$, risulta $\operatorname{sen}x=1/2$ per $x=\pi/6$ e per $x=5\pi/6$, da ciò segue che si ha $\operatorname{sen}x>1/2$ per $x\in\,]\pi/6,5\pi/6[$. Il segno di f' è quindi rappresentato dal seguente schema:

	$-\pi$ … $-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$ … 0	0 … $\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$ … $\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$ … $\frac{5}{6}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$ … π
$2\operatorname{sen}x-1$	$-\ -\ -\ -\ -$	$-\ -\ -\ -\ -$	$-$	$+\ +\ +$	$+\ +\ +$	$-$
$\cos x$	$-\ -\ -\ -\ -$	$+\ +\ +\ +\ +$	$+$	$+\ +\ +$	$-\ -\ -$	$-$
$f'(x)$	$+\ +\ +\ +\ +$	$-\ -\ -\ -\ -$	$-$	$+\ +\ +$	$-\ -\ -$	$+$

Pertanto f è crescente in $]-\pi,-\pi/2]$, in $[\pi/6,\pi/2]$ e in $[5\pi/6,\pi[$ ed è decrescente in $[-\pi/2,0[$, in $]0,\pi/6]$ e in $[\pi/2,5\pi/6]$. Inoltre $-\pi/2$ e $\pi/2$ sono punti di massimo locale e $\pi/6$ e $5\pi/6$ sono punti di minimo locale. In tali punti si ha

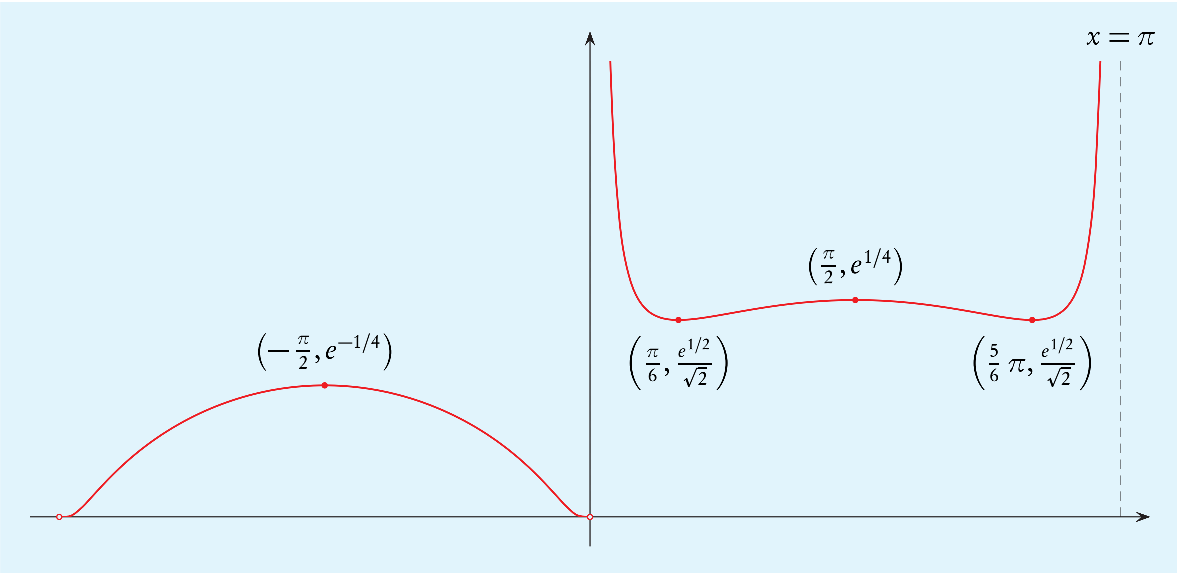
$$\begin{aligned}
f\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)&=\sqrt{\Big|\operatorname{sen}\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)\Big|}\exp\Big(\frac{1}{4\operatorname{sen}(-\pi/2)}\Big)=\sqrt{|-1|}\exp\Big(\frac{1}{-4}\Big)=e^{-1/4},\\
f\Big(\frac{\pi}{6}\Big)&=\sqrt{\Big|\operatorname{sen}\Big(\frac{\pi}{6}\Big)\Big|}\exp\Big(\frac{1}{4\operatorname{sen}(\pi/6)}\Big)=\sqrt{\Big|\frac{1}{2}\Big|}\exp\Big(\frac{1}{2}\Big)=\frac{e^{1/2}}{\sqrt{2}},\\
f\Big(\frac{\pi}{2}\Big)&=\sqrt{\Big|\operatorname{sen}\Big(\frac{\pi}{2}\Big)\Big|}\exp\Big(\frac{1}{4\operatorname{sen}(\pi/2)}\Big)=\sqrt{|1|}\exp\Big(\frac{1}{4}\Big)=e^{1/4},\\
f\Big(\frac{5}{6}\pi\Big)&=\sqrt{\Big|\operatorname{sen}\Big(\frac{5}{6}\pi\Big)\Big|}\exp\Big(\frac{1}{4\operatorname{sen}(5\pi/6)}\Big)=\sqrt{\Big|\frac{1}{2}\Big|}\exp\Big(\frac{1}{2}\Big)=\frac{e^{1/2}}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Poiché $f(x)$ ha limite reale per $x\to-\pi^+$ e per $x\to 0^-$, è utile calcolare i corrispondenti limiti della derivata. Ponendo $y=1/(4\operatorname{sen}x)$, si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} f'(x)&=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{4|\operatorname{sen}x|^{3/2}}\exp\Big(\frac{1}{4\operatorname{sen}x}\Big)\big(\cos x\,(2\operatorname{sen}x-1)\big)=\\
&=-\lim_{y\to-\infty}\frac{1}{4|1/4y|^{3/2}}e^{y}=-\lim_{y\to-\infty}2|y|^{3/2}e^{y}=0.
\end{aligned}$$

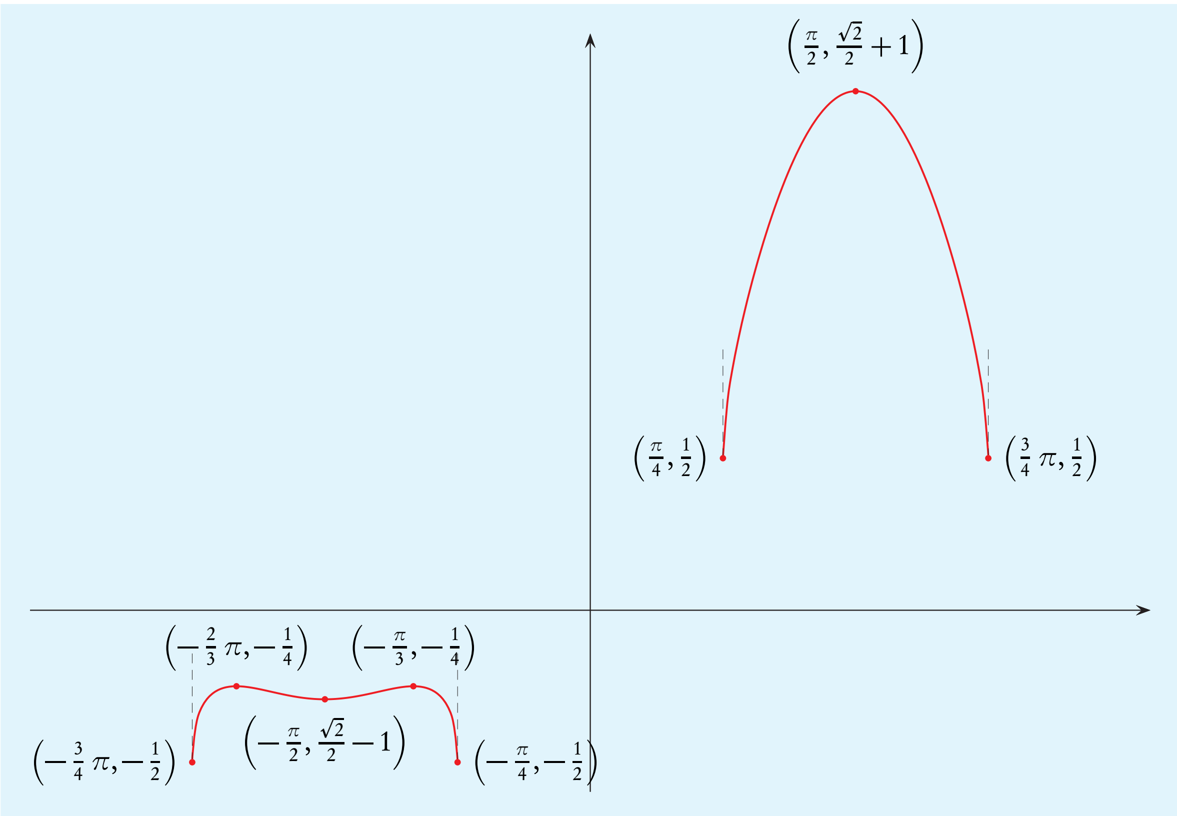
$$\lim_{x\to-\pi^+} f'(x) = \lim_{x\to-\pi^+} \frac{1}{4|\operatorname{sen} x|^{3/2}} \exp\left(\frac{1}{4\operatorname{sen} x}\right)\left(\cos x\,(2\operatorname{sen} x - 1)\right) =$$
$$= \lim_{y\to-\infty} \frac{1}{4|1/4y|^{3/2}}\, e^y = \lim_{y\to-\infty} 2|y|^{3/2} e^y = 0\,.$$

Pertanto il grafico di f è, approssimativamente, il seguente.

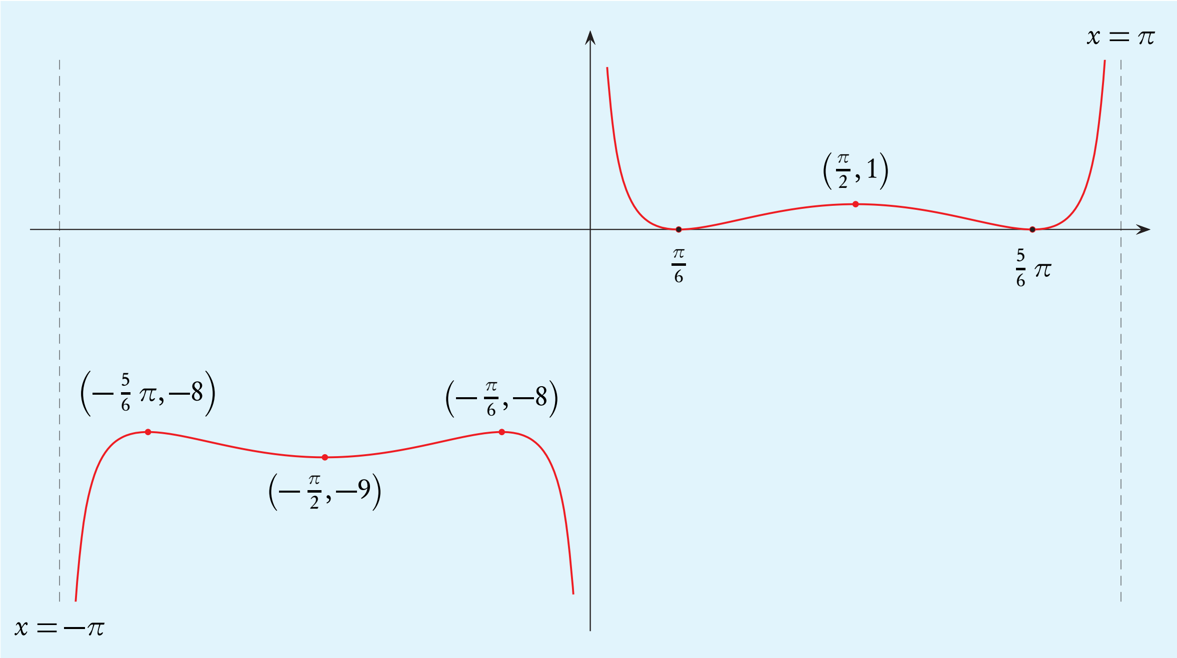


28)

a.

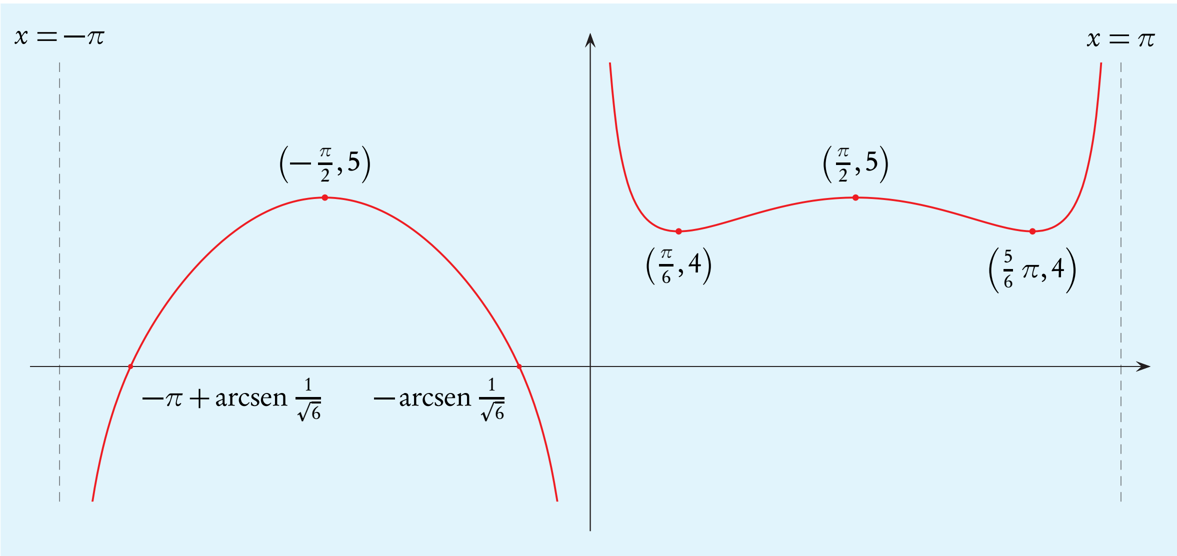


b.



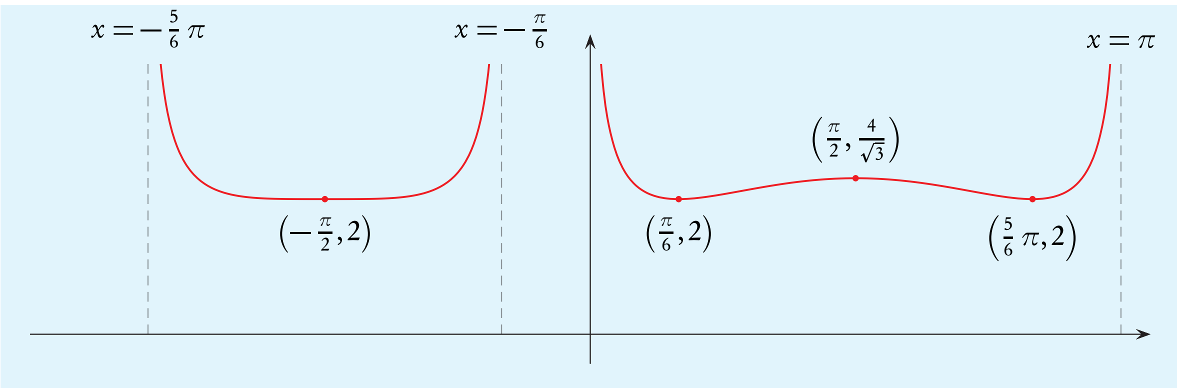
$x = \pi$
$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$
$\frac{\pi}{6}$
$\frac{5}{6}\pi$
$\left(-\frac{5}{6}\pi, -8\right)$
$\left(-\frac{\pi}{6}, -8\right)$
$\left(-\frac{\pi}{2}, -9\right)$
$x = -\pi$

c.



$x = -\pi$
$x = \pi$
$\left(-\frac{\pi}{2}, 5\right)$
$\left(\frac{\pi}{2}, 5\right)$
$\left(\frac{\pi}{6}, 4\right)$
$\left(\frac{5}{6}\pi, 4\right)$
$-\pi + \operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{6}}$
$-\operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{6}}$

d.



$x = -\frac{5}{6}\pi$
$x = -\frac{\pi}{6}$
$x = \pi$
$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{4}{\sqrt{3}}\right)$
$\left(-\frac{\pi}{2}, 2\right)$
$\left(\frac{\pi}{6}, 2\right)$
$\left(\frac{5}{6}\pi, 2\right)$

29) Il dominio naturale di f è costituito dagli $x \in \mathbb{R}$ tali che $x^4 - 1 \geq 0$, quindi

$$\mathscr{D}(f) =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[.$$

Poiché nella formula che definisce f la variabile x è sempre elevata alla quarta, possiamo semplificare i calcoli considerando una nuova funzione rispetto alla variabile $y = x^4$. Al variare di x in $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, la nuova variabile y varia in $[1, +\infty[$, quindi determiniamo l'immagine della funzione

$$g : [1, +\infty[\to \mathbb{R}, \qquad g(y) = y^2 - \frac{10}{3}(y-1)^{3/2} .$$

Poiché il dominio è un intervallo e g è continua, l'immagine è un intervallo. Per determinarlo cerchiamo gli estremi di g.

Si ha

$$\lim_{y\to+\infty} g(y) = \lim_{y\to+\infty} y^2\left(1 - \frac{10}{3}\frac{(y-1)^{3/2}}{y^2}\right) = \lim_{y\to+\infty} y^2(1 + o(1)) = +\infty ;$$

pertanto $\sup g = +\infty$.

Dobbiamo determinare $\inf g$ e stabilire se appartiene all'immagine. Fissiamo $M \in \mathbb{R}$ maggiore di $\inf g$; poiché $\lim_{y\to+\infty} g(y) = +\infty$, esiste $K > 1$ tale che, se $y \in]K, +\infty[$, allora $g(y) > M$. Si ha

$$\inf g = \min\{\inf g\big([1, K]\big), \inf g\big(]K, +\infty[\big)\},$$

ma $\inf g\big(]K, +\infty[\big) \geq M > \inf g$, quindi $\inf g = \inf g\big([1, K]\big)$. Poiché g è continua e $[1, K]$ è compatto, per il teorema di Weierstrass g ha minimo in tale insieme; tale minimo è evidentemente il minimo di g in tutto il dominio.

Il minimo (assoluto) di g è anche minimo locale e ovviamente è il più piccolo tra tutti i minimi locali. Per determinarlo è quindi sufficiente individuare tutti i punti di minimo locale e determinare il più piccolo tra i valori assunti da g in tali punti. Il teorema di Fermat consente di individuare i possibili estremanti locali, è necessario un ulteriore studio per distinguere tra di essi i punti di minimo, ma tale studio non è necessario per trovare il minimo assoluto della funzione. Infatti se B è un sottoinsieme di $Im(g)$ a cui appartiene $\min g$, allora $\min B = \min g$, quindi ci basta conoscere un sottoinsieme di $Im(g)$ contenente $\min g$. Un sottoinsieme che ha tale proprietà è l'insieme dei minimi locali, ma anche l'insieme degli estremi locali; per il teorema di Fermat tale insieme è incluso nell'insieme costituito dai valori che g assume nei punti che non sono interni a $\mathscr{D}(g)$, nei punti di non derivabilità e nei punti in cui g' si annulla.

La funzione g è derivabile, quindi se

$$B = \{g(1)\} \cup \{g(y) \in]1, +\infty[\mid g'(y) = 0\},$$

allora, per i ragionamenti precedenti, $\min g = \min B$.

Determiniamo gli zeri di g'. Per $y \in [1, +\infty[$ si ha

$$g'(y) = 2y - 5(y-1)^{1/2} .$$

Si ha $g'(y) = 0$ se e solo se $2y = 5(y-1)^{1/2}$. Poiché entrambi i membri sono non negativi, questa equazione equivale a $4y^2 = 25(y-1)$, cioè $4y^2 - 25y + 25 = 0$. Il trinomio

$4y^2-25y+25$ si annulla per

$$y=\frac{25\pm\sqrt{25^2-4\cdot4\cdot25}}{2\cdot4}=\frac{25\pm\sqrt{225}}{8}=\frac{25\pm15}{8}=\begin{cases}\dfrac{5}{4}\,,\\ 5\,.\end{cases}$$

Pertanto possono essere estremanti locali per g solo i punti 1, $5/4$ e 5. Si ha

$$\begin{aligned}&g(1)=1\,,\\ &g\left(\frac{5}{4}\right)=\left(\frac{5}{4}\right)^2-\frac{10}{3}\left(\frac{5}{4}-1\right)^{3/2}=\frac{25}{16}-\frac{10}{3}\frac{1}{8}=\frac{55}{48}\,,\\ &g(5)=5^2-\frac{10}{3}(5-1)^{3/2}=25-\frac{10}{3}8=-\frac{5}{3}\,.\end{aligned}$$

Quindi

$$\min g=\min\left\{g(1),g\left(\frac{5}{4}\right),g(5)\right\}=\min\left\{1,\frac{55}{48},-\frac{5}{3}\right\}=-\frac{5}{3}\,.$$

Pertanto

$$Im(g)=\left[-\frac{5}{3},+\infty\right[\,.$$

30) Il dominio naturale di f è costituito dagli x reali diversi da 0 per cui è non negativo l'argomento di ciascuna delle due radici, cioè $x\in\mathbb{R}^*$ deve verificare

$$\begin{cases}x^2+5x+4\geq0\,,\\ x^2-10x+16\geq0\,.\end{cases}$$

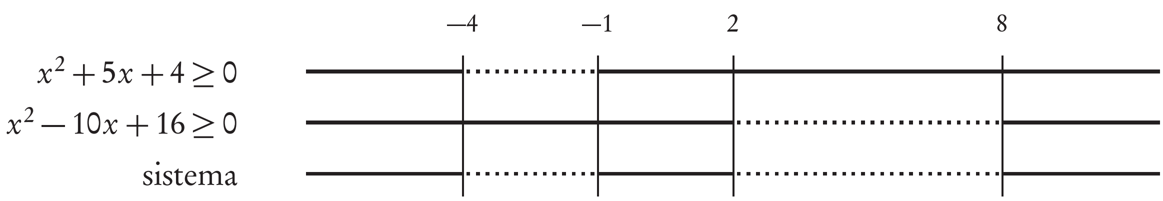
Il trinomio x^2+5x+4 si annulla per

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot4}}{2}=\frac{-5\pm3}{2}=\begin{cases}-4\,,\\ -1\,.\end{cases}$$

Il trinomio $x^2-10x+16$ si annulla per

$$x=5\pm\sqrt{5^2-16}=5\pm3=\begin{cases}2\,,\\ 8\,.\end{cases}$$

Pertanto le soluzioni del sistema risultano dal seguente schema.



Quindi

$$\mathscr{D}(f)=\,]-\infty,-4]\cup[-1,0[\,\cup\,]0,2]\cup[8,+\infty[\,.$$

Pertanto

$$Im(f)=f\big(]-\infty,-4]\big)\cup f\big([-1,0[\big)\cup f\big(]0,2]\big)\cup f\big([8,+\infty[\big).$$

Poiché f è continua, per il teorema dei valori intermedi, ognuno degli insiemi di cui si fa l'unione è un intervallo. Per determinarli occorre trovarne estremo inferiore ed estremo superiore, e stabilire se essi appartengono all'immagine; a tal fine studiamo la monotonia di f mediante il segno della derivata. Se $x \in \mathbb{R}^*$ non annulla l'argomento di una delle due radici, allora f è derivabile in x. Quindi per $x \in]-\infty,-4[\cup]-1,0[\cup]0,2[\cup]8,+\infty[$ si ha

$$\begin{aligned}
&f'(x)=\\
&=\Big(\Big(\frac{2x+5}{\sqrt{x^2+5x+4}}-\frac{x-5}{\sqrt{x^2-10x+16}}\Big)x-\big(2\sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2-10x+16}\big)\Big)\frac{1}{x^2}=\\
&=\Big(x(2x+5)\sqrt{x^2-10x+16}-x(x-5)\sqrt{x^2+5x+4}-\\
&\qquad -2(x^2+5x+4)\sqrt{x^2-10x+16}+(x^2-10x+16)\sqrt{x^2+5x+4}\Big)\times\\
&\qquad\times\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+5x+4}\sqrt{x^2-10x+16}}=\\
&=\frac{(-5x-8)\sqrt{x^2-10x+16}+(-5x+16)\sqrt{x^2+5x+4}}{x^2\sqrt{x^2+5x+4}\sqrt{x^2-10x+32}}.
\end{aligned}$$

Il denominatore è sempre positivo, quindi il segno di f coincide con il segno del numeratore.

Se $-5x-8>0$ e $-5x+16>0$, allora tale numeratore è positivo. La disequazione $-5x-8>0$ è verificata per $x<-8/5$, mentre $-5x+16>0$ è verificata per $x<16/5$, pertanto per $x\in]-\infty,-4[$ si ha $f'(x)>0$; quindi f è strettamente crescente in $]-\infty,-4]$.

Se $x>16/5$ allora $-5x-8<0$ e $-5x+16<0$, quindi il numeratore è negativo. Pertanto per $x\in]8,+\infty[$ si ha $f'(x)<0$; quindi f è strettamente decrescente in $[8,+\infty[$.

Consideriamo infine il caso $-8/5<x<16/5$, cioè, $x\in[-1,0[\cup]0,2]$, perché deve essere anche $x\in\mathscr{D}(f)$. Si ha $-5x-8<0$ e $-5x+16>0$. La disequazione

$$(-5x-8)\sqrt{x^2-10x+16}+(-5x+16)\sqrt{x^2+5x+4}>0$$

equivale a

$$(5x+8)\sqrt{x^2-10x+16}<(-5x+16)\sqrt{x^2+5x+4}.$$

Poiché entrambi i membri sono non negativi, questa equivale a

$$(5x+8)^2(x^2-10x+16)<(-5x+16)^2(x^2+5x+4),$$

cioè

$$\begin{gathered}
(25x^2+80x+64)(x^2-10x+16)<(25x^2-160x+256)(x^2+5x+4),\\
25x^4-250x^3+400x^2+80x^3-800x^2+1280x+64x^2-640x+1024<\\
<25x^4+125x^3+100x^2-160x^3-800x^2-640x+256x^2+1280x+1024,\\
135x^3-108x^2>0.
\end{gathered}$$

Questa disequazione è verificata per $x>108/135=4/5$; quindi, per $x\in]-1,0[\cup]0,4/5[$, si ha $f'(x)<0$, mentre per $x\in]4/5,2[$ si ha $f'(x)>0$. Perciò f è strettamente decrescente in $[-1,0[$ e in $]0,4/5]$ ed è strettamente crescente in $[4/5,2]$.

Poiché f è strettamente crescente in $]-\infty,-4]$, in tale intervallo non ha minimo e ha massimo e si ha

$$f\big(]-\infty,-4]\big)=\Big]\inf f\big(]-\infty,-4]\big),\max f\big(]-\infty,-4]\big)\Big]=\Big]\lim_{x\to-\infty}f(x),f(-4)\Big].$$

Si ha

$$f(-4)=\frac{2\sqrt{16-20+4}-\sqrt{16+40+16}}{-4}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

e per $x\to-\infty$ risulta

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{2|x|\sqrt{1+(5/x)+(4/x^2)}-|x|\sqrt{1-(10/x)+(16/x^2)}}{x}=\\&=\frac{|x|}{x}\Big(\big(2+o(1)\big)-\big(1+o(1)\big)\Big)\to-1\,.\end{aligned}$$

Pertanto

$$f\big(]-\infty,-2]\big)=\Big]-1,\frac{3}{\sqrt{2}}\Big].$$

Poiché f è strettamente decrescente in $[-1,0[$, in tale intervallo non ha minimo e ha massimo e risulta

$$f\big([-1,0[\,\big)=\Big]\inf f\big([-1,0[\big),\max f\big([-1,0[\,\big)\Big]=\Big]\lim_{x\to0^-}f(x),f(-1)\Big].$$

Si ha

$$f(-1)=\frac{\sqrt{1-5+4}-\sqrt{1+10+16}}{-1}=3\sqrt{3}$$

e per $x\to0$ risulta

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{4(x^2+5x+4)-(x^2-10x+16)}{x\big(2\sqrt{x^2+5x+4}+\sqrt{x^2-10x+16}\big)}=\frac{3x^2+30x}{x\big(\sqrt{x^2+5x+4}+\sqrt{x^2-10x+16}\big)}=\\&=\frac{3x+30}{2\sqrt{x^2+5x+4}+\sqrt{x^2-10x+16}}\to\frac{30}{8}=\frac{15}{4}\,.\end{aligned}$$

Pertanto

$$f\big([-1,0[\big)=\Big]\frac{15}{4},3\sqrt{3}\Big].$$

La funzione f non è monotona in $]0,2]$, pertanto per conoscere $f\big(]0,2]\big)$ non è sufficiente studiare il comportamento di f negli estremi dell'intervallo. Sappiamo però che f è strettamente decrescente in $]0,4/5]$ e strettamente crescente in $[4/5,2]$, pertanto

$$f\big(]0,2]\big)=f\Big(\Big]0,\frac{4}{5}\Big]\Big)\cup f\Big(\Big[\frac{4}{5},2\Big]\Big)=\Big[f\Big(\frac{4}{5}\Big),\lim_{x\to0^+}f(x)\Big[\cup\Big[f\Big(\frac{4}{5}\Big),f(2)\Big].$$

Si ha

$$f\Big(\frac{4}{5}\Big)=\frac{2\sqrt{16/25+5\cdot4/5+4}-\sqrt{16/25-10\cdot4/5+16}}{4/5}=\frac{5}{4}\Big(2\frac{\sqrt{216}}{\sqrt{25}}-\frac{\sqrt{216}}{\sqrt{25}}\Big)=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\,,$$

$$f(2) = \frac{2\sqrt{4+10+4} - \sqrt{4-20+16}}{2} = 3\sqrt{2};$$

inoltre, calcolando $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ abbiamo in realtà calcolato il limite bilatero, quindi si ha $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = 15/4$. Pertanto

$$f\big(]0,2]\big) = \left[\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{15}{4}\right[\cup \left[\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, 3\sqrt{2}\right].$$

Poiché f è strettamente decrescente in $[8,+\infty[$, in tale intervallo non ha minimo e ha massimo e si ha

$$f\big([8,+\infty[\big) = \Big]\inf f\big([8,+\infty[\big), \max f\big([8,+\infty[\big)\Big] = \Big]\lim_{x\to+\infty} f(x), f(8)\Big].$$

Si ha

$$f(8) = \frac{2\sqrt{64+40+4} - \sqrt{64-80+16}}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

e per $x \to +\infty$ risulta

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2|x|\sqrt{1+(5/x)+(4/x^2)} - |x|\sqrt{1-(10/x)+(16/x^2)}}{x} = \\ &= \frac{|x|}{x}\Big(\big(2+o(1)\big) - \big(1+o(1)\big)\Big) \to 1\,. \end{aligned}$$

Pertanto

$$f\big([8,+\infty[\big) = \left]1, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right].$$

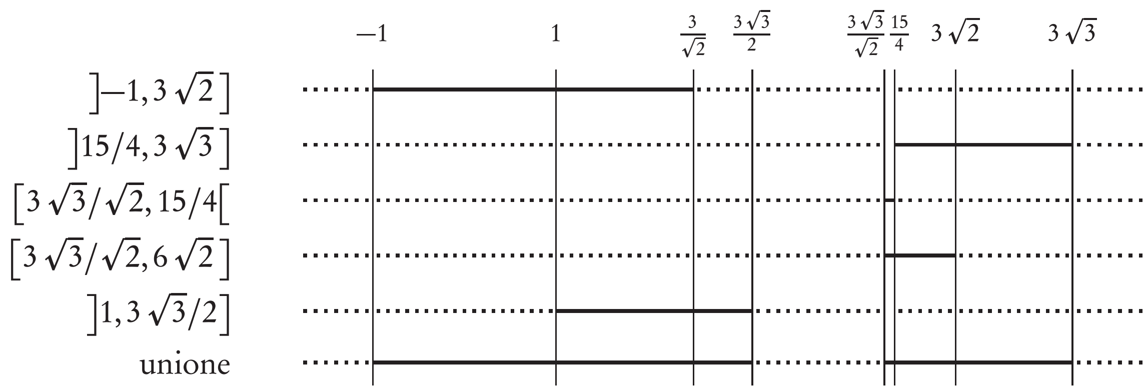
Si ha quindi

$$Im(f) = \left]-1, \frac{3}{\sqrt{2}}\right] \cup \left]\frac{15}{4}, 3\sqrt{3}\right] \cup \left[\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{15}{4}\right[\cup \left[\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, 3\sqrt{2}\right] \cup \left]1, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right].$$

Per determinare questa unione, osserviamo anzitutto che si ha

$$-1 < 1 < \frac{3}{\sqrt{2}} < \frac{3\sqrt{3}}{2} < \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} < \frac{15}{4} < 3\sqrt{2} < 3\sqrt{3},$$

come si verifica facilmente, confrontando eventualmente i quadrati di tali numeri. Risulta quindi



Pertanto
$$Im(f) = \left]-1, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, 3\sqrt{3}\right].$$

Osserviamo che nel determinare l'unione occorre prestare attenzione agli estremi degli intervalli che si uniscono. In particolare $15/4$ appartiene a $Im(f)$ perché appartiene a $\left[3\sqrt{3}/\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\right]$.

31) Poiché le funzione coseno è periodica di periodo 2π, anche f è periodica con lo stesso periodo. Inoltre la funzione coseno è pari, pertanto anche f è pari. Perciò l'immagine di f coincide con l'immagine della restrizione di f all'intersezione del dominio con $[0, \pi]$.

Determiniamo tale intersezione. Il dominio di f è costituito dagli $x \in \mathbb{R}$ tali che risulta $\cos x + 1/2 \geq 0$ e $1/2 - \cos x \geq 0$, cioè
$$-\frac{1}{2} \leq \cos x \leq \frac{1}{2}.$$
Si ha $\arccos(-1/2) = 2\pi/3$, $\arccos(1/2) = \pi/3$ e la funzione coseno è decrescente in $[0, \pi]$, quindi risulta
$$\mathscr{D}(f) \cap [0, \pi] = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi\right].$$

Poiché f è continua, $f\big([\pi/3, 2\pi/3]\big)$ è un intervallo, per il teorema dei valori intermedi, e ha massimo e minimo, per il teorema di Weierstrass. Per determinare l'immagine di f è quindi sufficiente trovarne il minimo e il massimo assoluti; per questo cerchiamo anzitutto gli estremanti locali.

La funzione f è derivabile in x se x non annulla gli argomenti delle radici che definiscono f, per quanto visto sopra questo avviene solo negli estremi di $\mathscr{D}(f) \cap [0, \pi]$, pertanto nei punti interni di tale intervallo f è derivabile. Per il teorema di Fermat possono essere estremanti locali per f solo gli estremi dell'intervallo e i punti interni a derivata nulla. Per $x \in]\pi/3, 2\pi/3[$ si ha
$$f'(x) = \frac{-\operatorname{sen} x}{2\sqrt{\cos x + 1/2}} + \frac{2\operatorname{sen} x}{2\sqrt{1/2 - \cos x}} = \operatorname{sen} x\left(\frac{1}{\sqrt{1/2 - \cos x}} - \frac{1}{2\sqrt{\cos x + 1/2}}\right).$$
Poiché $\operatorname{sen} x \neq 0$ per $x \in]\pi/3, 2\pi/3[$, si ha $f'(x) = 0$ se e solo se
$$\frac{1}{\sqrt{1/2 - \cos x}} - \frac{1}{2\sqrt{\cos x + 1/2}} = 0,$$
cioè $1/2 - \cos x = 4\cos x + 2$, quindi $\cos x = -3/10$, perciò $x = \arccos(-3/10)$. Risulta
$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} + 2\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = 1,$$
$$f\left(\arccos\left(-\frac{3}{10}\right)\right) = \sqrt{-\frac{3}{10} + \frac{1}{2}} + 2\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3}{10}} = \sqrt{\frac{1}{5}} + 2\sqrt{\frac{4}{5}} = \sqrt{5},$$
$$f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} + 2\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 2.$$

Pertanto gli estremi locali di f sono 1, $\sqrt{5}$ e 2. Il minimo e il massimo assoluto di f sono tra questi valori. Poiché $1<2<\sqrt{5}$, il minimo di f è 1, mentre il massimo è $\sqrt{5}$.

Quindi

$$Im(f)=f\left(\left[\frac{\pi}{3},\frac{2}{3}\pi\right]\right)=\left[1,\sqrt{5}\right].$$

32)

a. $\left]-\infty,-7\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{3}\right)+2\sqrt{2}\right]\cup$
$\cup\left[\frac{7}{6}\pi+4\sqrt{3},+\infty\right[$

b. $]-\infty,-3\pi[\cup]3\pi,+\infty[$

c. $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},+\infty\right[$

d. $\left]-\infty,(1-\sqrt{5})\exp(\sqrt{5}+1)\right]\cup[2,+\infty[$

e. $]-\infty,\sqrt{5}]$

f. $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup]1,+\infty[$

g. $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup\left[3-\sqrt{6},+\infty\right[$

h. $\left]-\infty,\frac{1}{3}\right]\cup[3,+\infty[$

33) Il dominio naturale di f è costituito dagli x che rendono positivi gli argomenti della funzione logaritmo, quindi deve essere essere $x>0$ e $|x-4|>0$; la seconda disuguaglianza è soddisfatta se e solo se $x\neq 4$. Pertanto

$$\mathscr{D}(f)=]0,4[\cup]4,+\infty[.$$

La funzione f è continua, perché somma di funzioni continue, ed è derivabile in tutti i punti del dominio per cui non si annullano gli argomenti della funzione valore assoluto, cioè è derivabile in $\mathscr{D}(f)\setminus\{2,4\}=\mathscr{D}(f)\setminus\{2\}$. Per x in tale insieme risulta

$$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{|x-4|}\operatorname{sgn}(x-4)-\operatorname{sgn}(2-x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-4}-\operatorname{sgn}(2-x)=$$
$$=\frac{x-4+x-x(x-4)\operatorname{sgn}(2-x)}{x(x-4)}=\frac{2x-4-(x^2-4x)\operatorname{sgn}(2-x)}{x(x-4)}.$$

Studiamo il segno di f'.

Se $x\in\mathscr{D}(f')\cap]-\infty,2[=]0,2[$ allora è $\operatorname{sgn}(2-x)=1$, quindi si ha

$$f'(x)=\frac{2x-4-(x^2-4x)}{x(x-4)}=\frac{-x^2+6x-4}{x(x-4)}.$$

Il numeratore si annulla per

$$x=3\pm\sqrt{(-3)^2-4}=3\pm\sqrt{5},$$

quindi è positivo in $\left]3-\sqrt{5},3+\sqrt{5}\right[$ e negativo in $\left]-\infty,3-\sqrt{5}\right[\cup\left]3+\sqrt{5},+\infty\right[$. Il segno di f' risulta dal seguente schema

	0 — $3-\sqrt{5}$	$3-\sqrt{5}$ — 2
$-x^2+16x-4$	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$	$+\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +$
x	$+\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +$	$+\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +$
$x-4$	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$
$f'(x)$	$+\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +$	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$

Se invece $x\in\mathscr{D}(f')\cap\left]2,+\infty\right[=\left]2,4\right[\cup\left]4,+\infty\right[$ allora, è $\operatorname{sgn}(2-x)=-1$, quindi si ha

$$f'(x)=\frac{2x-4+(x^2-4x)}{x(x-4)}=\frac{x^2-2x-4}{x(x-4)}.$$

Il numeratore si annulla per

$$x=1\pm\sqrt{(-1)^2-(-4)}=1\pm\sqrt{5},$$

quindi è positivo in $\left]-\infty,1-\sqrt{5}\right[\cup\left]1+\sqrt{5},+\infty\right[$ e negativo in $\left]1-\sqrt{5},1+\sqrt{5}\right[$. Il segno di f' risulta dal seguente schema

	2 — $1+\sqrt{5}$	$1+\sqrt{5}$ — 4	4 —
x^2-2x-4	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$	$+\ +\ +\ +\ +$	$+\ +\ +\ +\ +\ +\ +$
x	$+\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +$	$+\ +\ +\ +\ +$	$+\ +\ +\ +\ +\ +\ +$
$x-4$	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$	$-\ -\ -\ -\ -$	$+\ +\ +\ +\ +\ +\ +$
$f'(x)$	$+\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +$	$-\ -\ -\ -\ -$	$+\ +\ +\ +\ +\ +\ +$

Quindi negli intervalli $\left]0,3-\sqrt{5}\right]$, $\left[2,1+\sqrt{5}\right]$ e $\left]4,+\infty\right[$ f è strettamente crescente, e negli intervalli $\left[3-\sqrt{5},2\right]$ e $\left]3-\sqrt{5},4\right]$ è strettamente decrescente. Per stabilire in quali di questi intervalli f si annulla, studiamo il comportamento negli estremi di tali intervalli.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0^+}f(x)&=\lim_{x\to0^+}\left(\log x+\log(4-x)+2-x\right)=-\infty,\\
f\left(3-\sqrt{5}\right)&=\log\left(3-\sqrt{5}\right)+\log\left|3-\sqrt{5}-4\right|+\left|2-3+\sqrt{5}\right|=\\
&=\log\left(\left(3-\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)\right)+\sqrt{5}-1=\log\left(2\sqrt{5}-2\right)+\sqrt{5}-1,\\
f(2)&=\log2+\log|2-4|+|2-2|=\log4,\\
f\left(1+\sqrt{5}\right)&=\log\left(1+\sqrt{5}\right)+\log\left|1+\sqrt{5}-4\right|+\left|2-1-\sqrt{5}\right|=\\
&=\log\left(\left(1+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)\right)+\sqrt{5}-1=\log\left(2\sqrt{5}-2\right)+\sqrt{5}-1,\\
\lim_{x\to4}f(x)&=\lim_{x\to4}\left(\log x+\log|x-4|+x-2\right)=-\infty,\\
\lim_{x\to+\infty}f(x)&=\lim_{x\to+\infty}\left(\log x+\log(x-4)+x-2\right)=+\infty.
\end{aligned}$$

Si ha $\lim_{x\to0^+}f(x)<0$ e $f\left(3-\sqrt{5}\right)>0$, quindi f assume sia valori positivi che valori negativi in $\left]0,3-\sqrt{5}\right]$, poiché è continua, per il teorema di Bolzano, essa si annulla in

$\left]0,3-\sqrt{5}\right[$. Poiché è strettamente monotona si annulla solo una volta. Un ragionamento analogo vale per gli intervalli $\left]1+\sqrt{5},4\right[$ e $]4,+\infty[$.

La funzione f è strettamente decrescente in $\left[3-\sqrt{5},2\right]$, quindi assume valori maggiori o uguali a $f(2)$ in tale intervallo; poiché $f(2)>0$, f è positiva.

Analogamente in $\left[2,1+\sqrt{5}\right]$ f è strettamente crescente, quindi assume valori maggiori o uguali a $f(2)$, perciò f è positiva.

Quindi f si annulla in 3 punti, uno in ciascuno degli intervalli $\left]0,3-\sqrt{5}\right[$, $\left]1+\sqrt{5},4\right[$ e $]4,+\infty[$.

34) Affinché x appartenga al dominio naturale di f debbono essere soddisfatte le seguenti condizioni:

$$x\neq 0,$$
$$\frac{1}{x}\in\mathscr{D}(\text{arcsen})=[-1,1],$$
$$x^2-1\geq 0.$$

Per $x\neq 0$ si ha $1/x\in[-1,1]$ se e solo se $x\in\,]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$. La condizione $x^2-1\geq 0$ è anch'essa soddisfatta se e solo se $x\in\,]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$, quindi

$$\mathscr{D}(f)=\,]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[\,.$$

La funzione f è continua perché somma di composizione di funzioni continue ed è derivabile in tutti i punti del dominio tali che l'argomento della funzione arcoseno è diverso sia da 1 che da -1 e l'argomento della radice quadrata è diverso da 0. Deve quindi essere $1/x\neq\pm1$ e $x^2-1\neq 0$, cioè $x\neq\pm1$. Pertanto f è derivabile in $]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[$; per x in tale insieme si ha:

$$\begin{aligned}f'(x)&=2\frac{1}{\sqrt{1-(1/x)^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}=-\frac{2}{\sqrt{(x^2-1)/x^2}}\frac{1}{x^2}+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\\&=-\frac{2|x|}{x^2\sqrt{x^2-1}}+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{-2+x|x|}{|x|\sqrt{x^2-1}}.\end{aligned}$$

Per $x\in\,]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[$ si ha $f'(x)=0$ se e solo se $-2+x|x|=0$. In particolare se $x\in\,]-\infty,-1[$ allora $|x|=-x$ e quindi $-2+x|x|=-2-x^2$ che è sempre diverso da 0, mentre se $x\in\,]1,+\infty[$ allora $|x|=x$ e quindi $-2+x|x|=-2+x^2$ che si annulla per $x=\sqrt{2}$ (oltre a $x=-\sqrt{2}$ che non appartiene a $]1,+\infty[$). Pertanto, con l'esclusione dei punti -1 e 1 in cui non abbiamo studiato la derivabilità di f, $f'(x)=0$ se e solo $x=\sqrt{2}$.

Studiamo il comportamento di f negli estremi degli intervalli che costituiscono il suo dominio e in $\sqrt{2}$.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(2\,\text{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right)+\sqrt{x^2-1}-2\right)=+\infty,$$

$$f(-1)=2\,\text{arcsen}\left(\frac{1}{-1}\right)+\sqrt{(-1)^2-1}-2=2\left(-\frac{\pi}{2}\right)+0-2=-\pi-2,$$

$$f(1) = 2\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{1}\right) + \sqrt{1^2-1} - 2 = 2\,\frac{\pi}{2} + 0 - 2 = \pi - 2\,,$$

$$f\left(\sqrt{2}\right) = 2\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 1} - 2 = 2\,\frac{\pi}{4} + 1 - 2 = \frac{\pi}{2} - 1\,,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(2\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right) + \sqrt{x^2-1} - 2\right) = +\infty\,.$$

Quindi $\mathscr{D}(f)$ è l'unione degli intervalli $]-\infty,-1]$, $\left[1,\sqrt{2}\right]$ e $\left[\sqrt{2},+\infty\right[$ e nell'interno di ciascuno di essi f è derivabile con derivata non nulla. In particolare, poiché $\lim_{x\to-\infty} f(x) > 0$ e $f(-1) < 0$, la funzione f si annulla una volta in $]-\infty,-1[$, mentre si ha $f(1) > 0$, $f\left(\sqrt{2}\right) > 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) > 0$, quindi f non si annulla né in $\left]1,\sqrt{2}\right[$ né in $\left]\sqrt{2},+\infty\right[$.

Pertanto f si annulla in un punto che appartiene all'intervallo $]-\infty,-1[$.

35) Il dominio naturale di f è costituito dagli x reali tali che il denominatore dell'argomento dell'esponenziale è non nullo, cioè $x^2 - 4 \neq 0$, che equivale a $x \neq -2$ e $x \neq 2$. Pertanto

$$\mathscr{D}(f) =]-\infty,-2[\,\cup\,]-2,2,\cup[\,]2,+\infty[\,.$$

La funzione f è derivabile e, per $x \in \mathscr{D}(f)$, si ha

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \exp\left(\frac{2x-2}{x^2-4}\right) + (x+2)\exp\left(\frac{2x-2}{x^2-4}\right)\frac{2(x^2-4)-(2x-2)2x}{(x^2-4)^2} = \\
&= \left(1 + (x+2)\,\frac{-2x^2+4x-8}{(x+2)^2(x-2)^2}\right)\exp\left(\frac{2x-2}{x^2-4}\right) = \\
&= \frac{(x+2)(x-2)^2 - 2x^2 + 4x - 8}{(x+2)(x-2)^2}\exp\left(\frac{2x-2}{x^2-4}\right) = \\
&= \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8 - 2x^2 + 4x - 8}{(x+2)(x-2)^2}\exp\left(\frac{2x-2}{x^2-4}\right) = \frac{x^3-4x^2}{(x+2)(x-2)^2}\exp\left(\frac{2x-2}{x^2-4}\right),
\end{aligned}$$

quindi $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 0$ o $x = 4$. Inoltre il segno di f' risulta dal seguente schema

		-2		0		2		4	
$x-4$	$- - - -$		$- - - -$		$- - - -$		$- - - -$		$+ + + +$
$x+2$	$- - - -$		$+ + + +$		$+ + + +$		$+ + + +$		$+ + + +$
$f'(x)$	$+ + + +$		$- - - -$		$- - - -$		$- - - -$		$+ + + +$

Si ha

$$f(0) = 2\exp\left(\frac{-2}{-4}\right) - 3e^{1/2} = -e^{1/2}\,,$$

$$f(4) = 6\exp\left(\frac{6}{12}\right) - 3e^{1/2} = 3e^{1/2}\,.$$

I limiti di f negli estremi degli intervalli che costituiscono il suo dominio si calcolano facilmente studiando il segno dell'argomento dell'esponenziale e ricordando che in una forma indeterminata del tipo $0 \cdot \infty$ se la funzione convergente a 0 è di tipo polinomiale e quella divergente è un esponenziale, allora il prodotto è divergente. Quindi risulta

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to-2^-} f(x) = -e^{3/2}\,, \qquad \lim_{x\to-2^+} f(x) = +\infty\,,$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -e^{3/2}\,, \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,.$$

Nell'intervallo $]-\infty,-2[$ la funzione f è derivabile con derivata positiva, quindi strettamente crescente, pertanto per x in tale intervallo sia ha $f(x) < \lim_{x\to-2^-} f(x) < 0$, quindi f non si annulla. Si ha $\lim_{x\to-2^+} f(x) > 0$ e $f(0) < 0$; per il teorema di Bolzano f si annulla almeno una volta nell'intervallo $]-2,0[$; poiché f è derivabile con derivata negativa in tale intervallo, è strettamente decrescente, quindi si annulla una volta sola. In $]0,2[$ la funzione f è derivabile con derivata negativa, quindi per x in tale intervallo si ha $f(x) < f(0) < 0$, pertanto f non si annulla. Nell'intervallo $]2,4[$ si ha $f'(x) < 0$, mentre nell'intervallo $]4,+\infty[$ si ha $f'(x) > 0$, pertanto in $]2,+\infty[$ si ha $f(x) \geq f(4) > 0$, pertanto f non si annulla in tale intervallo.

Quindi f si annulla in un solo punto che appartiene all'intervallo $]-2,0[$.

36)

a. f non si annulla

b. f si annulla in 3 punti, uno in ognuno degli intervalli $\left]-\infty,-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right[$, $\left]-\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right[$, $\left]\frac{2\sqrt{5}}{5},+\infty\right[$

c. f si annulla in 2 punti, uno dei quali è 2 e l'altro appartiene all'intervallo $]-2,1[$

d. f si annulla in 2 punti, uno in ognuno degli intervalli $]-1,0[$ e $]0,1[$

e. f si annulla in un punto che appartiene all'intervallo $\left]-\sqrt{5},2\right[$

f. f si annulla in un punto che appartiene all'intervallo $]-\infty,-1[$

g. f si annulla in 4 punti, uno in ognuno degli intervalli $]-\infty,-1[$, $]-1,0[$, $]0,1[$ e $]1,+\infty[$

h. f si annulla in un punto che appartiene all'intervallo $\left]-\frac{1}{2},1\right[$

2

Numeri complessi

2.1 Esercizi

Forma algebrica

La **forma algebrica** di un numero complesso z è la forma $\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$, o, equivalentemente, $a + i b$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

Scrivere in forma algebrica la somma o il prodotto di numeri complessi espressi in forma algebrica non presenta alcuna difficoltà. Non presenta difficoltà neppure scrivere in forma algebrica il quoziente di un numero complesso con un numero reale, perché se $z \in \mathbb{C}$ e $c \in \mathbb{R}$, allora $\operatorname{Re}(z/c) = (\operatorname{Re} z)/c$ e $\operatorname{Im}(z/c) = (\operatorname{Im} z)/c$. Non è invece immediato scrivere in forma algebrica il quoziente di due numeri complessi, quando il divisore non è reale; per fare questo occorre ricondursi al caso in cui il divisore è reale. A tal fine è sufficiente moltiplicare i due numeri complessi di cui si fa la divisione per il complesso coniugato del divisore. In questo modo il divisore diventa il prodotto di un numero complesso per il suo coniugato, che è il quadrato del modulo e quindi è reale.

2.1.1 Esempio. Determiniamo la forma algebrica del numero complesso

$$\frac{1+i}{1-2i}.$$

Si ha

$$\frac{1+i}{1-2i} = \frac{(1+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{1+i+2i-2}{1^2-(2i)^2} = \frac{-1+3i}{5} = -\frac{1}{5} + i\,\frac{3}{5}. \quad ◀$$

2.1.2 Esempio. Determiniamo la forma algebrica del numero complesso

$$\frac{\sqrt{3}+2i}{-2+i\sqrt{3}}.$$

Si ha

$$\frac{\sqrt{3}+2i}{-2+i\sqrt{3}} = \frac{\big(\sqrt{3}+2i\big)\big(-2-i\sqrt{3}\big)}{\big(-2+i\sqrt{3}\big)\big(-2-i\sqrt{3}\big)} = \frac{-2\sqrt{3}-4i-3i+2\sqrt{3}}{(-2)^2-\big(i\sqrt{3}\big)^2} = \frac{-7i}{7} = -i. \quad ◀$$

1) Scrivere in forma algebrica il numero complesso

$$\frac{2+i}{3-2i}-(2+3i)^2.$$

2) Scrivere in forma algebrica i seguenti numeri complessi:

a. $\dfrac{3-i}{4-i}$ **b.** $\dfrac{2-i}{2+i}$ **c.** $\dfrac{4-3i}{(2+i)^2}$ **d.** $\dfrac{\left(2\sqrt{3}+i\right)^3}{\sqrt{3}-i}$

Forma trigonometrica e forma esponenziale

Ogni numero complesso $z \neq 0$ può essere scritto nella forma

$$\rho(\cos\theta + i\sin\theta),$$

che è detta **forma trigonometrica**. In tal caso ρ è il modulo e θ è uno degli argomenti di z.

Il **modulo** di z, indicato con $|z|$, è il numero reale non negativo $\sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$.

Chiamiamo **argomento** di $z \in \mathbb{C}^*$ qualunque $\theta \in \mathbb{R}$ tale che $z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$.

Ogni numero complesso z non nullo ha infiniti argomenti. Se $\theta \in \mathbb{R}$ è un argomento di z, allora l'insieme degli argomenti di z è $\{\varphi \in \mathbb{R} \mid \exists k \in \mathbb{Z}\colon \varphi = \theta + 2k\pi\}$: sono argomento di z tutti e soli i numeri che si ottengono sommando a θ un multiplo intero di 2π.

La forma trigonometrica è utile calcolare il prodotto di numeri complessi, perché il prodotto dei moduli è il modulo del prodotto e la somma di argomenti dei fattori è un argomento del prodotto. In formule

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= \rho_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)\\ z_2 &= \rho_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)\end{aligned}\right\} \Longrightarrow z_1 z_2 = \rho_1\rho_2\big(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)\big).$$

Immediata conseguenza di questa formula sono la formula per il quoziente di numeri complessi non nulli:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= \rho_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)\\ z_2 &= \rho_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\big(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2)\big),$$

e la formula di De Moivre relativa alle potenze:

$$z = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) \Longrightarrow z^n = \rho^n\big(\cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta)\big).$$

Un argomento del numero complesso non nullo z è:

$$\begin{array}{ll} \arctan\left(\dfrac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right), & \text{se } \operatorname{Re} z > 0,\\[2ex] \arctan\left(\dfrac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right) + \pi, & \text{se } \operatorname{Re} z < 0,\\[2ex] \dfrac{\pi}{2} & \text{se } \operatorname{Re} z = 0 \text{ e } \operatorname{Im} z > 0,\\[2ex] -\dfrac{\pi}{2} & \text{se } \operatorname{Re} z = 0 \text{ e } \operatorname{Im} z < 0. \end{array}$$

2.1.3 Esempio. Determiniamo la forma trigonometrica del numero complesso $-\sqrt{3}+3i$.

Si ha

$$|-\sqrt{3}+3i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2+3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

Poiché $-\sqrt{3}+i$ ha parte reale negativa, un suo argomento è

$$\arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(-\sqrt{3}+3i)}{\operatorname{Re}(-\sqrt{3}+3i)}\right)+\pi = \arctan\left(\frac{3}{-\sqrt{3}}\right)+\pi = -\arctan(\sqrt{3})+\pi = -\frac{\pi}{3}+\pi = \frac{2}{3}\pi.$$

Pertanto

$$-\sqrt{3}+3i = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right).$$ ◀

Definiamo l'esponenziale in base e di un numero immaginario puro ponendo, $\forall\theta\in\mathbb{R}$,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta.$$

Questa notazione consente di scrivere in modo più compatto la forma trigonometrica di un numero complesso non nullo. Il numero complesso di modulo ρ e argomento θ può essere scritto come $\rho e^{i\theta}$, anziché $\rho(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)$. Questa scrittura è detta **forma esponenziale** di un numero complesso.

2.1.4 Esempio. Nell'esempio 2.1.3 abbiamo espresso in forma trigonometrica il numero complesso $-\sqrt{3}+3i$, ottenendo

$$-\sqrt{3}+3i = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right).$$

Passando alla forma esponenziale si ha

$$-\sqrt{3}+3i = 2\sqrt{3}\exp\left(i\,\frac{2}{3}\pi\right).$$ ◀

3) Scrivere in forma trigonometrica il numero complesso

$$-4-2i.$$

4) Scrivere in forma trigonometrica il numero complesso

$$\frac{(1-i)^5}{(-\sqrt{3}+i)^3}.$$

5) Scrivere in forma trigonometrica i seguenti numeri complessi:

a. $\sqrt{3}-i$ **d.** $-1+3i$ **g.** $(1+4i)^5$ **j.** $(-1+i)^6\left(\sqrt{3}-i\right)^3$

b. $\dfrac{1}{-1+i\sqrt{3}}$ **e.** $\dfrac{-1+2i}{4i}$ **h.** $(-1-2i)^6$ **k.** $\dfrac{(1+i)^5}{\left(1-i\sqrt{3}\right)^3}$

c. $-1-3i$ **f.** $\left(-\sqrt{3}+i\right)^7$ **i.** $\dfrac{1-i}{\left(\sqrt{3}-i\right)^4}$ **l.** $\dfrac{(1+2i)(1+i)^8}{(4i)^2}$

Radici n-sime

Per calcolare le radici n-sime di un numero complesso non nullo è utile scriverlo in forma trigonometrica. Infatti se $w=\rho(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)$, con $\rho\in\mathbb{R}^+$ e $\theta\in\mathbb{R}$, allora l'insieme delle radici n-sime di w è

$$\left\{\sqrt[n]{\rho}\exp\left(i\,\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\,\middle|\,k=0,1,\dots,n-1\right\}.$$

2.1.5 Esempio. Determiniamo le radici quadrate di $-1+2i$.

Il modulo di $-1+2i$ è $\sqrt{5}$ e un suo argomento è $\pi-\arctan 2$. Quindi le radici quadrate di $-1+2i$ sono

$$z_k=\sqrt[4]{5}\left(\cos\left(\frac{\pi-\arctan 2+2k\pi}{2}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi-\arctan 2+2k\pi}{2}\right)\right),\qquad k=0,1.$$

Le due radici quadrate hanno argomenti che differiscono di π, quindi sono una l'opposto dell'altra, pertanto possiamo scriverle nella forma

$$\pm\sqrt[4]{5}\left(\cos\left(\frac{\pi-\arctan 2}{2}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi-\arctan 2}{2}\right)\right).$$ ◀

2.1.6 Esempio. Determiniamo le radici quarte di -16.

Il modulo di -16 è 16 e un argomento è π. Pertanto le radici quarte sono

$$z_k=\sqrt[4]{16}\left(\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)\right),\qquad k=0,1,2,3.$$

È facile determinare esplicitamente seno e coseno degli argomenti dei numeri trovati; quindi scriviamo tali numeri in forma algebrica.

$$z_0=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}+i\sqrt{2},$$

$$z_1=2\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right)=2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\sqrt{2}+i\sqrt{2},$$

$$z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{5}{4}\pi\right)\right) = 2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2},$$

$$z_3 = 2\left(\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$ ◀

6) Determinare le radici quadrate e cubiche del numero complesso

$$-3\sqrt{3} + 9i\,.$$

7) Determinare le radici seste del numero complesso

$$-2 - 4i\,.$$

8) Determinare le radici quadrate e cubiche dei seguenti numeri complessi:

a. -3 **b.** $-i$ **c.** $1 - i\sqrt{3}$ **d.** $1 - i$ **e.** $-1 + 2i$ **f.** $2 + i$

Equazioni algebriche

Le equazioni algebriche di primo grado in campo complesso si risolvono come quelle in campo reale. Infatti, se $a \in \mathbb{C}^*$ e $b \in \mathbb{C}$, allora si ha

$$az + b = 0 \iff z = -\frac{b}{a}.$$

2.1.7 Esempio. Risolviamo l'equazione

$$(1+i)z + 2 - i = 0.$$

Si ha $(1+i)z = -2 + i$, quindi

$$z = \frac{-2+i}{1+i} = \frac{(-2+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2+i+2i+1}{2} = -\frac{1}{2} + i\,\frac{3}{2}.$$ ◀

Per le equazioni algebriche di secondo grado in campo complesso c'è una formula risolutiva simile a quella valida in campo reale. Infatti, se $a \in \mathbb{C}^*$ e $b, c \in \mathbb{C}$, allora si ha

$$\begin{aligned} 4a(az^2 + bz + c) &= 4a^2z^2 + 4abz + 4ac = 4a^2z^2 + 4abz + b^2 - b^2 + 4ac = \\ &= (2az + b)^2 - (b^2 - 4ac). \end{aligned}$$

Quindi $az^2 + bz + c = 0$ se e solo se $2az + b$ è una radice quadrata di $b^2 - 4ac$. Osserviamo che $b^2 - 4ac$ è il discriminante del trinomio $az^2 + bz + c$. Se il discriminante è nullo, allora l'unica soluzione dell'equazione è $-b/2a$. Se il discriminante è non nullo, indicando con r una delle radici quadrate complesse di $b^2 - 4ac$, deve essere $2az + b = \pm r$, da cui si ottiene $z = (-b \pm r)/2a$.

La formula è analoga a quella per la soluzione delle equazioni di secondo grado in campo reale; il calcolo esplicito delle soluzioni richiede in più di determinare le radici quadrate del discriminante.

2.1.8 Esempio. Risolviamo l'equazione

$$iz^2+(2-i)z-1-7i=0.$$

Il discriminante è

$$(2-i)^2-4i(-1-7i)=4-4i-1+4i-28=-25.$$

Poiché $i^2=-1$, una radice quadrata di -25 è $5i$. Pertanto

$$z=\frac{-2+i\pm 5i}{2i}=\begin{cases}\dfrac{-2-4i}{2i}=-2+i,\\[2mm] \dfrac{-2+6i}{2i}=3+i.\end{cases}$$ ◀

9) Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$2z^2+\left(2\sqrt{3}+6i\right)z+1-i\sqrt{3}=0.$$

10) Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$\left(\frac{1}{z^2}-i4\sqrt{3}\right)^3=\left(1-i3\sqrt{3}\right)^3.$$

11) Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$\left(\frac{(-1+i)z-1-i}{z^2+2iz-1}\right)^2=(1+i)^6.$$

12) Risolvere le seguenti equazioni in campo complesso:

a. $z^2+z+8=0$

b. $z^2+iz-2=0$

c. $z^2+2z+1+2i=0$

d. $(3+3i)z^2+\sqrt{5}(2-2i)z+1+i=0$

e. $2z^2+2\left(\sqrt{3}+3i\right)z-1+i\sqrt{3}=0$

f. $z^2-i2\sqrt{6}\,z-i=0$

g. $iz^2-4z+2-4i=0$

h. $z^3+iz=0$

i. $z^4-4z^2+4+2i=0$

j. $z^6-7z^3-8=0$

k. $(z-i)^6=-8$

l. $(z+4)^6=(z-4)^6$

m. $\left(z^2+i2\sqrt{2}\,z-1\right)^2=-1$

n. $\left(\dfrac{z-i}{2z+i}\right)^2=8i$

o. $\left(\dfrac{z^2+3iz}{z^2+2}\right)^2=1$

p. $\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2=(1-i)^4$

q. $\left(z^2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-i\,\dfrac{1}{2}\right)^3=-i$

r. $\left(z^2+2iz-\dfrac{1}{2}+i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=1$

s. $\left((3+3i)z+\dfrac{1+i}{z}\right)^2=5(1+i)^6$

t. $\left(2iz-\dfrac{1+2i}{z}\right)^2=(6-2i)^2$

Esponenziale

Estendiamo la funzione esponenziale in base e al campo complesso, ponendo, $\forall z\in\mathbb{C}$,

$$e^z=e^{\operatorname{Re}z}e^{i\operatorname{Im}z}.$$

Poiché abbiamo definito $e^{i\operatorname{Im}z}=\cos(\operatorname{Im}z)+i\operatorname{sen}(\operatorname{Im}z)$, si ha

$$e^z=e^{\operatorname{Re}z}\big(\cos(\operatorname{Im}z)+i\operatorname{sen}(\operatorname{Im}z)\big).$$

Quindi $|e^z|=e^{\operatorname{Re}z}$ e un argomento di e^z è $\operatorname{Im}z$.

Se $z\in\mathbb{R}$, allora $z=\operatorname{Re}z$ e $\operatorname{Im}z=0$, perciò da questa definizione si riottiene e^z in senso reale.

Anche per l'esponenziale in campo complesso vale la proprietà che l'esponenziale della somma è uguale al prodotto degli esponenziali. Infatti, per le proprietà della forma trigonometrica, $\forall z,w\in\mathbb{C}$, si ha

$$\begin{aligned}e^z e^w &= e^{\operatorname{Re}z}\big(\cos(\operatorname{Im}z)+i\operatorname{sen}(\operatorname{Im}z)\big)e^{\operatorname{Re}w}\big(\cos(\operatorname{Im}w)+i\operatorname{sen}(\operatorname{Im}w)\big)=\\ &= e^{\operatorname{Re}z+\operatorname{Re}w}\big(\cos(\operatorname{Im}z+\operatorname{Im}w)+i\operatorname{sen}(\operatorname{Im}z+\operatorname{Im}w)\big)=\\ &= e^{\operatorname{Re}(z+w)}\Big(\cos\big(\operatorname{Im}(z+w)\big)+i\operatorname{sen}\big(\operatorname{Im}(z+w)\big)\Big)=e^{z+w}.\end{aligned}$$

2.1.9 Esempio. Calcoliamo e^{2+i}. Si ha

$$e^{2+i}=e^2(\cos 1+i\operatorname{sen}1).$$ ◀

2.1.10 Esempio. Calcoliamo $e^{i\pi/2}$. Si ha

$$e^{i\pi/2}=e^0\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)=i.$$ ◀

13) Scrivere in forma algebrica il numero complesso

$$\frac{\exp\big((2-i)^2\big)}{e^{3i}}.$$

14) Scrivere in forma algebrica i seguenti numeri complessi:

a. e^{-2+3i} **b.** $\exp\big((2+i)^3\big)$ **c.** $\dfrac{e^{2+i}}{e^{3-2i}}$ **d.** $\exp\big((1-i)^6\big)$

15) Scrivere in forma trigonometrica il numero complesso

$$(-3+4i)\,e^{1+i}\,.$$

16) Scrivere in forma trigonometrica i seguenti numeri complessi:

a. $3e^{2-4i}$ **b.** $\left(e^{3-2i}\right)^2$ **c.** $e^{(3-2i)^2}$ **d.** $(1-i)e^{2+i}$

Logaritmo

In campo reale la funzione esponenziale è iniettiva e la sua inversa è la funzione logaritmo: se $y\in\mathbb{R}^+$, l'equazione $e^x=y$ ha come unica soluzione $x=\log y$. In campo complesso invece la funzione esponenziale non è iniettiva, infatti $\forall z\in\mathbb{C}$, $\forall k\in\mathbb{Z}$, risulta

$$e^{z+i2k\pi}=e^{\operatorname{Re} z}\big(\cos(\operatorname{Im} z+2k\pi)+i\operatorname{sen}(\operatorname{Im} z+2k\pi)\big)=e^{\operatorname{Re} z}\big(\cos(\operatorname{Im} z)+i\operatorname{sen}(\operatorname{Im} z)\big)=e^z\,.$$

Sia $w\in\mathbb{C}$. Cerchiamo $z\in\mathbb{C}$, soluzione dell'equazione $e^z=w$. Poiché e^z ha una forma trigonometrica semplice, per risolvere l'equazione uguagliamo modulo e argomenti dei due membri. Qualunque sia $z\in\mathbb{C}$ si ha $|e^z|=e^{\operatorname{Re} z}\neq 0$, quindi l'equazione non ha soluzione se $w=0$. Sia $w\neq 0$; indichiamo con $\theta\in\mathbb{R}$ un argomento di w. Allora $w=|w|(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)$ e l'equazione $e^z=w$ equivale a

$$e^{\operatorname{Re} z}\big(\cos(\operatorname{Im} z)+i\operatorname{sen}(\operatorname{Im} z)\big)=|w|(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)\,,$$

che è verificata se e solo se $e^{\operatorname{Re} z}=|w|$ e $\cos(\operatorname{Im} z)+i\operatorname{sen}(\operatorname{Im} z)=\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta$.

Da qui segue $\operatorname{Re} z=\log|w|$ e $\operatorname{Im} z=\theta+2k\pi$ per un $k\in\mathbb{Z}$.

2.1.11 Esempio. Risolviamo l'equazione

$$e^z=-1\,.$$

Il numero -1 ha modulo 1 e un argomento è π. Pertanto

$$z=\log 1+i\pi+2x\pi=i(2k+1)\pi\,,\qquad k\in\mathbb{Z}\,.$$ ◀

2.1.12 Esempio. Risolviamo l'equazione

$$e^z=-3+i\,.$$

Si ha $|3+i|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$ e un argomento di $-3+i$ è $-\arctan(1/3)+\pi$. Pertanto

$$z=\log\big(\sqrt{10}\big)+i\left(-\arctan\frac{1}{3}+(2k+1)\pi\right),\qquad k\in\mathbb{Z}\,.$$ ◀

17) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$e^{1/z}=-1-2i\,.$$

18) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$\left(e^z + i\,\frac{1}{2}\right)^3 = i\,.$$

19) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$e^{iz} - 2ie^{-iz} = -\sqrt{2} + i\,\sqrt{2}\,.$$

20) Risolvere le seguenti equazioni in campo complesso:

a. $e^z = -4i$

b. $e^z = -3 + 2i$

c. $e^{iz} = 2 - 2i$

d. $e^{(2+i)z} = 1$

e. $e^{2z} + 6e^z + 9 + 2i = 0$

f. $e^{iz} + 4e^{-iz} = -2$

g. $e^z + e^{-z} = ie^{-z} + i - 2$

h. $\left(e^{2z} + 4\right)^2 = \left(ie^{2z} - 4\right)^2$

i. $(e^{-z} + 1)^3 = -1$

j. $e^{iz} + (1-i)e^{-iz} - i + 2 = 0$

k. $e^{(1+i)z} = 1 + i$

l. $e^{4iz} + (1-i)e^{2iz} - i = 0$

Equazioni non algebriche

Un'equazione in campo complesso nell'incognita z in cui compaiono $|z|$, $\operatorname{Re} z$ o $\operatorname{Im} z$ può talvolta essere risolta scrivendo z in forma algebrica o in forma trigonometrica.

Infatti, scrivendo l'incognita z nella forma $x+iy$, dove x e y sono due incognite reali, imponendo che siano uguali parte reale e coefficiente dell'immaginario dei due membri dell'equazione, si ottiene un sistema di due equazioni reali nelle due incognite reali x e y.

2.1.13 Esempio. Risolviamo l'equazione

$$2z - 4\overline{z} + |z|^2 + 6i = 0\,.$$

Posto $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, l'equazione diventa, successivamente,

$$2(x+iy) - 4(x-iy) + (x^2 + y^2) + 6i = 0\,,$$
$$-2x + 6iy + x^2 + y^2 + 6i = 0\,.$$

Imponendo che siano nulli parte reale e coefficiente dell'immaginario del primo membro otteniamo il seguente sistema in $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} -2x + x^2 + y^2 = 0\,, \\ 6y + 6 = 0\,. \end{cases}$$

La seconda equazione ha la soluzione $y = -1$. Sostituendo nella prima equazione si ottiene $x^2 - 2x + 1 = 0$; cioè $(x-1)^2 = 0$, quindi si ha la soluzione $x = 1$.

Pertanto l'equazione ha la soluzione $1 - i$. ◀

In modo analogo si può risolvere un'equazione uguagliando modulo e argomenti dei due membri dell'equazione.

2.1.14 Esempio. Risolviamo l'equazione

$$z|z| = 1 - i\sqrt{3}\,.$$

Uguagliando i moduli dei due membri dell'equazione si ottiene

$$|z|^2 = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2\,.$$

Pertanto $|z| = \sqrt{2}$.

Si ha $\arg(z|z|) = \arg z$, quindi $\arg z = \arg(1 - i\sqrt{3})$. Un argomento di $1 - i\sqrt{3}$ è

$$\arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}\,.$$

Quindi l'equazione ha la soluzione

$$\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\,.$$ ◀

21) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$z^2 + \overline{z} + |z|^2 = 1\,.$$

22) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$z^3 + z\overline{z}^2 + 3\overline{z}\,\mathrm{Im}\,z + 2\,\mathrm{Re}\,z = 0\,.$$

23) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$z^4 = (1 + i\sqrt{3})\overline{z}^2\,.$$

24) Risolvere le seguenti equazioni in campo complesso:

a. $z^2\overline{z} + z\overline{z}^2 - (3+i)|z|^2 - 3z^2 = 0$

b. $\dfrac{2}{z} + \dfrac{i}{\overline{z}} = 3$

c. $\dfrac{z^2 - 4i}{\overline{z}^2 - 4i} = 3$

d. $z^2 + |z|^2 = 8 - 2i$

e. $z^2\,\mathrm{Re}\,z - z + i|z|^2 = 0$

f. $\dfrac{iz^3}{|z|^2} = -1$

2.2 Soluzioni e risultati

1) Si ha

$$\frac{2+i}{3-2i}-(2+3i)^2=\frac{(2+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}-\left(2^2+2\cdot 2\cdot 3i+(3i)^2\right)=$$
$$=\frac{6+4i+3i-2}{3^2-(2i)^2}-(-5+12i)=\frac{4+7i+13(5-12i)}{13}=\frac{69}{13}-\frac{149}{13}\,i\,.$$

2)

a. $\frac{13}{17}-\frac{1}{17}\,i$

b. $\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\,i$

c. $-i$

d. $\frac{19}{4}+\frac{53\sqrt{3}}{4}\,i$

3) Si ha

$$|-4-2i|=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=\sqrt{20}\,.$$

Poiché $-4-2i$ ha parte reale negativa, un suo argomento è

$$\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(-4-2i)}{\mathrm{Re}(-4-2i)}\right)+\pi=\arctan\left(\frac{-2}{-4}\right)+\pi=\arctan\frac{1}{2}+\pi\,.$$

Pertanto

$$-4-2i=\sqrt{20}\left(\cos\left(\arctan\frac{1}{2}+\pi\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\arctan\frac{1}{2}+\pi\right)\right).$$

4) Si ha

$$|1-i|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}\,;$$

poiché $1-i$ ha parte reale positiva, un suo argomento è $\arctan(-1)=-\pi/4$. Inoltre

$$\left|-\sqrt{3}+i\right|=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1^2}=2\,;$$

un argomento di $-\sqrt{3}+i$ è $\arctan\left(-1/\sqrt{3}\right)+\pi=(5/6)\pi$.

Pertanto

$$\left|\frac{(1-i)^5}{\left(-\sqrt{3}+i\right)^3}\right|=\left(\sqrt{2}\right)^5 2^{-3}=2^{-1/2}\,;$$

un argomento del numero $(1-i)^5/\left(-\sqrt{3}+i\right)^3$ è

$$5\left(-\frac{\pi}{4}\right)-3\,\frac{5}{6}\,\pi=\frac{-5-10}{4}\,\pi=-\frac{15}{4}\,\pi\,.$$

Poiché $-(15/4)\pi=(\pi/4)-4\pi$, anche $\pi/4$ è un argomento. Pertanto

$$\frac{(1-i)^5}{\left(-\sqrt{3}+i\right)^3}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right).$$

5)

a. $2\left(\cos\left(\frac{11}{6}\pi\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{11}{6}\pi\right)\right)$

b. $\frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right)$

c. $\sqrt{10}\big(\cos(\arctan 3+\pi)+i\,\mathrm{sen}(\arctan 3+\pi)\big)$

d. $\sqrt{10}\big(\cos(\pi-\arctan 3)+i\,\mathrm{sen}(\pi-\arctan 3)\big)$

e. $\frac{\sqrt{5}}{4}\left(\cos\left(\arctan\frac{1}{2}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\arctan\frac{1}{2}\right)\right)$

f. $128\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

g. $17^{5/2}\big(\cos(5\arctan 4)+i\,\mathrm{sen}(5\arctan 4)\big)$

h. $5^3\big(\cos(6\arctan 2+\pi)+i\,\mathrm{sen}(6\arctan 2+\pi)\big)$

i. $\frac{1}{8\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{5}{12}\pi\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{5}{12}\pi\right)\right)$

j. $64(\cos 0+i\sin 0)$

k. $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4}\right)$

l. $\sqrt{5}\big(\cos(\arctan 2+\pi)+i\,\mathrm{sen}(\arctan 2+\pi)\big)$

6) Si ha

$$\left|-3\sqrt{3}+9i\right|=3\left|-\sqrt{3}+3i\right|=3\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+3^2}=3\sqrt{12}=6\sqrt{3}\,.$$

Poiché $-3\sqrt{3}+9i$ ha parte reale negativa, un suo argomento è

$$\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\left(-3\sqrt{3}+9i\right)}{\mathrm{Re}\left(-3\sqrt{3}+9i\right)}\right)+\pi=\arctan\frac{9}{-3\sqrt{3}}+\pi=\pi-\arctan\left(\sqrt{3}\right)=\frac{2}{3}\pi\,.$$

Pertanto le radici quadrate di $-3\sqrt{3}+9i$ sono

$$\pm\sqrt{6}\,3^{1/4}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{3}\right)=\pm\sqrt{6}\,3^{1/4}\left(\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pm\left(\frac{3^{3/4}}{\sqrt{2}}+i\,\frac{3^{5/4}}{\sqrt{2}}\right).$$

Le radici cubiche di $-3\sqrt{3}+9i$ sono

$$6^{1/3}3^{1/6}\exp\left(i\,\frac{2+6k}{9}\,\pi\right), \qquad k=0,1,2.$$

7) Si ha

$$|-2-4i|=\sqrt{(-2)^2+(-4)^2}=\sqrt{20}.$$

Poiché $-2-4i$ ha parte reale negativa, un suo argomento è

$$\arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(-2-4i)}{\operatorname{Re}(-2-4i)}\right)+\pi=\arctan\left(\frac{-4}{-2}\right)+\pi=\arctan 2+\pi.$$

Pertanto le radici seste di $-2-4i$ sono

$$20^{1/12}\exp\left(i\,\frac{\arctan 2+(2k+1)\pi}{6}\right), \qquad k=0,1,2,3,4,5.$$

8)

a. $\pm i\sqrt{3}$; $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}+i\,\dfrac{3^{5/6}}{2}$, $-\sqrt[3]{3}$, $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}-i\,\dfrac{3^{5/6}}{2}$

b. $\pm\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-i\,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\dfrac{\sqrt{3}}{2}-i\,\dfrac{1}{2}$, i, $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-i\,\dfrac{1}{2}$

c. $\pm\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-i\,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\sqrt[3]{2}\exp\left(i\,\dfrac{5+6k}{9}\,\pi\right)$, $k=0,1,2$

d. $\pm 2^{1/4}\left(\cos\left(\dfrac{7}{8}\,\pi\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{7}{8}\,\pi\right)\right)$;

$2^{1/6}\left(\cos\left(\dfrac{7}{12}\,\pi\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{7}{12}\,\pi\right)\right)$, $-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}-i\,\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $2^{1/6}\left(\cos\left(\dfrac{23}{12}\,\pi\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{23}{12}\,\pi\right)\right)$

e. $\pm 5^{1/4}\exp\left(i\,\dfrac{-\arctan 2+\pi}{2}\right)$; $5^{1/6}\exp\left(i\,\dfrac{-\arctan 2+k\pi}{3}\right)$, $k=1,3,5$

f. $\pm 5^{1/4}\exp\left(i\,\dfrac{\arctan(1/2)}{2}\right)$; $5^{1/6}\exp\left(i\,\dfrac{\arctan(1/2)+2k\pi}{3}\right)$, $k=0,1,2$

9) L'equazione è di secondo grado, per risolverla occorre innanzitutto calcolare le radici quadrate del discriminante (che indichiamo con Δ), o meglio, poiché nel coefficiente del termine di primo grado si può raccogliere il fattore 2, le radici quadrate di $\Delta/4$. Si ha

$$\frac{\Delta}{4}=\left(\sqrt{3}+3i\right)^2-2\left(1-i\sqrt{3}\right)=3+i6\sqrt{3}-9-2+i2\sqrt{3}=-8+i8\sqrt{3}.$$

Per calcolare le radici quadrate di $\Delta/4$ dobbiamo trovarne il modulo e un argomento.

$$\left|\frac{\Delta}{4}\right|=\sqrt{(-8)^2+\left(8\sqrt{3}\right)^2}=8\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=8\sqrt{4}=16.$$

Poiché $\Delta/4$ ha parte reale negativa, un argomento è

$$\arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(\Delta/4)}{\operatorname{Re}(\Delta/4)}\right)+\pi=\arctan\left(\frac{8\sqrt{3}}{-8}\right)+\pi=-\arctan\left(\sqrt{3}\right)+\pi=-\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{2}{3}\pi\,.$$

Perciò le radici quadrate di $\Delta/4$ sono

$$\pm\sqrt{16}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\,\frac{2\pi}{3}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\,\frac{2\pi}{3}\right)\right)=\pm 4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)=\pm\left(2+i2\sqrt{3}\right).$$

Le soluzioni dell'equazione sono quindi

$$\frac{-\sqrt{3}-3i\pm\left(2+i2\sqrt{3}\right)}{2}=\begin{cases}\dfrac{-\sqrt{3}-3i-2-i2\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}-i\,\dfrac{2\sqrt{3}+3}{2}\,,\\[2ex] \dfrac{-\sqrt{3}-3i+2+i2\sqrt{3}}{2}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}+i\,\dfrac{2\sqrt{3}-3}{2}\,.\end{cases}$$

10) Se due numeri complessi elevati al cubo sono uguali, allora o sono entrambi nulli, oppure il cubo del loro quoziente è 1, quindi il quoziente è una radice cubica di 1. In ciascuno dei due casi ognuno dei due numeri è uguale all'altro moltiplicato per una delle radici cubiche di 1. Le radici cubiche di 1 sono

$$r_k=\cos\left(\frac{2k}{3}\pi\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{2k}{3}\pi\right),$$

per $k=0,1,2$, quindi

$$\begin{aligned}r_0&=\cos 0+i\operatorname{sen}0=1\,,\\ r_1&=\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{2}{3}\pi\right)=-\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\\ r_2&=\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{4}{3}\pi\right)=-\frac{1}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,.\end{aligned}$$

Perciò le soluzioni dell'equazione si ottengono risolvendo le tre equazioni

$$\begin{aligned}&\frac{1}{z^2}-i4\sqrt{3}=1-i3\sqrt{3}\,,\\ &\frac{1}{z^2}-i4\sqrt{3}=\left(-\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(1-i3\sqrt{3}\right),\\ &\frac{1}{z^2}-i4\sqrt{3}=\left(-\frac{1}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(1-i3\sqrt{3}\right).\end{aligned}$$

La prima equazione equivale a

$$\frac{1}{z^2}=i4\sqrt{3}+1-i3\sqrt{3}=1+i\sqrt{3}\,,$$

da cui $z^2 = 1/\big(1+i\sqrt{3}\big)$. Determiniamo le radici quadrate di $1/\big(1+i\sqrt{3}\big)$. Si ha

$$\left|\frac{1}{1+i\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1^2+\big(\sqrt{3}\big)^2}} = \frac{1}{2}$$

e un argomento di $1/\big(1+i\sqrt{3}\big)$ è l'opposto di un argomento di $1+i\sqrt{3}$, cioè l'opposto di $\arctan\sqrt{3}$, quindi è $-\pi/3$. Perciò si ha

$$z = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\,\frac{1}{2}\right) = \pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}-i\,\frac{1}{2\sqrt{2}}\right).$$

La seconda equazione equivale a

$$\frac{1}{z^2} = i4\sqrt{3}+\left(-\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\big(1-i3\sqrt{3}\big) = i4\sqrt{3}-\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{9}{2} = 4+i6\sqrt{3},$$

da cui $z^2 = 1/\big(4+i6\sqrt{3}\big)$. Determiniamo le radici quadrate di $1/\big(4+i6\sqrt{3}\big)$. Si ha

$$\left|\frac{1}{4+i6\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{4^2+\big(6\sqrt{3}\big)^2}} = \frac{1}{\sqrt{124}}$$

e un argomento di $1/\big(4+i6\sqrt{3}\big)$ è l'opposto di un argomento di $4+i6\sqrt{3}$, cioè l'opposto di $\arctan\big(6\sqrt{3}/4\big)$, quindi $-\arctan\big(3\sqrt{3}/2\big)$; perciò si ha

$$z = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{124}}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)-i\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\right).$$

La terza equazione equivale a

$$\frac{1}{z^2} = i4\sqrt{3}+\left(-\frac{1}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\big(1-i3\sqrt{3}\big) = i4\sqrt{3}-\frac{1}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{9}{2} = -5+i5\sqrt{3},$$

da cui $z^2 = 1/\big(-5+i5\sqrt{3}\big)$. Determiniamo le radici quadrate di $1/\big(-5+i5\sqrt{3}\big)$. Si ha

$$\left|\frac{1}{-5+i5\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{(-5)^2+\big(5\sqrt{3}\big)^2}} = \frac{1}{10}$$

mentre un argomento di $1/\big(-5+i5\sqrt{3}\big)$ è l'opposto di un argomento di $-5+i5\sqrt{3}$, cioè l'opposto di $\arctan\big(-5\sqrt{3}/5\big)-\pi$, quindi $(4/3)\pi$; perciò si ha

$$z = \pm\sqrt{\frac{1}{10}}\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right) = \pm\sqrt{\frac{1}{10}}\left(-\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pm\left(-\frac{1}{2\sqrt{10}}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{10}}\right).$$

Perciò l'equazione ha le sei soluzioni

$$z=\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}-i\,\frac{1}{2\sqrt{2}}\right),$$

$$z=\pm\left(\frac{1}{\sqrt[4]{124}}\cos\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)-i\,\frac{1}{\sqrt[4]{124}}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\right),$$

$$z=\pm\left(\frac{1}{2\sqrt{10}}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{10}}\right).$$

11) Per risolvere l'equazione si può evitare di sviluppare il quadrato a primo membro, perché la sesta potenza è il quadrato di un cubo, quindi l'equazione si può riscrivere come uguaglianza tra potenze con esponenti uguali. Otteniamo l'equazione

$$\left(\frac{(-1+i)z-1-i}{z^2+2iz-1}\right)^2=\left((1+i)^3\right)^2.$$

Poiché

$$(1+i)^3=1+3i+3i^2+i^3=1+3i-3-i=-2+2i\,,$$

l'equazione equivale a

$$\left(\frac{(-1+i)z-1-i}{z^2+2iz-1}\right)^2=(-2+2i)^2.$$

Il numero complesso z è soluzione di questa equazione se e solo se è soluzione di una delle seguenti equazioni

$$\frac{(-1+i)z-1-i}{z^2+2iz-1}=-2+2i\,,$$

$$\frac{(-1+i)z-1-i}{z^2+2iz-1}=2-2i\,.$$

La prima equazione equivale, successivamente, a

$$\frac{(-1+i)z-1-i-(z^2+2iz-1)(-2+2i)}{z^2+2iz-1}=0,$$

$$\frac{(-1+i)z-1-i+(2-2i)z^2+(4i+4)z-2+2i}{z^2+2iz-1}=0,$$

$$\frac{(2-2i)z^2+(3+5i)z-3+i}{z^2+2iz-1}=0.$$

Il denominatore è il quadrato di $z+i$, perciò si annulla se e solo se $z=-i$. Quindi z è soluzione se e solo se annulla il numeratore ed è diverso da $-i$. Risolviamo l'equazione

$$(2-2i)z^2+(3+5i)z-3+i=0.$$

Il discriminante del polinomio di secondo grado di cui cerchiamo gli zeri è

$$\Delta=(3+5i)^2-4(2-2i)(-3+i)=9+30i-25+24-8i-24i-8=-2i\,.$$

Poiché $-2i$ ha modulo 2 e un suo argomento è $(3/2)\pi$, le sue radici quadrate sono

$$\pm\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right)=\pm\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\pm(-1+i).$$

Pertanto si ha

$$z=\frac{-(3+5i)\pm(-1+i)}{2(2-2i)}=\begin{cases}\dfrac{-2-6i}{2(2-2i)}=\dfrac{-1-3i}{2-2i},\\[2mm] \dfrac{-4-4i}{2(2-2i)}=\dfrac{-2-2i}{2-2i}.\end{cases}$$

perciò vi sono le due soluzioni

$$\frac{-1-3i}{2-2i}=\frac{(-1-3i)(2+2i)}{|2-2i|^2}=\frac{-2-2i-6i+6}{2^2+(-2)^2}=\frac{4-8i}{8}=\frac{1}{2}-i,$$
$$\frac{-2-2i}{2-2i}=\frac{(-2-2i)(2+2i)}{|2-2i|^2}=\frac{-4-4i-4i+4}{2^2+(-2)^2}=\frac{-8i}{8}=-i.$$

La soluzione $z=-i$ va scartata perché, come visto sopra, annulla il denominatore.

In modo analogo si procede per risolvere la seconda equazione, cioè

$$\frac{(-1+i)z-1-i}{z^2+2iz-1}=2-2i,$$

che è equivalente a

$$\frac{(-1+i)z-1-i-(z^2+2iz-1)(2-2i)}{z^2+2iz-1}=0,$$
$$\frac{(-1+i)z-1-i-(2-2i)z^2-(4i+4)z+2-2i}{z^2+2iz-1}=0,$$
$$\frac{(-2+2i)z^2-(5+3i)z+1-3i}{z^2+2iz-1}=0.$$

Risolviamo l'equazione

$$(-2+2i)z^2-(5+3i)z+1-3i=0.$$

Il discriminante del trinomio è

$$\Delta=(5+3i)^2-4(-2+2i)(1-3i)=25+30i-9+8-24i-8i-24=-2i;$$

sappiamo che le radici quadrate di $-2i$ sono $\pm(-1+i)$ e quindi l'equazione ha le soluzioni

$$z=\frac{5+3i\pm(-1+i)}{2(-2+2i)}=\begin{cases}\dfrac{6+2i}{2(2-2i)}=\dfrac{3+i}{2-2i},\\[2mm] \dfrac{4+4i}{2(2-2i)}=\dfrac{2+2i}{2-2i}.\end{cases}$$

cioè

$$\frac{(3+i)(-2-2i)}{|-2+2i|^2}=\frac{-6-6i-2i+2}{(-2)^2+2^2}=-\frac{4+8i}{8}=-\frac{1}{2}-i\,,$$
$$\frac{(3+i)(-2-2i)}{|-2+2i|^2}=\frac{-6-6i-2i+2}{(-2)^2+2^2}=-\frac{4+8i}{8}=-\frac{1}{2}-i\,.$$

La soluzione $z=-i$ è da scartare.

Quindi l'equazione ha le due soluzioni

$$z=\frac{1}{2}-i\,,\qquad\qquad z=-\frac{1}{2}-i\,.$$

12)

a. $-\frac{1}{2}-i\,\frac{\sqrt{31}}{2}\,,\ -\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{31}}{2}$

b. $\frac{\sqrt{7}}{2}-i\,\frac{1}{2}\,,\ -\frac{\sqrt{7}}{2}-i\,\frac{1}{2}$

c. $-2+i\,,\ -i$

d. $i\,\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{3}\,,\ i\,\frac{\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{3}$

e. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{\sqrt{6}-3}{2}\,,\ -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}-i\,\frac{\sqrt{6}+3}{2}$

f. $\pm 37^{1/4}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{6}\right)+i\left(\sqrt{6}\pm 37^{1/4}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{6}\right)\right)$

g. $1-i\,,\ -1-3i$

h. $0\,,\ \frac{1}{\sqrt{2}}-i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}+i\,\frac{1}{\sqrt{2}}$

i. $\pm 2^{1/4}\exp\left(i\,\frac{\pi}{8}\right),\ \pm 10^{1/4}\exp\left(i\,\frac{\arctan 3}{2}\right)$

j. $-1\,,\ \frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\ \frac{1}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\ 2\,,\ -1+i\sqrt{3}\,,\ -1-i\sqrt{3}$

k. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+i\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+i\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+i\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+i\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$
$i(1+\sqrt{2}),\ i(1-\sqrt{2})$

l. $0\,,\ \pm i\,\frac{4}{\sqrt{3}}\,,\ \pm i4\sqrt{3}$

m. $\sqrt[4]{2}\cos\left(\frac{5}{8}\pi\right)+i\left(-\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{5}{8}\pi\right)\right)$, $-\sqrt[4]{2}\cos\left(\frac{5}{8}\pi\right)+i\left(-\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{5}{8}\pi\right)\right)$, $\sqrt[4]{2}\cos\left(\frac{3}{8}\pi\right)+i\left(-\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{3}{8}\pi\right)\right)$, $-\sqrt[4]{2}\cos\left(\frac{3}{8}\pi\right)+i\left(-\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{3}{8}\pi\right)\right)$

n. $\frac{6}{41}-i\,\frac{13}{41}$, $-\frac{6}{25}-i\,\frac{17}{25}$

o. $-2i$, $i\,\frac{1}{2}$, $-i\,\frac{2}{3}$

p. $\pm i(\sqrt{2}+1)$, $\pm i(\sqrt{2}-1)$

q. 0, $\pm i\,\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}$, $\pm\left(\frac{3^{1/4}}{2}+i\,\frac{3^{3/4}}{2}\right)$

r. $\frac{\sqrt{3}}{2}-i\,\frac{3}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\,\frac{1}{2}$, 0, $-2i$, $\frac{1}{\sqrt{2}}-i\left(1+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\left(-1+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$

s. $i\,\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{3}$, $i\,\frac{-\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{3}$, $i\,\frac{\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{3}$, $i\,\frac{-\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{3}$

t. $\frac{1}{2}+\sqrt[4]{2}\cos\left(\frac{3}{8}\pi\right)+i\left(\frac{3}{2}+\sqrt[4]{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{3}{8}\pi\right)\right)$, $\frac{1}{2}-\sqrt[4]{2}\cos\left(\frac{3}{8}\pi\right)+i\left(\frac{3}{2}-\sqrt[4]{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{3}{8}\pi\right)\right)$, $-\frac{1}{2}+\sqrt[4]{2}\cos\left(\frac{3}{8}\pi\right)+i\left(-\frac{3}{2}+\sqrt[4]{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{3}{8}\pi\right)\right)$, $-\frac{1}{2}-\sqrt[4]{2}\cos\left(\frac{3}{8}\pi\right)+i\left(-\frac{3}{2}-\sqrt[4]{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{3}{8}\pi\right)\right)$

13) Si ha

$$\frac{\exp\left((2-i)^2\right)}{e^{3i}}=\exp(4-2i-1)\,e^{-3i}=\exp(4-4i-1-3i)=\exp(3-7i)=e^3\,\mathrm{sen}\,7-i\,e^3\cos 7\,.$$

14)

a. $e^{-2}\cos 3+i\,e^{-2}\,\mathrm{sen}\,3$

b. $e^{2}\cos 11+i\,e^{2}\,\mathrm{sen}\,11$

c. $e^{-1}\cos 3+i\,e^{-1}\,\mathrm{sen}\,3$

d. $\cos 8+i\,\mathrm{sen}\,8$

15) Si ha

$$|(-3+4i)\,e^{1+i}|=|-3+4i|\,|e^{1+i}|=\sqrt{(-3)^2+4^2}\,e^{\mathrm{Re}(1+i)}=\sqrt{25}\,e^1=5e\,.$$

Poiché $-3+4i$ ha parte reale negativa, un suo argomento è $\pi-\arctan(4/3)$; un argomento di e^{1+i} è $\mathrm{Im}(1+i)=1$. Quindi un argomento di $(-3+4i)e^{1+i}$ è $\pi-\arctan(4/3)+1$. Si ha quindi

$$(-3+4i)\,e^{1+i}=5e\left(\cos\left(\pi-\arctan\frac{4}{3}+1\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\pi-\arctan\frac{4}{3}+1\right)\right).$$

16)

a. $3e^2\big(\cos(-4)+i\,\mathrm{sen}(-4)\big)$

b. $e^6\big(\cos(-4)+i\,\mathrm{sen}(-4)\big)$

c. $e^5\big(\cos(-12)+i\,\mathrm{sen}(-12)\big)$

d. $\sqrt{2}\,e^2\left((\cos\left(1-\frac{\pi}{4}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

17) Se $e^{1/z}=-1-2i$, allora $1/z$ ha parte reale uguale a $\log|-1-2i|$ e coefficiente dell'immaginario uguale a uno degli argomenti di $-1-2i$. Si ha $|-1-2i|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$ e un argomento di $-1-2i$ è $\arctan 2+\pi$, quindi gli argomenti di tale numero sono i numeri reali della forma $\arctan 2+(2k+1)\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$; perciò

$$\frac{1}{z}=\log\sqrt{5}+i\big(\arctan 2+(2k+1)\pi\big).$$

Quindi si hanno le soluzioni

$$z=\frac{1}{\log\sqrt{5}+i\big(\arctan 2+(2k+1)\pi\big)}=\frac{\log\sqrt{5}-i\big(\arctan 2+(2k+1)\pi\big)}{\big(\log\sqrt{5}\big)^2+\big(\arctan 2+(2k+1)\pi\big)^2},\qquad k\in\mathbb{Z}.$$

18) Il numero z è soluzione dell'equazione se e solo se $e^z+i/2$ è una delle radici cubiche di i. Poiché i ha modulo 1 e un suo argomento è $\pi/2$, le sue radici cubiche sono

$$\cos\left(\frac{(\pi/2)+2k\pi}{3}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{(\pi/2)+2k\pi}{3}\right),$$

con $k=0,1,2$; si ha

$$\cos\frac{\pi}{6}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{1}{2},$$

$$\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{5}{6}\pi\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{1}{2},$$

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{3}{2}\pi\right)=-i\,.$$

Quindi abbiamo le seguenti equazioni:

$$e^z+i\,\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{1}{2},\qquad e^z+i\,\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{1}{2},\qquad e^z+i\,\frac{1}{2}=-i\,,$$

cioè:

$$e^z=\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad e^z=-\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad e^z=-i\,\frac{3}{2}\,.$$

Le soluzioni sono

$$z=\log\frac{\sqrt{3}}{2}+i2k\pi,\qquad k\in\mathbb{Z},$$

$$z=\log\frac{\sqrt{3}}{2}+i(2k+1)\pi,\qquad k\in\mathbb{Z},$$

$$z=\log\frac{3}{2}+i\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi,\qquad k\in\mathbb{Z}.$$

19) Moltiplicando entrambi i membri per e^{iz}, l'equazione diventa

$$e^{2iz}-2i=\left(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)e^{iz},$$

cioè

$$e^{2iz}+\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)e^{iz}-2i=0.$$

Ponendo $w=e^{iz}$ si ottiene l'equazione di secondo grado

$$w^2+\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)w-2i=0.$$

Il discriminante del trinomio a primo membro è

$$\Delta=\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)^2-4\cdot(-2i)=2-4i-2+8i=4i.$$

Poiché $|4i|=4$ e un argomento di $4i$ è $\pi/2$, le radici quadrate del discriminante sono

$$\pm\sqrt{4}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)=\pm2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\pm\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right),$$

quindi si ha

$$w=\frac{-\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)\pm\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)}{2}=\begin{cases}\dfrac{-2\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2},\\[2mm] \dfrac{i2\sqrt{2}}{2}=i\sqrt{2}.\end{cases}$$

Perciò deve essere $e^{iz}=-\sqrt{2}$ o $e^{iz}=i\sqrt{2}$.

Poiché $-\sqrt{2}$ ha modulo $\sqrt{2}$ e un suo argomento è π, la prima equazione è verificata se

$$iz=\log\left(\sqrt{2}\right)+i\pi+i2k\pi,\qquad k\in\mathbb{Z},$$

cioè

$$z=\pi+2k\pi-i\,\frac{1}{2}\log 2,\qquad k\in\mathbb{Z}.$$

Poiché $i\sqrt{2}$ ha modulo $\sqrt{2}$ e un suo argomento è $\pi/2$, la seconda equazione è verificata se

$$iz=\log\left(\sqrt{2}\right)+\frac{\pi}{2}i+i2k\pi,\qquad k\in\mathbb{Z},$$

cioè

$$z=\frac{\pi}{2}+2k\pi-i\,\frac{1}{2}\log 2,\qquad k\in\mathbb{Z}.$$

20)

a. $\log 4+i\left(2k-\dfrac{1}{2}\right)\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$

b. $\dfrac{1}{2}\log 13+i\left((2k+1)\pi-\arctan\dfrac{2}{3}\right),\quad k\in\mathbb{Z}$

c. $\left(2k-\frac{1}{4}\right)\pi - i\,\frac{1}{2}\log 8\,, \quad k\in\mathbb{Z}$

d. $\frac{2k}{5}\,\pi + i\,\frac{4k}{5}\,\pi\,, \quad k\in\mathbb{Z}$

e. $\frac{1}{2}\log 5 + i\left(\arctan\frac{1}{2} + (2k+1)\pi\right),\ \frac{1}{2}\log 17 + i\left(-\arctan\frac{1}{4} + (2k+1)\pi\right), \quad k\in\mathbb{Z}$

f. $\frac{2}{3}\pi + 2k\pi - i\log 2\,,\ -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi - i\log 2\,, \quad k\in\mathbb{Z}$

g. $i(2k+1)\pi\,,\ \frac{1}{2}\log 2 + i\left(\frac{3}{4} + 2k\right)\pi\,, \quad k\in\mathbb{Z}$

h. $\frac{1}{4}\log 32 + i\left(\frac{5}{8} + k\right)\pi\,, \quad k\in\mathbb{Z}$

i. $-\log 2 - i(\pi + 2k\pi)\,,\ i\left(\frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right),\ i\left(-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right), \quad k\in\mathbb{Z}$

j. $\pi + 2k\pi\,,\ \frac{3}{4}\pi + 2k\pi - i\,\frac{1}{2}\log 2\,, \quad k\in\mathbb{Z}$

k. $\frac{1}{4}\log 2 + \left(k + \frac{1}{8}\right)\pi + \left(-\frac{1}{4}\log 2 + i\left(k + \frac{1}{8}\right)\pi\right), \quad k\in\mathbb{Z}\,.$

l. $\frac{\pi}{4} + k\pi\,,\ \frac{\pi}{2} + k\pi\,, \quad k\in\mathbb{Z}$

21) Poiché nell'equazione compaiono il modulo e il coniugato dell'incognita z, è utile esprimerla tramite parte reale e coefficiente dell'immaginario di z. Poniamo quindi $z = x + iy$, con $x, y\in\mathbb{R}$. L'equazione diventa, successivamente,

$$(x+iy)^2 + \overline{x+iy} + |x+iy|^2 = 1\,,$$
$$x^2 + 2ixy - y^2 + x - iy + x^2 + y^2 = 1\,,$$
$$2x^2 + x + i(2xy - y) = 1\,.$$

Uguagliando la parte reale e il coefficiente dell'immaginario dei due membri dell'equazione, otteniamo il seguente sistema di due equazioni in campo reale

$$\begin{cases} 2x^2 + x = 1\,, \\ 2xy - y = 0\,. \end{cases}$$

La prima è un'equazione di secondo grado nella sola variabile x, che ha soluzione

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 2\cdot(-1)}}{4} = \frac{-1\pm 3}{4} = \begin{cases} -1\,, \\ \frac{1}{2}\,. \end{cases}$$

Per $x=1/2$ la seconda equazione diventa $y-y=0$, quindi l'equazione è soddisfatta qualunque sia y. Per $x=-1$ si ha invece $-2y-y=0$ che è soddisfatta per $y=0$.

Quindi le soluzioni sono

$$z=-1, \qquad z=\frac{1}{2}+iy, \qquad y\in\mathbb{R}.$$

22) Risolviamo l'equazione esprimendo z in forma algebrica e trasformando l'equazione nel campo complesso in un sistema di due equazioni in campo reale. Posto quindi $z=x+iy$, con $x,y\in\mathbb{R}$, l'equazione diventa, successivamente,

$$\begin{gathered}
(x+iy)^3+(x+iy)(x-iy)^2+3(x-iy)y+2x=0,\\
x^3+3ix^2y-3xy^2-iy^3+(x^2+y^2)(x-iy)+3xy-3iy^2+2x=0,\\
x^3+3ix^2y-3xy^2-iy^3+x^3+xy^2-ix^2y-iy^3+3xy-3iy^2+2x=0,\\
2x^3+2ix^2y-2xy^2-2iy^3+3xy-3iy^2+2x=0.
\end{gathered}$$

Uguagliando a 0 parte reale e coefficiente dell'immaginario del primo membro si ottiene il sistema di due equazioni in campo reale

$$\begin{cases}2x^3-2xy^2+3xy+2x=0,\\ 2x^2y-2y^3-3y^2=0.\end{cases}$$

Questo sistema può essere scritto come

$$\begin{cases}x(2x^2-2y^2+3y+2)=0,\\ y(2x^2-2y^2-3y)=0;\end{cases}$$

ciascuna equazione è verificata se e solo se almeno uno dei fattori a primo membro si annulla, dunque si può scomporre in due equazioni. Quindi, considerando i vari casi possibili, otteniamo quattro sistemi; l'insieme delle soluzioni del sistema è uguale all'unione degli insiemi delle soluzioni dei quattro sistemi. Tali sistemi sono

$$\begin{cases}x=0,\\ y=0,\end{cases}$$
$$\begin{cases}x=0,\\ 2x^2-2y^2-3y=0,\end{cases}$$
$$\begin{cases}2x^2-2y^2+3y+2=0,\\ y=0,\end{cases}$$
$$\begin{cases}2x^2-2y^2+3y+2=0,\\ 2x^2-2y^2-3y=0.\end{cases}$$

Il primo sistema ha soluzione $x=0$, $y=0$, cioè $z=0$.

Ponendo $x=0$, la seconda equazione del secondo sistema diventa $-2y^2-3y=0$, che ha le soluzioni $y=0$ e $y=-3/2$. Quindi si ha $z=0$ (soluzione già trovata) e $z=-i3/2$.

Ponendo $y=0$, la prima equazione del terzo sistema diventa $2x^2+2=0$ che non ha soluzioni reali.

Infine nell'ultimo sistema, sottraendo membro a membro la seconda equazione dalla prima, si ottiene $6y+2=0$, quindi $y=-1/3$. Sostituendo nella prima equazione si ottiene $2x^2+7/9=0$ che non ha soluzione.

Perciò l'equazione ha le due soluzioni

$$z=0, \qquad z=-\frac{3}{2}\,i\,.$$

23) Uguagliando i moduli dei due membri dell'equazione si ha

$$|z|^4=\left|1+i\sqrt{3}\right|\left|\overline{z}\right|^2,$$

cioè

$$|z|^4=2|z|^2.$$

Pertanto o $z=0$, oppure $|z|^2=2$, cioè $|z|=\sqrt{2}$.

Se $|z|=\sqrt{2}$, allora esiste $\theta\in\mathbb{R}$ tale che $z=\sqrt{2}\,e^{i\theta}$. Poiché un argomento di $1+i\sqrt{3}$ è $\arctan\left(\sqrt{3}\right)=\pi/3$ e un argomento di $\overline{z}$ è $-\theta$, l'equazione diventa

$$4e^{i4\theta}=2e^{i\pi/3}2e^{-i2\theta}=4e^{i(\pi/3-2\theta)},$$

cioè

$$e^{i4\theta}=e^{i(\pi/3-2\theta)}.$$

Questa è soddisfatta se e solo se esiste $k\in\mathbb{Z}$ tale che

$$4\theta=\frac{\pi}{3}-2\theta+2k\pi,$$

cioè

$$\theta=\frac{\pi}{18}+\frac{k}{3}\,\pi\,.$$

È sufficiente considerare $k=0,1,2,3,4,5$, perché per altri valori di k si ottengono valori di θ che differiscono per un multiplo intero di 2π da valori già ottenuti.

Pertanto l'equazione ha le soluzioni

$$z=0, \qquad z=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{18}+\frac{k}{3}\,\pi\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{18}+\frac{k}{3}\,\pi\right)\right), \qquad k=0,1,2,3,4,5.$$

24)

a. 0, $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}-i\,\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}-i\,\dfrac{1}{2}$

b. $\dfrac{2}{5}+i\,\dfrac{1}{5}$

c. $1-i$, $-1+i$

d. $2-i\,\dfrac{1}{2}$, $-2+i\,\dfrac{1}{2}$

e. 0, i, $\sqrt{2}-i$, $-\sqrt{2}-i$

f. $\exp\left(i\,\dfrac{\pi}{6}\right)$, $\exp\left(i\,\dfrac{5}{6}\,\pi\right)$, $\exp\left(i\,\dfrac{3}{2}\,\pi\right)$

3
Integrali

3.1 Esercizi

Primitive

Per il teorema di Torricelli, il calcolo degli integrali di funzioni continue si riduce alla ricerca di una primitiva. Infatti, se $: f[a,b] \to \mathbb{R}$ è continua e F è una sua primitiva, allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Quindi l'integrale è uguale alla differenza tra i valori assunti dalla primitiva negli estremi del dominio di integrazione. Per indicare tale differenza si utilizza una notazione particolare. Poniamo

$$\big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Riportiamo una tabella di primitive che si ricava facilmente conoscendo le derivate delle funzioni elementari.

Funzione	Primitiva	Funzione	Primitiva
$c \quad (c \in \mathbb{R})$	cx	e^x	e^x
$x^b \quad (b \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$\dfrac{1}{b+1} x^{b+1}$	$\dfrac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert$
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x$	$\operatorname{senh} x$	$\cosh x$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x$	$\cosh x$	$\operatorname{senh} x$
$\tan x$	$-\log\lvert\cos x\rvert$	$\tanh x$	$\log(\cosh x)$
$\cot x$	$\log\lvert\operatorname{sen} x\rvert$	$\coth x$	$\log\lvert\operatorname{senh} x\rvert$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$	$\tanh x$
$\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$	$-\cot x$	$\dfrac{1}{\operatorname{senh}^2 x}$	$-\coth x$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsen x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{settsenh} x$
$\dfrac{1}{x^2+1}$	$\arctan x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{settcosh} x$

Sia $f: I \to \mathbb{R}$, con I intervallo di $\mathbb{R}$, indichiamo l'insieme delle primitive di f con

$$\int f(x)\,dx\,.$$

Se tale insieme è non vuoto ha infiniti elementi; due primitive qualunque differiscono per una costante e sommando una costante a una primitiva si ottiene ancora una primitiva. Pertanto, se F è una primitiva di f, allora

$$\int f(x)\,dx = \{x \mapsto F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}\,.$$

Solitamente si utilizza una notazione meno precisa, ma più semplice, scrivendo:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c\,.$$

È utile ricordare che la derivata della somma di due funzioni è la somma delle derivate, quindi la somma di primitive di due funzioni è una primitiva della somma. Analogamente la derivata del prodotto di una costante per una funzione è il prodotto della costante per la derivata della funzione, quindi un fatto analogo vale per le primitive. In formule si ha

$$\int \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\,,$$

$$\int \lambda f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx\,.$$

3.1.1 Esempio. Calcoliamo

$$\int (3\cos x + 2e^x)\,dx\,.$$

Una primitiva della funzione coseno è la funzione seno, pertanto una primitiva della funzione $x \mapsto 3\cos x$ è la funzione $x \mapsto 3\,\mathrm{sen}\,x$. Una primitiva della funzione esponenziale è la funzione esponenziale stessa, pertanto una primitiva della funzione $x \mapsto 2e^x$ è la funzione $x \mapsto 2e^x$. Quindi

$$\int (3\cos x + 2e^x)\,dx = 3\cos x + 2e^x + c\,.$$

Possiamo esprimere in formule questo ragionamento come segue:

$$\int (3\cos x + 2e^x)\,dx = \int 3\cos x\,dx + \int 2e^x\,dx = 3\int \cos x\,dx + 2\int e^x\,dx = 3\,\mathrm{sen}\,x + 2e^x + c\,.$$

◀

Utilizzando la tabella è facile ricavare altre primitive.

Ad esempio, sia F una primitiva della funzione f e siano $a \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}$; poniamo $G(x) = F(ax + b)$, per gli x per cui tale scrittura ha senso. La funzione G è derivabile e si ha $G'(x) = F'(ax + b)a = af(ax + b)$. Pertanto la funzione $x \mapsto G(x)/a$ è una primitiva di $x \mapsto f(ax + b)$.

3.1.2 Esempio. Calcoliamo
$$\int_0^{\pi} \cos(3x+\pi)\,dx\,.$$

Una primitiva della funzione coseno è la funzione seno, quindi è facile verificare che una primitiva della funzione $x \mapsto \cos(3x+\pi)$ è la funzione $x \mapsto (1/3)\operatorname{sen}(3x+\pi)$, perciò si ha
$$\int_0^{\pi/2} \cos(3x+\pi)\,dx = \left[\frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x+\pi)\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{5}{2}\pi\right) - \operatorname{sen}\pi\right) = \frac{1}{3}\,.$$ ◀

Inoltre, se $f \in C\big([a,b],\mathbb{R}\big)$, F è una sua primitiva e $g \in C^1\big([\alpha,\beta],\mathbb{R}\big)$ è tale che $g\big([\alpha,\beta]\big) \subseteq [a,b]$, allora, dal teorema sulla derivata della composizione, segue immediatamente che $F \circ g$ è una primitiva di $(f \circ g)g'$.

3.1.3 Esempio. Calcoliamo
$$\int \frac{e^x+1}{e^x+x}\,dx\,.$$

La funzione integranda è della forma $(1/g)g'$, con g la funzione $x \mapsto e^x + x$. Poiché una primitiva della funzione $y \mapsto 1/y$ è la funzione $y \mapsto \log|y|$, risulta
$$\int \frac{e^x+1}{e^x+x}\,dx = \log|e^x+x| + c\,.$$ ◀

Integrazione per parti

Un importante strumento per il calcolo degli integrali è la formula di integrazione per parti.

Date $f, g \in C^1\big([a,b],\mathbb{R}\big)$, si ha
$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx\,, \tag{3.1.1}$$
oppure, per gli integrali definiti,
$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \big[f(x)g(x)\big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx\,. \tag{3.1.2}$$

Per utilizzare la formula la funzione integranda deve essere espressa come prodotto di due funzioni, di una delle quali si conosce una primitiva; si ottiene la somma di due addendi, uno dei quali è ancora un integrale. L'applicazione della formula risulta utile quando l'integrale che rimane da calcolare è più semplice di quello di partenza.

3.1.4 Esempio. Calcoliamo
$$\int x\cos x\,dx\,.$$

Una primitiva della funzione coseno è la funzione seno, pertanto si può applicare la formula di integrazione per parti (3.1.1), con $f(x) = x$, $g(x) = \operatorname{sen} x$. Risulta quindi
$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + c\,.$$

Osserviamo che è nota anche una primitiva della funzione $x \mapsto x$, quindi si può applicare la formula di integrazione per parti anche con $f(x) = \cos x$, $g(x) = x^2/2$. In tal modo si ottiene

$$\int x \cos x \, dx = \frac{x^2}{2} \cos x + \int \frac{x^2}{2} \sin x \, dx \, .$$

L'applicazione della formula in questo modo non è di alcuna utilità, perché resta da calcolare un integrale più complicato di quello assegnato. ◀

La formula di integrazione per parti risulta in alcuni casi utile anche per calcolare integrali in cui la funzione integranda non è sotto forma di prodotto, come mostra il seguente esempio.

3.1.5 Esempio. Calcoliamo

$$\int \log x \, dx \, .$$

Per la formula di integrazione per parti (3.1.1) con $f(x) = \log x$ e $g(x) = x$ si ha

$$\int \log x \, dx = \int 1 \cdot \log x \, dx = x \log x - \int x \frac{1}{x} \, dx = x \log x - \int 1 \, dx = x \log x - x + c \, .$$ ◀

Integrazione per sostituzione

Un secondo fondamentale strumento per il calcolo degli integrali è la formula di integrazione per sostituzione.

Date $f \in C^1 I, \mathbb{R}$, $g \in C(J, \mathbb{R})$, con $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli tali che $f(I) \subseteq J$, si ha

$$\int g\big(f(x)\big) f'(x) \, dx = \int g(y) \, dy \Big|_{y=f(x)} , \tag{3.1.3}$$

oppure, per gli integrali definiti, per $a, b \in I$ si ha

$$\int_a^b g\big(f(x)\big) f'(x) \, dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y) \, dy \, . \tag{3.1.4}$$

Se inoltre f è iniettiva, per $\alpha, \beta \in f(I)$ si ha

$$\int_\alpha^\beta g(y) \, dy = \int_{f^{-1}(\alpha)}^{f^{-1}(\beta)} g\big(f(x)\big) f'(x) \, dx \, . \tag{3.1.5}$$

Con la formula di integrazione per sostituzione non si calcola direttamente l'integrale, ma questo viene trasformato. Risulta utile solo quando si sa calcolare l'integrale ottenuto. Nella forma (3.1.4) può essere utilizzata quando la funzione integranda ha una struttura particolare: è il prodotto di una funzione in cui la variabile x compare solo come argomento di una funzione f per la derivata di f. È evidente che in questo modo la funzione integranda si semplifica.

3.1.6 Esempio. Calcoliamo
$$\int_1^e \cos(\log x)\frac{1}{x}\,dx\,.$$

Possiamo applicare la formula di integrazione per sostituzione (3.1.4), con $f(x)=\log x$ e $g(y)=\cos y$. Si ha
$$\int_1^e \cos(\log x)\frac{1}{x}\,dx=\int_{\log 1}^{\log e}\cos y\,dy=\int_0^1\cos y\,dy=\big[\operatorname{sen} y\big]_0^1=\operatorname{sen}1\,.$$
◀

La formula di integrazione per sostituzione (3.1.5) è più facile da applicare, perché non è richiesta una particolare struttura della funzione integranda, ma solitamente l'integrale viene trasformato in uno più complicato. Vi sono tuttavia numerose situazioni in cui, con una opportuna scelta della funzione f, è possibile calcolare l'integrale trasformato.

3.1.7 Esempio. Calcoliamo
$$\int_1^2 e^{\sqrt{y}}\,dy\,.$$

Sia $f\colon[0,+\infty[\,\to\mathbb{R}$ tale che $f(x)=x^2$. La funzione f è di classe C^1, e si ha $f'(x)=2x$; inoltre f è iniettiva, con inversa $f^{-1}\colon[0,+\infty[\,\to\mathbb{R}$ tale che $f^{-1}(y)=\sqrt{y}$. Quindi si ha
$$\int_1^2 e^{\sqrt{y}}\,dy=\int_{\sqrt{1}}^{\sqrt{2}}e^{\sqrt{x^2}}2x\,dx=\int_1^{\sqrt{2}}2xe^x\,dx\,.$$
Si può facilmente calcolare questo integrale per parti:
$$\int_1^{\sqrt{2}}2xe^x\,dx=\big[2xe^x\big]_1^{\sqrt{2}}-\int_1^{\sqrt{2}}2e^x\,dx=\big[2xe^x-2e^x\big]_1^{\sqrt{2}}=2\big(\sqrt{2}-1\big)e^{\sqrt{2}}\,.$$
◀

Nel seguito studieremo varie situazioni in cui è utile applicare la formula di integrazione per sostituzione (3.1.5).

Integrali di funzioni polinomiali

È facile calcolare integrali di funzioni polinomiali, perché un polinomio è somma di monomi, di cui si conosce una primitiva.

3.1.8 Esempio. Calcoliamo
$$\int(3x^4-6x^2+5x)\,dx\,.$$

Una primitiva di x^4 è $x^5/5$, una primitiva di x^3 è $x^3/3$ e una primitiva della funzione x è $x^2/2$, pertanto
$$\int(3x^4-6x^2+5x)\,dx=\frac{3}{5}x^5-2x^3+\frac{5}{2}x^2+c\,.$$
◀

Integrali di funzioni razionali

Studiamo un metodo generale per l'integrazione delle funzioni razionali fratte. Tale metodo richiede di conoscere una scomposizione del denominatore nel prodotto di polinomi di primo grado e polinomi di secondo grado irriducibili (cioè privi di radici reali).

Osserviamo anzitutto che, se N e D sono polinomi tali che $\mathrm{gr}(N) \geq \mathrm{gr}(D)$, allora, effettuando la divisione tra polinomi e indicando con Q il quoziente e con R il resto, si ha

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{Q(x)D(x)+R(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)},$$

e $\mathrm{gr}(R) < \mathrm{gr}(D)$. Poiché conosciamo una primitiva di ogni funzione polinomiale, se conosciamo una primitiva di R/D, allora conosciamo anche una primitiva di N/D. Quindi è sufficiente trattare il caso delle funzioni razionali in cui il grado del numeratore è minore del grado del denominatore.

3.1.9 Esempio. Calcoliamo

$$\int \frac{x^3}{x+2}\,dx.$$

Il numeratore ha grado maggiore di quello del denominatore, che è di promo grado e si annulla per $x=-2$; effettuando la divisione con la regola di Ruffini abbiamo

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & & -2 & 4 & -8 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & -8 \end{array}$$

quindi il quoziente è x^2-2x+4 e il resto è -8. Perciò si ha

$$\int \frac{x^3}{x+2}\,dx = \int \left(x^2-2x+4-\frac{8}{x+2}\right)dx = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4x - 8\log|x+2| + c. \qquad \blacktriangleleft$$

Siano N e D polinomi tali che $\mathrm{gr}(N) < \mathrm{gr}(D)$. Sia x_0 uno zero di molteplicità r del polinomio D. Allora D può essere fattorizzato come

$$D(x) = (x-x_0)^r P(x),$$

con P polinomio tale che $P(x_0) \neq 0$ e $r \in \mathbb{N}^*$. Si ha

$$\frac{N(x)}{D(x)} - \frac{N(x_0)}{(x-x_0)^r P(x_0)} = \frac{N(x)}{(x-x_0)^r P(x)} - \frac{N(x_0)}{(x-x_0)^r P(x_0)} = \frac{P(x_0)N(x)-N(x_0)P(x)}{(x-x_0)^r P(x)P(x_0)}.$$

Il polinomio $P(x_0)N(x)-N(x_0)P(x)$ si annulla per $x=x_0$, quindi esiste un polinomio R tale che $P(x_0)N(x)-N(x_0)P(x) = (x-x_0)R(x)$. Pertanto

$$\begin{aligned}\frac{N(x)}{D(x)} &= \frac{N(x_0)}{(x-x_0)^r P(x_0)} + \frac{P(x_0)N(x)-N(x_0)P(x)}{(x-x_0)^r P(x)P(x_0)} = \\ &= \frac{N(x_0)}{(x-x_0)^r P(x_0)} + \frac{R(x)}{(x-x_0)^{r-1} P(x)P(x_0)}.\end{aligned}$$

Poiché il polinomio $(x-x_0)R(x)$ è combinazione lineare dei polinomi N e P, il suo grado è minore o uguale al massimo tra $\mathrm{gr}(N)$ e $\mathrm{gr}(P)$, pertanto è minore di $\mathrm{gr}(D)$, quindi nella funzione razionale $R(x)/\big((x-a)^{r-1}P(x)P(a)\big)$ il numeratore ha grado minore di quello del denominatore. Quindi si può ripetere il ragionamento fatto sopra per questa funzione razionale. Proseguendo, si prova che esistono r numeri $a_1, a_2, \ldots, a_r$ e un polinomio S tale che $\mathrm{gr}(S) < \mathrm{gr}(P)$ per cui

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \sum_{j=1}^{r} \frac{a_j}{(x-x_0)^j} + \frac{S(x)}{P(x)}.$$

Se P è costante, cioè di grado 0, l'ultimo addendo è nullo, in caso contrario si può ripetere il ragionamento con uno zero del polinomio P. Pertanto, se D può essere fattorizzato come

$$D(x) = C\prod_{\ell=1}^{n}(x-x_\ell)^{r_\ell},$$

con $r_\ell \in \mathbb{N}^*$, $x_\ell \in \mathbb{R}$ tali che $x_\ell \neq x_k$ per $\ell \neq k$, allora per $\ell = 1, 2, \ldots, n$ e $j = 1, 2, \ldots, r_\ell$ esiste $a_{\ell j} \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{j=1}^{r_\ell} \frac{a_{\ell j}}{(x-x_\ell)^j}. \tag{3.1.6}$$

Abbiamo così scomposto la funzione razionale nella somma di funzioni di ciascuna delle quali conosciamo una primitiva.

La determinazione dei coefficienti $a_{\ell j}$ nei casi concreti può essere fatta ripetendo il ragionamento fatto sopra, alternativamente si può scrivere l'uguaglianza (3.1.6) con dei coefficienti $a_{\ell j}$ incogniti e ridurre a denominatore comune il secondo membro; si ottiene così una uguaglianza tra funzioni razionali con lo stesso denominatore (a meno di costanti moltiplicative), imponendo l'identità tra i polinomi a numeratore si ottiene un sistema di equazioni da cui si ricavano i coefficienti $a_{\ell j}$.

3.1.10 Esempio. Calcoliamo

$$\int \frac{4x^2}{x^3+x^2-x-1}\,dx.$$

Risulta

$$x^3+x^2-x-1 = x^2(x+1)-(x+1) = (x^2-1)(x+1) = (x-1)(x+1)^2.$$

Come visto sopra, esistono $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{4x^2}{x^3+x^2-x-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{x+1}.$$

Per determinare a, b e c riduciamo a denominatore comune il secondo membro. Si ha

$$\begin{aligned}\frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{x+1} &= \frac{a(x+1)^2 + b(x-1) + c(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)^2} =\\ &= \frac{ax^2+2ax+a+bx-b+cx^2-c}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{(a+c)x^2+(2a+b)x+a-b-c}{(x-1)(x+1)^2}.\end{aligned}$$

Deve essere

$$4x^2 = (a+c)x^2 + (2a+b)x + a - b - c\,,$$

quindi, per il principio di identità dei polinomi, a, b e c sono soluzione del sistema

$$\begin{cases} a+c=4\,, \\ 2a+b=0\,, \\ a-b-c=0\,. \end{cases}$$

Sommando membro a membro le tre equazioni si ottiene $4a=4$, pertanto $a=1$. Dalla prima equazione segue $c=3$ e dalla seconda $b=-2$. Pertanto

$$\int \frac{4x^2}{x^3+x^2-x-1}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{3}{x+1}\right) dx =$$
$$= \log|x-1| + \frac{2}{x+1} + 3\log|x+1| + c\,.$$

◀

Abbiamo visto come determinare una primitiva di una funzione razionale N/D quando D ha solo zeri reali. Se D ha zeri complessi, allora non può essere fattorizzato in polinomi di primo grado in campo reale; in tal caso la procedura illustrata sopra consente la scomposizione di N/D solo passando in campo complesso. Dalla scomposizione in campo complesso si può ottenere una scomposizione in campo reale con funzioni razionali i cui denominatori sono potenze dei fattori di secondo grado irriducibili di D.

Infatti se $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ è una radice di D di molteplicità r, allora anche $\overline{z}_0$ è una radice di D di molteplicità r. Quindi si ha la scomposizione

$$D(x) = (x-z_0)^r (x-\overline{z}_0)^r P(x)\,,$$

con P polinomio a coefficienti reali che non si annulla per $x=z_0$ né per $x=\overline{z}_0$. Per quanto già visto si ha

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \sum_{j=1}^{r} \frac{a_j}{(x-z_0)^j} + \sum_{j=1}^{r} \frac{b_j}{(x-\overline{z}_0)^j} + \frac{S(x)}{P(x)} = \frac{R(x)}{\left(x^2 - 2\,\mathrm{Re}\,z_0\,x + |z_0|^2\right)^r} + \frac{S(x)}{P(x)}\,,$$

con R e S polinomi tali che $\mathrm{gr}(R) < 2r$ e $\mathrm{gr}(S) < \mathrm{gr}(P)$. Proviamo che R e S hanno coefficienti reali. Semplifichiamo la notazione ponendo $\alpha = -2\,\mathrm{Re}\,z_0$ e $\beta = |z_0|^2$. Passando al complesso coniugato si ha

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{\overline{R}(x)}{(x^2+\alpha x+\beta)^r} + \frac{\overline{S}(x)}{P(x)}\,,$$

dove $\overline{R}$ e $\overline{S}$ sono i polinomi ottenuti da R e S prendendo i complessi coniugati dei coefficienti. Sottraendo membro a membro si ha

$$\frac{R(x)-\overline{R}(x)}{(x^2+\alpha x+\beta)^r} + \frac{S(x)-\overline{S}(x)}{P(x)} = 0\,,$$

cioè

$$\big(R(x)-\overline{R}(x)\big)P(x) + \big(S(x)-\overline{S}(x)\big)(x^2+\alpha x+\beta)^r = 0\,.$$

Poiché $P(x)$ e $(x^2+\alpha x+\beta)^r$ non hanno fattori comuni, $(x^2+\alpha x+\beta)^r$ divide $R(x)-\overline{R}(x)$, ma questo polinomio ha grado minore di $2r$, quindi è identicamente nullo, perciò R è un polinomio reale. Per motivi analoghi anche S è reale.

Scomponiamo $R(x)/(x^2+\alpha x+\beta)^r$. Dividendo $R(x)$ per $x^2+\alpha x+\beta$ si ha

$$\frac{R(x)}{(x^2+\alpha x+\beta)^r}=\frac{Q(x)(x^2+\alpha x+\beta)+T(x)}{(x^2+\alpha x+\beta)^r}=\frac{Q(x)}{(x^2+\alpha x+\beta)^{r-1}}+\frac{T(x)}{(x^2+\alpha x+\beta)^r},$$

con T polinomio di grado al più 1. Ripetendo il discorso si ottiene la scomposizione

$$\frac{R(x)}{(x^2+\alpha x+\beta)^r}=\sum_{j=1}^{r}\frac{b_j x+c_j}{(x^2+\alpha x+\beta)^j}.$$

Sia quindi

$$D(x)=C\prod_{\ell=1}^{n}(x-x_\ell)^{r_\ell}\prod_{k=1}^{m}(x^2+\alpha_\ell x+\beta_\ell)^{s_k},$$

dove $C\in\mathbb{R}^*$, gli $x_\ell\in\mathbb{R}$ sono gli zeri reali di D, $\alpha_k,\beta_k\in\mathbb{R}$ sono tali che $\alpha_k^2-4\beta_k<0$ e sia N un polinomio tale che $\mathrm{gr}(N)<\mathrm{gr}(D)$. Allora esistono $a_{\ell j},b_{ki},c_{ki}\in\mathbb{R}$ tali che

$$\frac{N(x)}{D(x)}=\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{j=1}^{r_\ell}\frac{a_{\ell j}}{(x-x_\ell)^j}+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{s_k}\frac{b_{ki}x+c_{ki}}{(x^2+\alpha_k x+\beta_k)^i}.$$

Questa scomposizione di una funzione razionale si chiama **scomposizione in fratti semplici**.

Conosciamo una primitiva di ciascuno degli addendi della prima sommatoria. Vediamo come determinare una primitiva degli addendi della seconda sommatoria. Consideriamo anzitutto il caso $i=1$. Si ha

$$\frac{bx+c}{x^2+\alpha x+\beta}=\frac{b}{2}\,\frac{2x+\alpha}{x^2+\alpha x+\beta}+\frac{c-(\alpha b/2)}{x^2+\alpha x+\beta}.$$

Una primitiva del primo addendo è $(b/2)\log(x^2+\alpha x+\beta)$. Inoltre

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2+\alpha x+\beta}&=\frac{1}{x^2+\alpha x+(\alpha/2)^2+\beta-(\alpha^2/4)}=\frac{1}{\big(x+(\alpha/2)\big)^2+\beta-(\alpha^2/4)}=\\&=\frac{1}{\beta-(\alpha^2/4)}\,\frac{1}{\big((2x+\alpha)/\sqrt{4\beta-\alpha^2}\,\big)^2+1}.\end{aligned}$$

Si verifica facilmente che una primitiva di questa funzione è

$$\frac{1}{\sqrt{\beta-(\alpha^2/4)}}\arctan\!\left(\frac{2x+\alpha}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}\right).$$

Nel caso in cui sia $i>1$ si ha

$$\frac{bx+c}{(x^2+\alpha x+\beta)^i}=\frac{b}{2}\,\frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^i}+\frac{c-(\alpha b/2)}{(x^2+\alpha x+\beta)^i}.$$

Una primitiva del primo addendo è

$$-\frac{b}{2}\,\frac{1}{i-1}\,\frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^{i-1}}\,.$$

È possibile determinare una primitiva del secondo addendo con lo stesso metodo usato nel caso $i=1$ se si conosce una primitiva di $1/(x^2+1)^i$. Determiniamo una primitiva di questa funzione. Per $i \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x^2+1)^i}\,dx &= \int \frac{1+x^2-x^2}{(x^2+1)^i}\,dx = \int \frac{1}{(x^2+1)^{i-1}}\,dx - \int x\,\frac{x}{(x^2+1)^i}\,dx = \\ &= \int \frac{1}{(x^2+1)^{i-1}}\,dx + x\,\frac{1}{2(i-1)}\,\frac{1}{(x^2+1)^{i-1}} - \int \frac{1}{2(i-1)}\,\frac{1}{(x^2+1)^{i-1}}\,dx = \\ &= \frac{2i-3}{2(i-1)}\int \frac{1}{(x^2+1)^{i-1}}\,dx + \frac{1}{2(i-1)}\,\frac{x}{(x^2+1)^{i-1}}\,.\end{aligned}$$

Questa formula consente di determinare una primitiva per $1/(x^2+1)^i$ se si conosce una primitiva di $1/(x^2+1)^{i-1}$. Poiché conosciamo una primitiva di $1/(x^2+1)$, applicando ripetutamente la formula si può determinare una primitiva qualunque sia i.

In particolare

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+1} + c\,. \tag{3.1.7}$$

3.1.11 Esempio. Calcoliamo

$$\int \frac{x^3}{(x^2+2x+5)^2}\,dx\,.$$

Si ha

$$\begin{aligned}\frac{x^3}{(x^2+2x+5)^2} &= \frac{x^3+2x^2+5x-2x^2-5x}{(x^2+2x+5)^2} = \frac{x}{x^2+2x+5} + \frac{-2x^2-4x-10-x+10}{(x^2+2x+5)^2} = \\ &= \frac{x-2}{x^2+2x+5} + \frac{-x+10}{(x^2+2x+5)^2} = \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{2x+2}{x^2+2x+5} - \frac{3}{x^2+2x+5} - \frac{1}{2}\,\frac{2x+2}{(x^2+2x+5)^2} + \frac{11}{(x^2+2x+5)^2}\,.\end{aligned}$$

Si ha, osservando che il trinomio x^2+2x+5 è sempre positivo,

$$\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,dx = \log(x^2+2x+5) + c\,;$$

Inoltre

$$\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+4}\,dx = \int \frac{1}{4}\,\frac{1}{\big((x+1)/2\big)^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\arctan\!\left(\frac{x+1}{2}\right) + c\,;$$

$$\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+5)^2}\,dx = -\frac{1}{x^2+2x+5} + c\,.$$

Poiché

$$\int \frac{1}{(x^2+2x+5)^2}\,dx = \int \frac{1}{16}\,\frac{1}{\left(\left((x+1)/2\right)^2+1\right)^2}\,dx\,,$$

effettuando la sostituzione $t=(x+1)/2$, quindi $x=2t-1$, da (3.1.7) segue

$$\int \frac{1}{(x^2+2x+5)^2}\,dx = \int \frac{1}{16}\,\frac{1}{(t^2+1)^2}\,2\,dt\Big|_{t=(x+1)/2} =$$

$$= \frac{1}{16}\left(\arctan t + \frac{t}{t^2+1}+c\right)\Big|_{t=(x+1)/2} = \frac{1}{16}\left(\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+\frac{(x+1)/2}{\left((x+1)/2\right)^2+1}\right)+c=$$

$$= \frac{1}{16}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+\frac{1}{8}\,\frac{x+1}{x^2+2x+5}+c\,.$$

Pertanto

$$\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+5)^2}\,dx = \frac{1}{2}\log(x^2+2x+5)-\frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+2x+5}+$$

$$+\frac{11}{16}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+\frac{11}{8}\,\frac{x+1}{x^2+2x+5}+c=$$

$$=\frac{1}{2}\log(x^2+2x+5)-\frac{13}{16}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+\frac{1}{8}\,\frac{11x+15}{x^2+2x+5}+c\,. \blacktriangleleft$$

1) Calcolare

$$\int_1^4 \frac{x+3}{4x^2+3x}\,dx\,.$$

2) Calcolare

$$\int_0^1 \frac{x^2-2}{x^3+5x^2+12x+8}\,dx\,.$$

3) Calcolare i seguenti integrali:

a. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+1}{x+1}\,dx$

b. $\displaystyle\int_2^5 \frac{x+3}{x^2+9}\,dx$

c. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x^2+4x+3}\,dx$

d. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3+x^2+1}{4x^2+4x+1}\,dx$

e. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^3-x}\,dx$

f. $\displaystyle\int_0^3 \frac{2x}{x^2-x+2}\,dx$

g. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x+5}{x^2+4x+4}\,dx$

h. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2+1}{3x^2+5}\,dx$

i. $\displaystyle\int_1^6 \frac{5}{x^3+5x}\,dx$

j. $\displaystyle\int_0^3 \frac{4x}{x^4+5x^2+6}\,dx$

k. $\displaystyle\int_0^3 \frac{10x^3}{x^4+4x^2+4}\,dx$

l. $\displaystyle\int_1^3 \frac{x+10}{x^3-25x}\,dx$

Integrali contenenti seni e coseni

Consideriamo integrali del tipo

$$\int \sin^m x\,\cos^n x\,dx\,,$$

con $m,n\in\mathbb{N}$.

Se n è dispari, cioè $n=2k+1$ con $k\in\mathbb{N}$, allora si ha

$$\sin^m x\,\cos^n x=\sin^m x\,(\cos^2 x)^k\cos x=\sin^m x\,(1-\sin^2 x)^k\cos x\,.$$

La funzione integranda risulta quindi essere il prodotto di una funzione polinomiale rispetto al seno per la derivata della funzione seno. Con la sostituzione $t=\operatorname{sen}x$ si ottiene

$$\int \sin^m x\,\cos^n x\,dx=\int \sin^m x\,(1-\sin^2 x)^k\,\frac{d\operatorname{sen}x}{dx}\,dx=\int t^m(1-t^2)^k\,dt\Big|_{t=\operatorname{sen}x}\,.$$

Abbiamo così ottenuto l'integrale di una funzione polinomiale.

Se m è dispari si procede in modo analogo, scambiando il ruolo di seno e coseno.

3.1.12 Esempio. Calcoliamo

$$\int \cos^3 x\,dx\,.$$

Poiché si ha $\cos^3 x=(1-\operatorname{sen}^2 x)\cos x$, risulta evidente, anche senza effettuare esplicitamente una sostituzione, che si ha

$$\int \cos^3 x\,dx=\int (1-\operatorname{sen}^2 x)\cos x\,dx=\operatorname{sen}x-\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x+c\,.$$ ◀

Se sia m che n sono pari, cioè $m=2h$ e $n=2k$, con $h,k\in\mathbb{N}$, allora, dalle uguaglianze

$$\operatorname{sen}^2 x=\frac{1-\cos(2x)}{2}\,,\qquad \cos^2 x=\frac{1+\cos(2x)}{2}\,,$$

segue

$$\sin^m x\,\cos^n x=\frac{1}{2^{h+k}}\big(1-\cos(2x)\big)^h\big(1+\cos(2x)\big)^k\,.$$

Sviluppando le potenze dei binomi, si ottiene una somma di potenze di $\cos(2x)$. Con il metodo esposto sopra si trova una primitiva delle potenze con esponente dispari. Le potenze con esponente pari possono essere trasformate ulteriormente esprimendole in funzione di $\cos(4x)$. Il passaggio a $\cos(2x)$ dimezza l'esponente massimo presente, passando a $\cos(4x)$ l'esponente viene ulteriormente dimezzato. Ripetendo il ragionamento, dopo un numero finito di passi l'esponente massimo diventa 1 e quindi si può trovare una primitiva.

3.1.13 Esempio. Calcoliamo
$$\int \cos^4 x\,dx\,.$$

Si ha
$$\cos^4 x=(\cos^2 x)^2=\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{1}{4}\cos^2(2x)=$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{1}{4}\,\frac{1+\cos(4x)}{2}=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{1}{8}\cos(4x)\,.$$
Pertanto si ha
$$\int \cos^4 x\,dx=\int\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{1}{8}\cos(4x)\right)dx=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)+\frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x)+c\,. \blacktriangleleft$$

Se nell'integrale di una funzione che dipende da funzioni trigonometriche si riesce a esprimere la funzione integranda solo mediante la funzione tangente (o cotangente) la sostituzione $t=\tan x$ (o $t=\cot x$) solitamente semplifica l'integrale. Supponiamo, in particolare, che R sia una funzione razionale. Se si pone $x=\varphi(t)=\arctan t$, quindi $\varphi'(t)=1/(t^2+1)$, allora si ha
$$\int R(\tan x)\,dx=\int R(t)\,\frac{1}{t^2+1}\,dt\Big|_{t=\tan x}\,.$$
quindi l'integrale si trasforma nell'integrale di una funzione razionale.

Nel caso che si calcoli un integrale definito, potrebbe non essere corretto effettuare la sostituzione individuata sopra. Infatti questa comporta che x appartiene all'immagine della funzione arcotangente, cioè a $]-\pi/2,\pi/2[$. Se l'intervallo di integrazione non è contenuto in $]-\pi/2,\pi/2[$, la sostituzione corretta è $x=\varphi(t)=\arctan t+k\pi$ per un opportuno $k\in\mathbb{Z}$, in modo che l'immagine di φ contenga l'intervallo di integrazione.

3.1.14 Esempio. Calcoliamo
$$\int_0^{\pi/4}\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x+\cos x}\,dx\,.$$

Dividendo numeratore e denominatore per $\cos x$, che non si annulla nell'intervallo di integrazione, si ottiene
$$\int_0^{\pi/4}\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x+\cos x}\,dx=\int_0^{\pi/4}\frac{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{\cos x}}\,dx=\int_0^{\pi/4}\frac{\tan x}{\tan x+1}\,dx\,.$$
Con la sostituzione $t=\tan x$, cioè $x=\varphi(t)=\arctan t$, si ha
$$\int_0^{\pi/4}\frac{\tan x}{\tan x+1}\,dx=\int_{\tan 0}^{\tan(\pi/4)}\frac{t}{t+1}\,\frac{1}{t^2+1}\,dt=\int_0^1\frac{t}{(t+1)(t^2+1)}\,dt\,.$$
Dobbiamo integrare una funzione razionale con numeratore di grado minore del denominatore, che è già scomposto in fattori irriducibili. Per scomporre la funzione in fratti

semplici determiniamo $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{t}{(t+1)(t^2+1)} = \frac{a}{t+1} + \frac{bt+c}{t^2+1}.$$

Poiché

$$\frac{a}{t+1} + \frac{bt+c}{t^2+1} = \frac{a(t^2+1)+(bt+c)(t+1)}{(t+1)(t^2+1)} = \frac{(a+b)t^2+(b+c)t+a+c}{(t+1)(t^2+1)},$$

deve essere

$$t = (a+b)t^2 + (b+c)t + a + c,$$

quindi a, b, c devono verificare il sistema

$$\begin{cases} a+b=0, \\ b+c=1, \\ a+c=0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione risulta $b = -a$ e dalla terza $c = -a$. Pertanto dalla seconda si ricava $-2a = 1$, da cui $a = -1/2$ e $b = c = 1/2$.

Quindi si ha

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t}{(t+1)(t^2+1)}\,dt &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(-\frac{1}{t+1} + \frac{t+1}{t^2+1}\right)dt = \\ &= \frac{1}{2}\left[-\log|t+1| + \frac{1}{2}\log|t^2+1| + \arctan t\right]_0^1 = \\ &= \frac{1}{2}\left(-\log 2 + \frac{1}{2}\log 2 + \arctan 1\right) = -\frac{1}{4}\log 2 + \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$ ◀

Utilizzando l'identità $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, si può di esprimere la funzione integranda mediante la funzione tangente anche in situazioni in cui questa possibilità non è evidente.

3.1.15 Esempio. Calcoliamo

$$\int_0^{\pi/3} \frac{1}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

Si ha

$$\frac{1}{1+\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x + 2\cos^2 x} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x}}{\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + 2\dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\tan^2 x + 1}{\tan^2 x + 2}.$$

Con la sostituzione $t = \tan x$, cioè $x = \varphi(t) = \arctan t$, si ha

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/3} \frac{\tan^2 x+1}{\tan^2 x+2}\,dx &= \int_{\tan 0}^{\tan(\pi/3)} \frac{t^2+1}{t^2+2}\,\frac{1}{t^2+1}\,dt = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+2}\,dt = \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{2}\,\frac{1}{(t/\sqrt{2})^2+1}\,dt = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$ ◀

Consideriamo integrali del tipo
$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx\,,$$
con R è una funzione razionale di due variabili.

Effettuiamo la sostituzione $t = \tan(x/2)$. Da tale uguaglianza si ricava, se $x \in\,]-\pi, \pi[$, $x = \varphi(t) = 2\arctan t$, quindi $\varphi'(t) = 2(1+t^2)$. Si ha, per $x \in\,]-\pi, \pi[$,
$$\operatorname{sen} x = \frac{2\operatorname{sen}(x/2)\cos(x/2)}{\cos^2(x/2)+\operatorname{sen}^2(x/2)} = \frac{2\,\dfrac{\operatorname{sen}(x/2)}{\cos(x/2)}\,\dfrac{\cos(x/2)}{\cos(x/2)}}{\dfrac{\cos^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}+\dfrac{\operatorname{sen}^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}} = \frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}\,,$$
$$\cos x = \frac{\cos^2(x/2)-\operatorname{sen}^2(x/2)}{\cos^2(x/2)+\operatorname{sen}^2(x/2)} = \frac{\dfrac{\cos^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}-\dfrac{\operatorname{sen}^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}}{\dfrac{\cos^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}+\dfrac{\operatorname{sen}^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}} = \frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}\,.$$
Pertanto
$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx = \int R\Big(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\Big)\frac{2}{1+t^2}\, dt\Big|_{t=\tan(x/2)}\,;$$
in quest'ultimo integrale la funzione integranda è razionale.

3.1.16 Esempio. Calcoliamo
$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\operatorname{sen} x}\, dx\,.$$

Effettuiamo la sostituzione $t = \tan(x/2)$, da cui si ricava $x = \varphi(t) = 2\arctan t$. Si ha $\varphi'(t) = 2/(1+t^2)$, per $x = \pi/3$ si ha $t = \tan(\pi/6) = 1/\sqrt{3}$, per $x = \pi/2$ si ha $t = \tan(\pi/4) = 1$. Pertanto
$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\operatorname{sen} x}\, dx = \int_{1/\sqrt{3}}^{1} \frac{1}{2t/(1+t^2)}\,\frac{2}{1+t^2}\, dt = \int_{1/\sqrt{3}}^{1} \frac{1}{t}\, dt = \big[\log|t|\big]_{1/\sqrt{3}}^{1} =$$
$$= -\log\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\log 3\,.$$
◀

Se l'intervallo di integrazione non è contenuto in $]-\pi, \pi[$, ma è contenuto in $]0, 2\pi[$, si può effettuare la sostituzione $t = \cot(x/2)$. In tal caso si ha $x = \varphi(t) = 2\operatorname{arccot} t$, $\varphi'(t) = -1/(1+t^2)$, $\sin x = 2t/(1+t^2)$ e $\cos x = (t^2-1)/(1+t^2)$.

In generale se in tutto l'intervallo di integrazione è definita una delle due funzioni $\tan(x/2)$ o $\cot(x/2)$, allora si utilizza tale funzione per la sostituzione. Se invece c'è sia un punto in cui non è definita $\tan(x/2)$ che un punto in cui non è definita $\cot(x/2)$, allora si può spezzare l'integrale nella somma di più integrali per ciascuno dei quali si può fare una delle due sostituzioni.

4) Calcolare

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x \, \cos x}{\cos x + 2} \, dx \, .$$

5) Calcolare

$$\int_0^{\pi/2} \frac{3\cos x + 2\sin x}{2 + \cos x} \, dx \, .$$

6) Calcolare

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sin^2 x + 6\sin x \cos x + 8\cos^2 x} \, dx \, .$$

7) Calcolare i seguenti integrali:

a. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x)\, dx$

b. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}\, dx$

c. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{2\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - 5}\, dx$

d. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{sen} x - 2\cos x}{2\operatorname{sen} x + \cos x}\, dx$

e. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x + 2\cos x}\, dx$

f. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\operatorname{sen} x - 2}\, dx$

g. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \, \cos x}{-2\cos x + \cos x \, \operatorname{sen}^2 x}\, dx$

h. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x + \cos^3 x - \cos x}\, dx$

Integrali contenenti esponenziali

Consideriamo integrali del tipo

$$\int R(e^x)\, dx \, ,$$

con R funzione razionale.

Per semplificare l'integrale effettuiamo la sostituzione $t = e^x$, cioè $x = \varphi(t) = \log t$. Si ha $\varphi'(t) = 1/t$, quindi risulta

$$\int R(e^x)\, dx = \int R(t)\, \frac{1}{t}\, dt \Big|_{t=e^x}$$

Abbiamo così ottenuto l'integrale di una funzione razionale.

3.1.17 Esempio. Calcoliamo
$$\int \frac{1}{e^{2x}+e^x}\,dx\,.$$
Ponendo $t=e^x$, quindi $x=\log t$, otteniamo
$$\int \frac{1}{e^{2x}+e^x}\,dx = \int \frac{1}{t^2+t}\,\frac{1}{t}\,dt\Big|_{t=e^x} = \int \frac{1}{t^2(t+1)}\,dt\Big|_{t=e^x}\,.$$
Scomponiamo la funzione integranda in fratti semplici. Si ha
$$\frac{1}{t^2(t+1)} = \frac{1+t-t}{t^2(t+1)} = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t^2} - \frac{1+t-t}{t(t+1)} = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1}\,.$$
Pertanto
$$\int \frac{1}{t^2(t+1)}\,dt = \int \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1}\right) dt = -\frac{1}{t} - \log|t| + \log|t+1| + c\,,$$
quindi
$$\int \frac{1}{e^{2x}+e^x}\,dx = -e^{-x} - x + \log(e^x+1) + c\,.$$
◀

8) Calcolare
$$\int_0^2 \frac{\cosh x}{e^x+2}\,dx\,.$$

9) Calcolare
$$\int_0^1 \frac{e^x+2e^{-x}}{e^x+4e^{-x}}\,dx\,.$$

10) Calcolare i seguenti integrali:

a. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$

b. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x-e^{-x}}{e^{2x}+1}\,dx$

c. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x+2}{e^{-x}+3}\,dx$

d. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{e^{2x}-2e^x}\,dx$

e. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x+1}{2e^x+3}\,dx$

f. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{3x}}{e^{2x}+8e^{-x}}\,dx$

g. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cosh x + 4\,\mathrm{senh}\,x}{\cosh x - \mathrm{senh}\,x}\,dx$

h. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{senh}^2 x + 2}{\cosh x}\,dx$

Integrali contenenti radici

Consideriamo integrali del tipo

$$\int R\big(x,\sqrt{ax+b}\big)\,dx\,,$$

con R funzione razionale di due variabili e $a\in\mathbb{R}^*$, $b\in\mathbb{R}$.

Effettuiamo la sostituzione $t=\sqrt{ax+b}$, da cui si ricava $x=\varphi(t)=(t^2-b)/a$. Si ha $\varphi'(t)=2t/a$, quindi

$$\int R\big(x,\sqrt{ax+b}\big)\,dx=\int R\Big(\frac{t^2-b}{a},t\Big)\frac{2}{a}\,t\,dt\Big|_{t=\sqrt{ax+b}}.$$

L'integrale è così trasformato nell'integrale di una funzione razionale.

3.1.18 Esempio. Calcoliamo

$$\int\frac{1}{x\sqrt{2x+3}}\,dx\,.$$

Effettuiamo la sostituzione $t=\sqrt{2x+3}$, cioè $x=\varphi(t)=(t^2-3)/2$; si ha $\varphi'(t)=t$. Quindi

$$\int\frac{1}{x\sqrt{2x+3}}\,dx=\int\frac{1}{\big((t^2-3)/2\big)t}\,t\,dt\Big|_{t=\sqrt{2x+3}}=\int\frac{2}{t^2-3}\,dt\Big|_{t=\sqrt{2x+3}}.$$

Si ha

$$\frac{2}{t^2-3}=\frac{2}{\big(t+\sqrt3\big)\big(t-\sqrt3\big)}=\frac{1}{\sqrt3}\,\frac{\sqrt3+t+\sqrt3-t}{\big(t+\sqrt3\big)\big(t-\sqrt3\big)}=\frac{1}{\sqrt3}\,\frac{1}{t-\sqrt3}-\frac{1}{\sqrt3}\,\frac{1}{t+\sqrt3},$$

pertanto

$$\begin{aligned}
&\int\frac{1}{x\sqrt{2x+3}}\,dx=\frac{1}{\sqrt3}\int\Big(\frac{1}{t-\sqrt3}-\frac{1}{t+\sqrt3}\Big)dt\Big|_{t=\sqrt{2x+3}}=\\
&=\frac{1}{\sqrt3}\Big(\log\big|t-\sqrt3\big|-\log\big|t+\sqrt3\big|\Big)\Big|_{t=\sqrt{2x+3}}+c=\\
&=\frac{1}{\sqrt3}\log\Bigg(\frac{\big(t-\sqrt3\big)^2}{\big|\big(t+\sqrt3\big)\big(t-\sqrt3\big)\big|}\Bigg)\Bigg|_{t=\sqrt{2x+3}}+c=\\
&=\frac{1}{\sqrt3}\log\Big(\frac{t^2-2\sqrt3\,t+3}{|t^2-3|}\Big)\Big|_{t=\sqrt{2x+3}}+c=\frac{1}{\sqrt3}\log\Big(\frac{2x+3-2\sqrt3\,\sqrt{2x+3}+3}{|2x|}\Big)+c=\\
&=\frac{1}{\sqrt3}\log\Big(\frac{x+3-\sqrt{6x+9}}{|x|}\Big)+c\,.
\end{aligned}$$

◀

Consideriamo integrali del tipo

$$\int R\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx\,,$$

con R funzione razionale di due variabili e $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tali che $ad - bc \neq 0$. Questa condizione assicura che la funzione sotto radice non è costante.

Effettuiamo la sostituzione $t = \sqrt{(ax+b)/(cx+d)}$. Da qui si ha $ax+b = t^2(cx+d)$, cioè $(ct^2 - a)x = b - dt^2$, quindi $x = \varphi(t) = (b - dt^2)/(ct^2 - a)$. Si ha

$$\varphi'(t) = \frac{-2dt(ct^2 - a) - 2ct(b - dt^2)}{(ct^2 - a)^2} = \frac{2(ad - bc)t}{(ct^2 - a)^2}\,.$$

Quindi

$$\int R\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int R\left(\frac{b - dt^2}{ct^2 - a}, t\right) \frac{2(ad - bc)t}{(ct^2 - a)^2}\, dt \Big|_{t=\sqrt{(ax+b)/(cx+d)}}\,.$$

L'integrale è quindi trasformato nell'integrale di una funzione razionale.

3.1.19 Esempio. Calcoliamo

$$\int \sqrt{\frac{4x+1}{x-1}}\, dx\,.$$

Effettuiamo la sostituzione $t = \sqrt{(4x+1)/(x-1)}$. Quindi si ha $4x+1 = t^2(x-1)$, cioè $(t^2 - 4)x = t^2 + 1$, quindi $x = \varphi(t) = (t^2+1)/(t^2-4)$. Si ha

$$\varphi'(t) = \frac{2t(t^2 - 4) - 2t(t^2 + 1)}{(t^2 - 4)^2} = -\frac{10t}{(t^2 - 4)^2}\,.$$

Quindi

$$\int \sqrt{\frac{4x+1}{x-1}}\, dx = -\int t\, \frac{10t}{(t^2-4)^2}\, dt \Big|_{t=\sqrt{(4x+1)/(x-1)}} = -10 \int \frac{t^2}{(t^2-4)^2}\, dt \Big|_{t=\sqrt{(4x+1)/(x-1)}}\,.$$

La funzione integranda è razionale con numeratore di grado minore del denominatore; scomponiamola in fratti semplici. Si ha $(t^2 - 4)^2 = (t-2)^2(t+2)^2$, quindi dobbiamo determinare $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{a}{(t-2)^2} + \frac{b}{t-2} + \frac{c}{(t+2)^2} + \frac{d}{t+2} = \frac{t^2}{(t-2)^2(t+2)^2}\,.$$

Si ha

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{(t-2)^2} + \frac{b}{t-2} + \frac{c}{(t+2)^2} + \frac{d}{t+2} = \\
&\quad = \frac{a(t+2)^2 + b(t^2-4)(t+2) + c(t-2)^2 + d(t^2-4)(t-2)}{(t-2)^2(t+2)^2} \\
&\quad = \frac{(b+d)t^3 + (a + 2b + c - 2d)t^2 + (4a - 4b - 4c - 4d)t + 4a - 8b + 4c + 8d}{(t-2)^2(t+2)^2}\,.
\end{aligned}$$

Pertanto deve essere

$$\begin{cases} b+d=0, \\ a+2b+c-2d=1, \\ a-b-c-d=0, \\ a-2b+c+2d=0. \end{cases}$$

Sommando membro a membro la prima e la terza equazione si ottiene $a-c=0$, sommando la seconda e la quarta si ottiene $2a+2c=1$, pertanto $a=c=1/4$. Dalla prima equazione si ha $d=-b$ e sostituendo quanto ricavato finora nella seconda equazione si ottiene $1/2+4b=1$, quindi $b=1/8$ e $d=-1/8$. Pertanto

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2}{(t^2-4)^2}\,dt &= \frac{1}{8}\int \left(\frac{2}{(t-2)^2}+\frac{1}{t-2}+\frac{2}{(t+2)^2}-\frac{1}{t+2}\right)dt = \\ &= \frac{1}{8}\left(-\frac{2}{t-2}+\log|t-2|-\frac{2}{t+2}-\log|t+2|\right). \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{4x+1}{x-1}}\,dx &= -10\int \frac{t^2}{(t^2-4)^2}\,dt\Big|_{t=\sqrt{(4x+1)/(x-1)}} = \\ &= \frac{5}{4}\left(\frac{2}{\sqrt{(4x+1)/(x-1)}-2}-\log\left|\sqrt{\frac{4x+1}{x-1}}-2\right|+\right. \\ &\qquad \left. +\frac{2}{\sqrt{(4x+1)/(x-1)}+2}+\log\left|\sqrt{\frac{4x+1}{x-1}}+2\right|\right)+c = \\ &= \frac{5}{4}\left(\frac{4\sqrt{(4x+1)/(x-1)}}{(4x+1)/(x-1)-4}+\log\left|\frac{\sqrt{(4x+1)/(x-1)}+2}{\sqrt{(4x+1)/(x-1)}-2}\right|\right)+c = \\ &= \frac{5}{4}\left(\frac{4\sqrt{(4x+1)(x-1)}}{5}+\log\left|\frac{\left(\sqrt{(4x+1)/(x-1)}+2\right)^2}{(4x+1)/(x-1)-4}\right|\right)+c = \\ &= \sqrt{(4x+1)(x-1)}+\frac{5}{4}\log\left(\frac{8x+4\sqrt{(4x+1)(x-1)}}{5}\right)+c. \end{aligned}$$

◀

Consideriamo integrali del tipo

$$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx,$$

con R funzione razionale di due variabili e $a\in\mathbb{R}^+$.

Effettuiamo la sostituzione $x=\varphi(t)=a\,\mathrm{sen}\,t$, quindi $\varphi'(t)=a\cos t$. Si ha

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\,\mathrm{sen}^2 t}=\sqrt{a^2\cos^2 t}=a|\cos t|.$$

Se si sceglie $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ si ha $|\cos t| = \cos t$. Inoltre per tali t risulta $t = \operatorname{arcsen}(x/a)$. Quindi si ha

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx = \int R(a \operatorname{sen} t, a \cos t) a \cos t \, dt \Big|_{t=\operatorname{arcsen}(x/a)} .$$

L'integrale è così trasformato nell'integrale di una funzione razionale di seni e coseni.

3.1.20 Esempio. Calcoliamo

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}} \, dx .$$

Effettuiamo la sostituzione $x = \varphi(t) = 2 \operatorname{sen} t$, quindi $\varphi'(t) = 2 \cos t$. Considerando $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ si ha $t = \operatorname{arcsen}(x/2)$. Pertanto

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}} \, dx = \int \frac{2 \operatorname{sen} t + 3}{\sqrt{4 - 4 \operatorname{sen}^2 t}} 2 \cos t \, dt \Big|_{t=\operatorname{arcsen}(x/2)} = \int (2 \operatorname{sen} t + 3) \, dt \Big|_{t=\operatorname{arcsen}(x/2)} =$$

$$= (-2 \cos t + 3t + c)\Big|_{t=\operatorname{arcsen}(x/2)} = -2 \cos\left(\operatorname{arcsen} \frac{x}{2}\right) + 3 \operatorname{arcsen} \frac{x}{2} + c =$$

$$= -2 \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\left(\operatorname{arcsen} \frac{x}{2}\right)} + 3 \operatorname{arcsen} x + c = 3 \operatorname{arcsen} \frac{x}{2} - \sqrt{4 - x^2} + c .$$ ◀

Consideriamo integrali del tipo

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx ,$$

con R funzione razionale di due variabili e $a \in \mathbb{R}^+$.

Effettuiamo la sostituzione $x = \varphi(t) = a \cosh t$, quindi $\varphi'(t) = a \sinh t$. Si ha

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \cosh^2 t - a^2} = \sqrt{a^2 \sinh^2 t} = a |\sinh t| .$$

Se si sceglie $t \in [0, +\infty[$ si ha $|\sinh t| = \sinh t$. Inoltre per tali t risulta $t = \operatorname{settcosh}(x/a)$. Quindi si ha

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx = \int R(a \cosh t, a \sinh t) a \sinh t \, dt \Big|_{t=\operatorname{settcosh}(x/a)} .$$

Poiché senh e cosh sono funzioni razionali dell'esponenziale, l'integrale è trasformato nell'integrale di una funzione razionale dell'esponenziale.

La sostituzione è corretta se nell'intervallo di integrazione risulta $x \geq a$; se invece $x \leq -a$ occorre porre $x = -a \cosh t$.

3.1.21 Esempio. Calcoliamo

$$\int \sqrt{x^2 - 9} \, dx .$$

Effettuiamo la sostituzione $x = \varphi(t) = 3 \cosh t$, quindi $\varphi'(t) = 3 \operatorname{senh} t$. Si ha

$$t = \operatorname{settcosh}\left(\frac{x}{3}\right) = \log\left(\frac{x}{3} + \sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2 - 1}\right) = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 9}\right) - \log 3 .$$

Pertanto

$$\int \sqrt{x^2-9}\,dx = \int \sqrt{3\cosh^2 t-9}\;3\,\mathrm{senh}\, t\,dt\Big|_{t=\mathrm{settcosh}(x/3)} = 9\int \mathrm{senh}^2 t\,dt\Big|_{t=\mathrm{settcosh}(x/3)} =$$

$$= 9\int \left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2 dt\Big|_{t=\mathrm{settcosh}(x/3)} = \frac{9}{4}\int (e^{2t}-2+e^{-2t})\,dt\Big|_{t=\mathrm{settcosh}(x/3)} =$$

$$= \left(\frac{9}{8}e^{2t}-\frac{9}{2}t-\frac{9}{8}e^{-2t}+c\right)\Big|_{t=\mathrm{settcosh}(x/3)} =$$

$$= \frac{9}{8}\left(\frac{x+\sqrt{x^2-9}}{3}\right)^2-\frac{9}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2-9}\right)-\frac{9}{8}\left(\frac{3}{x+\sqrt{x^2-9}}\right)^2+c=$$

$$= \frac{1}{8}\left(2x^2-9+2x\sqrt{x^2-9}\right)-\frac{9}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2-9}\right)-\frac{81}{8}\left(\frac{x-\sqrt{x^2-9}}{x^2-(x^2-9)}\right)^2+c=$$

$$= \frac{1}{8}\left(2x^2-9+2x\sqrt{x^2-9}\right)-\frac{9}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2-9}\right)-\frac{1}{8}\left(2x^2-9-2x\sqrt{x^2-9}\right)+c=$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-9}-\frac{9}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2-9}\right)+c\,.$$ ◀

Consideriamo integrali del tipo

$$\int R\left(x,\sqrt{x^2+a^2}\right)dx\,,$$

con R funzione razionale di due variabili e $a\in\mathbb{R}^+$.

Effettuiamo la sostituzione $x=\varphi(t)=a\sinh t$, quindi $\varphi'(t)=a\cosh t$. Si ha

$$\sqrt{x^2+a^2}=\sqrt{a^2\sinh^2 t+a^2}=\sqrt{a^2\cosh^2 t}=a\cosh t\,.$$

Se si sceglie $t\in[0,+\infty[$ risulta $t=\mathrm{settsenh}(x/a)$. Quindi si ha

$$\int R\left(x,\sqrt{x^2+a^2}\right)dx=\int R(a\sinh t,a\cosh t)\,a\cosh t\,dt\Big|_{t=\mathrm{settsenh}(x/a)}.$$

Poiché senh e cosh sono funzioni razionali dell'esponenziale, l'integrale è trasformato nell'integrale di una funzione razionale dell'esponenziale.

3.1.22 Esempio. Calcoliamo

$$\int x^2\sqrt{x^2+1}\,dx\,.$$

Effettuiamo la sostituzione $x=\varphi(t)=\sinh t$, quindi $\varphi'(t)=\cosh t$. Si ha

$$t=\mathrm{settsenh}\,x=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$$

Pertanto

$$\int x^2\sqrt{x^2+1}\,dx=\int \mathrm{senh}^2 t\sqrt{\sinh^2 t+1}\;\cosh t\,dt\Big|_{t=\mathrm{settsenh}\,x}=$$

$$=\int \mathrm{senh}^2 t\cosh^2 t\,dt\Big|_{t=\mathrm{settsenh}\,x}=\int\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2 dt\Big|_{t=\mathrm{settsenh}\,x}=$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{16}\int (e^{4t}-2+e^{-4t})\,dt\Big|_{t=\operatorname{settsenh} x} = \left(\frac{1}{64}e^{4t}-\frac{1}{8}t-\frac{1}{64}e^{-4t}+c\right)\Big|_{t=\operatorname{settsenh} x} = \\
&= \frac{1}{64}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^4-\frac{1}{8}\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\frac{1}{64}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{-4}+c= \\
&= \frac{1}{64}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^4-\frac{1}{8}\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\frac{1}{64}\left(\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2-(x^2+1)}\right)^4+c= \\
&= \frac{1}{64}\left(x^4+4x^3\sqrt{x^2+1}+6x^2(x^2+1)+4x(x^2+1)\sqrt{x^2+1}+(x^2+1)^2\right)- \\
&\qquad -\frac{1}{8}\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)- \\
&\qquad -\frac{1}{64}\left(x^4-4x^3\sqrt{x^2+1}+6x^2(x^2+1)-4x(x^2+1)\sqrt{x^2+1}+(x^2+1)^2\right)+c= \\
&= \frac{1}{8}(2x^3+x)\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{8}\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+c\,.
\end{aligned}
$$

◀

Osserviamo che la radice quadrata di un polinomio di secondo grado, che non sia un quadrato di un polinomio di primo grado, può sempre essere ricondotta ad uno dei tre casi $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$, $\sqrt{x^2+a^2}$.

Infatti, siano $\alpha\in\mathbb{R}^*$, $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$. Si ha

$$
\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)=\alpha\left(\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right).
$$

Se $\alpha>0$ e $\beta^2-4\alpha\gamma>0$ allora, posto $a=\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}/(2\alpha)$ risulta

$$
\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}=\sqrt{\alpha}\sqrt{\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-a^2}\,.
$$

La presenza del termine $x+(\beta/2\alpha)$ al posto di x richiede di modificare la sostituzione ponendo $x+(\beta/2\alpha)=a\cosh t$.

Se $\alpha>0$ e $\beta^2-4\alpha\gamma<0$ allora, posto $a=\sqrt{-\beta^2+4\alpha\gamma}/(2\alpha)$ risulta

$$
\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}=\sqrt{\alpha}\sqrt{\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+a^2}\,.
$$

Se $\alpha<0$ e $\beta^2-4\alpha\gamma>0$ allora, posto $a=\sqrt{-\beta^2+4\alpha\gamma}/(2\alpha)$ risulta

$$
\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}=\sqrt{-\alpha}\sqrt{a^2-\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2}\,.
$$

Non può essere $\alpha<0$ e $\beta^2-4\alpha\gamma<0$ perché in tal caso il polinomio sarebbe sempre negativo.

11) Calcolare
$$\int_1^2 \frac{x+2\sqrt{x+2}}{x+\sqrt{x+2}}\,dx\,.$$

12) Calcolare
$$\int_{1/2}^1 \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{3x-1}}\,dx\,.$$

13) Calcolare
$$\int_1^2 \frac{\sqrt{-x^2+4}}{x}\,dx\,.$$

14) Calcolare
$$\int_0^6 \frac{1}{5+\sqrt{x^2+9}}\,dx\,.$$

15) Calcolare
$$\int_6^9 \frac{2x^2+9}{(2x^2-9)\sqrt{x^2-9}}\,dx\,.$$

16) Calcolare
$$\int_2^3 \frac{4+\sqrt{-x^2+2x+3}}{x-1}\,dx\,.$$

17) Calcolare i seguenti integrali:

a. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{4+2\sqrt{x}}\,dx$

b. $\displaystyle\int_{-3}^0 \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}\,dx$

c. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x-1}{\sqrt{x+2}}\,dx$

d. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{2x+1}}\,dx$

e. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$

f. $\displaystyle\int_{1/2}^{3/2} \frac{x-2}{\sqrt{-x^2+2x}}\,dx$

g. $\displaystyle\int_0^2 \frac{\sqrt{16-x^2}}{2+x^2}\,dx$

h. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+4}+2}\,dx$

i. $\displaystyle\int_0^{1/3} \sqrt{4-9x^2}\,dx$

j. $\displaystyle\int_0^2 \frac{\sqrt{16+x^2}}{2+x^2}\,dx$

k. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\sqrt{1+8x^2}}{1+4x^2}\,dx$

l. $\displaystyle\int_0^1 (x^2+4)^{-3/2}\,dx$

m. $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

n. $\displaystyle\int_{-1/2}^0 x\sqrt{-x^2-4x+5}\,dx$

o. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+2x^2+2}}\,dx$

p. $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x\left(\sqrt{4x/(x+3)}+2\right)}\,dx$

Integrali vari

18) Calcolare

$$\int_1^2 \frac{\log x}{3x(\log^2 x+4)}\,dx\,.$$

19) Calcolare

$$\int_0^{\pi/6} 2x\,\frac{-2\operatorname{sen} x+3\cos x}{(3\operatorname{sen} x+2\cos x)^3}\,dx\,.$$

20) Calcolare

$$\int_0^2 \frac{\arctan(x+1)}{(4x+1)^{3/2}}\,dx\,.$$

21) Calcolare

$$\int_0^1 \frac{xe^{3x}}{(e^{3x}+2)^4}\,dx\,.$$

22) Calcolare

$$\int_{-1}^0 (x+5)\,\frac{e^x+4e^{-x}}{(e^x-4e^{-x})^3}\,dx\,.$$

23) Calcolare

$$\int_{\pi/12}^{\pi/4} \frac{\sqrt{2+\operatorname{sen}^2(2x)}}{\operatorname{sen}(2x)}\,dx\,.$$

24) Calcolare i seguenti integrali:

a. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^2 \arctan\left(\sqrt{x^2-1}\right)dx$

b. $\displaystyle\int_0^2 \operatorname{sen}(\sqrt{x})\cos(\sqrt{x})\,dx$

c. $\displaystyle\int_0^1 e^{2x}\sqrt{e^x+1}\,dx$

d. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}\,dx$

e. $\displaystyle\int_0^{\pi^2/4} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\frac{1}{1+\cos\left(\sqrt{x}\right)}\,dx$

f. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} x \operatorname{sen} x \cos^2 x\,dx$

g. $\displaystyle\int_{-2}^{0} 2x\log(x+5)\,dx$

h. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

i. $\displaystyle\int_1^2 (x+1)\,\frac{e^x-3\,e^{-x}}{(e^x+4+3\,e^{-x})^2}\,dx$

j. $\displaystyle\int_0^{1/2} (6x^2+2)\,\operatorname{arcsen} x\,dx$

k. $\displaystyle\int_{\log 2}^{\log 3} (2\cosh x+\operatorname{senh} x)\log(\operatorname{senh} x)\,dx$

l. $\displaystyle\int_1^e \frac{\cos(\pi\log x)}{x}\,dx$

m. $\displaystyle\int_{-\log 2}^{0} e^{2x}\exp(e^{2x}+1)\,dx$

n. $\displaystyle\int_1^2 (x^2-2x)e^{2x}\,dx$

o. $\displaystyle\int_0^{2/5} (5x-2)^2 e^{-5x}\,dx$

p. $\displaystyle\int_0^2 x^2\arctan x\,dx$

q. $\displaystyle\int_0^1 x^2\arctan(x^3)\,dx$

r. $\displaystyle\int_0^2 x^5 e^{x^3}\,dx$

s. $\displaystyle\int_0^{(2/3)\pi} (2x\operatorname{sen}^3 x+x^2\cos x)\,dx$

t. $\displaystyle\int_0^{1/4} (4x^2+1)\operatorname{arcsen}(2x)\,dx$

u. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{(x+1)^2}\arctan\left(\sqrt{x}\right)dx$

v. $\displaystyle\int_0^4 \frac{\cosh\left(\sqrt{x}\right)+2\operatorname{senh}\left(\sqrt{x}\right)}{\left(\operatorname{senh}\left(\sqrt{x}\right)+2\cosh\left(\sqrt{x}\right)\right)^2}\,dx$

w. $\displaystyle\int_{\pi^2/4}^{\pi^2} \operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right)\cos\left(\sqrt{x}\right)dx$

x. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen}(4x)\cos(4x)}{\left(9+\cos^2(4x)\right)^2}\log\left(9+\cos^2(4x)\right)dx$

y. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{(9-x^2)^{3/2}}\log(3x)\,dx$

z. $\displaystyle\int_2^3 \log\left(\sqrt{\frac{4x-6}{x}}+3\right)dx$

3.2 Soluzioni e risultati

1) La funzione integranda è razionale, il grado del numeratore è minore del grado del denominatore. Per calcolarne l'integrale scomponiamola in fratti semplici.

Il denominatore si fattorizza in $x(4x+3)$. La scomposizione si può ottenere con un semplice artificio:

$$\frac{x+3}{x(4x+3)} = \frac{4x+3-3x}{x(4x+3)} = \frac{4x+3}{x(4x+3)} + \frac{-3x}{x(4x+3)} = \frac{1}{x} - \frac{3}{4x+3}.$$

Quindi una primitiva della funzione integranda è

$$x \mapsto \log|x| - \frac{3}{4}\log|4x+3|.$$

Pertanto l'integrale è uguale a

$$\left[\log|x| - \frac{3}{4}\log|4x+3|\right]_1^4 = \log 4 - \frac{3}{4}\log 19 + \frac{3}{4}\log 7.$$

2) La funzione integranda è razionale, il grado del numeratore è minore del grado del denominatore. Per calcolarne l'integrale scomponiamola in fratti semplici.

Fattorizziamo il denominatore. Il polinomio $x^3+5x^2+12x+8$ si annulla per $x=-1$, quindi è divisibile per $(x+1)$. Effettuiamo la divisione con il metodo di Ruffini. Si ha

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 5 & 12 & 8 \\ -1 & & -1 & -4 & -8 \\ \hline & 1 & 4 & 8 & 0 \end{array}$$

Pertanto risulta

$$x^3+5x^2+12x+8 = (x+1)(x^2+4x+8).$$

Per il polinomio x^2+4x+8 si ha $\Delta/4 = 2^2-8 = -4 < 0$, quindi è irriducibile.

Per scomporre la funzione razionale in fratti semplici determiniamo $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{x^2-2}{x^3+5x^2+12x+8} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+4x+8}.$$

Riducendo a denominatore comune si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+4x+8} &= \frac{a(x^2+4x+8)+(bx+c)(x+1)}{(x+1)(x^2+4x+8)} = \\ &= \frac{(a+b)x^2+(4a+b+c)x+8a+c}{(x+1)(x^2+4x+8)}; \end{aligned}$$

quindi deve essere

$$x^2-2 = (a+b)x^2+(4a+b+c)x+8a+c.$$

Uguagliando i coefficienti dei due polinomi si ottiene il sistema

$$\begin{cases} a+b=1, \\ 4a+b+c=0, \\ 8a+c=-2. \end{cases}$$

Sottraendo la prima e la terza equazione dalla seconda si ottiene $-5a = 1$, quindi $a = -1/5$. Sostituendo tale valore nella prima equazione si ricava $b = 6/5$, sostituendo nella terza si ricava $c = -2/5$. Quindi risulta

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2-2}{x^3+5x^2+12x+8}\,dx &= \frac{1}{5}\int_0^1\left(-\frac{1}{x+1}+\frac{6x-2}{x^2+4x+8}\right)dx = \\ &= \frac{1}{5}\Big[-\log|x+1|\Big]_0^1 + \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{3(2x+4)-14}{x^2+4x+8}\,dx = \\ &= \frac{1}{5}\Big[-\log|x+1| + 3\log|x^2+4x+8|\Big]_0^1 - \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{14}{x^2+4x+8}\,dx.\end{aligned}$$

Poiché il trinomio x^2+4x+8 è irriducibile, per calcolare l'ultimo integrale scriviamolo sotto forma di un quadrato più una costante. Si ha

$$x^2+4x+8 = x^2+4x+4+4 = (x+2)^2+4 = 4\left(\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+1\right),$$

pertanto

$$\int_0^1 \frac{14}{x^2+4x+8}\,dx = \int_0^1 \frac{7}{2\Big(\big((x+2)/2\big)^2+1\Big)}\,dx = \left[7\arctan\left(\frac{x+2}{2}\right)\right]_0^1.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2-2}{x^3+5x^2+12x+8}\,dx &= \frac{1}{5}\left[-\log|x+1| + 3\log|x^2+4x+8| - 7\arctan\left(\frac{x+2}{2}\right)\right]_0^1 = \\ &= \frac{1}{5}\left(-\log 2 + 3\log 13 - 7\arctan\frac{3}{2} - 3\log 8 + 7\arctan 1\right) = \\ &= \frac{1}{5}\left(-10\log 2 + 3\log 13 - 7\arctan\frac{3}{2} + \frac{7}{4}\pi\right).\end{aligned}$$

3)

a. $\left[\frac{1}{2}x^2 - x + 2\log|x+1|\right]_1^2 = \frac{1}{2} + 2\log 3 - 2\log 2$

b. $\left[\frac{1}{2}\log|x^2+9| + \arctan\left(\frac{x}{3}\right)\right]_2^5 = \frac{1}{2}\log\frac{34}{13} + \arctan\frac{5}{3} - \arctan\frac{2}{3}$

c. $\left[\frac{1}{2}\log|x+1| - \frac{1}{2}|x+3|\right]_0^2 = \log 3 - \frac{1}{2}\log 5$

d. $\left[\frac{1}{8}x^2 - \frac{9}{16(2x+1)} - \frac{1}{16}\log|2x+1|\right]_0^2 = \frac{19}{20} - \frac{1}{16}\log 5$

e. $\left[\frac{1}{2}\log|x+1|+\frac{1}{2}\log|x-1|-\log|x|\right]_2^3=\frac{5}{2}\log 2-\frac{3}{2}\log 3$

f. $\left[\log|x^2-x+2|+\frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{7}}\right)\right]_0^3=\log 4+\frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{5}{\sqrt{7}}\right)+\frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$

g. $\left[-\frac{3}{x+2}+\log|x+2|\right]_1^2=\frac{1}{4}+\log 4-\log 3$

h. $\left[\frac{1}{3}x-\frac{2}{3\sqrt{15}}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}x\right)\right]_0^2=\frac{2}{3}-\frac{2}{3\sqrt{15}}\arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)$

i. $\left[\log|x|-\frac{1}{2}\log|x^2+5|\right]_1^6=\frac{3}{2}\log 6-\frac{1}{2}\log 41$

j. $\left[2\log|x^2+2|-2\log|x^2+3|\right]_0^3=2\log\frac{11}{8}$

k. $\left[5\log|x^2+2|+10\frac{1}{x^2+2}\right]_0^3=5\log\frac{11}{2}-\frac{45}{11}$

l. $\left[-\frac{2}{5}\log|x|+\frac{3}{10}\log|x-5|+\frac{1}{10}\log|x+5|\right]_1^3=-\frac{2}{5}\log 3-\frac{1}{10}\log 6$

4) La derivata della funzione coseno è la funzione $x\mapsto -\operatorname{sen} x$, quindi la funzione integranda è il prodotto tra una funzione in cui la variabile x compare solo come argomento del coseno e la derivata di tale funzione. È allora evidente che la sostituzione $t=\varphi(x)=\cos x$ trasforma l'integrale in uno più semplice. Abbiamo

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen} x\cos x}{\cos x+2}\,dx=-\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{\cos x+2}\,\frac{d\cos x}{dx}\,dx=-\int_{\cos 0}^{\cos(\pi/2)}\frac{t}{t+2}\,dt=$$
$$=-\int_1^0\frac{t+2-2}{t+2}\,dt=\int_0^1\left(1-\frac{2}{t+2}\right)dt=\left[t-2\log|t+2|\right]_0^1=1-2\log 3+2\log 2\,.$$

5) Trasformiamo l'integrale in modo che la funzione integranda sia razionale effettuando la sostituzione $t=\tan(x/2)$, cioè $x=\varphi(t)=2\arctan t$. Risulta $\varphi'(t)=2/(1+t^2)$; per $x=0$ si ha $t=\tan 0=0$, per $x=\pi/2$ si ha $t=\tan(\pi/4)=1$. Quindi si ha

$$\int_0^{\pi/2}\frac{3\cos x+2\sin x}{2+\cos x}\,dx=\int_0^1\frac{3(1-t^2)/(1+t^2)+4t/(1+t^2)}{2+(1-t^2)/(1+t^2)}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt=$$
$$=2\int_0^1\frac{-3t^2+4t+3}{(t^2+3)(t^2+1)}\,dt\,.$$

Il denominatore è scomposto nel prodotto di due polinomi di secondo grado irriducibili. Scomponiamo la funzione integranda in fratti semplici determinando $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{-3t^2+4t+3}{(t^2+3)(t^2+1)} = \frac{at+b}{t^2+3} + \frac{ct+d}{t^2+1}\,.$$

Si ha

$$\begin{aligned}\frac{at+b}{t^2+3} + \frac{ct+d}{t^2+1} &= \frac{(at+b)(t^2+1)+(ct+d)(t^2+3)}{(t^2+3)(t^2+1)} = \\ &= \frac{(a+c)t^3+(b+d)t^2+(a+3c)t+b+3d}{(t^2+3)(t^2+1)}\,.\end{aligned}$$

Pertanto deve essere

$$\begin{cases} a+c=0\,, \\ b+d=-3\,, \\ a+3c=4\,, \\ b+3d=3\,. \end{cases}$$

Sottraendo la prima equazione dalla terza si ha $2c=4$, quindi $c=2$ e $a=-c=-2$. Sottraendo la seconda equazione dalla quarta si ha $2d=6$, quindi $d=3$ e $b=-3-d=-6$.

Quindi si ha

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi/2} \frac{3\cos x + 2\sin x}{2+\cos x}\,dx = 2\int_0^1 \left(-\frac{2t+6}{t^2+3} + \frac{2t+3}{t^2+1}\right)dt = \\ &= 2\left[-\log|t^2+3| - 2\sqrt{3}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + \log(t^2+1) + 3\arctan t\right]_0^1 = \\ &= 2\left(-\log 4 - 2\sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \log 2 + 3\arctan 1 + \log 3\right) = 2\log\frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\pi\,.\end{aligned}$$

6) Trasformiamo la funzione integranda, in modo da esprimerla in funzione di $\tan x$. Si ha

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin^2 x + 6\sin x\cos x + 8\cos^2 x} &= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x + 6\sin x\cos x + 8\cos^2 x} = \\ &= \frac{\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1}{\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 6\dfrac{\sin x}{\cos x} + 8} = \frac{\tan^2 x + 1}{\tan^2 x + 6\tan x + 8}\,.\end{aligned}$$

Effettuiamo la sostituzione $t = \tan x$, cioè $x = \varphi(t) = \arctan t$. Risulta $\varphi'(t) = 1/(t^2+1)$; per $x=0$ si ha $t=\tan 0 = 0$, per $x=\pi/4$ si ha $t=\tan(\pi/4)=1$. Pertanto

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sin^2 x + 6\sin x\cos x + 8\cos^2 x}\,dx &= \int_0^{\pi/4} \frac{\tan^2 x + 1}{\tan^2 x + 6\tan x + 8}\,dx = \\ &= \int_0^1 \frac{t^2+1}{t^2+6t+8}\,\frac{1}{t^2+1}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{t^2+6t+8}\,dt\,.\end{aligned}$$

Scomponiamo la funzione integranda in fratti semplici. Il trinomio t^2+6t+8 si annulla per

$$t=-3\pm\sqrt{3^2-8}=-3\pm 1=\begin{cases}-4.\\-2.\end{cases}$$

Pertanto $t^2+6t+8=(t+4)(t+2)$. Si ha

$$\frac{1}{(t+4)(t+2)}=\frac{1}{2}\frac{2}{(t+4)(t+2)}=\frac{1}{2}\frac{4+t-2-t}{(t+4)(t+2)}=\frac{1}{2}\frac{1}{t+2}-\frac{1}{2}\frac{1}{t+4}.$$

Pertanto

$$\int_0^{\pi/4}\frac{1}{\sin^2 x+6\sin x\cos x+8\cos^2 x}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{t+2}-\frac{1}{t+4}\right)dt=$$
$$=\frac{1}{2}\Big[\log|t+2|-\log|t+4|\Big]_0^1=\frac{1}{2}(\log 3-\log 5-\log 2+\log 4)=\frac{1}{2}\log\frac{6}{5}.$$

7)

a. $\left[\frac{3}{4}x+\frac{1}{16}\operatorname{sen}(4x)\right]_{\pi/4}^{\pi/2}=\frac{3}{16}\pi$

b. $\big[\arctan(\operatorname{sen}x)\big]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}$

c. $\left[\frac{1}{4}\log|\operatorname{sen}x-2|-\frac{1}{4}\log|\operatorname{sen}x+2|\right]_{\pi/6}^{\pi/2}=-\frac{1}{2}\log 3+\frac{1}{4}\log 5$

d. $\big[-\log|2\operatorname{sen}x+\cos x|\big]_0^{\pi/3}=-\log\left(\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)$

e. $\left[\frac{1}{5}\log|\tan x+2|-\frac{1}{10}\log|\tan^2 x+1|+\frac{2}{5}x\right]_0^{\pi/4}=\frac{1}{5}\log 3-\frac{3}{10}\log 2+\frac{\pi}{10}$

f. $\left[-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^{\pi/2}=-\frac{2}{3\sqrt{3}}\pi$

g. $\left[\log|\cos x|-\frac{1}{2}\log|\cos^2 x+1|+\arctan(\cos x)\right]_0^{\pi/4}=\frac{1}{2}\log 2-\frac{1}{2}\log 3-\frac{\pi}{4}+\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$

h. $\left[\frac{1}{4}\log|1-\cos x|-\frac{1}{4}\log|\cos x+1|+\frac{1}{2\cos x-2}\right]_{\pi/4}^{\pi/3}=\frac{1}{4}\log\left(1+\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}$

8) L'integrale è uguale a

$$\int_0^2 \frac{e^x + e^{-x}}{2(e^x+2)}\,dx = \int_0^2 \frac{e^{2x}+1}{2e^x(e^x+2)}\,dx\,.$$

Con la sostituzione $t = e^x$ l'integrale si trasforma nell'integrale di una funzione razionale. Poniamo quindi $x = \varphi(t) = \log t$, per cui $\varphi'(t) = 1/t$. Per $x = 0$ si ha $t = 1$ e per $x = 2$ si ha $t = e^2$. Pertanto

$$\int_0^2 \frac{\cosh x}{e^x+2}\,dx = \int_1^{e^2} \frac{t^2+1}{2t(t+2)}\,\frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^{e^2} \frac{t^2+1}{t^2(t+2)}\,dt\,.$$

Scomponiamo la funzione integranda in fratti semplici, cioè cerchiamo $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{t^2+1}{(t+2)t^2} = \frac{a}{t^2} + \frac{b}{t} + \frac{c}{t+2}\,.$$

Si ha

$$\frac{a}{t^2} + \frac{b}{t} + \frac{c}{t+2} = \frac{a(t+2) + bt(t+2) + ct^2}{(t+2)t^2} = \frac{(b+c)t^2 + (a+2b)t + 2a}{(t+2)t^2}\,.$$

Pertanto deve essere

$$\begin{cases} b + c = 1, \\ a + 2b = 0, \\ 2a = 1, \end{cases}$$

da cui si ricava $a = 1/2$, $b = -a/2 = -1/4$ e $c = 1 - b = 5/4$. Quindi

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{\cosh x}{e^x+2}\,dx &= \frac{1}{2}\int_1^{e^2} \frac{t^2+1}{t^2(t+2)}\,dt = \int_1^{e^2} \left(\frac{1}{4}\,\frac{1}{t^2} - \frac{1}{8}\,\frac{1}{t} + \frac{5}{8}\,\frac{1}{t+2}\right)dt = \\
&= \left[-\frac{1}{4}\,\frac{1}{t} - \frac{1}{8}\log|t| + \frac{5}{8}\log|t+2|\right]_1^{e^2} = \\
&= -\frac{1}{4}e^{-2} - \frac{1}{4} + \frac{5}{8}\log(e^2+2) + \frac{1}{4} - \frac{5}{8}\log 3 = -\frac{1}{4}e^{-2} + \frac{5}{8}\log\left(\frac{e^2+2}{3}\right).
\end{aligned}$$

9) Si ha

$$\int_0^1 \frac{e^x + 2e^{-x}}{e^x + 4e^{-x}}\,dx = \int_0^1 \frac{e^{2x}+2}{e^{2x}+4}\,dx\,.$$

Possiamo trasformare l'integrale in quello di una funzione razionale con la sostituzione $t = e^x$, tuttavia, poiché l'esponente è sempre $2x$, è più utile effettuare la sostituzione $t = e^{2x}$; in questo modo si ottengono polinomi di grado più basso, rendendo più semplice il calcolo dell'integrale. Quindi poniamo $t = e^{2x}$, cioè $x = \varphi(t) = (1/2)\log t$. Risulta $\varphi'(t) = 1/(2t)$, se $x = 0$ si ha $t = 1$, se $x = 1$ si ha $t = e^2$. Pertanto risulta

$$\int_0^1 \frac{e^x + 2e^{-x}}{e^x + 4e^{-x}}\,dx = \int_1^{e^2} \frac{t+2}{t+4}\,\frac{1}{2t}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^{e^2} \frac{t+2}{t(t+4)}\,dt\,.$$

Scomponiamo in fratti semplici la funzione integranda. Si ha

$$\frac{t+2}{t(t+4)}=\frac{1}{2}\,\frac{t+t+4}{t(t+4)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+4}+\frac{1}{t}\right).$$

Pertanto

$$\int_0^1 \frac{e^x+2e^{-x}}{e^x+4e^{-x}}\,dx=\frac{1}{4}\int_1^{e^2}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t+4}\right)dt=\frac{1}{4}\big[\log|t|+\log|t+4|\big]_1^{e^2}=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\log(e^2)+\log(e^2+4)-\log 1-\log 5\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\log\left(\frac{e^2+4}{5}\right).$$

10)

a. $\big[\arctan(e^x)\big]_0^1=\arctan e-\dfrac{\pi}{4}$

b. $\big[2\arctan(e^x)+e^{-x}\big]_0^1=2\arctan e+\dfrac{1}{e}-\dfrac{\pi}{2}-1$

c. $\left[\dfrac{1}{3}e^x+\dfrac{5}{9}\log|3e^x+1|\right]_0^1=\dfrac{1}{3}e+\dfrac{5}{9}\log(3e+1)-\dfrac{1}{3}-\dfrac{5}{9}\log 4$

d. $\left[\dfrac{1}{2}e^{-x}-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{4}\log|e^x-2|\right]_0^{1/2}=\dfrac{1}{2}e^{-1/2}-\dfrac{5}{8}+\dfrac{1}{4}\log(2-e^{1/2})$

e. $\left[\dfrac{1}{6}\log|2e^x+3|+\dfrac{1}{3}x\right]_0^1=\dfrac{1}{6}\log(2e+3)+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{6}\log 5$

f. $\left[e^x-\dfrac{2}{3}\log|e^x+2|+\dfrac{1}{3}\log|e^{2x}-2e^x+4|-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{e^x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1=$

$=e-\dfrac{2}{3}\log(e+2)+\dfrac{1}{3}\log(e^2-2e+4)-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{e-1}{\sqrt{3}}\right)-1+\dfrac{1}{3}\log 3$

g. $\left[\dfrac{5}{4}e^{2x}-\dfrac{3}{2}x\right]_0^1=\dfrac{5}{4}e^2-\dfrac{11}{4}$

h. $\big[\operatorname{senh}x+2\arctan(e^x)\big]_0^1=\operatorname{senh}1+2\arctan e-\dfrac{\pi}{2}$

11) Per eliminare la radice dalla funzione integranda, è opportuno effettuare la sostituzione $\sqrt{x+2}=t^2$, cioè $x=\varphi(t)=t^2-2$. Risulta $\varphi'(t)=2t$; per $x=1$ si ha $t=\sqrt{3}$ e per $x=2$ si ha $t=2$. Pertanto

$$\int_1^2 \frac{x+2\sqrt{x+2}}{x+\sqrt{x+2}}\,dx=\int_{\sqrt{3}}^2 \frac{t^2-2+2t}{t^2-2+t}\,2t\,dt=2\int_{\sqrt{3}}^2 \frac{t^3+2t^2-2t}{t^2+t-2}\,dt.$$

La funzione integranda è razionale, il grado del numeratore è maggiore del grado del denominatore, occorre anzitutto scomporla nella somma di un polinomio con una funzione razionale avente il numeratore di grado minore di quello del denominatore. Si ha

$$\frac{t^3+2t^2-2t}{t^2+t-2}=\frac{t^3+t^2-2t+t^2}{t^2+t-2}=t+\frac{t^2+t-2-t+2}{t^2+t-2}=t+1+\frac{-t+2}{t^2+t-2}.$$

Il denominatore si annulla per

$$t=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot(-2)}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases}-2,\\ 1;\end{cases}$$

pertanto $t^2+t-2=(t+2)(t-1)$. Per scomporre in fratti semplici la funzione razionale integranda dobbiamo determinare $a,b\in\mathbb{R}$ tali che

$$\frac{a}{t+2}+\frac{b}{t-1}=\frac{-t+2}{t^2+t-2}.$$

Riducendo a denominatore comune risulta

$$\frac{a}{t+2}+\frac{b}{t-1}=\frac{a(t-1)+b(t+2)}{(t+2)(t-1)}=\frac{(a+b)t-a+2b}{(t+2)(t-1)},$$

pertanto deve essere

$$\begin{cases}a+b=-1,\\ -a+2b=2.\end{cases}$$

Sommando membro a membro le due equazioni si ottiene $3b=1$, quindi $b=1/3$ e dalla prima equazione si ha $a=-1-b=-4/3$. Pertanto

$$\int_1^2\frac{x+2\sqrt{x+2}}{x+\sqrt{x+2}}\,dx=2\int_{\sqrt{3}}^2\left(t+1-\frac{4}{3}\,\frac{1}{t+2}+\frac{1}{3}\,\frac{1}{t-1}\right)dt=$$

$$=\left[t^2+2t-\frac{8}{3}\log|t+2|+\frac{2}{3}\log|t-1|\right]_{\sqrt{3}}^2=$$

$$=4+4-\frac{8}{3}\log 4+\frac{2}{3}\log 1-3-2\sqrt{3}+\frac{8}{3}\log\left(\sqrt{3}+2\right)-\frac{2}{3}\log\left(\sqrt{3}-1\right)=$$

$$=5-2\sqrt{3}+\frac{8}{3}\log\left(\sqrt{3}+2\right)-\frac{8}{3}\log 4-\frac{2}{3}\log\left(\sqrt{3}-1\right).$$

12) Nella funzione integranda compare la radice quadrata del quoziente di due polinomi di primo grado; per eliminare la radice è opportuno effettuare una sostituzione in modo che la nuova variabile di integrazione sia tale radice. Perciò poniamo $t=\sqrt{(x+1)/(3x-1)}$, quindi $(3x-1)t^2=x+1$, da cui si ricava $(3t^2-1)x=t^2+1$. Pertanto effettuiamo la sostituzione $x=\varphi(t)=(t^2+1)/(3t^2-1)$. Si ha

$$\varphi'(t)=\frac{2t(3t^2-1)-6t(t^2+1)}{(3t^2-1)^2}=\frac{6t^3-2t-6t^3-6t}{(3t^2-1)^2}=\frac{-8t}{(3t^2-1)^2};$$

per $x=1/2$ risulta $t=\sqrt{3}$, per $x=1$ risulta $t=1$, per cui si ha

$$\int_{1/2}^1\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{3x-1}}\,dx=\int_{\sqrt{3}}^1\frac{3t^2-1}{t^2+1}\,t\,\frac{-8t}{(3t^2-1)^2}\,dt=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{8t^2}{(t^2+1)(3t^2-1)}\,dt.$$

La funzione integranda è razionale con numeratore di grado minore del denominatore. Anzitutto è necessario fattorizzare il denominatore. Il polinomio t^2+1 è irriducibile, mentre il polinomio $3t^2-1$ si scompone in $\big(\sqrt{3}\,t+1\big)\big(\sqrt{3}\,t-1\big)$, perciò la funzione integranda si scompone in fratti semplici nella forma

$$\frac{8t^2}{(t^2+1)(3t^2-1)}=\frac{a}{\sqrt{3}\,t-1}+\frac{b}{\sqrt{3}\,t+1}+\frac{ct+d}{t^2+1},$$

con a, b, c e d opportuni numeri reali. Riducendo a denominatore comune l'espressione a secondo membro, il numeratore diventa

$$\begin{aligned}
&a\big(\sqrt{3}\,t+1\big)(t^2+1)+b\big(\sqrt{3}\,t-1\big)(t^2+1)+(ct+d)(3t^2-1)=\\
&=\sqrt{3}at^3+\sqrt{3}\,at+at^2+a+\sqrt{3}\,bt^3+\sqrt{3}\,bt-bt^2-b+3ct^3-ct+3dt^2-d=\\
&=\big(\sqrt{3}\,a+\sqrt{3}\,b+3c\big)t^3+(a-b+3d)t^2+\big(\sqrt{3}\,a+\sqrt{3}\,b-c\big)t+(a-b-d).
\end{aligned}$$

Questo numeratore deve essere uguale a $8t^2$, quindi a, b, c e d debbono soddisfare il sistema

$$\begin{cases}\sqrt{3}\,a+\sqrt{3}\,b+3c=0,\\ a-b+3d=8,\\ \sqrt{3}\,a+\sqrt{3}\,b-c=0,\\ a-b-d=0.\end{cases}$$

Sottraendo membro a membro la terza equazione dalla prima si ottiene $4c=0$, quindi $c=0$. Sottraendo membro a membro la quarta equazione dalla seconda si ottiene $4d=8$, quindi $d=2$. La prima equazione diventa $\sqrt{3}\,a+\sqrt{3}\,b=0$, quindi $b=-a$, sostituendo nell'ultima si ha $2a-2=0$, quindi $a=1$ e $b=-1$.

Perciò si ha

$$\begin{aligned}
&\int_{1/2}^{1}\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{3x-1}}\,dx=\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{8t^2}{(t^2+1)(3t^2-1)}\,dt=\\
&=\int_{1}^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}\,t-1}-\frac{1}{\sqrt{3}\,t+1}+\frac{2}{t^2+1}\right)dt=\\
&=\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\log\big|\sqrt{3}\,t-1\big|-\frac{1}{\sqrt{3}}\log\big|\sqrt{3}\,t+1\big|+2\arctan t\right]_1^{\sqrt{3}}=\\
&=\frac{1}{\sqrt{3}}\log 2-\frac{1}{\sqrt{3}}\log 4+2\arctan\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\log\big(\sqrt{3}-1\big)+\frac{1}{\sqrt{3}}\log\big(\sqrt{3}+1\big)-2\arctan 1=\\
&=-\frac{1}{\sqrt{3}}\log 2+2\frac{\pi}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\log\left(\frac{\big(\sqrt{3}+1\big)^2}{\big(\sqrt{3}-1\big)\big(\sqrt{3}+1\big)}\right)-2\frac{\pi}{4}=\\
&=-\frac{2}{\sqrt{3}}\log 2+\frac{2}{\sqrt{3}}\log\big(\sqrt{3}+1\big)+\frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

13) Nella funzione integranda compare il termine $\sqrt{-x^2+4}$; eliminiamo la radice con una opportuna sostituzione. Poniamo $x=\varphi(t)=2\operatorname{sen} t$; se x appartiene al dominio di integrazione, allora si ha $x/2\in[1/2,1]\subseteq\mathscr{D}(\operatorname{arcsen})$, quindi risulta $t=\varphi^{-1}(x)=\operatorname{arcsen}(x/2)$ e gli estremi di integrazione diventano $\operatorname{arcsen}(1/2)$ e $\operatorname{arcsen} 1$. Poiché $t\in[\pi/6,\pi/2]$ si ha $\cos t\geq 0$, quindi

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{-x^2+4}}{x}\,dx=\int_{\operatorname{arcsen}(1/2)}^{\operatorname{arcsen} 1}\frac{\sqrt{4-(2\operatorname{sen} t)^2}}{2\operatorname{sen} t}\,2\cos t\,dt=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{2\cos^2 t}{\operatorname{sen} t}\,dt\,.$$

La funzione integranda può essere scritta come prodotto tra una funzione razionale di $\cos t$ e $\operatorname{sen} t$; quindi la sostituzione $\cos t=s$ trasforma l'integrale in quello di in una funzione razionale. Si ha infatti

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{2\cos^2 t}{\operatorname{sen} t}\,dt=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{2\cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t}\operatorname{sen} t\,dt=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{2\cos^2 t}{1-\cos^2 t}\operatorname{sen} t\,dt\,.$$

Poiché la derivata della funzione coseno è la funzione $x\mapsto -\operatorname{sen} x$, con la sostituzione $s=\cos t$ si ottiene

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{2\cos^2 t}{1-\cos^2 t}\operatorname{sen} t\,dt=-\int_{\cos(\pi/6)}^{\cos(\pi/2)}\frac{2s^2}{1-s^2}\,ds=\int_0^{\sqrt{3}/2}\frac{2s^2}{1-s^2}\,ds\,.$$

Il polinomio a numeratore ha lo stesso grado di quello a denominatore, quindi bisogna scomporre la frazione nella somma di un polinomio e di una frazione il cui numeratore abbia grado minore di quello del denominatore. Si ha

$$\frac{2s^2}{1-s^2}=\frac{2s^2-2+2}{1-s^2}=-2+\frac{2}{1-s^2}\,.$$

Inoltre

$$\frac{2}{1-s^2}=\frac{(1+s)+(1-s)}{1-s^2}=\frac{1+s}{1-s^2}+\frac{1-s}{1-s^2}=\frac{1}{1-s}+\frac{1}{1+s}\,.$$

Pertanto si ha

$$\int_1^2\frac{\sqrt{-x^2+4}}{x}\,dx=\int_0^{\sqrt{3}/2}\frac{2s^2}{1-s^2}\,ds=\int_0^{\sqrt{3}/2}\left(-2+\frac{1}{1+s}+\frac{1}{1-s}\right)ds=$$

$$=\Big[-2s+\log|1+s|-\log|1-s|\Big]_0^{\sqrt{3}/2}=-\sqrt{3}+\log\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)-\log\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)=$$

$$=-\sqrt{3}+\log\left(\frac{\left(\sqrt{3}+2\right)^2}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}\right)=-\sqrt{3}+\log\left(7+4\sqrt{3}\right).$$

14) Per eliminare la radice è opportuno effettuare la sostituzione $x=\varphi(t)=3\operatorname{senh} t$, quindi $\varphi'(t)=3\cosh t$. Si ha $t=\operatorname{settsenh}(x/3)$, quindi per $x=0$ risulta $t=0$, mentre per $x=6$ risulta $t=\operatorname{arcsen} 2=\log\left(2+\sqrt{2^2+1}\right)=\log\left(2+\sqrt{5}\right)$. Pertanto

$$\int_0^6\frac{1}{5+\sqrt{x^2+9}}\,dx=\int_{\operatorname{settsenh} 0}^{\operatorname{settsenh} 2}\frac{1}{5+\sqrt{9\operatorname{senh}^2 t+9}}\,3\cosh t\,dt=$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\log(2+\sqrt{5})} \frac{3\cosh t}{5+3\cosh t}\,dt = \int_0^{\log(2+\sqrt{5})} \frac{3e^t+3e^{-t}}{10+3e^t+3e^{-t}}\,dt = \\
&= \int_0^{\log(2+\sqrt{5})} \frac{3e^{2t}+3}{3e^{2t}+10e^t+3}\,dt\,.
\end{aligned}
$$

Per calcolare l'integrale è opportuno eliminare l'esponenziale, ponendo $s=e^t$; quindi effettuiamo la sostituzione $t=h(s)=\log s$; poiché $h'(s)=1/s$, si ha

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\log(2+\sqrt{5})} \frac{3e^{2t}+3}{3e^{2t}+10e^t+3}\,dt &= \int_{e^0}^{\exp(\log(2+\sqrt{5}))} \frac{3s^2+3}{3s^2+10s+3}\,\frac{1}{s}\,ds = \\
&= \int_1^{2+\sqrt{5}} \frac{3s^2+3}{(3s^2+10s+3)s}\,ds\,.
\end{aligned}
$$

Dobbiamo integrare una funzione razionale con numeratore di grado minore del denominatore. Fattorizziamo il denominatore. Il trinomio $3s^2+10s+3$ si annulla per

$$
s = \frac{-5\pm\sqrt{25-9}}{3} = \frac{-5\pm 4}{3} = \begin{cases} -3\,, \\ -\dfrac{1}{3}\,, \end{cases}
$$

pertanto si ha la fattorizzazione

$$
3s^2+10s+3 = 3(s+3)\left(s+\frac{1}{3}\right) = (s+3)(3s+1)\,.
$$

Per scomporre la funzione integranda in fratti semplici determiniamo $a,b,c\in\mathbb{R}$ tali che risulti

$$
\frac{a}{s}+\frac{b}{s+3}+\frac{c}{3s+1} = \frac{3s^2+3}{(3s^2+10s+3)s}\,,
$$

Si ha

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{s}+\frac{b}{s+3}+\frac{c}{3s+1} &= \frac{a(s+3)(3s+1)+bs(3s+1)+cs(s+3)}{s(3s^2+10s+3)} = \\
&= \frac{(3a+3b+c)s^2+(10a+b+3c)s+3a}{s(3s^2+10s+3)}\,.
\end{aligned}
$$

Pertanto a,b,c devono verificare il sistema

$$
\begin{cases}
3a+3b+c=3\,, \\
10a+b+3c=0\,, \\
3a=3\,.
\end{cases}
$$

Quindi $a=1$ e rimane il sistema

$$
\begin{cases}
3b+c=0\,, \\
b+3c=-10\,.
\end{cases}
$$

Dalla prima equazione segue $c=-3b$; sostituendo nella seconda si ottiene $b-9b=-10$, da cui segue $b=5/4$ e $c=-15/4$. Perciò risulta

$$\begin{aligned}
&\int_0^6 \frac{1}{5+\sqrt{x^2+9}}\,dx=\frac{1}{4}\int_1^{2+\sqrt{5}}\left(\frac{4}{s}+\frac{5}{s+3}-\frac{15}{3s+1}\right)ds=\\
&=\frac{1}{4}\Big[4\log|s|+5\log|s+3|-5\log|3s+1|\Big]_1^{2+\sqrt{5}}=\\
&=\log\big(2+\sqrt{5}\big)+\frac{5}{4}\log\big(5+\sqrt{5}\big)-\frac{5}{4}\log\big(7+3\sqrt{5}\big)-\frac{5}{4}\log 4+\frac{5}{4}\log 4=\\
&=\log\big(2+\sqrt{5}\big)+\frac{5}{4}\log\left(\frac{\big(5+\sqrt{5}\big)\big(7-3\sqrt{5}\big)}{\big(7+3\sqrt{5}\big)\big(7-3\sqrt{5}\big)}\right)=\log\big(2+\sqrt{5}\big)+\frac{5}{4}\log\big(5-2\sqrt{5}\big).
\end{aligned}$$

15) La funzione integranda è funzione razionale di x e $\sqrt{x^2-9}$, quindi è utile effettuare la sostituzione $x=\varphi(t)=3\cosh t$, quindi $\varphi'(t)=3\operatorname{senh} t$. Si ha $t=\operatorname{settcosh}(x/3)$, quindi per $x=6$ risulta $t=\operatorname{settcosh}2=\log\big(2+\sqrt{2^2-1}\big)=\log\big(2+\sqrt{3}\big)$, mentre per $x=3$ risulta $t=\operatorname{settcosh}3=\log\big(2+\sqrt{3^2-1}\big)=\log\big(2+\sqrt{8}\big)$. Pertanto

$$\begin{aligned}
&\int_6^9 \frac{2x^2+9}{(2x^2-9)\sqrt{x^2-9}}\,dx=\int_{\operatorname{settcosh}2}^{\operatorname{settcosh}3}\frac{18\cosh^2 t+9}{(18\cosh^2 t-9)\sqrt{9\cosh^2 t-9}}\,3\operatorname{senh} t\,dt=\\
&=\int_{\log(2+\sqrt{3})}^{\log(2+\sqrt{8})}\frac{2\cosh^2 t+1}{2\cosh^2 t-1}\,dt=\int_{\log(2+\sqrt{3})}^{\log(2+\sqrt{8})}\frac{2(e^t+e^{-t})^2/4+1}{2(e^t+e^{-t})^2/4-1}\,dt=\\
&=\int_{\log(2+\sqrt{3})}^{\log(2+\sqrt{8})}\frac{e^{2t}+2+e^{-2t}+2}{e^{2t}+2+e^{-2t}-2}\,dt=\int_{\log(2+\sqrt{3})}^{\log(2+\sqrt{8})}\frac{e^{4t}+4e^{2t}+1}{e^{4t}+1}\,dt\,.
\end{aligned}$$

Rimane da integrare una funzione razionale di e^{2t} ; per eliminare gli esponenziali si può porre $s=e^{2t}$, perciò effettuiamo la sostituzione $t=h(s)=(1/2)\log s$. Si ha $h'(s)=1/(2s)$, gli estremi di integrazione diventano

$$\begin{aligned}
\exp\Big(2\log\big(2+\sqrt{3}\big)\Big)&=\big(2+\sqrt{3}\big)^2=7+4\sqrt{3},\\
\exp\Big(2\log\big(3+\sqrt{8}\big)\Big)&=\big(3+\sqrt{8}\big)^2=17+12\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

quindi risulta

$$\int_{\log(2+\sqrt{3})}^{\log(2+\sqrt{8})}\frac{e^{4t}+4e^{2t}+1}{e^{4t}+1}\,dt=\int_{7+4\sqrt{3}}^{17+12\sqrt{2}}\frac{s^2+4s+1}{s^2+1}\,\frac{1}{2s}\,ds=\frac{1}{2}\int_{7+4\sqrt{3}}^{17+12\sqrt{2}}\frac{s^2+4s+1}{s(s^2+1)}\,ds\,.$$

La funzione integranda è razionale e il suo denominatore è già fattorizzato; per scomporre in fratti semplici è sufficiente osservare che

$$\frac{s^2+4s+1}{s(s^2+1)}=\frac{s^2+1}{s(s^2+1)}+\frac{4s}{s(s^2+1)}=\frac{1}{s}+\frac{4}{s^2+1}\,.$$

Quindi l'integrale è uguale a

$$\frac{1}{2}\int_{7+4\sqrt{3}}^{17+12\sqrt{2}}\left(\frac{1}{s}+\frac{4}{s^2+1}\right)ds=\frac{1}{2}\Big[\log|s|+4\arctan s\Big]_{7+4\sqrt{3}}^{17+12\sqrt{2}}=$$
$$=\frac{1}{2}\log\big(17+12\sqrt{2}\big)+2\arctan\big(17+12\sqrt{2}\big)-\frac{1}{2}\log\big(7+4\sqrt{3}\big)-2\arctan\big(7+4\sqrt{3}\big).$$

16) La funzione integranda è funzione razionale della variabile x e della radice quadrata di un polinomio di secondo grado in x; occorre innanzitutto effettuare una sostituzione che consenta di eliminare tale radice, trasformando l'integranda in una funzione razionale. Si ha

$$-x^2+2x+3=-(x^2-2x-3)=-(x^2-2x+1)+4=4-(x-1)^2;$$

quindi, per eliminare la radice dalla funzione integranda, risulta utile porre $x-1=2\operatorname{sen} t$, cioè $x=\varphi(t)=1+2\operatorname{sen} t$ e $\varphi'(t)=2\cos t$. Poiché $(x-1)/2\in[1/2,1]\subseteq\mathscr{D}(\text{arcsen})$, si ha $t=\varphi^{-1}(x)=\text{arcsen}\big((x-1)/2\big)$, quindi per $x=2$ si ha $t=\text{arcsen}(1/2)=\pi/6$ e per $x=3$ si ha $t=\text{arcsen}\,1=\pi/2$. Se $t\in[\pi/6,\pi/2]$ si ha $\cos t\geq 0$, quindi $\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}=\cos t$; pertanto risulta

$$\int_2^3\frac{4+\sqrt{-x^2+2x+3}}{x-1}\,dx=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{4+\sqrt{4-(2\operatorname{sen} t)^2}}{2\operatorname{sen} t}\,2\cos t\,dt=$$
$$=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{4+2\cos t}{2\operatorname{sen} t}2\cos t\,dt=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{4\cos t+2\cos^2 t}{\operatorname{sen} t}\,dt.$$

Questa funzione integranda può essere facilmente trasformata nel prodotto di una funzione razionale di $\cos t$ moltiplicata per $\operatorname{sen} t$. Abbiamo infatti

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{4\cos t+2\cos^2 t}{\operatorname{sen} t}\,dt=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{4\cos t+2\cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t}\operatorname{sen} t\,dt=$$
$$=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{4\cos t+2\cos^2 t}{1-\cos^2 t}\operatorname{sen} t\,dt.$$

Poiché la derivata della funzione coseno è l'opposto della funzione seno, con la sostituzione $s=\cos t$, si ottiene l'integrale di una funzione razionale:

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{4\cos t+2\cos^2 t}{1-\cos^2 t}\operatorname{sen} t\,dt=-\int_{\cos(\pi/6)}^{\cos(\pi/2)}\frac{4s+2s^2}{1-s^2}\,ds=\int_0^{\sqrt{3}/2}\frac{2s^2+4s}{1-s^2}\,ds,$$

La funzione integranda è razionale, il polinomio a numeratore ha lo stesso grado di quello a denominatore, quindi occorre scomporre la frazione nella somma di un polinomio e di una frazione il cui numeratore abbia grado minore di quello del denominatore. Si ha

$$\frac{2s^2+4s}{1-s^2}=\frac{2s^2-2+2+4s}{1-s^2}=-2+\frac{4s+2}{1-s^2},$$

Dobbiamo scomporre in fratti semplici la funzione $\frac{4s+2}{1-s^2}$. Poiché $1-s^2$ si fattorizza in $(1+s)(1-s)$, la scomposizione in fratti semplici è della forma

$$\frac{a}{1+s}+\frac{b}{1-s},$$

con a e b numeri reali da determinare. Si ha

$$\frac{a}{1+s}+\frac{b}{1-s}=\frac{a(1-s)+b(1+s)}{(1+s)(1-s)}=\frac{(b-a)s+a+b}{1-s^2};$$

affinché questo sia uguale a $(4s+2)/(1-s^2)$, i coefficienti a e b soddisfare il sistema

$$\begin{cases} b-a=4, \\ a+b=2. \end{cases}$$

Sommando membro a membro si ottiene $2b=6$, da cui $b=3$; sottraendo membro a membro si ottiene $-2a=2$, da cui $a=-1$. Quindi si ha

$$\int_2^3 \frac{4+\sqrt{-x^2+2x+3}}{x-1}\,dx=\int_0^{\sqrt{3}/2}\frac{4s+2s^2}{1-s^2}\,ds=\int_0^{\sqrt{3}/2}\left(-2-\frac{1}{1+s}+\frac{3}{1-s}\right)ds=$$
$$=\Big[-2s-\log|1+s|-3\log|1-s|\Big]_0^{\sqrt{3}/2}=-\sqrt{3}-\log\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)-3\log\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right).$$

17)

a. $\left[\frac{1}{2}x-2\sqrt{x}+4\log|2+\sqrt{x}|\right]_0^1=-\frac{3}{2}+4\log 3-4\log 2$

b. $\left[-2\arctan\left(\sqrt{1-x}\right)\right]_{-3}^0=-\frac{\pi}{2}+2\arctan 2$

c. $\left[\frac{2}{3}(x+2)^{3/2}-6\sqrt{x+2}\right]_0^2=-\frac{20}{3}+\frac{14}{3}\sqrt{2}$

d. $\left[\log\left|\sqrt{2x+1}-1\right|-\log\left|\sqrt{2x+1}+1\right|\right]_1^2=\log\left(\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}\right)$

e. $\left[\sqrt{x^2-1}-\arctan\left(\sqrt{x^2-1}\right)\right]_1^2=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$

f. $\left[-\mathrm{arcsen}(x-1)-\sqrt{-x^2+2x}\right]_{1/2}^{3/2}=-\frac{\pi}{3}$

g. $\left[3\arctan\left(\frac{3x}{\sqrt{16-x^2}}\right)-\mathrm{arcsen}\left(\frac{1}{4}x\right)\right]_0^2=\frac{5}{6}\pi$

h. $\left[\sqrt{x^2+4}-2\log\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)\right]_0^2=2\sqrt{2}-2\log\left(\sqrt{8}+2\right)-2+2\log 4$

i. $\left[x\sqrt{1-\frac{9}{4}x^2}+\frac{2}{3}\,\text{arcsen}\left(\frac{3}{2}\,x\right)\right]_0^{1/3}=\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{\pi}{9}$

j. $\left[\sqrt{7}\,\arctan\left(\frac{\sqrt{7}\,x}{\sqrt{16+x^2}}\right)+\text{settsenh}\left(\frac{1}{4}\,x\right)\right]_0^2=\sqrt{7}\,\arctan\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}+\text{settsenh}\,\frac{1}{2}$

k. $\left[\frac{1}{4}\sqrt{1+8x^2}-\frac{1}{4}\,\arctan\left(\sqrt{1+8x^2}\right)\right]_0^1=1-\frac{1}{4}\,\arctan 5+\frac{\pi}{16}$

l. $\left[\frac{x}{4\sqrt{x^2+4}}\right]_0^1=\frac{1}{4\sqrt{5}}$

m. $\left[\frac{1}{2}\,x\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}\,\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right]_2^3=3\sqrt{2}+\frac{1}{2}\,\log\left(3+2\sqrt{2}\right)-\sqrt{3}-\frac{1}{2}\,\log\left(2+\sqrt{3}\right)$

n. $\left[-\frac{1}{3}(-x^2-4x+5)^{3/2}-(x+2)\sqrt{-x^2-4x+5}-9\,\text{arcsen}\left(\frac{x+2}{3}\right)\right]_{-1/2}^0=$
$=-\frac{11}{3}\sqrt{5}-9\,\text{arcsen}\,\frac{2}{3}+\frac{45}{8}\sqrt{3}+\frac{3}{2}\,\pi$

o. $\left[\frac{1}{2}\sqrt{x^4+2x^2+2}-\frac{1}{2}\,\log\left(\sqrt{x^4+2x^2+2}+x^2+1\right)\right]_0^1=$
$=\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\,\log\left(\sqrt{5}+2\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\,\log\left(\sqrt{2}+1\right)$

p. $\left[\frac{1}{\sqrt{4x/(x+3)}+2}-\frac{3}{4}\,\log\left|\sqrt{\frac{4x}{x+3}}+2\right|-\frac{1}{4}\,\log\left|\sqrt{\frac{4x}{x+3}}-2\right|+\log\left|\sqrt{\frac{4x}{x+3}}\right|\right]_1^3=$
$=\frac{1}{\sqrt{2}+2}-\frac{3}{4}\,\log\left(\sqrt{2}+2\right)-\frac{1}{4}\,\log\left(2-\sqrt{2}\right)+\frac{1}{2}\log 2-\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\,\log 3$

18) La funzione integranda è il prodotto tra una funzione in cui la variabile x compare solo come argomento del logaritmo e la derivata della funzione logaritmo; ponendo $\varphi(x)=\log x$, si ha

$$\frac{\log x}{3x(\log^2 x+4)}=\frac{\varphi(x)}{3\left(\left(\varphi(x)\right)^2+4\right)}\,\varphi'(x).$$

Pertanto è utile effettuare la sostituzione $t=\varphi(x)=\log x$. Si ha

$$\int_1^2\frac{\log x}{3x(\log^2 x+4)}\,dx=\int_0^{\log 2}\frac{t}{3(t^2+4)}\,dt\,.$$

A meno di costanti moltiplicative, il numeratore della funzione integranda è la derivata del denominatore, quindi si trova facilmente una primitiva. Si ha

$$\int_0^{\log 2} \frac{t}{3(t^2+4)}\,dt = \int_0^{\log 2} \frac{1}{6}\,\frac{2t}{t^2+4}\,dt = \left[\frac{1}{6}\log|t^2+4|\right]_0^{\log 2} = \frac{1}{6}\log(\log^2 2+4) - \frac{1}{6}\log 4\,.$$

19) La funzione integranda è il prodotto di due funzioni di ciascuna delle quali si trova facilmente una primitiva: il primo fattore ha la primitiva x^2, mentre il secondo fattore si presenta nella forma $g'(x)\big(g(x)\big)^{-3}$, con $g(x)=3\,\mathrm{sen}\,x+2\cos x$, quindi una sua primitiva è $-(1/2)\big(g(x)\big)^{-2}$. Pertanto è possibile integrare per parti in due modi diversi; evidentemente è opportuno derivare il fattore $2x$, perché con tale scelta rimane da integrare una funzione in cui la variabile x compare esclusivamente come argomento delle funzioni seno e coseno, cosa che non accade nell'altro caso. Si ha

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi/6} 2x\,\frac{-2\,\mathrm{sen}\,x+3\cos x}{(3\,\mathrm{sen}\,x+2\cos x)^3}\,dx = \\
&= \left[2x\,\frac{-1}{2(3\,\mathrm{sen}\,x+2\cos x)^2}\right]_0^{\pi/6} - \int_0^{\pi/6} 2\,\frac{-1}{2(3\,\mathrm{sen}\,x+2\cos x)^2}\,dx = \\
&= \left[\frac{-x}{(3\,\mathrm{sen}\,x+2\cos x)^2}\right]_0^{\pi/6} + \int_0^{\pi/6} \frac{1}{(3\,\mathrm{sen}\,x+2\cos x)^2}\,dx\,.
\end{aligned}$$

Il primo addendo è uguale a

$$\begin{aligned}
\frac{-\pi/6}{\big(3(1/2)+2(\sqrt{3}/2)\big)^2} &= -\frac{\pi}{6}\,\frac{4}{21+12\sqrt{3}} = -\frac{2}{9}\,\frac{7-4\sqrt{3}}{\big(7+4\sqrt{3}\big)\big(7-4\sqrt{3}\big)}\,\pi = \\
&= \frac{2}{9}\big(4\sqrt{3}-7\big)\pi\,.
\end{aligned}$$

Rimane da calcolare l'integrale del quoziente tra una costante e una funzione omogenea di grado 2 in seno e coseno. Si può esprimere tale funzione tramite la funzione tangente, poiché l'intervallo di integrazione è incluso nel suo dominio. Si ha

$$\frac{1}{(3\,\mathrm{sen}\,x+2\cos x)^2} = \frac{\mathrm{sen}^2 x+\cos^2 x}{(3\,\mathrm{sen}\,x+2\cos x)^2} = \frac{\dfrac{\mathrm{sen}^2 x}{\cos^2 x}+1}{\left(3\,\dfrac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x}+2\right)^2} = \frac{\tan^2 x+1}{(3\tan x+2)^2}\,;$$

pertanto è utile effettuare la sostituzione $\tan x = t$. Poiché $[0,\pi/6]$ è incluso nell'immagine della funzione arcotangente, si ha $x=\varphi(t)=\arctan t$, da cui $\varphi'(t)=1/(1+t^2)$. Per $x=0$ si ha $t=\tan 0=0$, per $x=\pi/6$ si ha $t=\tan(\pi/6)=1/\sqrt{3}$. Pertanto risulta

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi/6} \frac{1}{(3\,\mathrm{sen}\,x+2\cos x)^2}\,dx = \int_0^{\pi/6} \frac{\tan^2 x+1}{(3\tan x+2)^2}\,dx = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{t^2+1}{(3t+2)^2}\,\frac{1}{1+t^2}\,dt = \\
&= \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{(3t+2)^2}\,dt = \left[-\frac{1}{3}\,\frac{1}{3t+2}\right]_0^{1/\sqrt{3}} = -\frac{1}{3}\,\frac{1}{\big(3/\sqrt{3}\big)+2} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{2} = -\frac{1}{3\sqrt{3}+6} + \frac{1}{6} =
\end{aligned}$$

$$=-\frac{6-3\sqrt{3}}{\left(6+3\sqrt{3}\right)\left(6-3\sqrt{3}\right)}+\frac{1}{6}=-\frac{2-\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\,.$$

Quindi

$$\int_0^{\pi/6} 2x\,\frac{-2\operatorname{sen}x+5\cos x}{(5\operatorname{sen}x+2\cos x)^3}\,dx=\left[\frac{-x}{(5\operatorname{sen}x+2\cos x)^2}\right]_0^{\pi/6}-\left[\frac{1}{5(5t+2)}\right]_0^{1/\sqrt{3}}=$$
$$=\frac{2}{9}\left(4\sqrt{3}-7\right)\pi+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\,.$$

20) La funzione integranda si può esprimere sotto forma di prodotto

$$\arctan(x+1)\,(4x+1)^{-3/2}\,,$$

ed è facile trovare una primitiva del secondo fattore, mentre il primo fattore ha come derivata una funzione razionale. Per questo è utile integrare per parti, derivando il primo fattore. Una primitiva di $(4x+1)^{-3/2}$ è $-(1/2)(4x+1)^{-1/2}$. Quindi si ha

$$\int_0^2 \frac{\arctan(x+1)}{(4x+1)^{3/2}}\,dx=\left[-\frac{1}{2}\arctan(x+1)\frac{1}{\sqrt{4x+1}}\right]_0^2+\frac{1}{2}\int_0^2\frac{1}{(x+1)^2+1}\,\frac{1}{\sqrt{4x+1}}\,dx=$$
$$=-\frac{1}{6}\arctan 3+\frac{1}{2}\arctan 1+\frac{1}{2}\int_0^2\frac{1}{x^2+2x+2}\,\frac{1}{\sqrt{4x+1}}\,dx=$$
$$=-\frac{1}{6}\arctan 3+\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\int_0^2\frac{1}{(x^2+2x+2)\sqrt{4x+1}}\,dx\,.$$

In questo integrale compare il termine $\sqrt{4x+1}$, per ricondurci all'integrale di una funzione razionale poniamo $t=\sqrt{4x+1}$, cioè $4x+1=t^2$, da cui $x=(t^2-1)/4$. Quindi effettuiamo la sostituzione $x=\varphi(t)=(t^2-1)/4$; si ha $\varphi'(t)=t/2$. Per $x=0$ si ha $t=1$, mentre per $x=2$ si ha $t=3$, perciò risulta

$$\frac{1}{2}\int_0^2\frac{1}{(x^2+2x+2)\sqrt{4x+1}}\,dx=\frac{1}{2}\int_1^3\frac{1}{\left((t^2-1)^2/16+2(t^2-1)/4+2\right)t}\,\frac{1}{2}\,t\,dt=$$
$$=\int_1^3\frac{4}{t^4-2t^2+1+8t^2-8+32}\,dt=\int_1^3\frac{4}{t^4+6t^2+25}\,dt\,.$$

Abbiamo l'integrale di una funzione razionale, che ha numeratore di grado minore del denominatore, quindi può essere scomposta in fratti semplici. Occorre fattorizzare il denominatore t^4+6t^2+25; tale polinomio è biquadratico. Ponendo $s=t^2$ si ottiene il polinomio $s^2+6s+25$ il cui discriminante è $6^2-4\cdot 25=-64<0$, quindi il polinomio non ha radici reali. Perciò il polinomio t^4+6t^2+25 si fattorizza nel prodotto di due trinomi di secondo grado irriducibili.

La ricerca dei due fattori può essere effettuata in vari modi. Si possono determinare le radici complesse del polinomio e quindi fattorizzarlo nel campo complesso; infine, combinando opportunamente a due a due i fattori trovati, si ricava la fattorizzazione reale. Alternativamente si può esprimere il polinomio come prodotto di due trinomi con coefficienti incogniti, imporre la condizione che il prodotto sia uguale al polinomio da scomporre e ricavare i coefficienti.

Si può anche ottenere la fattorizzazione ricorrendo ad un semplice artificio. Si ha infatti

$$t^4+6t^2+25=t^4+10t^2+25-4t^2=(t^2+5)^2-(2t)^2=(t^2+5+2t)(t^2+5-2t).$$

Per calcolare l'integrale dobbiamo scomporre la funzione integranda in fratti semplici, cioè dobbiamo determinare i numeri reali a, b, c e d tali che

$$\frac{4}{t^4+6t^2+25}=\frac{at+b}{t^2+2t+5}+\frac{ct+d}{t^2-2t+5}.$$

Si ha

$$\begin{aligned}\frac{at+b}{t^2+2t+5}+\frac{ct+d}{t^2-2t+5}&=\frac{(at+b)(t^2-2t+5)+(ct+d)(t^2+2t+5)}{(t^2+2t+5)(t^2-2t+5)}=\\&=\frac{at^3-2at^2+5at+bt^2-2bt+5b+ct^3+2ct^2+5ct+dt^2+2dt+5d}{(t^2+2t+5)(t^2-2t+5)}=\\&=\frac{(a+c)t^3+(-2a+b+2c+d)t^2+(5a-2b+5c+2d)t+5b+5d}{(t^2+2t+5)(t^2-2t+5)},\end{aligned}$$

quindi a, b, c e d devono verificare il sistema

$$\begin{cases}a+c=0,\\-2a+b+2c+d=0,\\5a-2b+5c+2d=0,\\5b+5d=4.\end{cases}$$

Dalla prima equazione si ha $c=-a$ e, sostituendo, il sistema diventa

$$\begin{cases}c=-a,\\-2a+b-2a+d=0,\\-2b+2d=0,\\5b+5d=4.\end{cases}$$

Dalla terza equazione si ottiene $d=b$, quindi restano le equazioni $10b=4$ e $4a=2b$. Pertanto $b=2/5$ e $a=1/5$, da cui segue $d=2/5$ e $c=-1/5$. Si ha quindi

$$\frac{4}{t^4+6t^2+25}=\frac{1}{5}\left(\frac{t+2}{t^2+2t+5}+\frac{-t+2}{t^2-2t+5}\right).$$

Quindi si ha

$$\int_1^3\frac{4}{t^4+6t^2+25}\,dt=\frac{1}{5}\int_1^3\left(\frac{t+2}{t^2+2t+5}+\frac{-t+2}{t^2-2t+5}\right)dt=$$
$$=\frac{1}{10}\int_1^3\left(\frac{2t+2}{t^2+2t+5}+\frac{2}{t^2+2t+5}-\frac{2t-2}{t^2-2t+5}+\frac{2}{t^2-2t+5}\right)dt=$$

$$= \frac{1}{10}\int_1^3 \left(\frac{2t+2}{t^2+2t+5} + \frac{2}{(t+1)^2+4} - \frac{2t-2}{t^2-2t+5} + \frac{2}{(t-1)^2+4} \right) dt =$$
$$= \frac{1}{10}\int_1^3 \left(\frac{2t+2}{t^2+2t+5} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\big((t+1)/2\big)^2+1} - \frac{2t-2}{t^2-2t+5} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\big((t-1)/2\big)^2+1} \right) dt =$$
$$= \frac{1}{10}\left[\log|t^2+2t+5| + \arctan\left(\frac{t+1}{2}\right) - \log|t^2-2t+5| + \arctan\left(\frac{t-1}{2}\right) \right]_1^3 =$$
$$= \frac{1}{10}\left(\log 20 + \arctan 2 - \log 8 + \arctan 1 - \log 8 - \arctan 1 + \log 4\right) =$$
$$= \frac{1}{10}\left(\log\frac{5}{4} + \arctan 2\right).$$

Pertanto

$$\int_0^2 \frac{\arctan(x+1)}{(4x+1)^{3/2}}\,dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{6}\arctan 3 + \frac{1}{10}\arctan 2 + \frac{1}{10}\log\frac{5}{4}.$$

21) Si ha

$$\int_0^1 \frac{xe^{3x}}{(e^{3x}+2)^4}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 x\,\frac{3e^{3x}}{(e^{3x}+2)^4}\,dx;$$

la funzione integranda è prodotto di due funzioni di ciascuna delle quali si trova facilmente una primitiva: il primo fattore ammette la primitiva $x^2/2$, il secondo è nella forma $g'(x)\big(g(x)\big)^{-4}$, con $g(x) = e^{3x} + 2x$, quindi una sua primitiva è $-\big(g(x)\big)^{-3}/3$. Si può integrare per parti in due modi diversi; evidentemente conviene derivare il fattore x, perché in tal caso nell'integrale che rimane da calcolare la variabile x compare solo in un esponenziale. Si ha

$$\int_0^1 \frac{xe^{3x}}{(e^{3x}+2)^4}\,dx = \frac{1}{3}\left[-x\,\frac{1}{3(e^{3x}+2)^3}\right]_0^1 + \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{3(e^{3x}+2)^3}\,dx.$$

Per calcolare l'integrale rimasto è utile porre $t = e^{3x}$, cioè effettuare la sostituzione $x = \varphi(t) = (1/3)\log t$. Si ha $\varphi'(t) = 1/(3t)$, quindi risulta

$$\int_0^1 \frac{1}{(e^{3x}+2)^3}\,dx = \int_1^{e^3} \frac{1}{(t+2)^3}\,\frac{1}{3t}\,dt = \frac{1}{3}\int_1^{e^3} \frac{1}{t(t+2)^3}\,dt.$$

Dobbiamo integrare una funzione razionale con numeratore di grado minore del denominatore, che è già scomposto in fattori irriducibili. Per scomporre la funzione in fratti semplici determiniamo $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{t(t+2)^3} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+2} + \frac{c}{(t+2)^2} + \frac{d}{(t+2)^3},$$

cioè

$$1 = a(t^3+6t^2+12t+8) + bt(t^2+4t+4) + ct(t+2) + dt =$$
$$= (a+b)t^3 + (6a+4b+c)t^2 + (12a+4b+2c+d)t + 8a.$$

Quindi deve essere

$$\begin{cases} a+b=0\,, \\ 6a+4b+c=0\,, \\ 12a+4b+2c+d=0\,, \\ 8a=1\,. \end{cases}$$

Dall'ultima equazione si ricava $a=1/8$, quindi dalla prima si ha $b=-a=-1/8$; sostituendo nella seconda si ottiene $c=-2a=-1/4$ e quindi, dalla terza, $d=-4a=-1/2$. Pertanto

$$\int_1^{e^3}\frac{1}{t(t+2)^3}\,dt=\int_1^{e^3}\left(\frac{1}{8t}-\frac{1}{8(t+2)}-\frac{1}{4(t+2)^2}-\frac{1}{2(t+2)^3}\right)dt=$$

$$=\left[\frac{1}{8}\log|t|-\frac{1}{8}\log|t+2|+\frac{1}{4(t+2)}+\frac{1}{4(t+2)^2}\right]_1^{e^3}.$$

Quindi

$$\int_0^1\frac{xe^{3x}}{(e^{3x}+2)^4}\,dx=\frac{1}{3}\left[-x\,\frac{1}{3(e^{3x}+2)^3}\right]_0^1+\frac{1}{3}\int_0^1\frac{1}{3(e^{3x}+2)^3}\,dx=$$

$$=\frac{1}{3}\left[-x\,\frac{1}{3(e^{3x}+2)^3}\right]_0^1+\frac{1}{27}\left[\frac{1}{8}\log|t|-\frac{1}{8}\log|t+2|+\frac{1}{4(t+2)}+\frac{1}{4(t+2)^2}\right]_1^{e^3}=$$

$$=-\frac{1}{9}\,\frac{1}{(e^3+2)^3}+$$

$$+\frac{1}{27}\left(\frac{1}{8}\log(e^3)-\frac{1}{8}\log(e^3+2)+\frac{1}{4(e^3+2)}+\frac{1}{4(e^3+2)^2}+\frac{1}{8}\log 3-\frac{1}{12}-\frac{1}{36}\right)=$$

$$=\frac{1}{27}\left(\frac{e^6+5e^3-6}{4(e^3+2)^3}+\frac{1}{8}\log\left(\frac{3}{e^3+2}\right)+\frac{19}{72}\right).$$

22) La funzione integranda è prodotto di due fattori; Il secondo fattore è nella forma $g'(x)/\big(g(x)\big)^3$, con $g(x)=e^x-4e^{-x}$, quindi una sua primitiva è $(-1/2)/\big(g(x)\big)^2$. Perciò, integrando per parti, risulta

$$\int_{-1}^0(x+5)\,\frac{e^x+4e^{-x}}{(e^x-4e^{-x})^3}\,dx=\left[-\frac{1}{2}(x+5)\,\frac{1}{(e^x-4e^{-x})^2}\right]_{-1}^0+\frac{1}{2}\int_{-1}^0\frac{1}{(e^x-4e^{-x})^2}\,dx\,.$$

La variabile di integrazione x compare solo all'esponente, eventualmente con un segno meno. Quindi è utile effettuare la sostituzione $t=e^x$, cioè $x=\varphi(t)=\log t$. Si ha $\varphi'(t)=1/t$, quindi risulta

$$\int_{-1}^0\frac{1}{(e^x-4e^{-x})^2}\,dx=\int_{e^{-1}}^1\frac{1}{(t-4t^{-1})^2}\,\frac{1}{t}\,dt=\int_{e^{-1}}^1\frac{t}{(t^2-4)^2}\,dt=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{t^2-4}\right]_{e^{-1}}^1.$$

Quindi l'integrale è uguale a

$$\left[-\frac{1}{2}(x+5)\frac{1}{(e^x-4e^{-x})^2}\right]_{-1}^{0}-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{t^2-4}\right]_{e^{-1}}^{1}=$$

$$=-\frac{5}{2}\frac{1}{(1-4)^2}+2\frac{1}{(e^{-1}-4e)^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{1-4}+\frac{1}{4}\frac{1}{e^{-2}-4}=$$

$$=-\frac{5}{18}+\frac{2e^2}{(1-4e^2)^2}+\frac{1}{12}+\frac{e^2}{4(1-4e^2)}=-\frac{7}{36}+\frac{9e^2-4e^4}{4(1-4e^2)^2}.$$

23) È facile trasformare la funzione integranda nel prodotto di una funzione in cui la variabile x compare solo nella forma $\cos(2x)$ per la derivata della funzione $x\mapsto\cos(2x)$. Infatti si ha

$$\frac{\sqrt{2+\operatorname{sen}^2(2x)}}{\operatorname{sen}(2x)}=\frac{\sqrt{2+\operatorname{sen}^2(2x)}}{\operatorname{sen}^2(2x)}\operatorname{sen}(2x)=\frac{\sqrt{3-\cos^2(2x)}}{1-\cos^2(2x)}\left(-\frac{1}{2}\frac{d\cos(2x)}{dx}\right).$$

Quindi effettuiamo la sostituzione $t=\cos(2x)$. Per $x=\pi/12$ si ha $t=\cos(\pi/6)=\sqrt{3}/2$, mentre per $x=\pi/4$ si ha $x=\cos(\pi/2)=0$. Pertanto

$$\int_{\pi/12}^{\pi/4}\frac{\sqrt{2+\operatorname{sen}^2(2x)}}{\operatorname{sen}(2x)}\,dx=-\frac{1}{2}\int_{\sqrt{3}/2}^{0}\frac{\sqrt{3-t^2}}{1-t^2}\,dt=\frac{1}{2}\int_{0}^{\sqrt{3}/2}\frac{\sqrt{3-t^2}}{1-t^2}\,dt.$$

Eliminiamo la radice con un'ulteriore sostituzione. Poniamo $t=\varphi(s)=\sqrt{3}\operatorname{sen}s$, quindi, considerando $s\in[-\pi/2,\pi/2]$, si ha $s=\operatorname{arcsen}\big(t/\sqrt{3}\big)$ e $\varphi'(s)=\sqrt{3}\cos s$. Pertanto

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{\sqrt{3}/2}\frac{\sqrt{3-t^2}}{1-t^2}\,dt=\frac{1}{2}\int_{\operatorname{arcsen}0}^{\operatorname{arcsen}(1/2)}\frac{\sqrt{3-3\operatorname{sen}^2 s}}{1-3\operatorname{sen}^2 s}\sqrt{3}\cos s\,ds=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/6}\frac{\sqrt{3\cos^2 s}}{1-3\operatorname{sen}^2 s}\sqrt{3}\cos s\,ds=\frac{3}{2}\int_{0}^{\pi/6}\frac{\cos^2 s}{1-3\operatorname{sen}^2 s}\,ds.$$

La funzione integranda può facilmente essere trasformata in una funzione che dipende solo da $\tan s$. Infatti si ha

$$\frac{\cos^2 s}{1-3\operatorname{sen}^2 s}=\frac{\cos^2 s}{\cos^2 s-2\operatorname{sen}^2 s}=\frac{1}{1-(2\operatorname{sen}^2 s/\cos^2 s)}=\frac{1}{1-2\tan^2 s}.$$

Quindi

$$\frac{3}{2}\int_{0}^{\pi/6}\frac{\cos^2 s}{1-3\operatorname{sen}^2 s}\,ds=\frac{3}{2}\int_{0}^{\pi/6}\frac{1}{1-2\tan^2 s}\,ds=\frac{3}{2}\int_{0}^{\pi/6}\frac{1}{(1-2\tan^2 s)(1+\tan^2 s)}\frac{d\tan s}{ds}\,ds.$$

Pertanto, ponendo $\sigma=\tan s$, si ottiene

$$\frac{3}{2}\int_{0}^{\pi/6}\frac{\cos^2 s}{1-3\operatorname{sen}^2 s}\,ds=\frac{3}{2}\int_{\tan 0}^{\tan(\pi/6)}\frac{1}{(1-2\sigma^2)(1+\sigma^2)}\,d\sigma=\frac{3}{2}\int_{0}^{1/\sqrt{3}}\frac{1}{(1-2\sigma^2)(1+\sigma^2)}\,d\sigma.$$

La funzione integranda è razionale. Il denominatore si fattorizza come

$$\big(1+\sqrt{2}\,\sigma\big)\big(1-\sqrt{2}\,\sigma\big)(\sigma^2+1).$$

Scomponiamo la funzione integranda in fratti semplici, determinando $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tali che risulti

$$\frac{1}{(1-2\sigma^2)(1+\sigma^2)} = \frac{a}{1+\sqrt{2}\,\sigma} + \frac{b}{1-\sqrt{2}\,\sigma} + \frac{c\sigma + d}{\sigma^2+1}.$$

Poiché la funzione a primo membro è pari rispetto a σ anche quella a secondo membro deve esserlo, quindi si ha $c=0$. Passando a denominatore comune si ha

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{1+\sqrt{2}\,\sigma} + \frac{b}{1-\sqrt{2}\,\sigma} + \frac{d}{\sigma^2+1} = \\
&= \frac{a\big(1-\sqrt{2}\,\sigma\big)(\sigma^2+1) + b\big(1+\sqrt{2}\,\sigma\big)(\sigma^2+1) + d\big(1+\sqrt{2}\,\sigma\big)\big(1-\sqrt{2}\,\sigma\big)}{(1-2\sigma^2)(1+\sigma^2)} = \\
&= \frac{a\big(-\sqrt{2}\,\sigma^3+\sigma^2-\sqrt{2}\,\sigma+1\big) + b\big(\sqrt{2}\,\sigma^3+\sigma^2+\sqrt{2}\,\sigma+1\big) + d(-2\sigma^2+1)}{(1-2\sigma^2)(1+\sigma^2)} = \\
&= \frac{\big(-\sqrt{2}\,a+\sqrt{2}\,b\big)\sigma^3 + (a+b-2d)\sigma^2 + \big(-\sqrt{2}\,a+\sqrt{2}\,b\big)\sigma + a+b+d}{(1-2\sigma^2)(1+\sigma^2)}.
\end{aligned}$$

Il numeratore è uguale a 1, se i coefficienti a, b, d verificano il seguente sistema

$$\begin{cases} -a+b=0, \\ a+b-2d=0, \\ -a+b=0, \\ a+b+d=1. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ha $a=b$, sostituendo nella seconda si ricava $d=a$. Sostituendo nella quarta si ottiene $3a=1$, pertanto $a=b=d=1/3$. Quindi

$$\begin{aligned}
&\frac{3}{2}\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{(1-2\sigma^2)(1+\sigma^2)}\,d\sigma = \frac{1}{2}\int_0^{1/\sqrt{3}} \left(\frac{1}{1+\sqrt{2}\,\sigma} + \frac{1}{1-\sqrt{2}\,\sigma} + \frac{1}{\sigma^2+1}\right) d\sigma = \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\log\big|\sqrt{2}\,\sigma+1\big| - \frac{1}{\sqrt{2}}\log\big|\sqrt{2}\,\sigma-1\big| + \arctan\sigma\right]_0^{1/\sqrt{3}} = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+1\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left(1-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right) + \frac{\pi}{12}.
\end{aligned}$$

24)

a. $\Big[x\arctan\big(\sqrt{x^2-1}\big) - \operatorname{settcosh} x\Big]_{\sqrt{2}}^{2} = \dfrac{2}{3}\pi - \log\big(2+\sqrt{3}\big) - \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}} + \log\big(\sqrt{2}+1\big)$

b. $\left[-\dfrac{1}{2}\sqrt{x}\cos\big(2\sqrt{x}\big) + \dfrac{1}{4}\operatorname{sen}\big(2\sqrt{x}\big)\right]_0^2 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\big(2\sqrt{2}\big) + \dfrac{1}{4}\operatorname{sen}\big(2\sqrt{2}\big)$

c. $\left[\frac{2}{5}(e^x+1)^{5/2}-\frac{2}{3}(e^x+1)^{3/2}\right]_0^1=\frac{2}{5}(e+1)^{5/2}-\frac{2}{3}(e+1)^{3/2}-\frac{4\sqrt{2}}{15}$

d. $\left[-\frac{x}{2\operatorname{sen}^2 x}-\frac{1}{2}\cot x\right]_{\pi/4}^{\pi/2}=\frac{1}{2}$

e. $\left[2\tan\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\right]_0^{\pi^2/4}=2$

f. $\left[-\frac{1}{3}x\cos^3 x+\frac{1}{3}\operatorname{sen} x-\frac{1}{9}\operatorname{sen}^3 x\right]_{\pi/4}^{\pi/2}=\frac{2}{9}+\frac{\pi}{24\sqrt{2}}-\frac{5}{18\sqrt{2}}$

g. $\left[(x^2-25)\log(x+5)-\frac{1}{2}x^2+5x\right]_{-2}^{0}=-25\log 5+21\log 3+12$

h. $\left[-x\cot x+\log|\operatorname{sen} x|\right]_{\pi/4}^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\log 2$

i. $\left[-(x+1)\frac{1}{e^x+4+3e^{-x}}+\frac{1}{2}\log|e^x+1|-\frac{1}{2}\log|e^x+3|\right]_1^2=$
$=-3\frac{1}{e^2+4+3e^{-2}}+2\frac{1}{e+4+3e^{-1}}+\frac{1}{2}\log\left(\frac{(e^2+1)(e+3)}{(e^2+3)(e+1)}\right)$

j. $\left[(2x^3+2x)\operatorname{arcsen} x+\frac{2}{3}x^2\sqrt{1-x^2}+\frac{10}{3}\sqrt{1-x^2}\right]_0^{1/2}=\frac{5}{24}\pi+\frac{7\sqrt{3}}{4}-\frac{10}{3}$

k. $\left[(2\operatorname{senh} x+\cosh x)\log(\operatorname{senh} x)-\frac{3}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{-x}+\log|e^x+1|-\log|e^x-1|\right]_{\log 2}^{\log 3}=$
$=\frac{91}{6}\log 2-\frac{97}{12}\log 3-\frac{19}{12}$

l. $\left[\frac{1}{\pi}\operatorname{sen}(\pi\log x)\right]_1^e=0$

m. $\left[\frac{1}{2}\exp(e^{2x}+1)\right]_{-\log 2}^{0}=\frac{1}{2}(e^2-e^{5/4})$

n. $\left[\frac{1}{4}(2x^2-6x+3)e^{2x}\right]_1^2=\frac{1}{4}(e^2-e^4)$

o. $\left[-\frac{1}{5}(25x^2-10x+2)e^{-5x}\right]_0^{2/5}=\frac{2}{5}(1-e^{-2})$

p. $\left[\frac{1}{3}x^3\arctan x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\log|1+x^2|\right]_0^2 = \frac{8}{3}\arctan 2 - \frac{2}{3} + \frac{1}{6}\log 5$

q. $\left[\frac{1}{3}x^3\arctan(x^3) - \frac{1}{6}\log|1+x^6|\right]_0^1 = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{6}\log 2$

r. $\left[\frac{1}{3}(x^3-1)e^{x^3}\right]_0^2 = \frac{7}{3}e^8 + \frac{1}{3}$

s. $\left[2x\left(-\frac{\cos x\,\mathrm{sen}^2 x}{3} + \frac{\cos x}{3}\right) + \frac{2\,\mathrm{sen}^3 x}{9} - \frac{2\,\mathrm{sen}\,x}{3} + x^2\,\mathrm{sen}\,x\right]_0^{(2/3)\pi} = -\frac{\pi}{18} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\pi^2$

t. $\left[\left(\frac{4}{3}x^3 + x\right)\mathrm{arcsen}(2x) + \left(\frac{2}{9}x^2 + \frac{11}{18}\right)\sqrt{1-4x^2}\right]_0^{1/4} = \frac{13}{288}\pi + \frac{5\sqrt{3}}{16} - \frac{11}{18}$

u. $\left[-\frac{\arctan(\sqrt{x})}{x+1} + \frac{\sqrt{x}}{2x+2} + \frac{\arctan(\sqrt{x})}{2}\right]_1^4 = \frac{3}{10}\arctan 2 - \frac{1}{20}$

v. $\left[-\frac{2\sqrt{x}}{\mathrm{senh}(\sqrt{x}) + 2\cosh(\sqrt{x})} + \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\sqrt{3}\exp(\sqrt{x})\right)\right]_0^4 =$

$= -\frac{4}{\mathrm{senh}\,2 + 2\cosh 2} + \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}\,e^2) - \frac{4}{3\sqrt{3}}\pi$

w. $\left[-\sqrt{x}\cos^2(\sqrt{x}) + \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(\sqrt{x})\cos(\sqrt{x}) + \frac{1}{2}\sqrt{x}\right]_{\pi^2/4}^{\pi^2} = -\frac{3}{4}\pi$

x. $\left[\frac{\log(9+\cos^2(4x))}{72+8\cos^2(4x)} + \frac{1}{72+8\cos^2(4x)}\right]_0^{\pi/8} = 0$

y. $\left[\frac{\log(3x)}{\sqrt{9-x^2}} + \frac{1}{6}\log\left|3+\sqrt{9-x^2}\right| - \frac{1}{6}\log\left|3-\sqrt{9-x^2}\right|\right]_1^2 =$

$= \frac{1}{\sqrt{5}}\log 6 + \frac{1}{6}\log(3+\sqrt{5}) - \frac{1}{6}\log(3-\sqrt{5}) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\log 3 - \frac{1}{6}\log(3+2\sqrt{2}) + \frac{1}{6}\log(3-2\sqrt{2})$

z. $\left[\left(x+\frac{6}{5}\right)\log\left(\sqrt{\frac{4x-6}{x}}+3\right) + \frac{3}{10}\log\left|\sqrt{\frac{4x-6}{x}}-2\right| - \frac{3}{2}\log\left(\sqrt{\frac{4x-6}{x}}+2\right)\right]_2^3 =$

$= \frac{21}{5}\log(\sqrt{2}+3) + \frac{3}{10}\log(2-\sqrt{2}) - \frac{3}{2}\log(2+\sqrt{2}) - \frac{16}{5}\log 4 + \frac{3}{2}\log 3$

4
Integrali generalizzati

4.1 Esercizi

Illustriamo lo studio dell'integrabilità in senso generalizzato di funzioni definite in un intervallo che ha minimo, ma non ha massimo, sia nel caso in cui l'intervallo sia limitato che nel caso che esso sia superiormente illimitato. Lo studio dell'integrabilità in intervalli che hanno massimo, ma non hanno minimo è del tutto analogo. Il caso degli intervalli privi sia di massimo che di minimo va trattato spezzando l'intervallo nell'unione di due intervalli con un punto in comune, che è il massimo di un intervallo e il minimo dell'altro, e studiando l'integrabilità in ciascuno dei due sottoinervalli.

Lo studio della convergenza dell'integrale generalizzato di una funzione sull'intervallo $[a,b[$, dove $a \in \mathbb{R}$, $b \in]a,+\infty]$, può essere fatto direttamente determinando una primitiva della funzione integranda e studiandone il limite in b.

4.1.1 Esempio. Studiamo la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^1 \frac{x}{1-x^2}\,dx\,.$$

L'integrale è generalizzato, perché la funzione integranda non è definita in 1. Si ha

$$\int \frac{x}{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-1}\,\frac{dx^2}{dx}\,dx = -\frac{1}{2}\log|x^2-1| + c$$

quindi

$$\lim_{y\to 1^-}\int_0^y \frac{x}{1-x^2}\,dx = \lim_{y\to 1^-}\left[-\frac{1}{2}\log|x^2-1|\right]_0^y = \lim_{y\to 1^-}\left(-\frac{1}{2}\log|y^2-1|\right) = +\infty\,.$$

Pertanto l'integrale è divergente. ◀

4.1.2 Esempio. Studiamo la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x}\,dx\,.$$

L'integrale è generalizzato, perché l'intervallo di integrazione è superiormente illimitato, occorre quindi studiare

$$\lim_{y\to+\infty}\int_0^y x e^{-x}\,dx\,.$$

Integrando per parti si ha

$$\int xe^{-x}\,dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c\,,$$

quindi

$$\lim_{y\to+\infty}\int_0^y xe^{-x}\,dx = \lim_{y\to+\infty}\left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]_0^y = \lim_{y\to+\infty}\left(-ye^{-y} - e^{-y} + 1\right) = 1\,.$$

Pertanto l'integrale è convergente e

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx = 1\,.$$

◀

Nel caso in cui non si possa calcolare esplicitamente l'integrale risultano utili alcuni criteri che consentono di stabilire se un integrale generalizzato è convergente o divergente.

Nel caso di integrale generalizzato su un intervallo superiormente illimitato, se esiste il limite a $+\infty$ della funzione integranda e questo è diverso da 0, allora l'integrale è divergente. In particolare divergente a $+\infty$ se il limite è positivo e divergente a $-\infty$ se il limite è negativo.

4.1.3 Esempio. Studiamo la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \arctan x\,dx\,.$$

L'integrale è generalizzato, perché l'intervallo di integrazione è superiormente illimitato. Si ha $\lim_{x\to+\infty}\arctan x = \pi/2$, quindi l'integrale diverge a $+\infty$. ◀

La maggioranza dei criteri che si possono utilizzare consente di ricondurre la convergenza o divergenza dell'integrale generalizzato di una funzione alla convergenza o divergenza dell'integrale generalizzato di un'altra funzione. Per poterli applicare è utile conoscere il carattere dell'integrale generalizzato di alcune funzioni campione.

Tra le funzioni campione più di frequente utilizzate vi sono le funzioni di tipo potenza. Sia $\alpha\in\mathbb{R}^+$. Risulta

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad \begin{cases}\text{converge} & \text{se } \alpha>1,\\ \text{diverge} & \text{se } \alpha\le 1,\end{cases}$$

$$\int_{b-1}^{b}\frac{1}{(b-x)^\alpha}\,dx \quad \begin{cases}\text{converge} & \text{se } \alpha<1,\\ \text{diverge} & \text{se } \alpha\ge 1.\end{cases}$$

Nel seguito $[a,b[$ indicherà sempre un intervallo con $a\in\mathbb{R}$ e $b\in\,]a,+\infty]$ e f,g saranno funzioni da $[a,b[$ a $\mathbb{R}$ continue.

Il **criterio del confronto** afferma che se, $\forall x\in[a,b[$, si ha $0\le f(x)\le g(x)$, allora

$$\int_a^b g(x)\,dx \text{ converge} \implies \int_a^b f(x)\,dx \text{ converge};$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ diverge} \implies \int_a^b g(x)\,dx \text{ diverge}.$$

4.1.4 Esempio. Studiamo la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x-\log x}\,dx\,.$$

L'integrale è generalizzato, perché l'intervallo di integrazione è superiormente illimitato. La funzione integranda ha valori positivi, non è possibile calcolare esplicitamente l'integrale. Possiamo facilmente minorare la funzione integranda con una funzione di cui conosciamo l'integrabilità. Si ha, $\forall x \in [1,+\infty[$, $1/(x-\log x) \geq 1/x$ e la funzione $x \mapsto 1/x$ ha integrale in $[1,+\infty[$ divergente. Pertanto, per il criterio del confronto, anche l'integrale studiato diverge. ◀

4.1.5 Esempio. Studiamo la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,.$$

L'integrale è generalizzato, perché la funzione integranda non è definita in 1. La funzione integranda ha valori positivi, non è possibile calcolare esplicitamente l'integrale. Possiamo facilmente maggiorare la funzione integranda con una funzione di cui conosciamo l'integrabilità. Si ha, $\forall x \in [0,1[$, $e^x/\sqrt{1-x^2} \leq e/\sqrt{1-x^2}$ e risulta

$$\lim_{y\to 1}\int_0^y \frac{e}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{y\to 1}\Big[e \operatorname{arcsen} x\Big]_0^y = \lim_{y\to 1} e \operatorname{arcsen} y = \frac{e\pi}{2}\,.$$

Quindi $\int_0^1 e/\sqrt{1-x^2}\,dx$ converge, pertanto, per il criterio del confronto, anche l'integrale studiato converge. ◀

Il **criterio del confronto asintotico** afferma che se, $\forall x \in [a,b[$, si ha $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ e $f(x) \sim g(x)$, per $x \to b$, allora

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ converge} \iff \int_a^b g(x)\,dx \text{ converge}\,.$$

4.1.6 Esempio. Studiamo la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^4+2}}\,dx\,.$$

L'integrale è generalizzato, perché l'intervallo di integrazione è superiormente illimitato. La funzione integranda ha valori positivi e per $x \to +\infty$ si ha

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^4+2}} \sim \frac{x}{\sqrt{x^4}} = \frac{1}{x}\,.$$

La funzione $x \mapsto 1/x$ ha integrale generalizzato in $[1,+\infty[$ divergente, quindi, per il criterio del confronto asintotico, anche l'integrale studiato diverge. ◀

4.1.7 Esempio. Studiamo la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^1 \frac{e^x \log(2-x)}{(1-x)^{3/2}}\,dx\,.$$

L'integrale è generalizzato, perché la funzione integranda non è definita in 1. La funzione integranda ha valori positivi e per $x \to 1$ si ha $e^x \to e$ e

$$\log(2-x) = \log\bigl(1+(1-x)\bigr) \sim 1-x\,,$$

pertanto

$$\frac{e^x \log(2-x)}{(1-x)^{3/2}} \sim \frac{e(1-x)}{(1-x)^{3/2}} = \frac{e}{(1-x)^{1/2}}\,.$$

La funzione $x \mapsto 1/(1-x)^{1/2}$ ha integrale generalizzato in $[0,1[$ convergente, quindi anche $x \mapsto e/(1-x)^{1/2}$ ha integrale convergente. Pertanto, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale studiato converge. ◀

Il confronto tra due funzioni per $x \to b$ consente di ottenere informazioni sull'integrabilità in senso generalizzato anche se le due funzioni non sono asintotiche. Se, $\forall x \in [a,b[$, si ha $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ e $f(x) = o\bigl(g(x)\bigr)$, per $x \to b$, allora

$$\int_a^b g(x)\,dx \text{ converge} \implies \int_a^b f(x)\,dx \text{ converge};$$
$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ diverge} \implies \int_a^b g(x)\,dx \text{ diverge}.$$

4.1.8 Esempio. Studiamo la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log x\,\sqrt{x+1}}{x}\,dx\,.$$

L'integrale è generalizzato, perché l'intervallo di integrazione è superiormente illimitato. La funzione integranda ha valori non negativi. Per $x \to +\infty$ si ha

$$\frac{\log x\,\sqrt{x+1}}{x} \sim \frac{\log x\,\sqrt{x}}{x} = \frac{\log x}{x^{1/2}}\,;$$

quindi, poiché $1/x^{1/2} = o(\log x / x^{1/2})$, si ha anche

$$\frac{1}{x^{1/2}} = o\left(\frac{\log x\,\sqrt{x+1}}{x}\right).$$

Poiché $\int_1^{+\infty} 1/x^{1/2}\,dx$ è divergente, per il criterio del confronto asintotico anche l'integrale studiato è divergente. ◀

4.1.9 Esempio. Studiamo la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^1 \frac{-\log x}{\sqrt{x}}\,dx\,.$$

L'integrale è generalizzato, perché la funzione integranda non è definita in 0. La funzione integranda ha valori non negativi. Per $x \to 0$ la funzione logaritmo tende a $-\infty$ ed è trascurabile rispetto a qualunque funzione potenza, in particolare $\log x = o(x^{-1/4})$. Pertanto

$$\frac{-\log x}{\sqrt{x}} = o\left(\frac{x^{-1/4}}{\sqrt{x}}\right) = o\left(\frac{1}{x^{3/4}}\right).$$

Poiché $\int_0^1 1/x^{3/4}\,dx$ è convergente, per il criterio del confronto asintotico l'integrale studiato è convergente. ◀

Per studiare la convergenza dell'integrale generalizzato di una funzione f a valori non positivi è sufficiente considerare la funzione $-f$, che è a valori non negativi, e utilizzare gli strumenti illustrati sopra. Nel caso invece di funzioni che assumono valori sia positivi che negativi si può studiare l'integrabilità del valore assoluto della funzione integranda. Infatti un integrale generalizzato assolutamente convergente è convergente, cioè

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \text{ converge} \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \text{ converge}.$$

4.1.10 Esempio. Studiamo la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} x \operatorname{sen} x\, e^{-x}\,dx\,.$$

L'integrale è generalizzato, perché l'intervallo di integrazione è superiormente illimitato. Si ha, $\forall x \in [0,+\infty[$, $|x \operatorname{sen} x\, e^{-x}| \le x e^{-x}$; come visto nell'esempio 4.1.2 $\int_0^{+\infty} x\, e^{-x}\,dx$ converge, quindi, per il criterio del confronto $\int_0^{+\infty} |x \operatorname{sen} x\, e^{-x}|\,dx$ converge, pertanto anche l'integrale studiato converge. ◀

1) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{4x-8}\,\arctan\big(1/(4x)\big)}{x\,\log(x/2)}\,dx\,.$$

2) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{x^4 e^{2x}\big(\cosh(x+2)-1\big)}{(-2-x)^{9/4}}\,dx\,.$$

3) Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ è convergente l'integrale generalizzato

$$\int_1^{+\infty} x^2 \log(1+x^a)\,dx\,.$$

4) Determinare per quali $a \in \mathbb{R}^+$ è convergente l'integrale generalizzato

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^4 + x^a}{x^8 + x^a}\, dx\,.$$

5) Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ è convergente l'integrale generalizzato

$$\int_0^1 \Big(\exp\big((1+x)^{4a}\big) - e\Big)(x^{6a} + x^{-3a})\, dx\,.$$

6) Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ è convergente l'integrale generalizzato

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(a+2)x}}{e^{2ax} + 4}\, dx\,.$$

7) Studiare la convergenza dei seguenti integrali generalizzati:

a. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1-x}\, dx$

b. $\displaystyle\int_0^2 \log\Big(\frac{x}{x+1}\Big)\, dx$

c. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x}\, dx$

d. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \Big(\exp\Big(\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\Big) - 1\Big)\, dx$

e. $\displaystyle\int_2^{+\infty} x \log\Big(\frac{x+2}{x+3}\Big)\, dx$

f. $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x^{9/4}}\Big(\sqrt{x^4+x^2} - x^2\Big)\, dx$

g. $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\log x}\Big(\frac{x-1}{3-x}\Big)^{2/3}\, dx$

h. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{-\log x}}{1-\sqrt{x}}\, dx$

i. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{e^x - 1}}{\operatorname{senh} x}\, dx$

j. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+2}}{(x-1)^{5/4}}\, dx$

k. $\displaystyle\int_9^{+\infty} \frac{\big(\sqrt{x} - 3\big)x \log x}{(x^2-9x)^{3/2}}\, dx$

l. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\exp\big(x + (1/x)\big) - e^x}\, dx$

m. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x + x^4}{\cosh(2x)}\, dx$

n. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x + x^4}{\cosh x}\, dx$

o. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4 \cosh x}{\cosh 2x}\, dx$

p. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x^2-1)\sqrt{\log x}}\, dx$

q. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log(x+1)}{x^2+2x^3}\, dx$

r. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x)}{\sqrt{x}\, \arctan x}\, dx$

8) Determinare per quali a appartenenti all'insieme indicato a fianco i seguenti integrali generalizzati sono convergenti:

a. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^a}{x^{a+2}+x^3}\,dx$ $\quad\mathbb{R}$

b. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{1+e^{ax}}\,dx$ $\quad\mathbb{R}$

c. $\displaystyle\int_0^1 \frac{|\operatorname{sen}(x^a)|}{\sqrt{x}}\,dx$ $\quad\mathbb{R}$

d. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^{-a}}{\sqrt{1+ax^2}-1}\,dx$ $\quad\mathbb{R}^+$

e. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{\cosh x}\,dx$ $\quad\mathbb{R}$

f. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^x+\big(1+|x|\big)^a}\,dx$ $\quad\mathbb{R}$

g. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a+x^{1/a}}\,dx$ $\quad\mathbb{R}^+$

h. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^{4a}+1}}{x^{5a}+x^{3a}}\,dx$ $\quad\mathbb{R}^+$

i. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^a+x^{2a}}{x^{4-a}+x^{4-2a}}\,dx$ $\quad\mathbb{R}^+$

j. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^7+x^a}{x^8+x^{4a}}\,dx$ $\quad\mathbb{R}^+$

k. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(x^{3a})}{x^{9a}+x^3}\,dx$ $\quad\mathbb{R}^+$

l. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+x^2)}{\sqrt{x^a+x^{14-a}}}\,dx$ $\quad\mathbb{R}^+$

m. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\big|\log(1-x)\big|^{a+1}}{(x^2-x^3)^a}\,dx$ $\quad\mathbb{R}^+$

n. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x^{a+1})}{x^{3/2}\arctan(x^a)}\,dx$ $\quad\mathbb{R}^+$

o. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log\big(4\cosh(ax)\big)}{x^{-3a}+x^{4a}}\,dx$ $\quad\mathbb{R}$

p. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(e^x-1)^a}{\operatorname{senh} x}\,dx$ $\quad\mathbb{R}^+$

q. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{3a}(1-x^{4a})}\,dx$ $\quad\mathbb{R}^+$

r. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\exp\!\left(\frac{ax^2}{x^2+1}\right)-e\right)dx$ $\quad\mathbb{R}$

s. $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^a \operatorname{sen}\!\left(\frac{1}{x^5}\right)\arctan(1+x^a)\,dx$ $\quad\mathbb{R}$

t. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{2a+3}+x^{3a}}\log\!\left(\frac{1+2x^9}{1+x^9}\right)dx$ $\quad\mathbb{R}^+$

u. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+2x)^a-(1+x)^a}\,dx$ $\quad\mathbb{R}^*$

v. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(2+x)^a-(1+x)^a}\,dx$ $\quad\mathbb{R}^*$

4.2 Soluzioni e risultati

1) Il dominio di integrazione è superiormente illimitato; inoltre la funzione integranda non è definita in 2, quindi occorre studiare la convergenza dell'integrale sia in un intervallo del tipo $[b,+\infty[$ (per un fissato $b \in]2,+\infty[$) che in un intervallo del tipo $]2,b]$. La funzione integranda ha valori positivi.

Per $x \to +\infty$ si ha

$$\sqrt{4x-8} \sim 2\sqrt{x},$$

$$\arctan\left(\frac{1}{4x}\right) \sim \frac{1}{4x},$$

$$\log\left(\frac{x}{2}\right) = \log x - \log 2 \sim \log x.$$

Pertanto

$$\frac{\sqrt{4x-8}\,\arctan\big(1/(4x)\big)}{x\,\log(x/2)} \sim \frac{2\sqrt{x}\,\big(1/(4x)\big)}{x\,\log x} = \frac{1}{2x^{3/2}\log x}.$$

Poiché, per $x \geq e$, si ha $\log x \geq 1$, risulta $1/(2x^{3/2}\log x) \leq 1/(2x^{3/2})$. Si ha $3/2 > 1$, quindi quest'ultima funzione è integrabile in $[b,+\infty[$, pertanto, per il criterio del confronto asintotico, la funzione studiata è è integrabile in senso generalizzato in $[b,+\infty[$.

Per $x \to 2$ si ha

$$\arctan\left(\frac{1}{4x}\right) \to \arctan\frac{1}{8},$$

$$\log\left(\frac{x}{2}\right) \sim \frac{x}{2} - 1 = \frac{x-2}{2},$$

$$x \to 2.$$

Pertanto

$$\frac{\sqrt{4x-8}\,\arctan\big(1/(4x)\big)}{x\,\log(x/2)} \sim \frac{2\sqrt{x-2}\,\arctan(1/8)}{x-2} = \frac{2\arctan(1/8)}{(x-2)^{1/2}}.$$

Poiché $1/2 < 1$, questa funzione è integrabile in $]2,b]$, quindi, per il criterio del confronto asintotico, anche la funzione studiata è integrabile in senso generalizzato in $]2,b]$.

Possiamo quindi concludere che l'integrale generalizzato converge.

2) Poiché il dominio di integrazione è inferiormente illimitato e la funzione integranda non è definita in -2, dobbiamo studiare la convergenza dell'integrale in ciascuno dei due intervalli $]-\infty,b]$ e $[b,-2[$, dove b è un fissato numero reale minore di -2. La funzione integranda ha valori positivi.

Per $x \to -2$ si ha

$$x^4 \to 16,$$

$$e^{2x} \to e^{-4},$$

$$\cosh(x+2) - 1 \sim \frac{1}{2}(x+2)^2.$$

Quindi
$$\frac{x^4e^{2x}\big(\cosh(x+2)-1\big)}{(-2-x)^{9/4}}\sim\frac{16e^{-4}(1/2)(x+2)^2}{(-2-x)^{9/4}}=\frac{8e^{-4}}{(-2-x)^{1/4}}\,.$$

Poiché $1/4<1$, questa funzione è integrabile in senso generalizzato in ogni intervallo del tipo $[b,-2[$, pertanto, per il criterio del confronto asintotico, anche la funzione studiata è integrabile.

Per $x\to-\infty$ si ha
$$\cosh(x+2)-1=\frac{e^{x+2}+e^{-x-2}}{2}-1\sim\frac{e^{-x-2}}{2}\,,$$
$$(-2-x)^{9/4}\sim|x|^{9/4}\,.$$

Quindi
$$\frac{x^4e^{2x}\big(\cosh(x+2)-1\big)}{(-2-x)^{9/4}}\sim\frac{x^4e^{2x}e^{-x-2}/2}{|x|^{9/4}}=\frac{e^{-2}}{2}|x|^{7/4}e^x\,.$$

Poiché, qualunque sia $c>0$, per $x\to-\infty$ si ha $e^x=o\big(|x|^{-c}\big)$, risulta
$$\frac{x^4e^{2x}\big(\cosh(x+2)-1\big)}{(-2-x)^{9/4}}=o\big(|x|^{-c+7/4}\big).$$

Scegliendo $c>11/4$ l'esponente è minore di -1, quindi la funzione $|x|^{-c+7/4}$ è integrabile in senso generalizzato in un intorno di $-\infty$. Per il criterio del confronto, anche la funzione studiata è integrabile.

Possiamo quindi concludere che l'integrale generalizzato converge.

3) La funzione integranda è continua in $[1,+\infty[$, per stabilire la convergenza dell'integrale occorre studiare il comportamento per $x\to+\infty$. La funzione è non negativa, quindi possiamo utilizzare il criterio del confronto.

Se $a>0$ si ha $\lim_{x\to+\infty}x^a=+\infty$ e quindi anche $\lim_{x\to+\infty}x^2\log(1+x^a)=+\infty$, perciò l'integrale diverge.

Se $a=0$ allora la funzione integranda è $x\mapsto x^2\log 2$, e si ha $\lim_{x\to+\infty}x^2\log 2=+\infty$; anche in questo caso l'integrale diverge.

Se $a<0$ allora $\lim_{x\to+\infty}x^a=0$ e quindi si ha $\log(1+x^a)\sim x^a$, per $x\to+\infty$; perciò $x^2\log(1+x^a)\sim x^{a+2}$; per il criterio del confronto asintotico, l'integrale è convergente se e solo se $a+2<-1$, cioè $a<-3$.

Pertanto l'integrale generalizzato è convergente se e solo se $a\in\,]-\infty,-3[$.

4) La funzione integranda è continua in $[1,+\infty[$ ed è a valori positivi. Per determinare la convergenza dell'integrale studiamone il comportamento per $x\to+\infty$. A tale fine studiamo anzitutto il comportamento di numeratore e denominatore.

Per determinare il comportamento del numeratore, occorre stabilire quale tra x^a e x^4 è il termine dominante, per $x\to+\infty$. Bisogna quindi stabilire quale degli esponenti è maggiore; se $a<4$ allora $x^4+x^a\sim x^4$, se $a=4$ allora $x^4+x^a=2x^4$, infine se $a>4$ si ha $x^4+x^a\sim x^a$.

Analogamente, per il denominatore occorre confrontare x^a con x^8, perciò se $a<8$ allora $x^8+x^a \sim x^8$, se $a=8$ allora $x^8+x^a=2x^8$, infine se $a>8$ si ha $x^8+x^a \sim x^a$.

Indicata con f la funzione integranda si ha quindi, per $x \to +\infty$,

$$
\begin{aligned}
&a<4, && f(x) \sim \frac{x^4}{x^8}=\frac{1}{x^4},\\
&a=4, && f(x) \sim \frac{2x^4}{x^8}=\frac{2}{x^4},\\
&4<a<8, && f(x) \sim \frac{x^a}{x^8}=\frac{1}{x^{8-a}},\\
&a=8, && f(x) \sim \frac{x^8}{2x^8}=\frac{1}{2},\\
&a>8, && f(x) \sim \frac{x^a}{x^a}=1.
\end{aligned}
$$

Perciò se $a \leq 4$ allora $f(x)$ è equivalente (eventualmente a meno di una costante moltiplicativa che è ininfluente) a $1/x^4$, che è integrabile in $[1,+\infty[$; per il criterio del confronto asintotico, per tali valori di a anche f è integrabile. Se invece $a \geq 8$ allora $f(x)$ ha limite reale diverso da 0 per $x \to +\infty$ e quindi non è integrabile. Infine se $4<a<8$ allora $f(x)$ è equivalente a $1/x^{8-a}$, che è integrabile se e solo se $8-a>1$, cioè $a<7$, quindi anche f è integrabile in senso generalizzato se solo se $a<7$.

Perciò l'integrale è convergente se e solo se $a \in \,]0,7[$.

5) La funzione integranda è continua in $]0,1]$. La funzione è non negativa se e solo se $\exp\big((1+x)^{4a}\big)-e$ è non negativo, cioè $(1+x)^{4a} \geq 1$. Pertanto se $a \geq 0$ allora è non negativa, mentre se $a<0$ è negativa.

Sia $a>0$. Per $x \to 0$, risulta

$$
\begin{aligned}
&\exp\big((1+x)^{4a}\big)-e=e\big(\exp\big((1+x)^{4a}-1\big)-1\big) \sim e\big((1+x)^{4a}-1\big) \sim 4aex,\\
&\qquad x^{6a}+x^{-3a} \sim x^{-3a}.
\end{aligned}
$$

Quindi la funzione integranda è asintotica alla funzione $4aex^{1-3a}$, che è integrabile se e solo se $1-3a>-1$, cioè $a<2/3$. Pertanto, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale generalizzato è convergente se $0<a<2/3$ ed è divergente se $a \geq 2/3$.

Se $a=0$ le funzione integranda è identicamente nulla, quindi l'integrale è convergente.

Se $a<0$ la funzione integranda è a valori negativi, l'integrale è convergente se e solo se è convergente l'integrale della funzione opposta che è a valori positivi. Si ha

$$
\begin{aligned}
&e-\exp\big((1+x)^{4a}\big)=e\big(1-\exp\big((1+x)^{4a}-1\big)\big) \sim -e\big((1+x)^{4a}-1\big) \sim -4aex,\\
&\qquad x^{6a}+x^{-3a} \sim x^{6a}.
\end{aligned}
$$

Quindi l'opposta della funzione integranda è asintotica alla funzione $-4aex^{1+6a}$, che è integrabile se e solo se $1+6a>-1$, cioè $a>-1/3$. Pertanto, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale generalizzato è convergente se $-1/3<a<0$ ed è divergente se $a \leq -1/3$.

Quindi l'integrale generalizzato è convergente se e solo se $a \in \,]-1/3,2/3[$.

6) Poiché l'intervallo di integrazione è $\mathbb{R}$, occorre studiare la convergenza dell'integrale negli intervalli $]-\infty, 0]$ e $[0, +\infty[$. La funzione integranda è positiva.

Consideriamo anzitutto l'integrale in $]-\infty, 0]$.

Se $a > 0$, allora, per $x \to -\infty$, si ha $e^{2ax} \to 0$, quindi

$$\frac{e^{(a+2)x}}{e^{2ax}+4} \sim \frac{e^{(a+2)x}}{4}.$$

È facile determinare una primitiva di questa funzione: risulta

$$\int_y^0 \frac{e^{(a+2)x}}{4}\,dx = \left[\frac{e^{(a+2)x}}{4(a+2)}\right]_y^0 = \frac{1-e^{(a+2)y}}{4(a+2)} \xrightarrow[y\to-\infty]{} \frac{1}{4(a+2)};$$

pertanto questo integrale generalizzato è convergente e, per il criterio del confronto asintotico, anche la funzione studiata ha integrale generalizzato in $]-\infty, 0]$ convergente.

Se $a = 0$ si ha

$$\frac{e^{(a+2)x}}{e^{2ax}+4} = \frac{e^{2x}}{5}$$

e, procedendo come sopra, si prova la convergenza dell'integrale generalizzato.

Se $a < 0$, allora, per $x \to -\infty$, si ha $e^{2ax} \to +\infty$, quindi

$$\frac{e^{(a+2)x}}{e^{2ax}+4} \sim \frac{e^{(a+2)x}}{e^{2ax}} = e^{(2-a)x}.$$

Poiché $2-a > 0$ si può procedere come sopra per provare la convergenza dell'integrale.

Pertanto l'integrale generalizzato è convergente in $]-\infty, 0]$ qualunque sia a.

Consideriamo ora l'integrale in $[0, +\infty[$.

Se $a > 0$, allora, per $x \to +\infty$, si ha $e^{2ax} \to +\infty$, quindi

$$\frac{e^{(a+2)x}}{e^{2ax}+4} \sim \frac{e^{(a+2)x}}{e^{2ax}} = e^{(2-a)x}.$$

Se inoltre $a < 2$ questa funzione ha limite $+\infty$, per $x \to +\infty$, mentre se $a = 2$ il limite è 1. In entrambi i casi quindi la funzione $e^{(2-a)x}$ non è integrabile in senso generalizzato in $[0, +\infty[$, pertanto, per il criterio del confronto asintotico, anche l'integrale studiato non è convergente. Se $a > 2$, allora

$$\int_0^y e^{(2-a)x}\,dx = \left[\frac{e^{(2-a)x}}{2-a}\right]_0^y = \frac{e^{(2-a)y}-1}{2-a} \xrightarrow[y\to+\infty]{} \frac{1}{a-2};$$

pertanto questo integrale generalizzato è convergente e, per il criterio del confronto asintotico, anche la funzione studiata ha integrale generalizzato in $[0, +\infty[$ convergente.

Se $a = 0$ si ha

$$\frac{e^{(a+2)x}}{e^{2ax}+4} = \frac{e^{2x}}{5},$$

che tende a $+\infty$, per $x \to +\infty$, quindi l'integrale generalizzato in $[0, +\infty[$ diverge.

Se $a < 0$, allora $e^{2ax} \to 0$, per $x \to +\infty$, pertanto

$$\frac{e^{(a+2)x}}{e^{2ax}+4} \sim \frac{e^{(a+2)x}}{4}.$$

Se $a \geq -2$ si ha $a+2 \geq 0$, quindi questa funzione ha limite diverso da 0 per $x \to +\infty$, perciò non è integrabile in senso generalizzato; pertanto, per il criterio del confronto asintotico, anche l'integrale che stiamo studiando non è convergente. Se invece $a < -2$, allora, procedendo come sopra, si prova la convergenza dell'integrale generalizzato.

Perciò l'integrale è convergente se e solo se $a \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$.

7)

a. Divergente

b. Convergente

c. Convergente

d. Convergente

e. Divergente

f. Divergente

g. Convergente

h. Convergente

i. Convergente

j. Convergente

k. Convergente

l. Convergente

m. Convergente

n. Divergente

o. Convergente

p. Divergente

q. Divergente

r. Divergente

8)

a. $a \in]2, +\infty[$

b. $a \in]0, +\infty[$

c. $a \in \mathbb{R}$

d. $a \in]0, +\infty[$

e. $a \in]-1, 1[$

f. $a \in]1, +\infty[$

g. $a \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$

h. $a \in \left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$

i. $a \in]0, 1[$

j. $a \in \left]0, \frac{1}{3}\right[$

k. $a \in \left]0, \frac{1}{6}\right[\cup \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$

l. $a \in]0, 6[\cup]8, +\infty[$

m. $a \in]0, 1[$

n. $a \in]0, +\infty[$

o. $a \in \left]-\infty, -\frac{2}{3}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$

p. $a \in]0, 1[$

q. Nessun a

r. $a = 1$

s. $a \in]-\infty, 4[$

t. $a \in \left]0, \frac{7}{2}\right[$

u. Nessun a

v. $a \in]2, +\infty[$

5
Serie

5.1 Esercizi

Lo studio della convergenza di una serie risulta semplice nel caso, poco frequente, in cui è possibile ottenere un'espressione esplicita delle somme parziali.

5.1.1 Esempio. Studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n}.$$

Per $n \in \mathbb{N}^*$ risulta

$$\frac{1}{n^2+n} = \frac{1+n-n}{n(n+1)} = \frac{1+n}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Pertanto, se $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, si ha

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} =$$
$$= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Quindi la serie studiata converge e ha somma 1. ◀

Nel caso in cui non si possa ottenere una forma esplicita delle somme parziali vi sono numerosi criteri che consentono di stabilire se una serie converge o no.

Anzitutto, un condizione necessaria per la convergenza di una serie è che il termine n-simo tenda a 0.

5.1.2 Esempio. Studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Poiché

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \sim \frac{n}{n} = 1,$$

il termine n-simo della serie non ha limite 0, pertanto la serie non converge.

La serie è a termini positivi, perciò non può essere indeterminata, quindi è divergente. ◀

Vari criteri per la convergenza di serie consentono di dedurre la convergenza o divergenza di una serie dalla convergenza o divergenza di un'altra serie. Per poterli applicare è utile conoscere il carattere di alcune serie campione.

La **serie armonica generalizzata** $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha}$, con $\alpha \in \mathbb{R}^{+}$, converge se $\alpha > 1$ e diverge se $\alpha \leq 1$. La **serie geometrica** $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^{n}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, converge se $-1 < \alpha < 1$, diverge se $\alpha \geq 1$ ed è indeterminata se $\alpha \leq -1$; il numero α è detto **ragione** della serie geometrica.

Il **criterio del confronto** afferma che se, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $0 \leq a_n \leq b_n$, allora

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \text{ converge} \implies \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ converge;}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ diverge} \implies \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \text{ diverge.}$$

5.1.3 Esempio. Studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\, 2^n}.$$

La serie è a termini positivi. Per $n \in \mathbb{N}^*$ si ha $1/\big(\sqrt{n}\, 2^n\big) \leq 1/2^n = (1/2)^n$. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (1/2)^n$ è una serie geometrica convergente, perché $0 < 1/2 < 1$, pertanto, per il criterio del confronto, la serie studiata converge. ◀

5.1.4 Esempio. Studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n}.$$

La serie è a termini non negativi. Se $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1,2\}$ si ha $\log n > 1$, quindi risulta $\log n/n > 1/n$. La serie armonica $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n$ diverge. Poiché modificando un numero finito di termini di una serie il carattere non cambia, possiamo applicare il criterio del confronto anche se la disuguaglianza $\log n/n \geq 1/n$ è verificata solo per $n \geq 3$. Quindi la serie studiata diverge. ◀

Il **criterio del confronto asintotico** afferma che se, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $0 \leq a_n$, $0 \leq b_n$ e $a_n \sim b_n$, allora

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge} \iff \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ converge.}$$

5.1.5 Esempio. Studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n e^{1/n}}.$$

La serie è a termini positivi. Poiché $e^{1/n} \to 1$, si ha

$$\frac{1}{n e^{1/n}} \sim \frac{1}{n}.$$

La serie armonica $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n$ diverge, quindi, per il criterio del confronto asintotico, anche la serie studiata diverge. ◀

5.1.6 Esempio. Studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3 + 2^n}{n^2 + 3^n}.$$

La serie è a termini positivi. Si ha

$$\frac{n^3 + 2^n}{n^2 + 3^n} \sim \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Poiché $0 < 2/3 < 1$, la serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty}(2/3)^n$ converge, pertanto, per il criterio del confronto asintotico, la serie studiata converge. ◀

Per il **criterio del rapporto** se, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $a_n > 0$ ed esiste $\lim_{n\to+\infty}(a_{n+1}/a_n)$,allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge;}$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ diverge.}$$

Osserviamo che, vista l'ipotesi su a_n, il limite appartiene a $[0, +\infty]$.

5.1.7 Esempio. Studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}.$$

La serie è a termini positivi. Indicato con a_n il termine n-simo della serie, si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)^{2n+2}} \frac{n^{2n}}{(2n)!} = \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{(2n)!} \frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n}(n+1)^2} =$$
$$= \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}.$$

Risulta

$$\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4,$$
$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} = \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)^{-2} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{-2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-2}.$$

Perciò

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 4e^{-2} < 1.$$

Pertanto, per il criterio del rapporto, la serie studiata converge. ◀

5.1.8 Esempio. Studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2n)^n}.$$

La serie è a termini positivi. Indicato con a_n il termine n-simo della serie, si ha

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(2n+2)!}{(2n+2)^{n+1}}\,\frac{(2n)^n}{(2n)!} = \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{(2n)!}\,\frac{(2n)^n}{(2n+2)^n(2n+2)} = \\ &= (2n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)^n.\end{aligned}$$

Risulta

$$2n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)^{-1} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1}.$$

Perciò

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty > 1.$$

Pertanto, per il criterio del rapporto, la serie studiata diverge. ◀

Per il **criterio della radice** se, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $a_n \geq 0$ ed esiste $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge;}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ diverge.}$$

Osserviamo che, vista l'ipotesi su a_n, il limite appartiene a $[0,+\infty]$.

5.1.9 Esempio. Studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^n}{e^{2n}}.$$

La serie è a termini positivi. Si ha

$$\sqrt[n]{\frac{n^n}{e^{2n}}} = \frac{n}{e^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty > 1.$$

Pertanto, per il criterio della radice, la serie studiata diverge. ◀

5.1.10 Esempio. Studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^{\sqrt{n}}}{e^{2n}}.$$

La serie è a termini positivi. Si ha

$$\sqrt[n]{\frac{n^{\sqrt{n}}}{e^{2n}}} = \frac{n^{1/\sqrt{n}}}{e^2} = \frac{\exp\big((\log n)/\sqrt{n}\big)}{e^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e^2} < 1.$$

Pertanto, per il criterio della radice, la serie studiata converge. ◀

Il **criterio integrale** afferma che se $f \in C\big([0,+\infty[,\mathbb{R}\big)$ è decrescente e non negativa, allora

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge} \iff \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) \text{ converge.}$$

5.1.11 Esempio. Studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^a},$$

dove $a \in \mathbb{R}^+$.

La funzione $x \mapsto 1/\big(x(\log x)^a\big)$ è positiva e decrescente in $[2,+\infty[$. Inoltre

$$\int_2^y \frac{1}{x(\log x)^a}\,dx = \int_2^y (\log x)^{-a} \frac{d\log x}{dx}\,dx.$$

Pertanto, se $a \neq 1$, allora

$$\int_2^y \frac{1}{x(\log x)^a}\,dx = \left[\frac{1}{1-a}(\log x)^{1-a}\right]_2^y = \frac{1}{1-a}(\log y)^{1-a} - \frac{1}{1-a}(\log 2)^{1-a} \xrightarrow[y\to+\infty]{}$$

$$\xrightarrow[y\to+\infty]{} \begin{cases} +\infty, & \text{se } a < 1, \\ -\dfrac{1}{1-a}(\log 2)^{1-a}, & \text{se } a > 1. \end{cases}$$

Inoltre, se $a = 1$, allora

$$\int_2^y \frac{1}{x\log x}\,dx = \int_2^y \frac{1}{\log x}\frac{d\log x}{dx}\,dx = \big[\log(\log x)\big]_2^y = \log(\log y) - \log(\log 2) \xrightarrow[y\to+\infty]{} +\infty.$$

Pertanto la serie studiata converge se e solo se $a > 1$. ◀

Per studiare la convergenza di una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ a termini non positivi è sufficiente considerare serie $\sum_{n=0}^{+\infty}(-a_n)$, che è a termini non negativi, e utilizzare gli strumenti illustrati sopra. Nel caso invece di serie che che hanno termini sia positivi che negativi si può studiare la serie dei valori assoluti della serie data. Infatti una serie assolutamente convergente è convergente, cioè

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \text{ converge} \implies \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ converge.}$$

5.1.12 Esempio. Studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}(n^2)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Poiché, $\forall x \in \mathbb{R}$, si ha $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$ e $|\operatorname{sen} x| \leq 1$, si ha, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\operatorname{sen}(n^2)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

La serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2$ converge, quindi, per il criterio del confronto, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}|\operatorname{sen}(n^2)\operatorname{sen}(1/n^2)|$ converge, pertanto anche la seria studiata converge. ◀

Il **criterio di Leibniz** afferma che se la successione $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente e infinitesima, allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n c_n$ converge.

5.1.13 Esempio. Studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \log\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

Si ha $\log\bigl((n+1)/n\bigr) \to \log 1 = 0$; inoltre, poiché $(n+1)/n = 1+(1/n)$, è evidente che, per $n \in \mathbb{N}^*$, si ha $(n+2)/(n+1) < (n+1)/n$. Perciò sono verificate le ipotesi del criterio di Leibniz, quindi la serie studiata converge. ◀

1) Studiare la convergenza e la assoluta convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(n+2)\right)^{1/2}.$$

2) Studiare la convergenza e la assoluta convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^{n+1}n!}{(2n+1)!}.$$

3) Studiare la convergenza e la assoluta convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+2n} - \sqrt[3]{n^2+2}}{\sqrt[3]{n^2+n} + \sqrt[3]{n^2+1}}.$$

4) Studiare la convergenza e la assoluta convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\arctan\frac{3}{n}\right)^{2/n}.$$

5) Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \log(1+n^a).$$

6) Determinare per quali $a \in \mathbb{R}^+$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(n^a)}{n^{3/2}}.$$

7) Determinare per quali $a \in \mathbb{R}^+$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4+n^a}{n^8+n^a}.$$

8) Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n\left(\sqrt{n}+2\right)}(a^2-4a+2)^n.$$

9) Studiare la convergenza e la assoluta convergenza delle seguenti serie:

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!(n+1)!}{(2n)!}$

b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\big((n+1)!\big)^2 3^n}{(2n)!}$

c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n\, n^{2n}}{(2n)!}$

d. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+2)^{n+2}}{(2n)^n}$

e. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n-1}{n!}$

f. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi-2\arctan n}{n^3}$

g. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1-\cos\frac{1}{n^2}\right)^{1/10}$

h. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(\frac{n^2-n+2}{n^2-n+1}\right)$

i. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{3^n+n^3}{n^6+6^n}$

j. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2+2}{n^3+3}$

k. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{3^n+n^2}{3^n+n^6}$

l. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sqrt{3\left(1-\cos\frac{2}{n}\right)}$

m. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$

n. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2 3^n}{(n+6)^{n+2}}$

o. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{3^n\big((n+2)!\big)^{3/2}}{(2n)!}$

p. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{n^{3n-4}}{(n+3)^{3n}}$

10) Determinare per quali a appartenenti all'insieme indicato a fianco le seguenti serie sono convergenti:

a. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n}{n^2+1}$ $\quad\mathbb{R}$

b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^a+n}{n^a+n^3}$ $\quad\mathbb{R}$

c. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^{n^2}}{(n+2)!}$ $\quad\mathbb{R}^+$

d. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n!)^2}{a^{n^2}}$ $\quad\mathbb{R}^+$

e. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^n+2}\left(\frac{a+3}{a^2+1}\right)^{n+1}$ $\quad\mathbb{R}$

f. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}4^n\arctan\frac{3}{n}\left(\frac{1}{4}-a^2\right)^n$ $\quad\mathbb{R}$

g. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(a^2-7a+6)^n}{n6^{n+2}}$ $\quad\mathbb{R}$

h. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n^2+1)(a^2+4a+2)^{n+2}}{2^n}$ $\quad\mathbb{R}$

i. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{2n^3+1}\arctan\big((a^2+5)^n\big)$ $\quad\mathbb{R}$

j. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2}{1+e^{an}}$ $\quad\mathbb{R}$

k. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^4+(2a+3)^n}{a^4+a^{2n}}$ $\quad\mathbb{R}$

l. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n+n^3}{n^2}\left(2a^2-5a+\frac{5}{2}\right)^n$ $\quad\mathbb{R}$

m. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\exp\left(\frac{an^2}{2n^2+4}\right)\right)^{3n}$ $\quad\mathbb{R}$

n. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{n+a}{n+2}\right)^{n^2/3}$ $\quad\mathbb{R}$

o. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2}\left(\frac{a^2-2a-4}{4}\right)^n$ $\quad\mathbb{R}$

p. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{9^n+n^4}{3n^5+3^n}a^{2n}$ $\quad\mathbb{R}$

q. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{a+1}{a+n}\right)^n$ $\quad\mathbb{R}^+$

r. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(a+n)^2+1}$ $\quad\mathbb{R}^+$

s. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n+a^n}{5^n+(4/a)^n}$ $\quad\mathbb{R}^+$

t. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}e^{an}n!$ $\quad\mathbb{R}$

u. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n+3^n}{a^n+a^{-n}}$ $\quad\mathbb{R}^+$

v. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^{a-3}}{a^n}$ $\quad\mathbb{R}^+$

w. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{n+a}{n}\right)^{n^2}$ $\quad\mathbb{R}$

x. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+a}{n}\right)^{n^2}$ $\quad\mathbb{R}$

y. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n+n^a}{(2a)^n+n^{5/4}}$ $\quad\mathbb{R}^+$

z. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\big(\log(n^a+n^{2/a})-\log(n^a+1)\big)$ $\quad\mathbb{R}^+$

5.2 Soluzioni e risultati

1) La serie ha termini di segno alterno, studiamo anzitutto la assoluta convergenza. Per questo studiamo il comportamento del valore assoluto del termine n-simo della serie per $n \to +\infty$. Si ha

$$\left|(-1)^n\left(\frac{\pi}{2}-\arctan(n+2)\right)^{1/2}\right| = \left(\frac{\pi}{2}-\arctan(n+2)\right)^{1/2} = \left(\arctan\left(\frac{1}{n+2}\right)\right)^{1/2}.$$

Poiché per $n \to +\infty$ si ha $1/(n+2) \to 0$ e per $x \to 0$ è $\arctan x \sim x$, risulta

$$\arctan\left(\frac{1}{n+2}\right) \sim \frac{1}{n+2} \sim \frac{1}{n},$$

quindi

$$\left|(-1)^n\left(\frac{\pi}{2}-\arctan(n+2)\right)^{1/2}\right| \sim \frac{1}{n^{1/2}}.$$

Pertanto il termine n-simo della serie dei valori assoluti è asintotico al termine n-simo della serie armonica generalizzata di esponente $1/2$ che non è convergente, perché $1/2 < 1$, quindi la serie studiata non è assolutamente convergente.

Studiamo ora la convergenza. Poiché la serie è a termini di segno alterno, verifichiamo se si può applicare il criterio di Leibniz. Abbiamo già verificato che il valore assoluto del termine n-simo della serie è asintotico a $n^{-1/2}$, quindi ha limite 0. La funzione arcotangente è strettamente crescente, quindi, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $\arctan(n+2) < \arctan(n+3)$, pertanto

$$\frac{\pi}{2}-\arctan(n+2) > \frac{\pi}{2}-\arctan(n+3),$$

quindi

$$\left(\frac{\pi}{2}-\arctan(n+2)\right)^{1/2} > \left(\frac{\pi}{2}-\arctan(n+3)\right)^{1/2}.$$

Pertanto la successione dei valori assoluti dei termini della serie è decrescente, quindi, per il criterio di Leibniz, la serie converge.

Quindi la serie è convergente ma non è assolutamente convergente.

2) Poiché la serie è a termini positivi, è convergente se e solo se è assolutamente convergente.

È abbastanza complicato verificare direttamente se è soddisfatta la condizione, necessaria per la convergenza della serie, che il termine n-simo converga a 0; vista la forma del termine n-simo risulta conveniente applicare il criterio del rapporto.

Indicato con a_n il termine n-simo della serie, si ha

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{n+2}(n+1)!}{(2n+3)!}\,\frac{(2n+1)!}{n^{n+1}n!} = \\ &= \frac{(n+1)^n(n+1)^2}{n^n n}\,\frac{n!(n+1)}{n!}\,\frac{(2n+1)!}{(2n+1)!(2n+2)(2n+3)} = \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{(n+1)^3}{n(2n+2)(2n+3)} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{(n+1)^3}{n(2n+2)(2n+3)}.\end{aligned}$$

Per $n \to +\infty$ il primo fattore ha limite e, mentre il secondo ha limite $1/4$, quindi il limite del prodotto è $e/4$, che è minore di 1; perciò, per il criterio del rapporto, la serie converge.

Pertanto la serie è convergente e assolutamente convergente.

3) Il termine n-simo della serie è un quoziente; il denominatore è somma di due radici (non nulle) e quindi è positivo, mentre il numeratore è differenza di due radici, ma qualunque sia $n \in \mathbb{N}^*$ si ha $n^2+2n \geq n^2+2$ e quindi il numeratore è non negativo. La serie è quindi a termini non negativi, perciò converge se e solo se converge assolutamente.

Studiamo il comportamento del termine n-simo per $n \to +\infty$. Si ha, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sqrt[3]{n^2+2n}-\sqrt[3]{n^2+2}=\sqrt[3]{n^2\Big(1+\frac{2}{n}\Big)}-\sqrt[3]{n^2\Big(1+\frac{2}{n^2}\Big)}=n^{2/3}\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}}-n^{2/3}\sqrt[3]{1+\frac{2}{n^2}}=$$

$$=n^{2/3}\bigg(\Big(1+\frac{1}{3}\frac{2}{n}+o(n^{-1})\Big)-\Big(1+\frac{1}{3}\frac{2}{n^2}+o(n^{-2})\Big)\bigg)=n^{2/3}\Big(\frac{2}{3}\frac{1}{n}+o(n^{-1})\Big)\sim\frac{2}{3}n^{-1/3},$$

$$\sqrt[3]{n^2+n}+\sqrt[3]{n^2+1}=\sqrt[3]{n^2\Big(1+\frac{1}{n}\Big)}+\sqrt[3]{n^2\Big(1+\frac{1}{n^2}\Big)}=$$

$$=n^{2/3}\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+n^{2/3}\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}\sim 2n^{2/3}.$$

Quindi

$$\frac{\sqrt[3]{n^2+2n}-\sqrt[3]{n^2+2}}{\sqrt[3]{n^2+n}+\sqrt[3]{n^2+1}}\sim\frac{(2/3)n^{-1/3}}{2n^{2/3}}=\frac{1}{3}\frac{1}{n}.$$

Il termine n-simo della serie è quindi asintotico, a meno di una costante moltiplicativa, a quello della serie armonica, che non converge. Per il criterio del confronto asintotico la serie non converge.

Pertanto la serie non è convergente e non è assolutamente convergente.

4) Poiché, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, si ha $\big(\arctan(3/n)\big)^{2/n}>0$, la serie ha i termini di segno alterno.

Studiamo anzitutto la assoluta convergenza. Si ha, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\left|(-1)^n\Big(\arctan\frac{3}{n}\Big)^{2/n}\right|=\exp\Big(\frac{2}{n}\log\Big(\arctan\frac{3}{n}\Big)\Big).$$

Per $n \to +\infty$ si ha $\arctan(3/n)=3/n+o(n^{-2})$, quindi

$$\log\Big(\arctan\frac{3}{n}\Big)=\log\Big(\frac{3}{n}+o(n^{-2})\Big)=\log\Big(\frac{3}{n}\big(1+o(n^{-1})\big)\Big)=$$

$$=\log\frac{3}{n}+\log\big(1+o(n^{-1})\big)=-\log n+\log 3+o(n^{-1})\sim-\log n.$$

Pertanto

$$\frac{2}{n}\log\Big(\arctan\frac{3}{n}\Big)\sim\frac{2}{n}(-\log n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

Quindi

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\arctan\frac{3}{n}\right)^{2/n}=e^0=1\,,$$

perciò il termine n-simo della serie non ha limite 0.

Pertanto la serie non è convergente e non è assolutamente convergente.

5) La serie è a termini non negativi; per stabilirne la convergenza studiamo il comportamento del termine n-simo per $n\to+\infty$.

Se $a\in\mathbb{R}^+$ allora $\lim_{n\to+\infty}n^a=+\infty$ e quindi anche

$$\lim_{n\to+\infty}n^2\log(1+n^a)=+\infty\,,$$

perciò non è verificata la condizione necessaria per la convergenza, quindi la serie non converge.

Se $a=0$ allora il termine n-simo della serie è $n^2\log 2$ e $\lim_{n\to+\infty}n^2\log 2=+\infty$, perciò non è verificata la condizione necessaria per la convergenza, quindi la serie non converge.

Se $a\in\mathbb{R}^-$ allora $\lim_{n\to+\infty}n^a=0$ e quindi, per $n\to+\infty$, $\log(1+n^a)\sim n^a$, perciò

$$n^2\log(1+n^a)\sim n^{a+2}\,;$$

per il criterio del confronto asintotico, la serie converge se e solo se $a+2<-1$, cioè $a<-3$.

Possiamo concludere che la serie converge se e solo se $a\in\,]-\infty,-3[$.

6) La funzione seno assume valori compresi tra -1 e 1, pertanto, per $n\in\mathbb{N}^*$, si ha

$$\left|\frac{\operatorname{sen}(n^a)}{n^{3/2}}\right|\le\frac{1}{n^{3/2}}\,.$$

Il membro di destra è il termine n-simo della serie armonica generalizzata di esponente $3/2$ che converge perché l'esponente è maggiore di 1.

Per il criterio del confronto la serie è assolutamente convergente qualunque sia a e quindi è anche convergente.

7) La serie è a termini positivi. Studiamo il comportamento di numeratore e denominatore per $n\to+\infty$.

Per determinare il comportamento del numeratore occorre stabilire quale tra n^a e n^4 è il termine dominante; se $a<4$ allora $n^4+n^a\sim n^4$, se $a=4$ allora $n^4+n^a=2n^4$, infine se $a>4$ si ha $n^4+n^a\sim n^a$.

Analogamente per il denominatore occorre confrontare n^a con n^8; perciò se $a<8$ allora $n^8+n^a\sim n^8$, se $a=8$ allora $n^8+n^a=2n^8$, infine se $a>8$ si ha $n^8+n^a\sim n^a$.

Indicato con a_n il termine n-simo della serie, si ha quindi, per $n \to +\infty$,

$$
\begin{array}{ll}
\text{se } a < 4 & a_n \sim \dfrac{n^4}{n^8} = \dfrac{1}{n^4}, \\[2ex]
\text{se } a = 4 & a_n \sim \dfrac{2n^4}{n^8} = \dfrac{2}{n^4}, \\[2ex]
\text{se } 4 < a < 8 & a_n \sim \dfrac{n^a}{n^8} = \dfrac{1}{n^{8-a}}, \\[2ex]
\text{se } a = 8 & a_n \sim \dfrac{n^8}{2n^8} = \dfrac{1}{2}, \\[2ex]
\text{se } a > 8 & a_n \sim \dfrac{n^a}{n^a} = 1.
\end{array}
$$

Perciò se $a \leq 4$ allora a_n è asintotico (eventualmente a meno di costanti che sono ininfluenti) a $1/n^4$, termine n-simo di una serie armonica generalizzata convergente, perché $4 > 1$; per il criterio del confronto asintotico per tali valori di a anche la serie studiata converge. Se invece $a \geq 8$ allora a_n ha limite reale diverso da 0 per $n \to +\infty$ e la serie studiata non converge. Infine se $4 < a < 8$ allora a_n è asintotico a $1/n^{8-a}$, termine n-simo di una serie che converge se e solo se $8 - a > 1$, cioè se e solo se $a < 7$, perciò anche la serie studiata converge solo per $a < 7$.

Possiamo concludere che la serie converge se e solo se $a \in \,]0,7[$.

8) Studiamo anzitutto l'assoluta convergenza della serie. Si ha

$$\left| \frac{(-1)^n}{2^n\left(\sqrt{n}+2\right)}(a^2-4a+2)^n \right| = \frac{1}{2^n\left(\sqrt{n}+2\right)}|a^2-4a+2|^n.$$

La forma del termine n-simo suggerisce di utilizzare il criterio della radice. Si ha

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2^n\left(\sqrt{n}+2\right)}|a^2-4a+2|^n} = \frac{1}{2\sqrt[n]{\sqrt{n}+2}}|a^2-4a+2|.$$

Poiché

$$\sqrt[n]{\sqrt{n}+2} = \exp\left(\frac{1}{n}\log\left(\sqrt{n}+2\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^0 = 1,$$

risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n\left(\sqrt{n}+2\right)}|a^2-4a+2|^n} = \frac{1}{2}|a^2-4a+2|.$$

Tale limite risulta minore di 1 se e solo se $-1 < (a^2-4a+2)/2 < 1$, cioè se e solo se a è soluzione del sistema

$$\begin{cases} a^2-4a+2 < 2, \\ a^2-4a+2 > -2, \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} a^2-4a < 0, \\ a^2-4a+4 > 0. \end{cases}$$

La prima disequazione è verificata per $a \in]0,4[$. Poiché $a^2-4a+4=(a-2)^2$ la seconda è verificata per $a \neq 2$. Pertanto, se $a \in]0,2[\cup]2,4[$, allora, per il criterio della radice, la serie è assolutamente convergente e quindi convergente.

Dai ragionamenti fatti sopra segue anche che, se $a \in]-\infty,0[\cup]4,+\infty[$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n\left(\sqrt{n}+2\right)}|a^2-4a+2|^n} > 1,$$

quindi, per il criterio della radice, la serie non è assolutamente convergente. Inoltre, per il teorema della permanenza del segno, se $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, allora per n grande si ha $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$, quindi $|a_n| > 1$, pertanto il termine n-simo della serie non converge a 0. Quindi la serie non è neppure convergente.

Se $a=2$ allora abbiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n\left(\sqrt{n}+2\right)}(-2)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+2};$$

questa serie non converge, perché è a termini non negativi, con termine n-simo asintotico a quello della serie armonica generalizzata di esponente $1/2$, che non converge. Se $a=0$ o $a=4$ allora si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n\left(\sqrt{n}+2\right)}2^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+2}.$$

Si verifica facilmente che la successione $\left(1/\left(\sqrt{n}+2\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente e convergente a 0. Quindi, per il criterio di Leibniz, la serie converge.

Possiamo concludere che la serie converge se e solo se $a \in [0,2[\cup]2,4]$.

9)

a. Converge, converge assolutamente

b. Converge, converge assolutamente

c. Non converge, non converge assolutamente

d. Converge, converge assolutamente

e. Converge, converge assolutamente

f. Converge, converge assolutamente

g. Non converge, non converge assolutamente

h. Converge, converge assolutamente

i. Converge, converge assolutamente

j. Converge, non converge assolutamente

k. Non converge, non converge assolutamente

l. Converge, non converge assolutamente

m. Converge, non converge assolutamente

n. Converge, converge assolutamente

o. Converge, converge assolutamente

p. Converge, converge assolutamente

10)

a. $a \in [-1, 1]$

b. $a \in]-\infty, 2[$

c. $a \in]0, 1]$

d. $a \in]1, +\infty[$

e. $a \in]-\infty, 0[\cup \left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$

f. $a \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right[\cup \left]0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

g. $a \in]0, 3] \cup [4, 7[$

h. $a \in]-4, 0[\setminus \{-2\}$

i. $a \in \mathbb{R}$

j. $a \in \mathbb{R}^+$

k. $a \in]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[$

l. $a \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \cup \left[\frac{3}{2}, 2\right]$

m. $a \in \mathbb{R}^-$

n. $a \in]-\infty, 2[$

o. $a \in [-2, 0] \cup [2, 4]$

p. $a \in \left]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$

q. $a \in \mathbb{R}^+$

r. $a \in \mathbb{R}^+$

s. $a \in]0, 5[$

t. Nessun a

u. $a \in \left]0, \frac{1}{3}\right[$

v. $a \in [1, +\infty[$

w. $a \in]-\infty, 0]$

x. $a \in \mathbb{R}^-$

y. $a \in \left]0, \frac{1}{4}\right[\cup]1, +\infty[$

z. $a \in]2, +\infty[$