Giovanni Dore

Appunti del corso di

Complementi di Analisi Matematica

Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

Corso di Laurea in Ingegneria dell'Energia Elettrica
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica

Anno Accademico 2022/2023

I riferimenti preceduti da El sono ai volumi:
G. C. Barozzi, G. Dore, E. Obrecht: *Elementi di analisi matematica*, Voll. 1 e 2, Zanichelli.

Indice

Capitolo 1

Problemi ai limiti per equazioni differenziali ordinarie

1.1 Condizioni di Dirichlet

Sia $L \in \mathbb{R}_+^*$; cerchiamo $u \in C^2\big([0,L],\mathbb{R}\big)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} u''(x) = \lambda u(x), & x \in [0,L], \\ u(0) = 0, \\ u(L) = 0. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

Questo problema è detto **problema di autovalori per un'equazione differenziale ordinaria con condizioni ai limiti di Dirichlet**. Qualunque sia λ, la funzione u identicamente nulla è soluzione del problema; cerchiamo una soluzione u non identicamente nulla. Se una tale u esiste essa è detta **autofunzione** per il problema (1.1.1), mentre λ è detto **autovalore**.

Per determinare gli autovalori e le autofunzioni cerchiamo anzitutto le soluzioni dell'equazione differenziale $u'' = \lambda u$, questa equazione è lineare omogenea a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica (v. equazione (El-8.3.5)) è $s^2 - \lambda = 0$.

Se $\lambda > 0$, l'equazione caratteristica ha le due soluzioni $\sqrt{\lambda}$ e $-\sqrt{\lambda}$, quindi, posto $\mu = \sqrt{\lambda}$, ogni soluzione dell'equazione differenziale è della forma (v. Sezione El-8.3)

$$u(x) = c_1 \exp(\mu x) + c_2 \exp(-\mu x),$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. La soluzione u verifica le condizioni negli estremi di $[0,L]$ se, e solo se,

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 \exp(\mu L) + c_2 \exp(-\mu L) = 0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava $c_2 = -c_1$, la seconda diventa $c_1\big(\exp(\mu L) - \exp(-\mu L)\big) = 0$, da cui segue $c_1 = 0$, perché $\exp(\mu L) - \exp(-\mu L) \neq 0$. Pertanto anche $c_2 = 0$, quindi u è identicamente nulla.

Se $\lambda = 0$, l'equazione caratteristica ha la soluzione doppia 0, quindi ogni soluzione dell'equazione differenziale è della forma

$$u(x) = c_1 + c_2 x,$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. La soluzione u verifica le condizioni negli estremi di $[0, L]$ se, e solo se,

$$\begin{cases} c_1 = 0, \\ c_1 + c_2 L = 0. \end{cases}$$

Quindi deve essere $c_1 = c_2 = 0$, pertanto u è identicamente nulla.

Se $\lambda < 0$, l'equazione caratteristica ha le due soluzioni complesse coniugate $\sqrt{-\lambda}\, i$ e $-\sqrt{-\lambda}\, i$, quindi, posto $\mu = \sqrt{-\lambda}$, ogni soluzione dell'equazione differenziale è della forma

$$u(x) = c_1 \cos(\mu x) + c_2 \sin(\mu x),$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. La soluzione u verifica le condizioni negli estremi di $[0, L]$ se, e solo se,

$$\begin{cases} c_1 = 0, \\ c_1 \cos(\mu L) + c_2 \sin(\mu L) = 0. \end{cases}$$

Quindi $c_1 = 0$ e dalla seconda equazione si ottiene $c_2 \sin(\mu L) = 0$. Se $\sin(\mu L) \neq 0$ allora anche $c_2 = 0$, quindi u è identicamente nulla. Se invece $\sin(\mu L) = 0$, qualunque sia $c_2 \in \mathbb{R}$ l'equazione è verificata. Si ha $\sin(\mu L) = 0$ se, e solo se, esiste $n \in \mathbb{Z}$ tale che $\mu L = n\pi$; poiché $\mu L > 0$, deve essere anche $n > 0$, cioè $n \in \mathbb{N}^*$. Da qui si ricava $\lambda = -n^2\pi^2/L^2$.

Abbiamo così dimostrato il seguente teorema.

1.1.1 Teorema
Sia $L \in \mathbb{R}_+^*$. Esiste $u \in C^2\big([0, L], \mathbb{R}\big)$ non identicamente nulla soluzione del problema

$$\begin{cases} u''(x) = \lambda u(x), & x \in [0, L], \\ u(0) = 0, \\ u(L) = 0, \end{cases}$$

se, e solo se, $\lambda = -n^2\pi^2/L^2$, con $n \in \mathbb{N}^*$. Per tali λ si ha

$$u(x) = c \sin\Big(\frac{n\pi}{L} x\Big), \qquad c \in \mathbb{R}^*.$$

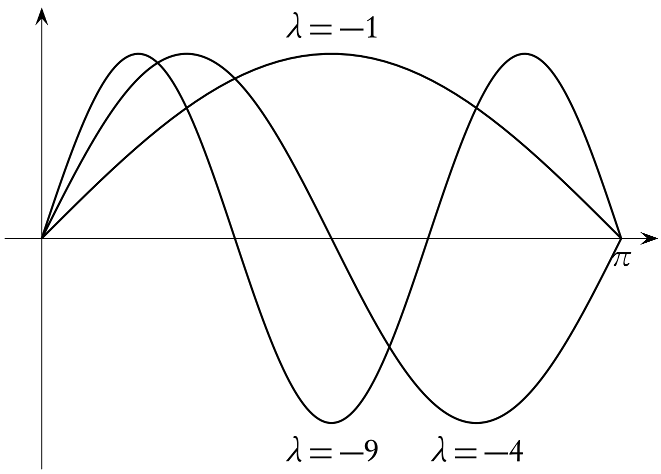

Figura 1.1: Autofunzioni del problema (1.1.1) (caso $L = \pi$) corrispondenti agli autovalori -1, -4, -9.

1.2 Condizioni di Neumann

Sia $L \in \mathbb{R}_+^*$; cerchiamo $u \in C^2([0,L],\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} u''(x) = \lambda u(x), & x \in [0,L], \\ u'(0) = 0, \\ u'(L) = 0. \end{cases} \tag{1.2.1}$$

Questo problema è detto **problema di autovalori per un'equazione differenziale ordinaria con condizioni ai limiti di Neumann**. Qualunque sia λ, la funzione u identicamente nulla è soluzione del problema; cerchiamo una soluzione u non identicamente nulla. Come per il problema di Dirichlet, se una tale u esiste essa è detta **autofunzione** per il problema (1.2.1), mentre λ è detto **autovalore**.

Come visto nella Sezione 1.1, se $\lambda > 0$, posto $\mu = \sqrt{\lambda}$, l'equazione differenziale $u'' = \lambda u$ ha soluzioni della forma

$$u(x) = c_1 \exp(\mu x) + c_2 \exp(-\mu x),$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$; quindi

$$u'(x) = c_1 \mu \exp(\mu x) - c_2 \mu \exp(-\mu x),$$

La soluzione u verifica le condizioni negli estremi di $[0,L]$ se, e solo se,

$$\begin{cases} c_1 \mu - c_2 \mu = 0, \\ c_1 \mu \exp(\mu L) - c_2 \mu \exp(-\mu L) = 0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava $c_2 = c_1$, la seconda diventa $c_1 \mu\big(\exp(\mu L) - \exp(-\mu L)\big) = 0$, da cui segue $c_1 = 0$, perché $\exp(\mu L) - \exp(-\mu L) \neq 0$. Pertanto anche $c_2 = 0$, quindi u è identicamente nulla.

Se $\lambda = 0$, l'equazione differenziale ha la soluzione

$$u(x) = c_1 + c_2 x,$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$; quindi

$$u'(x) = c_2.$$

La soluzione u verifica le condizioni negli estremi di $[0,L]$ se, e solo se, $c_2 = 0$, quindi 0 è autovalore a cui corrispondono le autofunzioni $u(x) = c$, con $c \in \mathbb{R}^*$.

Se $\lambda < 0$, posto $\mu = \sqrt{-\lambda}$, ogni soluzione dell'equazione differenziale è della forma

$$u(x) = c_1 \cos(\mu x) + c_2 \sin(\mu x),$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$; quindi

$$u'(x) = -c_1 \mu \sin(\mu x) + c_2 \mu \cos(\mu x).$$

La soluzione u verifica le condizioni negli estremi di $[0,L]$ se, e solo se,

$$\begin{cases} c_2 = 0, \\ -c_1 \mu \sin(\mu L) + c_2 \mu \cos(\mu L) = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ottiene $c_1 \mu \sin(\mu L) = 0$. Se $\sin(\mu L) \neq 0$ allora anche $c_1 = 0$, quindi u è identicamente nulla. Se invece $\sin(\mu L) = 0$, qualunque sia $c_1 \in \mathbb{R}$ l'equazione è verificata. Come sopra, si ha $\sin(\mu L) = 0$ quando $\mu = n\pi/L$, con $n \in \mathbb{N}^*$.

Abbiamo così dimostrato il seguente teorema.

1.2.1 Teorema
Sia $L \in \mathbb{R}_+^*$. *Esiste* $u \in C^2([0,L],\mathbb{R})$ *non identicamente nulla soluzione del problema*

$$\begin{cases} u''(x) = \lambda u(x), & x \in [0,L], \\ u'(0) = 0, \\ u'(L) = 0, \end{cases}$$

se, e solo se, $\lambda = -n^2\pi^2/L^2$, *con* $n \in \mathbb{N}$. *Per tali* λ *si ha*

$$u(x) = c\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \qquad c \in \mathbb{R}^*.$$

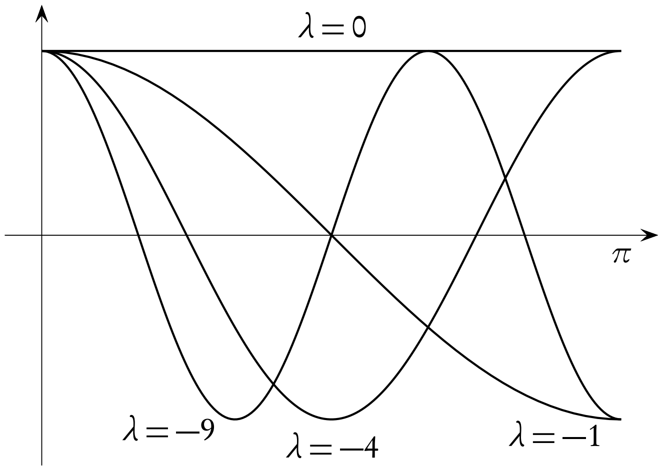

Figura 1.2: Autofunzioni del problema (1.2.1) (caso $L = \pi$) corrispondenti agli autovalori 0, -1, -4, -9.

1.3 Condizioni periodiche

Cerchiamo $u \in C^2([0,L],\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} u''(x) = \lambda u(x), & x \in [-\pi,\pi], \\ u(\pi) = u(-\pi), \\ u'(\pi) = u'(-\pi). \end{cases} \tag{1.3.1}$$

Questo problema è detto **problema di autovalori per un'equazione differenziale ordinaria con condizioni periodiche**.

Il termine "condizioni periodiche" è dovuto al fatto che esse assicurano che la ripetizione 2π-periodica di u (v. Sezione El-15.4) è ben definita e di classe C^2. Infatti se $u(\pi) = u(-\pi)$ allora è possibile definire la ripetizione 2π-periodica di u, che indichiamo con v. Poiché u è di classe C^2, tale ripetizione è di classe C^2 in $]-\pi,\pi[$ e in tutti gli intervalli ottenuti traslando $]-\pi,\pi[$ di multipli di 2π. Inoltre

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{v(\pi+h)-v(\pi)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{u(\pi+h)-u(\pi)}{h} = u'(\pi),$$
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{v(\pi+h)-v(\pi)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{v(-\pi+h)-v(-\pi)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{u(-\pi+h)-u(-\pi)}{h} = u'(-\pi).$$

Pertanto v è derivabile in π con $v'(\pi) = u'(\pi)$. Dalla continuità di u' in π e $-\pi$ segue la continuità di v' in π. Per periodicità v è derivabile con derivata continua in tutti i punti del tipo $2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, quindi è di classe C^1 in $\mathbb{R}$. In modo analogo si prova che

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{v'(\pi+h)-v'(\pi)}{h} = u''(\pi), \qquad \lim_{h\to 0^+} \frac{v'(\pi+h)-v'(\pi)}{h} = u''(-\pi),$$

e si ha

$$u''(\pi) = \lambda u(\pi) = \lambda u(-\pi) = u''(-\pi).$$

Pertanto v è derivabile 2 volte in π, con derivata seconda continua. Per periodicità questo assicura che v è di classe C^2 in $\mathbb{R}$.

Se u è identicamente nulla, qualunque sia λ il problema è verificato; cerchiamo una soluzione u non identicamente nulla. Se una tale u esiste essa è detta **autofunzione** per il problema (1.3.1), mentre λ è detto **autovalore**.

Come visto nella Sezione 1.1, se $\lambda > 0$, allora, posto $\mu = \sqrt{\lambda}$, l'equazione differenziale $u'' = \lambda u$ ha soluzioni della forma

$$u(x) = c_1 \exp(\mu x) + c_2 \exp(-\mu x),$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$; quindi

$$u'(x) = c_1 \mu \exp(\mu x) - c_2 \mu \exp(-\mu x).$$

La soluzione u verifica le condizioni negli estremi di $[-\pi, \pi]$ se, e solo se,

$$\begin{cases} c_1 \exp(\mu\pi) + c_2 \exp(-\mu\pi) = c_1 \exp(-\mu\pi) + c_2 \exp(\mu\pi), \\ c_1 \mu \exp(\mu\pi) - c_2 \mu \exp(-\mu\pi) = c_1 \mu \exp(-\mu\pi) - c_2 \mu \exp(\mu\pi); \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} (c_1 - c_2)\big(\exp(\mu\pi) - \exp(-\mu\pi)\big) = 0, \\ (c_1 + c_2)\big(\exp(\mu\pi) - \exp(-\mu\pi)\big) = 0. \end{cases}$$

Poiché $\exp(\mu\pi) - \exp(-\mu\pi) \neq 0$, questo sistema equivale a

$$\begin{cases} c_1 - c_2 = 0, \\ c_1 + c_2 = 0; \end{cases}$$

pertanto $c_1 = c_2 = 0$, quindi u è identicamente nulla.

Se $\lambda = 0$, allora l'equazione differenziale ha la soluzione

$$u(x) = c_1 + c_2 x,$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$; quindi

$$u'(x) = c_2.$$

La soluzione u verifica le condizioni negli estremi di $[-\pi, \pi]$ se, e solo se,

$$\begin{cases} c_1 + c_2\pi = c_1 - c_2\pi, \\ c_2 = c_2, \end{cases}$$

che è verificato se, e solo se, $c_2 = 0$; quindi 0 è autovalore a cui corrispondono le autofunzioni $u(x) = c$, con $c \in \mathbb{R}^*$.

Se $\lambda < 0$, allora, posto $\mu = \sqrt{-\lambda}$, ogni soluzione dell'equazione differenziale è della forma

$$u(x) = c_1 \cos(\mu x) + c_2 \sin(\mu x),$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$; quindi

$$u'(x) = -c_1 \mu \sin(\mu x) + c_2 \mu \cos(\mu x).$$

La soluzione u verifica le condizioni negli estremi di $[-\pi, \pi]$ se, e solo se,

$$\begin{cases} c_1 \cos(\mu\pi) + c_2 \sin(\mu\pi) = c_1 \cos(\mu\pi) - c_2 \sin(\mu\pi), \\ -c_1 \mu \sin(\mu\pi) + c_2 \mu \cos(\mu\pi) = c_1 \mu \sin(\mu\pi) + c_2 \mu \cos(\mu\pi), \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} c_2 \sin(\mu\pi) = 0, \\ c_1 \sin(\mu\pi) = 0. \end{cases}$$

Se $\sin(\mu\pi) \neq 0$ allora $c_1 = c_2 = 0$, pertanto u è identicamente nulla. Se invece $\sin(\mu\pi) = 0$, qualunque siano $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ il sistema è verificato. Si ha $\sin(\mu\pi) = 0$ se, e solo se, $\mu \in \mathbb{Z}$, ma $\mu > 0$, quindi $\mu \in \mathbb{N}^*$.

Abbiamo così dimostrato il seguente teorema.

1.3.1 Teorema
Esiste $u \in C^2\big([-\pi, \pi], \mathbb{R}\big)$ *non identicamente nulla soluzione del problema*

$$\begin{cases} u''(x) = \lambda u(x), & x \in [-\pi, \pi], \\ u(\pi) = u(-\pi), \\ u'(\pi) = u'(-\pi), \end{cases}$$

se, e solo se, $\lambda = -n^2$, *con* $n \in \mathbb{N}$. *Se* $\lambda = 0$ *si ha*

$$u(x) = c, \qquad c \in \mathbb{R}^*;$$

se $\lambda = -n^2$, *con* $n \in \mathbb{N}^*$, *si ha*

$$u(x) = c_1 \cos(nx) + c_2 \sin(nx), \qquad (c_1, c_2) \in \big(\mathbb{R}^2\big)^*.$$

Capitolo 2

Origine fisica di alcune equazioni alle derivate parziali

2.1 Legge di conservazione

Cerchiamo un'equazione alle derivate parziali le cui soluzioni descrivano la densità di una sostanza che si sposta in un canale.

Consideriamo un canale in cui scorre dell'acqua che contiene una sostanza, ad esempio un inquinante. Supponiamo che il canale abbia sezione trascurabile rispetto alla lunghezza, quindi lo consideriamo come un oggetto unidimensionale. Indichiamo con $u(x,t)$ la densità lineare (massa per unità di lunghezza) della sostanza nella posizione di ascissa x del canale al tempo t. Consideriamo il tratto di canale compreso tra il punto di ascissa x_1 e quello di ascissa x_2; la quantità totale di sostanza in questo tratto è $\int_{x_1}^{x_2} u(x,t)\,dx$. La variazione della quantità di sostanza in un intervallo di tempo $[t_1,t_2]$ è

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x,t_2)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} u(x,t_1)\,dx\,.$$

Tale variazione è uguale alla somma della quantità di sostanza entrata nel tratto di canale dagli estremi e del contributo di eventuali sorgenti. Indichiamo con $f(x,t)$ il flusso (in direzione positiva) della sostanza nel punto del canale di ascissa x al tempo t, cioè la quantità di sostanza che transita nel canale nell'unità di tempo. Osserviamo che f è il prodotto della velocità per la densità. La quantità di sostanza che entra nel canale dall'estremità x_1 nell'intervallo di tempo $[t_1,t_2]$ è $\int_{t_1}^{t_2} f(x_1,t)\,dt$, mentre quella che entra dall'estremità x_2 è $-\int_{t_1}^{t_2} f(x_2,t)\,dt$. Il segno meno è dovuto al fatto il flusso in entrata dall'estremità x_2 è quello in direzione negativa. Se inoltre $s(x,t)$ rappresenta una sorgente della sostanza, risulta

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x,t_2)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} u(x,t_1)\,dx = \int_{t_1}^{t_2} f(x_1,t)\,dt - \int_{t_1}^{t_2} f(x_2,t)\,dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} s(x,t)\,dx\,dt\,.$$

Se u e f sono di classe C^1, l'uguaglianza si può scrivere come

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} u_t(x,t)\,dt\,dx = -\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} f_x(x,t)\,dx\,dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} s(x,t)\,dx\,dt\,,$$

cioè
$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2}\big(u_t(x,t)+f_x(x,t)-s(x,t)\big)\,dx\,dt=0;$$
vista l'arbitrarietà di x_1, x_2, t_1 e t_2, da qui segue
$$u_t(x,t)+f_x(x,t)=s(x,t).$$

Nel caso particolare che il flusso f dipenda solo dalla densità u, quindi che sia della forma $q\big(u(x,t)\big)$, l'equazione diventa
$$u_t(x,t)+\frac{\partial}{\partial x}q\big(u(x,t)\big)=s(x,t),$$
cioè
$$u_t(x,t)+q'\big(u(x,t)\big)u_x(x,t)=s(x,t). \tag{2.1.1}$$
Un'equazione di questo tipo è detta **legge di conservazione**, perché esprime la conservazione della quantità totale di sostanza.

Un caso particolare di legge di conservazione si ottiene quando la velocità della sostanza è costante, quindi $q(u)=cu$, con $c>0$. In tal caso si ottiene l'equazione
$$u_t(x,t)+cu_x(x,t)=s(x,t), \tag{2.1.2}$$
che è lineare. Questa equazione è detta **equazione del trasporto**.

Un altro caso particolare è l'**equazione di Burgers**
$$u_t(x,t)+u(x,t)u_x(x,t)=0, \tag{2.1.3}$$
che si ottiene ponendo $q(u)=u^2/2$.

Questa equazione descrive il moto di particelle, ciascuna delle quali si muove a velocità costante. Supponiamo che delle particelle si muovano su una retta e sia $u(x,t)$ la velocità della particella che si trova nella posizione x all'istante t. Consideriamo una delle particelle e sia $\varphi(t)$ è la sua posizione all'istante t, allora la sua velocità in tale istante è $u\big(\varphi(t),t\big)$. Abbiamo supposto che la velocità di una particella sia costante, quindi tale funzione deve avere derivata nulla rispetto a t, cioè si ha
$$u_x\big(\varphi(t),t\big)\varphi'(t)+u_t\big(\varphi(t),t\big)=0;$$
poiché $\varphi'(t)$ è la velocità della particella che occupa la posizione x all'istante t, deve essere $\varphi'(t)=u\big(\varphi(t),t\big)$, quindi
$$u_x\big(\varphi(t),t\big)u\big(\varphi(t),t\big)+u_t\big(\varphi(t),t\big)=0.$$
Poiché l'equazione deve essere verificata qualunque sia $\varphi(t)$, si ha
$$u_t(x,t)+u(x,t)u_x(x,t)=0.$$

2.2 Equazione del calore

Cerchiamo un'equazione alle derivate parziali le cui soluzioni descrivano la diffusione del calore in un corpo.

Dato un corpo nello spazio, rappresentato con un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^3$, indichiamo con $u(x,y,z,t)$ la temperatura del corpo nel punto (x,y,z) all'istante t.

Consideriamo una parte V del corpo, cioè un insieme $V \subseteq A$, che supponiamo misurabile; indichiamo con $Q_V(t)$ la quantità di calore, cioè l'energia termica, contenuta in V al tempo t; essa è proporzionale al volume di V e alla temperatura, se questa è costante nella regione V. La costante di proporzionalità è il prodotto tra la densità ρ del corpo (massa per unità di volume) e il calore specifico (o capacità termica) C, che esprime la capacità di immagazzinare energia del corpo per unità di massa. Se la temperatura non è costante abbiamo

$$Q_V(t) = \iiint_V \rho(x,y,z)C(x,y,z)u(x,y,z,t)\,dx\,dy\,dz\,.$$

Il flusso di calore nel corpo è governato dalla legge di Fourier (o legge di trasmissione del calore): il flusso di calore è proporzionale al gradiente della temperatura e la costante di proporzionalità è negativa, cioè il calore fluisce dalle zone più calde a quelle più fredde. In particolare il flusso di calore attraverso una superficie è proporzionale al flusso del gradiente della temperatura attraverso tale superficie, quindi, se S è una superficie contenuta nel corpo, il flusso totale di calore attraverso tale superficie in un intervallo di tempo $[t_1, t_2]$ è

$$-\int_{t_1}^{t_2} \iint_S k(x,y,z)\nabla u(x,y,z,t)\cdot \nu(x,y,z)\,d\sigma_{(x,y,z)}\,dt\,,$$

dove $\nu(x,y,z)$ è il vettore di norma 1 ortogonale alla superficie S, nella direzione verso cui si considera il flusso di calore, mentre k è la conducibilità termica del materiale, che dipende da quanto il materiale sia un buon conduttore termico. Occorre fare attenzione al fatto che il gradiente che compare nella formula non è il gradiente della funzione u come funzione di 4 variabili (3 spaziali e il tempo), ma è il gradiente solo rispetto alle variabili spaziali. Poniamo cioè:

$$\nabla u(x,y,z,t) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z,t), \frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z,t), \frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z,t)\right).$$

La grandezza $Q_V(t)$ varia nel tempo, perché vi è un flusso di calore attraverso la superficie che delimita V; vi può essere una ulteriore variazione dovuta alla presenza di sorgenti di calore in V. Supponendo che la frontiera di V, che indichiamo con ∂V, sia una superficie, per quanto detto il flusso di calore attraverso ∂V in direzione uscente da V è dato da

$$-\int_{t_1}^{t_2} \iint_{\partial V} k(x,y,z)\nabla u(x,y,z,t)\cdot \nu(x,y,z)\,d\sigma_{(x,y,z)}\,dt\,,$$

dove $\nu(x,y,z)$ è il vettore unitario normale a ∂V in direzione uscente da V; per il calcolo della variazione del calore in V occorre considerare il flusso entrante, quindi abbiamo

$$Q_V(t_2) - Q_V(t_1) =$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} \iint_{\partial V} k(x,y,z)\nabla u(x,y,z,t)\cdot \nu(x,y,z)\,d\sigma_{(x,y,z)}\,dt + \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V f(x,y,z,t)\,dx\,dy\,dz\,dt\,,$$

dove f è la quantità di calore proveniente da eventuali sorgenti di calore presenti nel corpo. Per il Teorema della divergenza in $\mathbb{R}^3$ El-18.5.3

$$\iint_{\partial V} k(x,y,z)\nabla u(x,y,z,t)\cdot\nu(x,y,z)\,d\sigma_{(x,y,z)} = \iiint_V \nabla\cdot\big(k(x,y,z)\nabla u(x,y,z,t)\big)\,dx\,dy\,dz\,,$$

quindi

$$Q_V(t_2)-Q_V(t_1)=\int_{t_1}^{t_2}\iiint_V\Big(\nabla\cdot\big(k(x,y,z)\nabla u(x,y,z,t)\big)+f(x,y,z,t)\Big)\,dx\,dy\,dz\,dt\,.$$

Se u, f e k sono sufficientemente regolari rispetto alla variabile t, da questa uguaglianza segue che Q_V è derivabile e

$$\begin{aligned}\frac{dQ_V}{dt}(t)&=\lim_{h\to 0}\frac{Q_V(t+h)-Q_V(t)}{h}=\\&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\iiint_V\Big(\nabla\cdot\big(k(x,y,z)\nabla u(x,y,z,\tau)\big)+f(x,y,z,\tau)\Big)\,dx\,dy\,dz\,d\tau=\\&=\iiint_V\Big(\nabla\cdot\big(k(x,y,z)\nabla u(x,y,z,t)\big)+f(x,y,z,t)\Big)\,dx\,dy\,dz\,.\end{aligned}$$

Inoltre se u è sufficientemente regolare rispetto alla variabile t, allora dall'uguaglianza

$$Q_V(t)=\iiint_V\rho(x,y,z)C(x,y,z)u(x,y,z,t)\,dx\,dy\,dz\,,$$

segue

$$\frac{dQ_V}{dt}(t)=\iiint_V\rho(x,y,z)C(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,t)\,dx\,dy\,dz\,;$$

quindi

$$\begin{aligned}&\iiint_V\rho(x,y,z)C(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,t)\,dx\,dy\,dz=\\&\qquad=\iiint_V\Big(\nabla\cdot\big(k(x,y,z)\nabla u(x,y,z,t)\big)+f(x,y,z,t)\Big)\,dx\,dy\,dz\,.\end{aligned}$$

Questa uguaglianza vale qualunque sia V sottoinsieme di A, che abbia una frontiera abbastanza regolare, ad esempio per le sfere; pertanto le due funzioni integrande coincidono, quindi si ha

$$\rho(x,y,z)C(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,t)=\nabla\cdot\big(k(x,y,z)\nabla u(x,y,z,t)\big)+f(x,y,z,t).$$

Se il corpo è omogeneo allora ρ, C e k sono costanti, quindi l'equazione diventa

$$\rho C\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,t)=k\nabla\cdot\nabla u(x,y,z,t)+f(x,y,z,t).$$

Poiché $\nabla\cdot\nabla u=\Delta u$, si ha

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,t)=\frac{k}{\rho C}\Delta u(x,y,z,t)+\frac{1}{\rho C}f(x,y,z,t). \tag{2.2.1}$$

Questa equazione è detta **equazione del calore**.

2.3 Equazione delle onde

Cerchiamo un'equazione alle derivate parziali le cui soluzioni descrivano il moto di una corda elastica.

Consideriamo una corda elastica in tensione, fissata negli estremi, che fa piccoli spostamenti. Supponiamo che la corda si muova rimanendo in un piano, che per chiarire le idee supponiamo verticale, e che a riposo la corda sia orizzontale. Supponiamo inoltre che:

- ogni punto della corda si muove in direzione perpendicolare alla posizione di riposo, cioè in direzione verticale;
- la corda non oppone resistenza alla flessione;
- la corda è elastica, cioè la forza che essa esercita è proporzionale alla sua lunghezza.

Identifichiamo la corda a riposo con l'intervallo $[0,L]$ dell'asse delle ascisse e indichiamo con $u(x,t)$ lo spostamento, in direzione parallela all'asse delle ordinate, del punto di ascissa x della corda, all'istante t. Ciò significa che all'istante t la corda è descritta dal grafico della funzione $x \mapsto u(x,t)$.

Studiamo le forze che agiscono su ogni tratto di corda. Consideriamo la tensione della corda, cioè la forza che un tratto di corda esercita su quello contiguo; per la precisione indichiamo con $\boldsymbol{T}(x,t)$ la forza (vettore) che la parte di corda a destra del punto $\big(x,u(x,t)\big)$ esercita sulla parte di corda a sinistra di tale punto. Questa forza è tangenziale alla corda, perché abbiamo supposto che la corda sia perfettamente flessibile. Evidentemente la forza che la parte di corda a sinistra del punto $\big(x,u(x,t)\big)$ esercita sulla parte di corda a destra è $-\boldsymbol{T}(x,t)$.

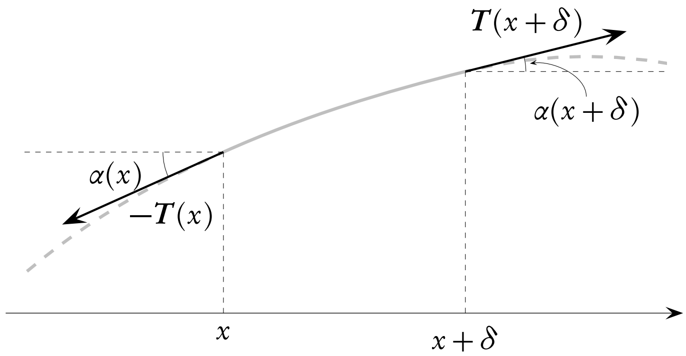

Figura 2.1: Tratto di corda e forze che agiscono su di essa (è omesso l'argomento t).

Sia $\alpha(x,t)$ l'ampiezza dell'angolo che il vettore $\boldsymbol{T}(x,t)$ forma con una retta parallela all'asse delle ascisse. Visto che $\boldsymbol{T}(x,t)$ è tangente alla corda, cioè al grafico della funzione $x \mapsto u(x,t)$, si ha

$$\tan\big(\alpha(x,t)\big) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,t).$$

Abbiamo supposto che la corda non abbia spostamenti orizzontali, quindi scelto un qualunque tratto di corda, individuato dalle ascisse x_1 e x_2, le componenti orizzontali delle forze che agiscono su questo tratto di corda debbono bilanciarsi, quindi

$$\|\boldsymbol{T}(x_2,t)\|\cos\big(\alpha(x_2,t)\big) - \|\boldsymbol{T}(x_1,t)\|\cos\big(\alpha(x_1,t)\big) = 0,$$

perciò $\|\boldsymbol{T}(x,t)\|\cos\big(\alpha(x,t)\big)$ è costante lungo la corda. Inoltre supponiamo che sulla corda agisca una forza verticale la cui intensità per unità di lunghezza è $f(x,t)$. Questa forza può ad esempio essere il peso della corda, se esso non è trascurabile. La componente verticale della forza che agisce sul tratto di corda compreso tra il punto di ascissa x e il punto di ascissa $x+\delta$ è la somma della forza dovuta alla tensione della corda con la forza f. La componente verticale di $\boldsymbol{T}(x,t)$ è $\|\boldsymbol{T}(x,t)\|\sin\big(\alpha(x,t)\big)$, mentre la componente verticale di $\boldsymbol{T}(x+\delta,t)$ è $\|\boldsymbol{T}(x+\delta,t)\|\sin\alpha(x+\delta,t)$, quindi la componente verticale della forza totale è

$$\|\boldsymbol{T}(x+\delta,t)\|\sin\big(\alpha(x+\delta,t)\big)-\|\boldsymbol{T}(x,t)\|\sin\big(\alpha(x,t)\big)+\int_x^{x+\delta} f(\xi,t)\,d\xi\,;$$

Poiché $\|\boldsymbol{T}(x+\delta,t)\|\cos\big(\alpha(x+\delta,t)\big)=\|\boldsymbol{T}(x,t)\|\cos\big(\alpha(x,t)\big)$, questo è uguale a

$$\begin{aligned}
&\frac{\|\boldsymbol{T}(x,t)\|\cos\big(\alpha(x,t)\big)}{\cos\big(\alpha(x+\delta,t)\big)}\sin\big(\alpha(x+\delta,t)\big)-\|\boldsymbol{T}(x,t)\|\sin\big(\alpha(x,t)\big)+\int_x^{x+\delta} f(\xi,t)\,d\xi=\\
&\qquad=\|\boldsymbol{T}(x,t)\|\cos\big(\alpha(x,t)\big)\Big(\tan\big(\alpha(x+\delta,t)\big)-\tan\big(\alpha(x,t)\big)\Big)+\int_x^{x+\delta} f(\xi,t)\,d\xi=\\
&\qquad=\|\boldsymbol{T}(x,t)\|\cos\big(\alpha(x,t)\big)\Big(\frac{\partial u}{\partial x}(x+\delta,t)-\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\Big)+\int_x^{x+\delta} f(\xi,t)\,d\xi\,.
\end{aligned}$$

Per il principio fondamentale della dinamica questa quantità è uguale al prodotto della massa per l'accelerazione del tratto di corda, se ogni punto ha la stessa accelerazione; in generale occorre considerare l'integrale del prodotto della densità lineare della corda per l'accelerazione, dove la densità lineare, che indichiamo con $\rho(x)$, è la massa per unità di lunghezza. L'accelerazione di un punto della corda è dato dalla derivata seconda rispetto al tempo della funzione posizione del punto, cioè della funzione u. Perciò la forza è uguale a

$$\int_x^{x+\delta}\rho(\xi)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi,t)\,d\xi\,.$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{T}(x,t)\|\cos\big(\alpha(x,t)\big)\Big(\frac{\partial u}{\partial x}(x+\delta,t)-\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\Big)+\int_x^{x+\delta} f(\xi,t)\,d\xi&=\\
=\int_x^{x+\delta}\rho(\xi)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi,t)\,d\xi&\,.
\end{aligned}$$

Dividendo per δ entrambi i membri si ottiene

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{T}(x,t)\|\cos\big(\alpha(x,t)\big)\frac{1}{\delta}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}(x+\delta,t)-\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\Big)+\frac{1}{\delta}\int_x^{x+\delta} f(\xi,t)\,d\xi&=\\
=\frac{1}{\delta}\int_x^{x+\delta}\rho(\xi)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi,t)\,d\xi&\,,
\end{aligned}$$

da cui, passando al limite per δ che tende a 0, se f e ρ sono continue, supposta u di classe C^2, segue

$$\|\boldsymbol{T}(x,t)\|\cos\big(\alpha(x,t)\big)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)+f(x,t)=\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t).$$

Sappiamo che la componente orizzontale della tensione $\|\boldsymbol{T}(x,t)\|\cos\bigl(\alpha(x,t)\bigr)$ non dipende da x, inoltre se gli estremi della corda sono fissi, questa quantità è uguale alla tensione della corda a riposo, quindi non varia nel tempo. Infatti abbiamo supposto che la tensione sia proporzionale alla lunghezza, ma la tensione ha la stessa direzione della corda, quindi la componente orizzontale della tensione è proporzionale alla componente orizzontale della lunghezza della corda. La componente orizzontale della lunghezza della corda è sempre L, quindi anche la componente orizzontale della tensione non cambia al variare del tempo. Se la indichiamo con τ, risulta $\tau = \|\boldsymbol{T}(x,t)\|\cos\bigl(\alpha(x,t)\bigr)$, qualunque siano x e t. L'equazione scritta sopra diventa

$$\tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + f(x,t) = \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t),$$

cioè

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\tau}{\rho(x)}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \frac{1}{\rho(x)} f(x,t).$$

Se la corda è omogenea, quindi la densità è costante, posto $c^2 = \tau/\rho$ si ha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \frac{1}{\rho} f(x,t). \tag{2.3.1}$$

Questa equazione è detta **equazione delle onde**.

Capitolo 3

Equazioni alle derivate parziali del primo ordine

3.1 Equazione del trasporto

Consideriamo l'equazione del trasporto (v. equazione (2.1.2))

$$u_t(x,t)+cu_x(x,t)=0 \qquad (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+.$$

L'equazione si può scrivere nella forma $\nabla u(x,t)\cdot(c,1)=0$, cioè, facendo intervenire un vettore di norma 1,

$$\nabla u(x,t)\cdot\frac{(c,1)}{\|(c,1)\|}=0.$$

Per il Teorema del gradiente El-11.4.7, il primo membro è la derivata direzionale di u nella direzione $(c,1)/\|(c,1)\|$. Questo suggerisce che, con un opportuno cambiamento di variabili, si possa scrivere l'equazione in modo che compaia la derivata rispetto a una sola variabile. Vi sono vari cambiamenti di variabile per cui questo avviene, ma è opportuno non modificare la variabile t, in modo che il semipiano $t\geq 0$, in cui studiamo l'equazione, si trasformi in sé stesso. Consideriamo quindi le nuove variabili ξ e τ, con $\tau=t$ e ξ tale che la retta passante per l'origine e per il punto $(c,1)$ diventi la retta $\xi=0$. La retta per l'origine e per $(c,1)$ ha equazione $x-ct=0$, quindi è opportuno porre $\xi=x-ct$. Consideriamo quindi le nuove variabili

$$\begin{cases}\xi=x-ct,\\ \tau=t,\end{cases}$$

da cui si ricava

$$\begin{cases}x=\xi+c\tau,\\ t=\tau.\end{cases}$$

Indichiamo con v la funzione incognita rispetto alle nuove variabili, quindi

$$v\colon\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}, \qquad v(\xi,\tau)=u(\xi+c\tau,\tau).$$

Da qui si ricava $u(x,t)=v(x-ct,t)$, quindi

$$u_t(x,t)+cu_x(x,t)=-cv_\xi(x-ct,t)+v_\tau(x-ct,t)+cv_\xi(x-ct,t)=v_\tau(x-ct,t).$$

Se u è soluzione dell'equazione del trasporto, da qui segue $v_\tau = 0$, quindi v non dipende da τ. Perciò esiste $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $v(\xi, \tau) = g(\xi)$; pertanto $u(x,t) = g(x - ct)$. Poiché v è soluzione di un'equazione del primo ordine essa è di classe C^1. Affinché v abbia tale regolarità anche g deve essere di classe C^1.

Ad ogni funzione g corrisponde una sola soluzione. La funzione g è univocamente individuata dal valore di $u(x,0)$, perché si ha $g(x) = u(x,0)$.

Abbiamo quindi il seguente teorema.

3.1.1 Teorema
Sia $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. *Allora il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u_t(x,t) + c u_x(x,t) = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

ha come unica soluzione la funzione

$$u: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \qquad u(x,t) = \varphi(x - ct).$$

Osserviamo che, per questo teorema, la soluzione del problema di Cauchy è unica.

Abbiamo provato che ogni soluzione è costante nelle semirette di equazione $x - ct = k$ con $t \geq 0$. Queste semirette sono dette **curve caratteristiche** per l'equazione $u_t + c u_x = 0$.

Consideriamo ora un analogo problema di Cauchy per un'equazione non omogenea

$$\begin{cases} u_t(x,t) + c u_x(x,t) = f(x,t), & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.1.2}$$

Poiché conosciamo la soluzione del problema di Cauchy per l'equazione omogenea, cioè con $f = 0$, questo problema si può risolvere con il seguente metodo, detto **metodo di Duhamel**.

Per ogni $s \geq 0$, consideriamo la soluzione dell'equazione del trasporto omogenea definita per $t \geq s$ e che per $t = s$ vale $f(x,s)$. Cioè consideriamo $u^{(s)}$ tale che

$$\begin{cases} u_t^{(s)}(x,t) + c u_x^{(s)}(x,t) = 0, & x \in \mathbb{R}, t \geq s, \\ u^{(s)}(x,s) = f(x,s), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Posto

$$u(x,t) = \int_0^t u^{(s)}(x,t)\, ds, \tag{3.1.3}$$

u è soluzione del problema di Cauchy (3.1.2). Infatti, per il Teor. El-14.4.8 si ha

$$u_t(x,t) = u^{(t)}(x,t) + \int_0^t u_t^{(s)}(x,t)\, ds = f(x,t) - \int_0^t c u_x^{(s)}(x,t)\, ds.$$

Per il Teor. El-14.4.2 risulta $\int_0^t c u_x^{(s)}(x,t)\, ds = c u_x(x,t)$, pertanto u verifica l'equazione non omogenea. Inoltre dalla definizione è evidente che $u(x,0) = 0$.

Supponendo f continua e derivabile parzialmente rispetto a x con f_x continua, ricaviamo dal Teor. 3.1.1 l'espressione esplicita di u. Osserviamo che $u^{(s)}$ è soluzione di un problema di Cauchy in cui la condizione iniziale è assegnata non per $t = 0$, ma per $t = s$, pertanto $u^{(s)}(x,t)$ è il valore della funzione trascorso un tempo $t-s$ dall'istante iniziale, quindi si ha

$$u^{(s)}(x,t)=f\big(x-c(t-s),s\big),$$

pertanto

$$u(x,t)=\int_0^t u^{(s)}(x,t)\,ds=\int_0^t f\big(x-c(t-s),s\big)\,ds\,.$$

Abbiamo quindi il seguente teorema.

3.1.2 Teorema

Sia $f\in C(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ derivabile parzialmente rispetto a x con f_x continua. Allora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t(x,t)+c\,u_x(x,t)=f(x,t), & (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+,\\ u(x,0)=0, & x\in\mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.1.4}$$

ha come unica soluzione la funzione

$$u:\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R},\qquad u(x,t)=\int_0^t f\big(x-c(t-s),s\big)\,ds\,.$$

L'affermazione che la soluzione è unica non è giustificata dai ragionamenti fatti sopra, ma è conseguenza dell'unicità della soluzione per il problema di Cauchy per l'equazione omogenea. Infatti se v e w sono soluzione del problema (3.1.4), posto $u=v-w$, risulta, $\forall(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} u_t(x,t)+c\,u_x(x,t)&=v_t(x,t)-w_t(x,t)+c\big(v_x(x,t)-w_x(x,t)\big)=\\ &=\big(v_t(x,t)+cv_x(x,t)\big)-\big(w_t(x,t)+cw_x(x,t)\big)=f(x,t)-f(x,t)=0. \end{aligned}$$

Inoltre $\forall x\in\mathbb{R}$ si ha $u(x,0)=v(x,0)-w(x,0)=0$. Pertanto u è soluzione del problema (3.1.1) con $\varphi=0$; allora, per il Teor 3.1.1, u è identicamente nulla, quindi $v=w$.

Se u è somma di una soluzione v del problema (3.1.1) e una soluzione w del problema (3.1.4), risulta, $\forall(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} u_t(x,t)+c\,u_x(x,t)&=v_t(x,t)+w_t(x,t)+c\big(v_x(x,t)+w_x(x,t)\big)=\\ &=\big(v_t(x,t)+cv_x(x,t)\big)+\big(w_t(x,t)+cw_x(x,t)\big)=f(x,t). \end{aligned}$$

Inoltre $\forall x\in\mathbb{R}$ si ha $u(x,0)=v(x,0)+w(x,0)=\varphi(0)$. Pertanto, combinando i Teor. 3.1.1 e 3.1.2, si ottiene il seguente teorema.

3.1.3 Teorema

Siano $f\in C(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ derivabile parzialmente rispetto a x con f_x continua e $\varphi\in\mathbb{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Allora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t(x,t)+c\,u_x(x,t)=f(x,t), & (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+,\\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

ha come unica soluzione la funzione

$$u:\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R},\qquad u(x,t)=\varphi(x-ct)+\int_0^t f\big(x-c(t-s),s\big)\,ds\,.$$

3.2 Curve caratteristiche per una legge di conservazione

Consideriamo il problema di Cauchy per una legge di conservazione (v. equazione 2.1.1)

$$\begin{cases} u_t(x,t)+q'\big(u(x,t)\big)u_x(x,t)=0, & (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+, \\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Cerchiamo se anche per questa equazione, come nel caso particolare dell'equazione del trasporto, esistono curve nel piano (x,t) in cui una soluzione è costante. Sia $u\in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ soluzione della legge di conservazione e cerchiamo una curva, di equazione $x=r(t)$, in cui u sia costante. La funzione $t\mapsto u\big(r(t),t\big)$ è costante se, e solo se, ha derivata nulla, cioè, $\forall t\geq 0$, si ha

$$r'(t)u_x\big(r(t),t\big)+u_t\big(r(t),t\big)=0.$$

Ricavando u_t dall'equazione differenziale e sostituendo in questa uguaglianza, si ottiene

$$\Big(r'(t)-q'\big(u\big(r(t),t\big)\big)\Big)u_x\big(r(t),t\big)=0.$$

Quindi se u è soluzione dell'equazione differenziale e si ha $r'(t)=q'\big(u(r(t),t)\big)$, allora $u\big(r(t),t\big)$ non dipende da t, quindi

$$u\big(r(t),t\big)=u\big(r(0),0\big)=\varphi\big(r(0)\big).$$

Posto $x_0=r(0)$, la condizione $r'(t)=q'\big(u(r(t),t)\big)$ equivale a $r'(t)=q'\big(\varphi(x_0)\big)$. Pertanto r è una funzione polinomiale di primo grado e si ha $r(t)=q'\big(\varphi(x_0)\big)t+x_0$. Quindi la soluzione u è costante nelle semirette di equazione $x=q'\big(\varphi(x_0)\big)t+x_0$.

Queste vengono dette **curve caratteristiche** per l'equazione $u_t+q'(u)u_x=0$.

Viceversa, consideriamo $u\in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ costante in ciascuna semiretta di equazione $x=q'\big(\varphi(x_0)\big)t+x_0$, $t\geq 0$ e tale che, $\forall x\in\mathbb{R}$, sia $u(x,0)=\varphi(x)$. Allora la funzione $t\mapsto u\big(q'\big(\varphi(x_0)\big)t+x_0,t\big)$ è costante, quindi ha derivata nulla, cioè

$$u_x\big(q'\big(\varphi(x_0)\big)t+x_0,t\big)q'\big(\varphi(x_0)\big)+u_t\big(q'\big(\varphi(x_0)\big)t+x_0,t\big)=0.$$

Poiché $\varphi(x_0)=u(x_0,0)=u\big(q'\big(\varphi(x_0)\big)t+x_0,t\big)$, si ha

$$u_t\big(q'\big(\varphi(x_0)\big)t+x_0,t\big)+q'\Big(u\big(q'\big(\varphi(x_0)\big)t+x_0,t\big)\Big)u_x\big(q'\big(\varphi(x_0)\big)t+x_0,t\big)=0.$$

Pertanto se $(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ è tale che esiste $x_0\in\mathbb{R}$ per cui $x=q'\big(\varphi(x_0)\big)t+x_0$, allora

$$u_t(x,t)+q'\big(u(x,t)\big)u_x(x,t)=0,$$

cioè u è soluzione della legge di conservazione nei punti del piano per cui passano le curve caratteristiche.

Studiamo il caso particolare dell'equazione di Burgers (v. equazione 2.1.3). Abbiamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t(x,t)+u(x,t)u_x(x,t)=0, & (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+, \\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Le curve caratteristiche sono semirette di equazione $x=\varphi(x_0)t+x_0$.

Se φ è la funzione tale che $\varphi(x) = x$, si ha il problema

$$\begin{cases} u_t(x,t) + u(x,t)u_x(x,t) = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.2.1}$$

Le curve caratteristiche hanno equazione $x = x_0 t + x_0$; qualunque siano $x \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}_+$ da tale equazione si ricava $x_0 = x/(t+1)$, quindi per ogni punto (x,t) del semipiano $t \geq 0$ passa una curva caratteristica e si ha

$$u(x,t) = \varphi\left(\frac{x}{t+1}\right) = \frac{x}{t+1}.$$

La soluzione di questo problema è definita in tutto il semipiano $t \geq 0$.

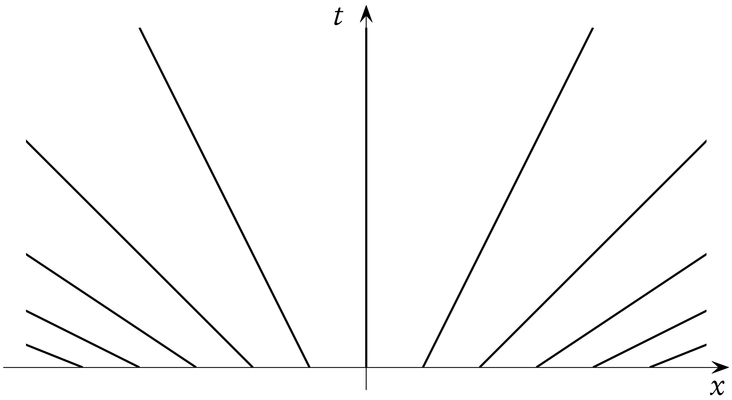

Figura 3.1: Curve caratteristiche per il problema (3.2.1).

Se φ è la funzione tale che $\varphi(x) = -x$, si ha il problema

$$\begin{cases} u_t(x,t) + u(x,t)u_x(x,t) = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = -x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.2.2}$$

Le curve caratteristiche hanno equazione $x = -x_0 t + x_0$; se $t = 1$ si ha $x = 0$, qualunque sia x_0 . Pertanto non esistono curve caratteristiche passanti per i punti della retta $t = 1$ diversi da $(0,1)$ e tutte le curve caratteristiche passano per tale punto, in cui quindi non è possibile che sia definita la soluzione. Se $t < 1$ per il punto (x,t) passa la curva che si ottiene per $x_0 = x/(1-t)$, quindi

$$u(x,t) = \varphi\left(\frac{x}{1-t}\right) = \frac{x}{t-1}.$$

La soluzione tende a $+\infty$ o a $-\infty$ per $t \to 1$ (se $x \neq 0$), quindi non esiste un soluzione per $t \geq 1$.

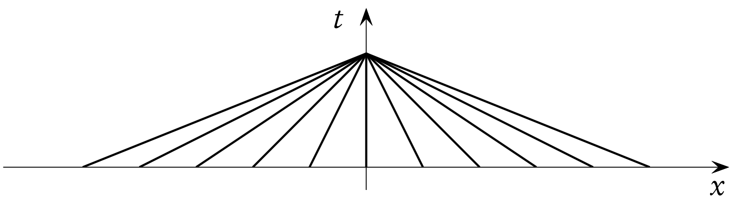

Figura 3.2: Curve caratteristiche per il problema (3.2.2).

3.3 Curve caratteristiche per un'equazione lineare

Il metodo delle curve caratteristiche può essere utilizzato per risolvere un diverso tipo di equazioni differenziali del primo ordine.

Consideriamo un'equazione differenziale lineare omogenea del primo ordine, i cui coefficienti non siano necessariamente costanti,

$$a(x,y)u_x(x,y)+b(x,y)u_y(x,y)=0, \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2, \tag{3.3.1}$$

con $a,b\in C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. Sia $u\in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ soluzione di questa equazione. La soluzione u è costante in una curva individuata dalla parametrizzazione $t\mapsto\big(x(t),y(t)\big)$ se, e solo se, la funzione $t\mapsto u\big(x(t),y(t)\big)$ ha derivata nulla, cioè

$$u_x\big(x(t),y(t)\big)x'(t)+u_y\big(x(t),y(t)\big)y'(t)=0.$$

Poiché u è soluzione dell'equazione (3.3.1), questa uguaglianza è verificata se si ha

$$\begin{cases} x'(t)=a\big(x(t),y(t)\big),\\ y'(t)=b\big(x(t),y(t)\big). \end{cases} \tag{3.3.2}$$

Viceversa, se u è una funzione costante nelle curve individuate dalle parametrizzazioni $t\mapsto\big(x(t),y(t)\big)$ che soddisfano il sistema (3.3.2), allora

$$\begin{aligned} 0=\frac{d}{dt}u\big(x(t),y(t)\big)&=u_x\big(x(t),y(t)\big)x'(t)+u_y\big(x(t),y(t)\big)y'(t)=\\ &=a\big(x(t),y(t)\big)u_x\big(x(t),y(t)\big)+b\big(x(t),y(t)\big)u_y\big(x(t),y(t)\big), \end{aligned}$$

quindi u è soluzione dell'equazione (3.3.1).

Studiamo alcuni casi particolari.

Consideriamo l'equazione

$$yu_x(x,y)+xu_y(x,y)=0. \tag{3.3.3}$$

Il sistema (3.3.2) diventa

$$\begin{cases} x'(t)=y(t),\\ y'(t)=x(t). \end{cases}$$

Quindi deve essere $x''(t)=x(t)$. Questa equazione differenziale ha equazione caratteristica $s^2=1$, quindi $s=\pm1$; pertanto $x(t)=c_1e^t+c_2e^{-t}$ da cui, derivando, si ottiene $y(t)=c_1e^t-c_2e^{-t}$. Pertanto le curve caratteristiche hanno equazioni parametriche

$$\begin{cases} x=c_1e^t+c_2e^{-t},\\ y=c_1e^t-c_2e^{-t}. \end{cases}$$

Si ricava facilmente l'equazione cartesiana $x^2-y^2=4c_1c_2$. Ogni ramo di una iperbole di equazione cartesiana $x^2-y^2=K$, con $K\in\mathbb{R}^*$, può essere espressa nella forma parametrica scritta sopra; anche ognuna delle semirette uscenti dall'origine contenute nella coppia di rette

$x^2-y^2=0$ può essere scritta in tale forma. Possiamo concludere che, se $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, allora la funzione

$$u(x,y)=f(x^2-y^2)$$

è soluzione dell'equazione (3.3.3).

Le soluzioni di questo tipo assumono lo stesso valore in entrambi i rami di ognuna delle iperboli, vi sono anche soluzioni che assumono valori diversi sui due rami di una stessa iperbole.

Consideriamo l'equazione

$$y u_x(x,y)-x u_y(x,y)=0. \tag{3.3.4}$$

Il sistema (3.3.2) diventa

$$\begin{cases} x'(t)=y(t), \\ y'(t)=-x(t). \end{cases}$$

Quindi deve essere $x''(t)=-x(t)$. Questa equazione differenziale ha equazione caratteristica $s^2=-1$, quindi $s=\pm i$; pertanto $x(t)=c_1\cos t+c_2\sin t$ da cui, derivando, si ottiene $y(t)=-c_1\sin t+c_2\cos t$. Quindi le curve caratteristiche hanno equazioni parametriche

$$\begin{cases} x=c_1\cos t+c_2\sin t, \\ y=-c_1\sin t+c_2\cos t. \end{cases}$$

Si ricava facilmente l'equazione cartesiana $x^2+y^2=c_1^2+c_2^2$. Ogni circonferenza di equazione cartesiana $x^2+y^2=K$, con $K\in\mathbb{R}_+^*$, può essere espressa nella forma parametrica scritta sopra. Possiamo concludere che, se $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, allora la funzione

$$u(x,y)=f(x^2+y^2)$$

è soluzione dell'equazione (3.3.4).

Sia $k\in\mathbb{N}^*$; consideriamo l'equazione

$$x u_x(x,y)+k y u_y(x,y)=0. \tag{3.3.5}$$

Il sistema (3.3.2) diventa

$$\begin{cases} x'(t)=x(t), \\ y'(t)=ky(t). \end{cases}$$

Da qui si ricava $x(t)=c_1e^t$ e $y(t)=c_2e^{kt}$. Quindi le curve caratteristiche hanno equazioni parametriche

$$\begin{cases} x=c_1e^t, \\ y=c_2e^{kt}. \end{cases}$$

Si ricava facilmente l'equazione cartesiana $y/c_2=(x/c_1)^k$; inoltre si hanno le curve $x=0$ e $y=0$. Ogni curva di equazione cartesiana $y=Kx^k$, con $K\in\mathbb{R}$, e la curva $x=0$ possono essere espresse nella forma parametrica scritta sopra. Possiamo concludere che, se $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, allora la funzione.

$$u(x,y)=f(x^{-k}y)$$

è soluzione dell'equazione (3.3.5).

Capitolo 4

Equazione del calore

4.1 Trasformata di Fourier

Utilizziamo la trasformata di Fourier per risolvere un problema di Cauchy per l'equazione del calore (v. equazione (2.2.1)). Come vedremo, questo consente di trasformare l'equazione alle derivate parziali in un'equazione differenziale ordinaria di cui è semplice trovare una soluzione.

Consideriamo una sbarra di lunghezza infinita e studiamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t(x,t) = a u_{xx}(x,t), & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ , \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

dove $a \in \mathbb{R}_+^*$ ed è assegnata $\varphi \in PC(\mathbb{R},\mathbb{R})$ assolutamente i. s. g.

Supponiamo che, per ogni fissato $t \in \mathbb{R}_+$, la funzione $x \mapsto u(x,t)$ sia di classe C^2, assolutamente i. s. g. e che anche le derivate prima e seconda siano assolutamente i. s. g. Indichiamo con U la trasformata di Fourier di tale funzione, cioè

$$U(\omega,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x}\, u(x,t)\, dx\, .$$

Per il Teorema sulla trasformata di Fourier della derivata El-14.6.12, la trasformata di Fourier, rispetto a x, di u_{xx} è $-\omega^2 U(\omega,t)$. Se la funzione u_t è tale che si può derivare sotto il segno di integrale (v. Teor. El-14.4.19), si ha

$$U_t(\omega,t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x}\, u(x,t)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x}\, u_t(x,t)\, dt\, .$$

Quindi, uguagliando le trasformate dei due membri dell'equazione differenziale, otteniamo la seguente equazione, in cui compaiono derivate rispetto alla sola variabile t,

$$U_t(\omega,t) = -a\omega^2 U(\omega,t), \qquad (\omega,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ .$$

Dalla condizione iniziale si ottiene $U(\omega,0) = \widehat{\varphi}(\omega)$; pertanto la funzione $t \mapsto U(\omega,t)$, di dominio $\mathbb{R}_+$, è soluzione del seguente problema di Cauchy per un'equazione differenziale ordinaria lineare omogenea a coefficienti costanti

$$\begin{cases} y' + a\omega^2 y = 0, \\ y(0) = \widehat{\varphi}(\omega). \end{cases}$$

L'equazione caratteristica è $s + a\omega^2 = 0$, quindi $s = -a\omega^2$, pertanto l'equazione differenziale ha soluzione $ce^{-a\omega^2 t}$. Affinché sia verificata la condizione $y(0) = \widehat{\varphi}(\omega)$ deve essere $c = \widehat{\varphi}(\omega)$, pertanto la soluzione è la funzione $t \mapsto \widehat{\varphi}(\omega)e^{-a\omega^2 t}$. Allora, $\forall(\omega, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, si ha

$$U(\omega, t) = \widehat{\varphi}(\omega)e^{-a\omega^2 t}.$$

Poiché $\widehat{\varphi}$ è limitata (v. Teor. El-14.6.6) e la funzione $\omega \mapsto e^{-a\omega^2 t}$ è assolutamente i. s. g., la funzione $\omega \mapsto U(\omega, t)$ è assolutamente i. s. g., quindi, per il Teorema di inversione della trasformazione di Fourier El-14.6.22 e per il Teor. El-14.6.21, si ha

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(\omega)e^{-a\omega^2 t}e^{i\omega x}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\mathscr{F}\big[\omega \mapsto e^{-a\omega^2 t}e^{i\omega x}\big](\xi)\,d\xi.$$

Dal punto (1) del Teor. El-14.6.9 e dall'Es. El-14.6.20 otteniamo, se $t > 0$,

$$\mathscr{F}\big[\omega \mapsto e^{-a\omega^2 t}e^{i\omega x}\big](\xi) = \mathscr{F}\big[\omega \mapsto e^{-a\omega^2 t}\big](\xi - x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{at}}\exp\left(-\frac{(\xi - x)^2}{4at}\right)$$

e quindi

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(\xi - x)^2}{4at}\right)\varphi(\xi)\,d\xi. \tag{4.1.1}$$

Si può dimostrare che se φ è di classe C^2, assolutamente i. s. g., con derivate prima e seconda che hanno la stessa proprietà, allora anche la funzione $x \mapsto u(x,t)$ ha le stesse proprietà; quindi i passaggi fatti sopra sono giustificati.

Si ha quindi il seguente teorema.

4.1.1 Teorema

Sia $\varphi \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ assolutamente i. s. g. e tale che φ' e φ'' sono assolutamente i. s. g. Allora la funzione

$$u\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \qquad u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{\pi a t}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(\xi - x)^2}{4at}\right)\varphi(\xi)\,d\xi, & \text{se } t > 0, \\ \varphi(x), & \text{se } t = 0, \end{cases}$$

è di classe C^2, ed è soluzione del problema

$$\begin{cases} u_t(x,t) = a u_{xx}(x,t), & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Se φ è continua a tratti e assolutamente i. s. g., allora la funzione u definita dall'equazione (4.1.1) è soluzione dell'equazione del calore per $t > 0$.

Con la sostituzione $\eta=(\xi-x)/\big(2\sqrt{at}\big)$, da cui si ricava $\xi=x+2\sqrt{at}\,\eta$, si ottiene

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a t}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\eta^2}\varphi\big(x+2\sqrt{at}\,\eta\big)2\sqrt{at}\,d\eta=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\eta^2}\varphi\big(x+2\sqrt{at}\,\eta\big)d\eta\,.$$

La funzione $\eta\mapsto e^{-\eta^2}$ è assolutamente i. s. g. in $\mathbb{R}$ e ha integrale $\sqrt{\pi}$ (v. Es. El-13.5.12).

Se φ è continua e limitata, per il Teor. El-14.4.12 risulta

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}u(x,t)&=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\eta^2}\varphi\big(x+2\sqrt{at}\,\eta\big)d\eta=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\eta^2}\lim_{t\to 0}\varphi\big(x+2\sqrt{at}\,\eta\big)d\eta=\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\eta^2}\varphi(x)\,d\eta=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\eta^2}\,d\eta\,\varphi(x)=\varphi(x)\,.\end{aligned}$$

Si può dimostrare che, non solo $\lim_{t\to 0}u(x,t)=\varphi(x)$, ma anche che, $\forall x\in\mathbb{R}$, risulta $\lim_{(\xi,t)\to(x,0)}u(\xi,t)=\varphi(x)$. Quindi la funzione ottenuta ponendo

$$u\colon\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}\,,\qquad u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{\pi a t}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(\xi-x)^2}{4at}\Big)\varphi(\xi)\,d\xi\,, & \text{se } t>0,\\ \varphi(x), & \text{se } t=0,\end{cases}$$

è continua.

Si ha quindi il seguente teorema.

4.1.2 Teorema
Sia $\varphi\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ limitata. Allora la funzione

$$u\colon\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}\,,\qquad u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{\pi a t}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{(\xi-x)^2}{4at}\Big)\varphi(\xi)\,d\xi\,, & \textit{se } t>0,\\ \varphi(x), & \textit{se } t=0,\end{cases}$$

è continua, di classe C^2 in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ ed è soluzione del problema

$$\begin{cases}u_t(x,t)=a\,u_{xx}(x,t), & (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*,\\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

4.2 Separazione delle variabili

4.2.1 Problema di Cauchy-Dirichlet

Consideriamo il problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore

$$\begin{cases}u_t(x,t)=a\,u_{xx}(x,t), & (x,t)\in[0,L]\times\mathbb{R}_+,\\ u(0,t)=0, & t\in\mathbb{R}_+,\\ u(L,t)=0, & t\in\mathbb{R}_+,\\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in[0,L]\,,\end{cases}$$

dove $a,L\in\mathbb{R}_+^*$ ed è assegnata $\varphi\colon[0,L]\to\mathbb{R}$. Poiché cerchiamo una soluzione u di classe C^2 rispetto a x, deve essere $\varphi\in C^2\big([0,L],\mathbb{R}\big)$. Inoltre, affinché siano soddisfatte le condizioni $u(0,0)=u(L,0)=0$, deve essere $\varphi(0)=\varphi(L)=0$.

Cerchiamo una soluzione non identicamente nulla di questo problema, che sia prodotto di una funzione della sola variabile x per una funzione della sola variabile t. Quindi poniamo, per $(x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}_+$, $u(x,t) = X(x)T(t)$. Affinché esistano continue le derivate che compaiono nell'equazione del calore, X deve essere di classe C^2 e T di classe C^1. Inoltre, poiché cerchiamo u non identicamente nulla, X e T devono essere non identicamente nulle. L'equazione del calore diventa

$$X(x)T'(t) = aX''(x)T(t).$$

Se x è tale che $X(x) \neq 0$ e t è tale che $T(t) \neq 0$ allora si ha

$$\frac{X(x)T'(t)}{X(x)T(t)} = a\,\frac{X''(x)T(t)}{X(x)T(t)},$$

cioè

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = a\,\frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Al variare di t il secondo membro di questa uguaglianza non varia, quindi anche il primo membro non varia. Perciò il primo membro è costante rispetto a t e, per motivi analoghi, il secondo membro è costante rispetto a x. Pertanto esiste $K \in \mathbb{R}$ tale che $T'(t) = aKT(t)$ se t è tale che $T(t) \neq 0$. Per continuità l'uguaglianza vale anche se $T(t) = 0$, purché T non sia identicamente nulla in un intorno del punto t. Infine se T è identicamente nulla in un intorno di t si ha anche $T'(t) = 0$, quindi l'uguaglianza vale anche in questo caso. Per motivi analoghi si ha $X''(x) = KX(x)$ qualunque sia $x \in [0,L]$.

Questo metodo di risoluzione di un'equazione alle derivate parziali è detto **metodo di separazione delle variabili**, perché abbiamo ottenuto due equazioni in ciascuna delle quali compare una sola delle variabili.

Inoltre le condizioni agli estremi $u(0,t) = u(L,t) = 0$ diventano

$$X(0)T(t) = X(L)T(t) = 0;$$

poiché $T(t)$ non è identicamente nulla, tali condizioni equivalgono a $X(0) = X(L) = 0$.

Cerchiamo X non identicamente nulla, soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} X''(x) = KX(x), & x \in [0,L], \\ X(0) = 0, \\ X(L) = 0. \end{cases}$$

Per il Teor. 1.1.1 tale soluzione esiste se, e solo se, $K = -n^2\pi^2/L^2$, con $n \in \mathbb{N}^*$, e in tal caso si ha

$$X(x) = c\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \qquad c \in \mathbb{R}^*.$$

Ora risolviamo l'equazione $T'(t) = -(an^2\pi^2/L^2)T(t)$. È un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti del primo ordine, l'integrale generale è (v. Teor. El-8.2.3)

$$\left\{ t \mapsto c\exp\left(-\frac{an^2\pi^2}{L^2}\,t\right) \,\middle|\, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Quindi la funzione

$$u(x,t) = c \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\exp\left(-\frac{an^2\pi^2}{L^2}t\right)$$

verifica l'equazione $u_t = a u_{xx}$ e le condizioni $u(0,t) = u(L,t) = 0$. Ciò è vero anche per ogni combinazione lineare di funzioni di questo tipo e, sotto opportune condizioni di convergenza, anche per il limite di tali combinazioni lineari. Abbiamo pertanto il seguente teorema.

4.2.1 Teorema
Sia $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ una successione in $\mathbb{R}$ tale che la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\exp\left(-\frac{an^2\pi^2}{L^2}t\right)$$

converge uniformemente per $(x,t)\in[0,L]\times\mathbb{R}_+$ insieme alle derivate parziali di ordine 1 rispetto a t e di ordine 1 e 2 rispetto a x. Allora la funzione $u\colon[0,L]\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, somma di tale serie, verifica

$$\begin{cases} u_t(x,t) = a u_{xx}(x,t), & (x,t)\in[0,L]\times\mathbb{R}_+, \\ u(0,t) = 0, & t\in\mathbb{R}_+, \\ u(L,t) = 0, & t\in\mathbb{R}_+. \end{cases}$$

Non abbiamo finora considerato la condizione $u(x,0) = \varphi(x)$. Imponiamo che la funzione u, definita nel teorema precedente, verifichi questa condizione. Deve essere

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \varphi(x). \tag{4.2.1}$$

Per determinare i coefficienti c_n facciamo uso di ciò che sappiamo sulle serie di Fourier. Le funzioni $x\mapsto \sin\big((n\pi/L)x\big)$ sono utilizzate nelle serie di Fourier di funzioni $2L$-periodiche. Se nella serie di Fourier di una funzione non compaiono le funzioni coseno allora la funzione è dispari. Quindi la serie che compare nell'equazione (4.2.1) può essere considerata come serie di Fourier di una funzione $2L$-periodica dispari. Noi conosciamo la somma della serie solo nell'intervallo $[0,L]$, non in un intervallo di lunghezza pari al periodo $2L$. Risulta quindi naturale considerare il prolungamento dispari all'intervallo $[-L,L]$ della funzione φ e la serie di Fourier di tale funzione, che è una serie di soli seni (v. Oss. El-15.4.8).

Abbiamo supposto $\varphi\in C^2\big([0,L],\mathbb{R}\big)$ con $\varphi(0)=\varphi(L)=0$. Osserviamo che, poiché $\varphi(0)=0$, la funzione φ può essere prolungata a una funzione dispari definita in $[-L,L]$, che indichiamo con $\widetilde{\varphi}$. Si ha

$$\widetilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{se } x\in[0,L], \\ -\varphi(-x), & \text{se } x\in[-L,0[. \end{cases}$$

Allora

$$\widetilde{\varphi}(-L) = -\varphi(L) = 0 = \varphi(L) = \widetilde{\varphi}(L),$$

quindi $\widetilde{\varphi}$ ha una ripetizione $2L$-periodica (v. Sezione El-15.4), che indichiamo ancora con $\widetilde{\varphi}$. Evidentemente $\widetilde{\varphi}$ è derivabile in $[-L,L]\setminus\{0\}$, con

$$\widetilde{\varphi}'(x)=\begin{cases}\varphi'(x), & \text{se } x\in\,]0,L],\\ \varphi'(-x), & \text{se } x\in[-L,0[.\end{cases}$$

Osserviamo che, se $h\in\,]-L,0[$, si ha

$$\frac{\widetilde{\varphi}(h)-\widetilde{\varphi}(0)}{h}=\frac{-\varphi(-h)}{h}=\frac{\varphi(-h)-\varphi(0)}{-h}\xrightarrow[h\to0^-]{}\varphi'(0),$$

quindi $\widetilde{\varphi}$ è derivabile anche in 0, ovviamente con $\widetilde{\varphi}'(0)=\varphi'(0)$, pertanto $\widetilde{\varphi}$ è di classe C^1. In modo analogo si può verificare che anche la ripetizione periodica di $\widetilde{\varphi}$ è di classe C^1. Inoltre $\widetilde{\varphi}'$ è evidentemente C^1 a tratti.

Affinché l'equazione (4.2.1) sia verificata i c_n devono essere i coefficienti di Fourier di $\widetilde{\varphi}$, relativamente alle funzioni seno; pertanto

$$c_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\sin\Big(\frac{n\pi}{L}\xi\Big)\widetilde{\varphi}(\xi)\,d\xi=\frac{2}{L}\int_{0}^{L}\sin\Big(\frac{n\pi}{L}\xi\Big)\varphi(\xi)\,d\xi\,;$$

l'ultima uguaglianza segue dal fatto che la funzione integranda è pari, perché prodotto di due funzioni dispari (v. Oss. El-6.6.14).

Poiché $\widetilde{\varphi}$ è di classe C^1 e $\widetilde{\varphi}'$ è C^1 a tratti, per il Teor. El-15.5.14 risulta $c_n=o\big(n^{-2}\big)$, per $n\to+\infty$. Inoltre

$$\sup\left\{\left|\sin\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)\exp\Big(-\frac{an^2\pi^2}{L^2}t\Big)\right|\;\Big|\;(x,t)\in[0,L]\times\mathbb{R}_+\right\}=1.$$

Quindi la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}c_n\sin\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)\exp\Big(-\frac{an^2\pi^2}{L^2}t\Big)$$

converge totalmente. Si può dimostrare che convergono uniformemente anche le serie delle derivate parziali di ordine 1 rispetto a t e di ordine 1 e 2 rispetto a x.

Pertanto vale il seguente teorema.

4.2.2 Teorema

Sia $\varphi\in C^2\big([0,L],\mathbb{R}\big)$ tale che $\varphi(0)=\varphi(L)=0$. Allora la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{L}\int_0^L\sin\Big(\frac{n\pi}{L}\xi\Big)\varphi(\xi)\,d\xi\,\sin\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)\exp\Big(-\frac{an^2\pi^2}{L^2}t\Big)$$

converge uniformemente per $(x,t)\in[0,L]\times\mathbb{R}_+$ a una funzione u di classe C^1, derivabile parzialmente 2 volte rispetto a x, soluzione del problema

$$\begin{cases}u_t(x,t)=a\,u_{xx}(x,t), & (x,t)\in[0,L]\times\mathbb{R}_+,\\ u(0,t)=0, & t\in\mathbb{R}_+,\\ u(L,t)=0, & t\in\mathbb{R}_+,\\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in[0,L].\end{cases}$$

Studiamo ora la convergenza della serie supponendo che φ sia solo continua a tratti, senza alcuna condizione sui valori che assume in 0 e in L. Per $n \in \mathbb{N}^*$ poniamo

$$u_n : [0, L] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \qquad u_n(x,t) = c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\exp\left(-\frac{an^2\pi^2}{L^2}t\right),$$

con

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}\xi\right)\varphi(\xi)\,d\xi\,.$$

Si ha

$$\left|\frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}\xi\right)\varphi(\xi)\,d\xi\right| \le \frac{2}{L}\int_0^L |\varphi(\xi)|\,d\xi \le 2\sup|\varphi|\,;$$

quindi la successione dei coefficienti c_n è limitata. Poniamo $M = \sup\{|c_n| \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. Scelto $t_0 > 0$, si ha, $\forall (x,t) \in [0,L] \times [t_0, +\infty[$,

$$\left|c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\exp\left(-\frac{an^2\pi^2}{L^2}t\right)\right| \le M\exp\left(-\frac{an^2\pi^2}{L^2}t_0\right),$$

quindi

$$\sup\{|u_n(x,t)| \mid (x,t) \in [0,L] \times [t_0,+\infty[\} \le M\exp\left(-\frac{an^2\pi^2}{L^2}t_0\right).$$

Poiché, $\forall b \in \mathbb{R}_+^*$, si ha $e^{-y} = o\left(y^{-b}\right)$, per $y \to +\infty$, risulta $\exp(-an^2\pi^2 t_0/L^2) = o\left(n^{-2b}\right)$, per $n \to +\infty$. Allora, per n grande, si ha $M\exp(-an^2\pi^2 t_0/L^2) \le n^{-2b}$; ciò in particolare vale per $b = 1$. La serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2}$ è convergente (v. Es. El-7.5.6), quindi, per il Criterio del confronto El-7.5.4, anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} M\exp(-an^2\pi^2 t_0/L^2)$ è convergente. Perciò la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ è totalmente convergente in $[0,L] \times [t_0,+\infty[$ e quindi, per il Criterio di Weierstrass El-15.1.22, è uniformemente convergente. Pertanto, per il Teor. El-15.1.16, la somma della serie è continua.

Poiché ciò è vero in $[0,L] \times [t_0,+\infty[$, qualunque sia $t_0 > 0$, si ottiene facilmente che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge puntualmente in $[0,L] \times \mathbb{R}_+^*$ e che la funzione

$$u : [0,L] \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \qquad u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x,t),$$

è continua. Si può dimostrare che, se $\varphi \in C\left([0,L],\mathbb{R}\right) \cap PC^1\left([0,L],\mathbb{R}\right)$ e $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$, allora $\lim_{(\xi,\tau)\to(x,0)} u(\xi,\tau) = \varphi(x)$, qualunque sia $x \in [0,L]$.

Studiamo le derivate parziali delle funzioni u_n. Le u_n sono di classe C^∞ e, per $i, j \in \mathbb{N}$, si ha

$$\begin{aligned} D_x^{2i} D_t^j u_n(x,t) &= c_n(-1)^i \left(\frac{n\pi}{L}\right)^{2i} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left(-\frac{an^2\pi^2}{L^2}t\right)^j \exp\left(-\frac{an^2\pi^2}{L^2}t\right) = \\ &= c_n \frac{(-1)^{i+j} a^j \pi^{2i+2j}}{L^{2i+2j}} n^{2i+2j} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\exp\left(-\frac{an^2\pi^2}{L^2}t\right), \end{aligned}$$

$$D_x^{2i+1} D_t^j u_n(x,t) = c_n (-1)^i \left(\frac{n\pi}{L}\right)^{2i+1} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left(-\frac{an^2\pi^2}{L^2}t\right)^j \exp\left(-\frac{an^2\pi^2}{L^2}t\right) =$$
$$= c_n \frac{(-1)^{i+j} a^j \pi^{2i+2j+1}}{L^{2i+2j+1}} n^{2i+2j+1} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\exp\left(-\frac{an^2\pi^2}{L^2}t\right).$$

Pertanto, ragionando come sopra, se $t_0 > 0$ e $k, j \in \mathbb{N}$, si ha

$$\sup\left\{ \left| D_x^k D_t^j u_n(x,t) \right| \,\Big|\, (x,t) \in [0,L] \times [t_0, +\infty[\right\} \leq M C_{kj} n^{k+2j} \exp\left(-\frac{an^2\pi^2}{L^2}t_0\right),$$

con $C_{kj} \in \mathbb{R}_+^*$ opportuno. Il secondo membro è $o\left(n^{k+2j-2b}\right)$, qualunque sia $b \in \mathbb{R}_+^*$; da qui, scegliendo b sufficientemente grande, segue la uniforme convergenza in $[0,L] \times [t_0, +\infty[$ della serie delle derivate parziali delle u_n. Pertanto, per il Teorema di derivazione termine a termine El-15.1.18, che vale anche per le derivate parziali, la funzione u è di classe C^∞ in $[0,L] \times [t_0, +\infty[$ e quindi, per l'arbitrarietà di t_0, anche in $[0,L] \times \mathbb{R}_+^*$.

Ovviamente, poiché ciascuno degli addendi verifica l'equazione $u_t = a u_{xx}$, anche u la verifica.

Vale quindi il seguente teorema.

4.2.3 Teorema

Sia $\varphi \in C([0,L],\mathbb{R}) \cap PC^1([0,L],\mathbb{R})$ tale che $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$. Allora la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}\xi\right)\varphi(\xi)\,d\xi \,\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\exp\left(-\frac{an^2\pi^2}{L^2}t\right)$$

converge uniformemente per $(x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}_+$ a una funzione u continua, la cui restrizione all'insieme $[0,L] \times \mathbb{R}_+^*$ è di classe C^∞, soluzione del problema

$$\begin{cases} u_t(x,t) = a u_{xx}(x,t), & (x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}_+^*, \\ u(0,t) = 0, & t \in \mathbb{R}_+, \\ u(L,t) = 0, & t \in \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0,L]. \end{cases}$$

4.2.2 Problema di Cauchy-Neumann

Consideriamo il problema di Cauchy-Neumann per l'equazione del calore

$$\begin{cases} u_t(x,t) = a u_{xx}(x,t), & (x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}_+, \\ u_x(0,t) = 0, & t \in \mathbb{R}_+, \\ u_x(L,t) = 0, & t \in \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0,L], \end{cases}$$

dove $a, L \in \mathbb{R}_+^*$ ed è assegnata $\varphi \colon [0,L] \to \mathbb{R}$. Poiché cerchiamo una soluzione u di classe C^2 rispetto a x, deve essere $\varphi \in C^2([0,L],\mathbb{R})$. Inoltre, affinché siano soddisfatte le condizioni $u_x(0,0) = u_x(L,0) = 0$, deve essere $\varphi'(0) = \varphi'(L) = 0$.

Procedendo come nel caso del problema di Cauchy-Dirichlet, cerchiamo una soluzione nella forma $(x,t)\mapsto X(x)T(t)$. In questo caso X deve essere soluzione non identicamente nulla del problema di Neumann

$$\begin{cases} X''(x)=KX(x), & x\in[0,L],\\ X'(0)=0, \\ X'(L)=0. \end{cases}$$

Per il Teor. 1.2.1 tale soluzione esiste se, e solo se, $K=-n^2\pi^2/L^2$, con $n\in\mathbb{N}$, e in tal caso si ha

$$X(x)=c\cos\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big), \qquad c\in\mathbb{R}^*.$$

In modo analogo a quanto visto relativamente al problema di Cauchy-Dirichlet nella Sottosezione 4.2.1, per tali valori di K si ha

$$T(t)=c\exp\Big(-\frac{an^2\pi^2}{L^2}t\Big), \qquad c\in\mathbb{R}^*.$$

Quindi la funzione

$$u(x,t)=c\cos\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)\exp\Big(-\frac{an^2\pi^2}{L^2}t\Big)$$

verifica l'equazione $u_t=au_{xx}$ e le condizioni $u_x(0,t)=u_x(L,t)=0$. Come per il problema di Cauchy-Dirichlet otteniamo il seguente teorema.

4.2.4 Teorema
Sia $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$ tale che la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty}c_n\cos\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)\exp\Big(-\frac{an^2\pi^2}{L^2}t\Big)$$

converge uniformemente per $(x,t)\in[0,L]\times\mathbb{R}_+$ insieme alle derivate parziali di ordine 1 rispetto a t e di ordine 1 e 2 rispetto a x. Allora la funzione $u\colon[0,L]\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, somma di tale serie, verifica

$$\begin{cases} u_t(x,t)=au_{xx}(x,t), & (x,t)\in[0,L]\times\mathbb{R}_+,\\ u_x(0,t)=0, & t\in\mathbb{R}_+,\\ u_x(L,t)=0, & t\in\mathbb{R}_+. \end{cases}$$

Affinché la funzione u, definita sopra, verifichi la condizione $u(x,0)=\varphi(x)$ deve essere

$$u(x,0)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cos\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)=\varphi(x). \tag{4.2.2}$$

La situazione è simile a quella del problema di Cauchy-Dirichlet, ma abbiamo una serie di coseni anziché una serie di seni. In questo caso risulta quindi naturale utilizzare il prolungamento pari di φ, cioè la funzione $\varphi\colon [-L,L]\to\mathbb{R}$ tale che

$$\widetilde{\varphi}(x)=\begin{cases}\varphi(x), & \text{se } x\in[0,L],\\ \varphi(-x), & \text{se } x\in[-L,0[.\end{cases}$$

Poiché

$$\widetilde{\varphi}(-L)=\varphi(L)=\widetilde{\varphi}(L),$$

$\widetilde{\varphi}$ ha una ripetizione $2L$-periodica. Evidentemente $\widetilde{\varphi}$ è derivabile in $[-L,L]\setminus\{0\}$, con

$$\widetilde{\varphi}'(x)=\begin{cases}\varphi'(x), & \text{se } x\in\,]0,L],\\ -\varphi'(-x), & \text{se } x\in[-L,0[.\end{cases}$$

Osserviamo che, se $h\in\,]-L,0[$, si ha

$$\frac{\widetilde{\varphi}(h)-\widetilde{\varphi}(0)}{h}=\frac{\varphi(-h)-\varphi(0)}{h}=-\frac{\varphi(-h)-\varphi(0)}{-h}\xrightarrow[h\to 0^-]{}-\varphi'(0)=0=\varphi'(0),$$

quindi $\widetilde{\varphi}$ è derivabile anche in 0, ovviamente con $\widetilde{\varphi}'(0)=\varphi(0)$, pertanto $\widetilde{\varphi}$ è di classe C^1. In modo analogo si può verificare che anche la ripetizione periodica di $\widetilde{\varphi}$ è di classe C^1. Con argomenti analoghi si dimostra che $\widetilde{\varphi}$ è anche di classe C^2.

Affinché l'equazione (4.2.2) sia verificata, i c_n, per $n\in\mathbb{N}^*$, devono essere i coefficienti di Fourier di $\widetilde{\varphi}$, relativamente alle funzioni coseno, mentre c_0 deve essere la metà del coefficiente a_0; pertanto

$$\begin{aligned} c_0&=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\widetilde{\varphi}(\xi)\,d\xi=\frac{1}{L}\int_0^L\varphi(\xi)\,d\xi,\\ c_n&=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\cos\Big(\frac{n\pi}{L}\xi\Big)\widetilde{\varphi}(\xi)\,d\xi=\frac{2}{L}\int_0^L\cos\Big(\frac{n\pi}{L}\xi\Big)\varphi(\xi)\,d\xi, \qquad n\in\mathbb{N}^*.\end{aligned}$$

Poiché $\widetilde{\varphi}'$ è C^1, per il Teor. El-15.5.14 si ha $c_n=o(n^{-2})$, per $n\to+\infty$. Inoltre

$$\sup\left\{\left|\cos\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)\exp\Big(-\frac{an^2\pi^2}{L^2}t\Big)\right|\;\middle|\;(x,t)\in[0,L]\times\mathbb{R}_+\right\}=1.$$

Pertanto la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}c_n\cos\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)\exp\Big(-\frac{an^2\pi^2}{L^2}t\Big)$$

converge totalmente. Si può dimostrare che convergono uniformemente anche le serie delle derivate parziali di ordine 1 rispetto a t e di ordine 1 e 2 rispetto a x.

Pertanto vale il seguente teorema.

4.2.5 Teorema

Sia $\varphi\in C^2([0,L],\mathbb{R})$ *tale che* $\varphi'(0)=\varphi'(L)=0$. *Allora la serie di funzioni*

$$\frac{1}{L}\int_0^L\varphi(\xi)\,d\xi+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{L}\int_0^L\cos\Big(\frac{n\pi}{L}\xi\Big)\varphi(\xi)\,d\xi\,\cos\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)\exp\Big(-\frac{an^2\pi^2}{L^2}t\Big)$$

converge uniformemente per $(x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}_+$ *a una funzione* u *di classe* C^1, *derivabile parzialmente* 2 *volte rispetto a* x, *soluzione del problema*

$$\begin{cases} u_t(x,t) = a u_{xx}(x,t), & (x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}_+, \\ u_x(0,t) = 0, & t \in \mathbb{R}_+, \\ u_x(L,t) = 0, & t \in \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0,L]. \end{cases}$$

Come per il problema di Cauchy-Dirichlet vale il seguente teorema.

4.2.6 Teorema
Sia $\varphi \in C([0,L],\mathbb{R}) \cap PC^1([0,L],\mathbb{R})$. *Allora la serie di funzioni*

$$\frac{1}{L}\int_0^L \varphi(\xi)\,d\xi + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{L}\int_0^L \cos\left(\frac{n\pi}{L}\xi\right)\varphi(\xi)\,d\xi \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\exp\left(-\frac{an^2\pi^2}{L^2}t\right)$$

converge uniformemente per $(x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}_+$ *a una funzione* u *continua, la cui restrizione all'insieme* $[0,L] \times \mathbb{R}_+^*$ *è di classe* C^∞, *soluzione del problema*

$$\begin{cases} u_t(x,t) = a u_{xx}(x,t), & (x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}_+^*, \\ u_x(0,t) = 0, & t \in \mathbb{R}_+, \\ u_x(L,t) = 0, & t \in \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0,L]. \end{cases}$$

4.3 Problema di Cauchy-Dirichlet non omogeneo

Consideriamo il problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore non omogenea

$$\begin{cases} u_t(x,t) = a u_{xx}(x,t) + f(x,t), & (x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}_+, \\ u(0,t) = 0, & t \in \mathbb{R}_+, \\ u(L,t) = 0, & t \in \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = 0, & x \in [0,L], \end{cases} \tag{4.3.1}$$

dove $a, L \in \mathbb{R}_+^*$ ed è assegnata $f : [0,L] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

Utilizziamo il metodo di Duhamel, come fatto nella Sezione 3.1 per l'equazione del trasporto.

Per ogni $s \geq 0$, consideriamo la soluzione dell'equazione del calore omogenea definita per $t \geq s$ e che verifica la condizione iniziale $f(x,s)$ per $t = s$. Cioè consideriamo $u^{(s)}$ tale che

$$\begin{cases} u_t^{(s)}(x,t) = a u_{xx}^{(s)}(x,t), & x \in [0,L], t \geq s, \\ u^{(s)}(0,t) = 0, & t \geq s, \\ u^{(s)}(L,t) = 0, & t \geq s, \\ u^{(s)}(x,s) = f(x,s), & x \in [0,L]. \end{cases} \tag{4.3.2}$$

Per il Teor. 4.2.2 tale soluzione esiste se $x \mapsto f(x,t)$ è di classe C^2 e $f(0,t)=f(L,t)=0$. Supponiamo inoltre f continua, affinché $u^{(s)}(x,t)$ dipenda con continuità da s. Posto

$$u(x,t)=\int_0^t u^{(s)}(x,t)\,ds\,, \tag{4.3.3}$$

u è soluzione del problema di Cauchy (3.1.2). Infatti, per il Teor. El-14.4.8 si ha

$$u_t(x,t)=u^{(t)}(x,t)+\int_0^t u_t^{(s)}(x,t)\,ds=f(x,t)+\int_0^t a u_{xx}^{(s)}(x,t)\,ds\,.$$

Per il Teor. El-14.4.2 risulta

$$\int_0^t a u_{xx}^{(s)}(x,t)\,ds=a u_{xx}(x,t),$$

pertanto u verifica l'equazione delle onde non omogenea. Inoltre dalla definizione è evidente che $u(x,t)$ è nulla per $x=0$, $x=L$ e $t=0$.

Abbiamo quindi il seguente teorema.

4.3.1 Teorema
Sia $f\in C\big([0,L]\times\mathbb{R}_+,\mathbb{R}\big)$ derivabile parzialmente 2 volte rispetto a x con u_{xx} continua e tale che, $\forall t\in\mathbb{R}_+$, si ha $f(0,t)=f(L,t)=0$. Allora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t(x,t)=a u_{xx}(x,t)+f(x,t), & (x,t)\in[0,L]\times\mathbb{R}_+,\\ u(0,t)=0, & t\in\mathbb{R}_+,\\ u(L,t)=0, & t\in\mathbb{R}_+,\\ u(x,0)=0, & x\in[0,L]. \end{cases}$$

ha come soluzione la funzione

$$u:[0,L]\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R},\qquad \int_0^t u^{(s)}(x,t)\,ds\,,$$

dove $u^{(s)}$ è soluzione del problema (4.3.2).

4.4 Unicità della soluzione

4.4.1 Problema di Cauchy-Dirichlet

Consideriamo il problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore

$$\begin{cases} u_t(x,t)=a u_{xx}(x,t)+f(x,t), & (x,t)\in[0,L]\times\mathbb{R}_+^*,\\ u(0,t)=g_0(t), & t\in\mathbb{R}_+,\\ u(L,t)=g_L(t), & t\in\mathbb{R}_+,\\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in[0,L], \end{cases} \tag{4.4.1}$$

dove $a,L\in\mathbb{R}_+^*$ e sono assegnate le funzioni $f\in C\big([0,L]\times\mathbb{R}_+,\mathbb{R}\big)$, $g_0,g_L\in C^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, $\varphi\in C^2\big([0,L],\mathbb{R}\big)$, tale che $\varphi(0)=g_0(0)$, $\varphi(L)=g_L(0)$.

Supponiamo che $v, w\colon [0,L]\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ siano soluzioni di questo problema. Allora si verifica immediatamente che la funzione $v-w$ è soluzione del corrispondente problema omogeneo, cioè

$$\begin{cases} u_t(x,t)=a u_{xx}(x,t), & (x,t)\in[0,L]\times\mathbb{R}_+, \\ u(0,t)=0, & t\in\mathbb{R}_+, \\ u(L,t)=0, & t\in\mathbb{R}_+, \\ u(x,0)=0, & x\in[0,L]. \end{cases} \tag{4.4.2}$$

È evidente che v e w sono diverse tra loro se, e solo se, $v-w$ non è identicamente nulla. Pertanto se esistono due soluzioni diverse del problema (4.4.1), allora esiste una soluzione non identicamente nulla del problema omogeneo (4.4.2). Viceversa se v è soluzione del problema (4.4.1) e z è soluzione non identicamente nulla del problema (4.4.2), allora $v+z$ è soluzione di (4.4.1) diversa da v. Pertanto la soluzione di (4.4.1) è unica se, e solo se, il problema omogeneo (4.4.2) ha solo la soluzione identicamente nulla.

Sia quindi $u\colon [0,L]\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ soluzione di (4.4.2). Posto

$$F\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \qquad F(t)=\int_0^L \big(u(x,t)\big)^2\,dx,$$

per il Teor. El-14.4.2 (v. anche Oss. El-14.4.3) F è derivabile e, $\forall t\in\mathbb{R}_+$, si ha

$$F'(t)=\int_0^L \frac{d}{dt}\big(u(x,t)\big)^2\,dx=\int_0^L 2u(x,t)u_t(x,t)\,dx=2a\int_0^L u(x,t)u_{xx}(x,t)\,dx=$$
$$=2a\big[u(x,t)u_x(x,t)\big]_{x=0}^{x=L}-2a\int_0^L \big(u_x(x,t)\big)^2\,dx.$$

Poiché u è nulla per $x=0$ e $x=L$, il primo addendo è nullo. Quindi,

$$F'(t)=-2a\int_0^L \big(u_x(x,t)\big)^2\,dx\le 0,$$

perciò F è decrescente. Poiché

$$F(0)=\int_0^L \big(u(x,0)\big)^2\,dx=0,$$

e F è sempre non negativa, si ha $F(x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}_+$.

Se una funzione h continua e non negativa ha integrale nullo allora è identicamente nulla. Infatti se esistesse un punto c tale che $h(c)>0$, allora esisterebbe un intorno di c in cui $h(x)>h(c)/2$ e l'integrale su tale intorno sarebbe positivo. L'integrale su tutto il dominio è maggiore o uguale dell'integrale sull'intorno e quindi sarebbe positivo. Questo è assurdo.

Questa osservazione si applica alla funzione $x\mapsto \big(u(x,t)\big)^2$, quindi $\forall (x,t)\in[0,L]\times\mathbb{R}_+$, si ha $\big(u(x,t)\big)^2=0$, cioè $u(x,t)=0$.

Abbiamo così dimostrato il seguente teorema.

4.4.1 Teorema
Il problema

$$\begin{cases} u_t(x,t) = a u_{xx}(x,t), & (x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}_+, \\ u(0,t) = 0, & t \in \mathbb{R}_+, \\ u(L,t) = 0, & t \in \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = 0, & x \in [0,L], \end{cases}$$

ha solo la soluzione identicamente nulla.

Da questo, per quanto illustrato all'inizio della sezione, si ottiene il seguente teorema.

4.4.2 Teorema
Siano $f \in C\big([0,L] \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}\big)$, $g_0, g_L \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $\varphi \in C^2\big([0,L], \mathbb{R}\big)$, *tali che* $\varphi(0) = g_0(0)$, $\varphi(L) = g_L(0)$. *Se* $v, w \colon [0,L] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *sono soluzioni del problema*

$$\begin{cases} u_t(x,t) = a u_{xx}(x,t) + f(x,t), & (x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}_+, \\ u(0,t) = g_0(t), & t \in \mathbb{R}_+, \\ u(L,t) = g_L(t), & t \in \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0,L], \end{cases}$$

allora $v = w$.

4.4.2 Problema di Cauchy-Neumann

Analogamente a quanto osservato relativamente al problema di Cauchy-Dirichlet, anche nel caso del problema di Cauchy-Neumann per dimostrare l'unicità della soluzione è sufficiente dimostrare che il problema omogeneo

$$\begin{cases} u_t(x,t) = a u_{xx}(x,t), & (x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}_+, \\ u_x(0,t) = 0, & t \in \mathbb{R}_+, \\ u_x(L,t) = 0, & t \in \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = 0, & x \in [0,L], \end{cases}$$

ha solo la soluzione nulla. La dimostrazione di questo fatto è del tutto analoga a quella fatta per il problema di Cauchy-Dirichlet, l'unica modifica riguarda il motivo per cui il termine $\big[u(x,t)u_x(x,t)\big]_{x=0}^{x=L}$ si annulla: in questo caso è nullo il fattore u_x anziché il fattore u.

Quindi vale il seguente teorema.

4.4.3 Teorema
Siano $f \in C\big([0,L] \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}\big)$, $g_0, g_L \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $\varphi \in C^2\big([0,L], \mathbb{R}\big)$, *tali che* $\varphi(0) = g_0(0)$, $\varphi(L) = g_L(0)$. *Se* $v, w \colon [0,L] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *sono soluzioni del problema*

$$\begin{cases} u_t(x,t) = a u_{xx}(x,t) + f(x,t), & (x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}_+, \\ u_x(0,t) = g_0(t), & t \in \mathbb{R}_+, \\ u_x(L,t) = g_L(t), & t \in \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0,L], \end{cases}$$

allora $v = w$.

Capitolo 5

Equazione delle onde

5.1 Formula di d'Alembert

Sia $u \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ soluzione dell'equazione delle onde (v. equazione (2.3.1)), cioè tale che risulti

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2,$$

dove $c \in \mathbb{R}_+^*$.

Effettuiamo il cambiamento lineare di coordinate

$$\begin{cases} \xi = x + ct, \\ \eta = x - ct; \end{cases}$$

da qui si ricava

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(\xi + \eta), \\ t = \dfrac{1}{2c}(\xi - \eta). \end{cases}$$

Chiamiamo v la funzione incognita rispetto variabili ξ ed η, cioè poniamo

$$v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad v(\xi, \eta) = u\left(\frac{1}{2}(\xi + \eta), \frac{1}{2c}(\xi - \eta)\right).$$

Evidentemente risulta

$$u(x,t) = v(x + ct, x - ct).$$

Scriviamo l'equazione delle onde per la funzione v. Si ha, omettendo l'argomento delle funzioni u e v,

$$\begin{aligned} u_x &= v_\xi + v_\eta, \\ u_{xx} &= v_{\xi\xi} + v_{\xi\eta} + v_{\eta\xi} + v_{\eta\eta}, \\ u_t &= c v_\xi - c v_\eta, \\ u_{tt} &= c^2 v_{\xi\xi} - c^2 v_{\xi\eta} - c^2 v_{\eta\xi} + c^2 v_{\eta\eta}. \end{aligned}$$

Pertanto $u_{tt} - c^2 u_{xx} = -4c^2 v_{\xi\eta}$, quindi u è soluzione dell'equazione delle onde se, e solo se, $v_{\xi\eta} = 0$.

Pertanto se u è soluzione dell'equazione delle onde, la corrispondente funzione v è tale che la funzione $\eta \mapsto v_\xi(\xi,\eta)$ ha derivata nulla, perciò è costante. Quindi esiste $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tale che, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\forall \eta \in \mathbb{R}$, si ha $v_\xi(\xi,\eta) = f(\xi)$. Poiché v_ξ è di classe C^1, anche f è di classe C^1, quindi ha una primitiva F di classe C^2. La funzione $\xi \mapsto v(\xi,\eta) - F(\xi)$ ha derivata $v_\xi(\xi,\eta) - f(\xi) = 0$, quindi è costante, pertanto esiste $G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\forall \eta \in \mathbb{R}$, si ha $v(\xi,\eta) - F(\xi) = G(\eta)$. Poiché G è differenza di due funzioni di classe C^2 è anch'essa di classe C^2.

Quindi se $v \in C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ è tale che, $\forall (\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$, si ha $v_{\xi\eta}(\xi,\eta) = 0$ allora esistono $F, G \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tali che

$$v(\xi,\eta) = F(\xi) + G(\eta).$$

Evidentemente vale anche il viceversa: se v è nella forma scritta sopra allora $\forall (\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$, si ha $v_{\xi\eta}(\xi,\eta) = 0$.

Questi ragionamenti possono essere adattati anche al caso in cui v è definita non in tutto $\mathbb{R}^2$, ma in un aperto convesso contenuto in $\mathbb{R}^2$. È necessaria l'ipotesi di convessità perché per concludere che le funzioni $\eta \mapsto v_\xi(\xi,\eta)$ e $\xi \mapsto v(\xi,\eta) - F(\xi)$ sono costanti devono essere definite in un intervallo.

Ritornando alle variabili x e t, otteniamo il seguente teorema.

5.1.1 Teorema
Siano A un aperto convesso di $\mathbb{R}^2$ e $u \in C^2(A,\mathbb{R})$. Allora u verifica l'equazione

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), \qquad (x,t) \in A,$$

se, e solo se, esistono

$$F: \{\, x + ct \mid (x,t) \in A \,\} \to \mathbb{R},$$
$$G: \{\, x - ct \mid (x,t) \in A \,\} \to \mathbb{R},$$

di classe C^2, tali che, $\forall (x,t) \in A$, si ha

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct).$$

Studiamo un problema di Cauchy per l'equazione delle onde, considerando una corda di lunghezza infinita

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{5.1.1}$$

dove $c \in \mathbb{R}_+^*$ e sono assegnate $\varphi, \psi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Poiché cerchiamo una soluzione u di classe C^2, deve essere $\varphi \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ e $\psi \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Se u verifica l'equazione delle onde nell'aperto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, allora, per il Teor. 5.1.1, esistono $F, G \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tali che, $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, si ha

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct).$$

Per continuità tale uguaglianza è verificata anche se $t=0$. Imponendo le condizioni iniziali, otteniamo che, $\forall x\in\mathbb{R}$, si ha

$$\begin{cases} F(x)+G(x)=\varphi(x), \\ c\big(F'(x)-G'(x)\big)=\psi(x); \end{cases}$$

da cui, derivando la prima equazione, segue

$$\begin{cases} F'(x)+G'(x) &= \varphi'(x), \\ F'(x)-G'(x) &= \dfrac{1}{c}\,\psi(x). \end{cases}$$

Per ogni fissato $x\in\mathbb{R}$, abbiamo un sistema algebrico lineare non omogeneo nelle incognite $F'(x)$ e $G'(x)$; si ricava

$$F'(x)=\frac{1}{2}\Big(\varphi'(x)+\frac{1}{c}\,\psi(x)\Big),$$
$$G'(x)=\frac{1}{2}\Big(\varphi'(x)-\frac{1}{c}\,\psi(x)\Big).$$

Da qui, integrando da 0 a x, si ottiene

$$F(x)=F(0)+\frac{1}{2}\big(\varphi(x)-\varphi(0)\big)+\frac{1}{2c}\int_0^x \psi(y)\,dy,$$
$$G(x)=G(0)+\frac{1}{2}\big(\varphi(x)-\varphi(0)\big)-\frac{1}{2c}\int_0^x \psi(y)\,dy.$$

Sommando membro a membro queste equazioni, risulta

$$F(x)+G(x)=F(0)+G(0)+\varphi(x)-\varphi(0),$$

quindi $F(0)+G(0)-\varphi(0)=0$.

Allora la soluzione del problema di Cauchy (5.1.1) è

$$\begin{aligned} u(x,t)&=F(x+ct)+G(x-ct)= \\ &=F(0)+\frac{1}{2}\,\varphi(x+ct)-\frac{1}{2}\,\varphi(0)+\frac{1}{2c}\int_0^{x+ct}\psi(y)\,dy+ \\ &\qquad +G(0)+\frac{1}{2}\,\varphi(x-ct)-\frac{1}{2}\,\varphi(0)-\frac{1}{2c}\int_0^{x-ct}\psi(y)\,dy= \\ &=\big(F(0)+G(0)-\varphi(0)\big)+\frac{1}{2}\big(\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)\big)+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(y)\,dy \\ &=\frac{1}{2}\big(\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)\big)+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(y)\,dy. \end{aligned}$$

Si ha quindi il teorema seguente.

5.1.2 Teorema (formula di d'Alembert)
Siano $\varphi\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ e $\psi\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Allora la funzione

$$u:\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R},\qquad u(x,t)=\frac{1}{2}\big(\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)\big)+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(y)\,dy, \tag{5.1.2}$$

è l'unica soluzione del problema di Cauchy (5.1.1).

5.2 Trasformata di Fourier

Utilizziamo la trasformata di Fourier per risolvere un problema di Cauchy per l'equazione delle onde. Come per l'equazione del calore, questo consente di trasformare l'equazione alle derivate parziali in un'equazione differenziale ordinaria di cui è semplice trovare una soluzione.

Consideriamo una corda di lunghezza infinita, quindi studiamo il problema

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t)=c^2u_{xx}(x,t), & (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+,\\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in\mathbb{R},\\ u_t(x,0)=\psi(x), & x\in\mathbb{R},\end{cases}$$

dove $c\in\mathbb{R}_+^*$ e sono assegnate $\varphi,\psi\in PC(\mathbb{R},\mathbb{C})$ assolutamente i. s. g. Poiché cerchiamo una soluzione u di classe C^2, deve essere $\varphi\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ e $\psi\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Supponiamo che, per ogni fissato $t\in\mathbb{R}_+$, la funzione $x\mapsto u(x,t)$ sia di classe C^2, assolutamente i. s. g. e che anche le derivate prima e seconda siano assolutamente i. s. g. Indichiamo con U la trasformata di Fourier di tale funzione, cioè

$$U(\omega,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega x}\,u(x,t)\,dx\,.$$

Per il Teorema sulla trasformata di Fourier della derivata El-14.6.12, la trasformata di Fourier, rispetto a x, di u_{xx} è $-\omega^2U(\omega,t)$. Se le funzioni u_t e u_{tt} sono tali che si può derivare sotto il segno di integrale (v. Teor. El-14.4.19), allora si ha

$$U_t(\omega,t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega x}\,u(x,t)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega x}\,u_t(x,t)\,dt\,,$$

$$U_{tt}(\omega,t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega x}\,u_t(x,t)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega x}\,u_{tt}(x,t)\,dt\,.$$

Quindi, uguagliando le trasformate dei due membri dell'equazione differenziale, otteniamo la seguente equazione, in cui compaiono derivate rispetto alla sola variabile t,

$$U_{tt}(\omega,t)=-c^2\omega^2U(\omega,t),\qquad(\omega,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+;$$

mentre le condizioni iniziali diventano $U(\omega,0)=\widehat{\varphi}(\omega)$ e $U_t(\omega,0)=\widehat{\psi}(\omega)$. Pertanto la funzione $t\mapsto U(\omega,t)$, di dominio $\mathbb{R}_+$, è soluzione del seguente problema di Cauchy per un'equazione differenziale ordinaria lineare omogenea a coefficienti costanti

$$\begin{cases} y''(t)+c^2\omega^2y(t)=0,\\ y(0)=\widehat{\varphi}(\omega),\\ y'(0)=\widehat{\psi}(\omega).\end{cases}\tag{5.2.1}$$

Il polinomio caratteristico dell'equazione differenziale è $s^2+c^2\omega^2$, che, se $\omega\in\mathbb{R}^*$, ha le radici $s=\pm ic\omega$; pertanto l'integrale generale è

$$\{\,t\mapsto c_1\cos(c\omega t)+c_2\sin(c\omega t)\mid c_1,c_2\in\mathbb{R}\}\,.$$

Affinché sia verificata la condizione $y(0)=\widehat{\varphi}(\omega)$ deve essere $c_1=\widehat{\varphi}(\omega)$, mentre perché sia verificata la condizione $y'(0)=\widehat{\psi}(\omega)$ deve essere $c_2c\omega=\widehat{\psi}(\omega)$, cioè $c_2=\widehat{\psi}(\omega)/(c\omega)$.

Quindi, se $\omega \neq 0$, il problema (5.2.1) ha la soluzione

$$t \mapsto \widehat{\varphi}(\omega)\cos(c\omega t) + \frac{1}{c\omega}\widehat{\psi}(\omega)\sin(c\omega t).$$

Se invece $\omega = 0$, allora il polinomio caratteristico è s^2, che ha la radice doppia 0, pertanto l'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$\{\, t \mapsto c_1 + c_2 t \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}\,.$$

Affinché sia verificata la condizione $y(0) = \widehat{\varphi}(0)$ deve essere $c_1 = \widehat{\varphi}(0)$, mentre perché sia verificata la condizione $y'(0) = \widehat{\psi}(0)$ deve essere $c_2 = \widehat{\psi}(0)$. Quindi il problema (5.2.1), nel caso $\omega = 0$, ha la soluzione

$$t \mapsto \widehat{\varphi}(0) + \widehat{\psi}(0)t\,.$$

pertanto deve essere

$$U(\omega, t) = \begin{cases} \widehat{\varphi}(\omega)\cos(c\omega t) + \dfrac{1}{c\omega}\widehat{\psi}(\omega)\sin(c\omega t), & \text{se } (\omega, t) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}_+, \\ \widehat{\varphi}(0) + \widehat{\psi}(0)t\,, & \text{se } (\omega, t) \in \{0\} \times \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

Peer trovare la soluzione u è necessario determinare una funzione la cui trasformata di Fourier è $\omega \mapsto U(\omega, t)$. Si ha

$$U(\omega, t) = \widehat{\varphi}(\omega)\cos(c\omega t) + g(\omega),$$

dove

$$g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \qquad g(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{c\omega}\widehat{\psi}(\omega)\sin(c\omega t), & \text{se } (\omega, t) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}_+, \\ \widehat{\psi}(0)t\,, & \text{se } (\omega, t) \in \{0\} \times \mathbb{R}_+, \end{cases}$$

Per il Teor. El-14.6.9 la funzione

$$\omega \mapsto \widehat{\varphi}(\omega)\cos(c\omega t) = \frac{1}{2}\left(e^{ic\omega t} + e^{-ic\omega t}\right)\widehat{\varphi}(\omega).$$

è la trasformata di Fourier della funzione

$$x \mapsto \frac{1}{2}\big(\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)\big).$$

La funzione

$$\omega \mapsto i\omega g(\omega) = \frac{i}{c}\widehat{\psi}(\omega)\sin(c\omega t) = \frac{1}{2c}\left(e^{ic\omega t} - e^{-ic\omega t}\right)\widehat{\psi}(\omega)$$

è la trasformata di Fourier della funzione

$$v \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad v(x) = \frac{1}{2c}\big(\psi(x + ct) - \psi(x - ct)\big).$$

Pertanto, per il Teorema sulla trasformata di Fourier della derivata El-14.6.12, se la funzione w è una primitiva di v ed è assolutamente i. s. g., allora

$$i\omega g(\omega) = \widehat{v}(\omega) = \widehat{w'}(\omega) = i\omega\widehat{w}(\omega),$$

pertanto $\widehat{w} = g$. Posto

$$w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad w(x) = \frac{1}{2c}\left(\int_0^{x+ct} \psi(y)\,dy - \int_0^{x-ct} \psi(y)\,dy\right) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y)\,dy\,,$$

per il Secondo teorema fondamentale del calcolo integrale El-6.5.11 w è una primitiva di v . Si può dimostrare che w è assolutamente i. s. g., quindi $\widehat{w} = g$.

Si può verificare che, se le funzioni φ' , φ'' e ψ' sono assolutamente i. s. g., allora u verifica le proprietà necessarie a giustificare i passaggi fatti sopra.

Vale quindi il seguente teorema.

5.2.1 Teorema
Siano $\varphi \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ assolutamente i. s. g. con φ' e φ'' assolutamente i. s. g. e $\psi \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ assolutamente i. s. g. con ψ' assolutamente i. s. g. Allora la funzione

$$u\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \qquad u(x,t) = \frac{1}{2}\big(\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y)\,dy\,,$$

è di classe C^2 , ed è soluzione del problema

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+\,, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Abbiamo ottenuto in un modo diverso la formula di d'Alembert (5.1.2).

5.3 Separazione delle variabili

5.3.1 Problema di Cauchy-Dirichlet

Consideriamo il problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione delle onde

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), & (x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}_+\,, \\ u(0,t) = 0, & t \in \mathbb{R}_+\,, \\ u(L,t) = 0, & t \in \mathbb{R}_+\,, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0,L]\,, \\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \in [0,L]\,, \end{cases}$$

dove $c, L \in \mathbb{R}_+^*$ e sono assegnate $\varphi, \psi\colon [0,L] \to \mathbb{R}$. Poiché cerchiamo una soluzione u di classe C^2 , deve essere $\varphi \in C^2\big([0,L],\mathbb{R}\big)$ e $\psi \in C^1\big([0,L],\mathbb{R}\big)$. Poiché $u(0,0) = u(L,0) = 0$, deve essere $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$. Inoltre dalle condizioni su $u(0,t)$ e $u(L,t)$ segue che si ha $u_t(0,0) = u_t(L,0) = 0$ quindi deve essere anche $\psi(0) = \psi(L) = 0$.

Utilizziamo il metodo di separazione delle variabili già utilizzato per risolvere l'equazione del calore (v. Sottosezione 4.2.1). Per questo cerchiamo una soluzione non identicamente nulla di questo problema che sia prodotto di una funzione della sola variabile x per una funzione della sola variabile t. Quindi, per $(x,t)\in[0,L]\times\mathbb{R}_+$, poniamo $u(x,t)=X(x)T(t)$. Poiché cerchiamo u di classe C^2, le funzioni X e T devono essere di classe C^2. Inoltre, poiché cerchiamo soluzioni non identicamente nulle, X e T devono essere non identicamente nulle. L'equazione delle onde diventa

$$X(x)T''(t)=c^2X''(x)T(t).$$

Se x è tale che $X(x)\neq 0$ e t è tale che $T(t)\neq 0$ allora si ha

$$\frac{X(x)T''(t)}{X(x)T(t)}=c^2\frac{X''(x)T(t)}{X(x)T(t)},$$

cioè

$$\frac{T''(t)}{T(t)}=c^2\frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Poiché i due membri dipendono da variabili diverse, come già visto nel caso dell'equazione del calore, essi sono costanti. Pertanto esiste $K\in\mathbb{R}$ tale che, $\forall t\in\mathbb{R}_+$, si ha $T''(t)=c^2KT(t)$ e, $\forall x\in[0,L]$, si ha $X''(x)=KX(x)$.

Inoltre le condizioni agli estremi $u(0,t)=u(L,t)=0$ diventano

$$X(0)T(t)=X(L)T(t)=0;$$

poiché $T(t)$ non è identicamente nulla, tali condizioni equivalgono a $X(0)=X(L)=0$.

Quindi cerchiamo X non identicamente nulla, soluzione del problema di autovalori con condizioni di Dirichlet

$$\begin{cases} X''(x)=KX(x), & x\in[0,L],\\ X(0)=0, \\ X(L)=0. \end{cases}$$

Per il Teor. 1.1.1 tale soluzione esiste se, e solo se, $K=-n^2\pi^2/L^2$, con $n\in\mathbb{N}^*$, e in tal caso si ha

$$X(x)=c_0\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),\qquad c_0\in\mathbb{R}^*.$$

Dobbiamo risolvere l'equazione $T''(t)=-c^2n^2\pi^2/L^2T(t)$. È un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti, l'equazione caratteristica (v. equazione (El-8.3.5)) è

$$s^2+\frac{c^2n^2\pi^2}{L^2}=0,$$

che ha le soluzioni complesse coniugate $\pm(cn\pi/L)i$. Pertanto si ha

$$T(t)=c_1\cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)+c_2\sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right),$$

con $(c_1,c_2)\in\left(\mathbb{R}^2\right)^*$.

Quindi la funzione

$$u(x,t) = \left(c_1 \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

verifica l'equazione $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ e le condizioni di Dirichlet $u(0,t) = u(L,t) = 0$. Ciò è vero anche per ogni combinazione lineare di funzioni di questo tipo e, sotto opportune condizioni di convergenza, anche per il limite di tali combinazioni lineari. Abbiamo pertanto il seguente teorema.

5.3.1 Teorema
Siano $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *successioni in* $\mathbb{R}$ *tali che la serie di funzioni*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(c_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + d_n \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

converge uniformemente per $(x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}_+$ *insieme alle derivate parziali di ordine* 1 *e* 2. *Allora la funzione* $u\colon [0,L] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *somma di tale serie verifica*

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), & (x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}_+^*, \\ u(0,t) = 0, & t \in \mathbb{R}_+, \\ u(L,t) = 0, & t \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

Non abbiamo finora considerato le condizioni iniziali $u(x,0) = \varphi(x)$ e $u_t(x,0) = \psi(x)$. Imponiamo che la funzione u, definita nel teorema precedente, verifichi queste condizioni. Poiché

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-c_n \frac{cn\pi}{L} \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + d_n \frac{cn\pi}{L} \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

deve essere

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \varphi(x), \tag{5.3.1}$$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \frac{cn\pi}{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \psi(x). \tag{5.3.2}$$

Come nel caso dell'equazione del calore (v. Sottosezione 4.2.1), indicata con $\widetilde{\varphi}$ la ripetizione periodica del prolungamento dispari di φ e con $\widetilde{\psi}$ la ripetizione periodica del prolungamento dispari di ψ, affinché l'equazione (5.3.1) sia verificata i c_n devono essere i coefficienti di Fourier dei seni di $\widetilde{\varphi}$, pertanto

$$c_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L}\xi\right) \widetilde{\varphi}(\xi)\, d\xi = \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}\xi\right) \varphi(\xi)\, d\xi\,;$$

analogamente, affinché sia verificata l'equazione (5.3.2) i coefficienti di Fourier dei seni di $\widetilde{\psi}$ devono essere uguali a $d_n cn\pi/L$, quindi

$$\frac{d_n cn\pi}{L} = \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}\xi\right) \psi(\xi)\, d\xi\,,$$

cioè

$$d_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}\xi\right) \psi(\xi)\, d\xi .$$

Poiché $\widetilde{\varphi}$ è di classe C^1 e $\widetilde{\varphi}'$ è C^1 a tratti (vedi sottosezione 4.2.1), per il Teor. El-15.5.14 risulta $c_n = o(n^{-2})$, per $n \to +\infty$. Analogamente, poiché $\widetilde{\psi}$ è continua e C^1 a tratti, risulta $d_n cn\pi/L = o(n^{-1})$, quindi $d_n = o(n^{-2})$. Pertanto la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(c_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L} t\right) + d_n \sin\left(\frac{cn\pi}{L} t\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

converge totalmente e quindi uniformemente. Si può dimostrare che convergono uniformemente anche le serie delle derivate parziali fino all'ordine 2, purché $\widetilde{\varphi}$ sia di classe C^2; ciò è verificato se $\varphi''(0) = \varphi''(L) = 0$.

Pertanto vale il seguente teorema.

5.3.2 Teorema
Siano $\varphi \in C^2([0,L],\mathbb{R})$, $\psi \in C^1([0,L],\mathbb{R})$ tali che $\varphi(0) = \varphi(L) = \psi(0) = \psi(L) = 0$ e $\varphi''(0) = \varphi''(L) = 0$. Allora la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}\xi\right)\varphi(\xi)\, d\xi \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + \frac{2}{cn\pi}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}\xi\right)\psi(\xi)\, d\xi \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\right) \times \\ \times \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

converge uniformemente per $(x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}_+$ a una funzione u di classe C^2, soluzione del problema

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), & (x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}_+, \\ u(0,t) = 0, & t \in \mathbb{R}_+, \\ u(L,t) = 0, & t \in \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0,L], \\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \in [0,L], \end{cases} \tag{5.3.3}$$

Osserviamo che, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, le funzioni $t \mapsto \cos((cn\pi/L)t)$ e $t \mapsto \sin((cn\pi/L)t)$ sono periodiche di periodo $2L/c$. Quindi la soluzione u è periodica di tale periodo rispetto a t. Questo è il periodo naturale di vibrazione della corda fissa negli estremi.

Se indichiamo con b_n i coefficienti di Fourier dei seni di $\widetilde{\varphi}$ e con $\overline{b}_n$ gli analoghi coefficienti di $\widetilde{\psi}$, la soluzione è

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(b_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right) + \frac{L}{cn\pi}\overline{b}_n \sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Utilizzando la formula di addizione per la funzione seno, si dimostra facilmente che, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\big). \tag{5.3.4}$$

Perciò

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\left(\sin\left(\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right)+\sin\left(\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right)\right) = \\ = \frac{1}{2}\left(\tilde{\varphi}(x+ct)+\tilde{\varphi}(x-ct)\right).$$

Analogamente, $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ si ha

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right).$$

Perciò

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{L}{cn\pi}\overline{b}_n\sin\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \\ = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{L}{cn\pi}\overline{b}_n\left(\cos\left(\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right)-\cos\left(\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right)\right) = \\ = \frac{1}{2c}\sum_{n=1}^{+\infty}\overline{b}_n\int_{x-ct}^{x+ct}\sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right)dy = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\sum_{n=1}^{+\infty}\overline{b}_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right)dy = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\tilde{\psi}(y)\,dy.$$

Pertanto vale il seguente teorema.

5.3.3 Teorema
Siano $\varphi \in C^2([0,L],\mathbb{R})$, $\psi \in C^1([0,L],\mathbb{R})$ *tali che* $\varphi(0)=\varphi(L)=\psi(0)=\psi(L)=0$ *e* $\varphi''(0)=\varphi''(L)=0$. *Indichiamo con* $\tilde{\varphi}$ *e* $\tilde{\psi}$ *la ripetizione periodica del prolungamento dispari di* φ *e* ψ *rispettivamente. Allora la funzione*

$$u\colon[0,L]\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}, \qquad u(x,t)=\frac{1}{2}\left(\tilde{\varphi}(x+ct)+\tilde{\varphi}(x-ct)\right)+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\tilde{\psi}(y)\,dy,$$

è di classe C^2 *ed è soluzione del problema* (5.3.3).

Abbiamo ottenuto una formula analoga alla formula di d'Alembert (5.1.2). Occorre fare attenzione che nella formula compaiono, invece delle condizioni iniziali φ e ψ, le ripetizioni periodiche del loro prolungamento dispari.

5.3.2 Problema di Cauchy-Neumann

Consideriamo il problema di Cauchy-Neumann per l'equazione delle onde

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t)=c^2u_{xx}(x,t), & (x,t)\in[0,L]\times\mathbb{R}_+,\\ u_x(0,t)=0, & t\in\mathbb{R}_+,\\ u_x(L,t)=0, & t\in\mathbb{R}_+,\\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in[0,L],\\ u_t(x,0)=\psi(x), & x\in[0,L],\end{cases}$$

dove $c,L\in\mathbb{R}_+^*$ e sono assegnate $\varphi,\psi\colon[0,L]\to\mathbb{R}$. Poiché cerchiamo una soluzione u di classe C^2 deve essere $\varphi\in C^2([0,L],\mathbb{R})$ e $\psi\in C^1([0,L],\mathbb{R})$. Poiché $u_x(0,0)=u_x(L,0)=0$, deve essere $\varphi'(0)=\varphi'(L)=0$. Inoltre da $u_x(0,t)=u_x(L,t)=0$ segue $u_{xt}(0,t)=u_{xt}(L,t)=0$, quindi deve essere $\psi'(0)=\psi'(L)=0$.

Utilizziamo il metodo di separazione delle variabili, come abbiamo fatto nel caso del problema di Cauchy-Dirichlet (v. Sottosezione 5.3.1). Pertanto cerchiamo una soluzione nella forma $(x,t) \mapsto X(x)T(t)$. Con considerazioni analoghe a quelle fatte per il problema di Cauchy-Dirichlet, si ottiene che X deve essere soluzione non identicamente nulla del problema di autovalori con condizioni di Neumann

$$\begin{cases} X''(x) = KX(x), & x \in [0,L], \\ X'(0) = 0, \\ X'(L) = 0. \end{cases}$$

Per il Teor. 1.2.1 tale soluzione esiste se, e solo se, $K = -n^2\pi^2/L^2$, con $n \in \mathbb{N}$, e in tal caso si ha

$$X(x) = c_0 \cos\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big), \qquad c_0 \in \mathbb{R}^*.$$

In modo analogo a quanto visto relativamente al problema di Cauchy-Dirichlet nella Sottosezione 5.3.1, per tali valori di K si ha

$$T(t) = c_1 + c_2 t$$

se $n = 0$ e

$$T(t) = c_1 \cos\Big(\frac{cn\pi}{L}t\Big) + c_2 \sin\Big(\frac{cn\pi}{L}t\Big),$$

se $n \in \mathbb{N}^*$.

Come per il problema di Cauchy-Dirichlet otteniamo il seguente teorema.

5.3.4 Teorema

Siano $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{R}$ tali che la serie di funzioni

$$c_0 + d_0 t + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(c_n \cos\Big(\frac{cn\pi}{L}t\Big) + d_n \sin\Big(\frac{cn\pi}{L}t\Big)\Big)\cos\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)$$

converge uniformemente per $(x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}_+$ insieme alle derivate parziali di ordine 1 e 2. Allora la funzione $u\colon [0,L] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, somma di tale serie, verifica

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), & (x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}_+, \\ u_x(0,t) = 0, & t \in \mathbb{R}_+, \\ u_x(L,t) = 0, & t \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

Affinché la funzione u, definita sopra, verifichi le condizioni iniziali $u(x,0) = \varphi(x)$ e $u_t(x,0) = \psi(x)$ deve essere.

$$u(x,0) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big) = \varphi(x), \tag{5.3.5}$$

$$u_t(x,0) = d_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \frac{cn\pi}{L} \cos\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big) = \psi(x). \tag{5.3.6}$$

La situazione è simile a quella del problema di Cauchy-Dirichlet, con la funzione coseno al posto della funzione seno. In questo caso risulta quindi naturale utilizzare i prolungamenti pari di φ e ψ, che indichiamo con $\widetilde{\varphi}$ e $\widetilde{\psi}$.

Affinché le equazioni (5.3.5) e (5.3.6) siano verificate deve essere

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{L}\int_0^L \varphi(\xi)\,d\xi\,,\\
c_n &= \frac{2}{L}\int_0^L \cos\Big(\frac{n\pi}{L}\xi\Big)\varphi(\xi)\,d\xi\,, \qquad n\in\mathbb{N}^*,\\
d_0 &= \frac{1}{L}\int_0^L \psi(\xi)\,d\xi\,,\\
d_n &= \frac{2}{cn\pi}\int_0^L \cos\Big(\frac{n\pi}{L}\xi\Big)\psi(\xi)\,d\xi\,, \qquad n\in\mathbb{N}^*.
\end{aligned}
$$

Vale il seguente teorema.

5.3.5 Teorema
Siano $\varphi\in C^2([0,L],\mathbb{R})$, $\psi\in C^1([0,L],\mathbb{R})$ *tali che* $\varphi'(0)=\varphi'(L)=\psi'(0)=\psi'(L)=0$. *Allora la serie di funzioni*

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{L}\int_0^L \varphi(\xi)\,d\xi + \frac{1}{L}\int_0^L \psi(\xi)\,d\xi\; t +\\
&+\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{2}{L}\int_0^L \cos\Big(\frac{n\pi}{L}\xi\Big)\varphi(\xi)\,d\xi\,\cos\Big(\frac{cn\pi}{L}t\Big)+\frac{2}{cn\pi}\int_0^L \cos\Big(\frac{n\pi}{L}\xi\Big)\psi(\xi)\,d\xi\,\sin\Big(\frac{cn\pi}{L}t\Big)\Big)\times\\
&\qquad\times\cos\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)
\end{aligned}
$$

converge uniformemente per $(x,t)\in[0,L]\times\mathbb{R}_+$ *a una funzione* u *di classe* C^2, *soluzione del problema*

$$
\begin{cases}
u_{tt}(x,t)=c^2u_{xx}(x,t), & (x,t)\in[0,L]\times\mathbb{R}_+,\\
u_x(0,t)=0, & t\in\mathbb{R}_+,\\
u_x(L,t)=0, & t\in\mathbb{R}_+,\\
u(x,0)=\varphi(x), & x\in[0,L],\\
u_t(x,0)=\psi(x), & x\in[0,L].
\end{cases}
\tag{5.3.7}
$$

Se indichiamo con a_n i coefficienti di Fourier dei coseni di $\widetilde{\varphi}$ e con $\overline{a}_n$ gli analoghi coefficienti di $\widetilde{\psi}$, la soluzione è

$$
u(x,t)=\frac{a_0}{2}+\frac{\overline{a}_0}{2}t+\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(a_n\cos\Big(\frac{cn\pi}{L}t\Big)+\frac{L}{cn\pi}\overline{a}_n\sin\Big(\frac{cn\pi}{L}t\Big)\Big)\cos\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big).
$$

Utilizzando la formula di addizione per la funzione coseno, si dimostra facilmente che, $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ si ha

$$
\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\big).
$$

Perciò

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\Big(\frac{cn\pi}{L}\,t\Big)\cos\Big(\frac{n\pi}{L}\,x\Big)=$$
$$=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\Big(\cos\Big(\frac{n\pi}{L}(x+ct)\Big)+\cos\Big(\frac{n\pi}{L}(x-ct)\Big)\Big)=\frac{1}{2}\big(\widetilde{\varphi}(x+ct)+\widetilde{\varphi}(x-ct)\big).$$

Analogamente, per (5.3.4), si ha

$$\begin{aligned}
&\frac{\overline{a}_0}{2}\,t+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{L}{cn\pi}\,\overline{a}_n \sin\Big(\frac{cn\pi}{L}\,t\Big)\cos\Big(\frac{n\pi}{L}\,x\Big)=\\
&=\frac{\overline{a}_0}{2}\,t+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{L}{cn\pi}\,\overline{a}_n\Big(\sin\Big(\frac{n\pi}{L}(x+ct)\Big)-\sin\Big(\frac{n\pi}{L}(x-ct)\Big)\Big)=\\
&=\frac{\overline{a}_0}{4c}\int_{x-ct}^{x+ct} 1\,dy+\frac{1}{2c}\sum_{n=1}^{+\infty}\overline{a}_n\int_{x-ct}^{x+ct}\cos\Big(\frac{n\pi}{L}\,y\Big)\,dy=\\
&=\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\Big(\frac{\overline{a}_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\overline{a}_n\cos\Big(\frac{n\pi}{L}\,y\Big)\Big)\,dy=\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\widetilde{\psi}(y)\,dy\,.
\end{aligned}$$

Pertanto vale il seguente teorema.

5.3.6 Teorema
Siano $\varphi\in C^2\big([0,L],\mathbb{R}\big)$, $\psi\in C^1\big([0,L],\mathbb{R}\big)$ *tali che* $\varphi'(0)=\varphi'(L)=\psi'(0)=\psi'(L)=0$. *Indichiamo con* $\widetilde{\varphi}$ *e* $\widetilde{\psi}$ *la ripetizione periodica del prolungamento pari di* φ *e* ψ *rispettivamente. Allora la funzione*

$$u\colon[0,L]\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R},\qquad u(x,t)=\frac{1}{2}\big(\widetilde{\varphi}(x+ct)+\widetilde{\varphi}(x-ct)\big)+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\widetilde{\psi}(y)\,dy\,,$$

è di classe C^2 *ed è soluzione del problema* (5.3.7).

5.4 Equazione non omogenea

Consideriamo il problema di Cauchy per un'equazione delle onde non omogenea

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t)=c^2u_{xx}(x,t)+f(x,t), & (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+,\\ u(x,0)=0, & x\in\mathbb{R},\\ u_t(x,0)=0, & x\in\mathbb{R}.\end{cases}\tag{5.4.1}$$

Utilizziamo il metodo di Duhamel, già impiegato per trovare soluzioni di problemi non omogenei nel caso dell'equazione del trasporto (v. Sezione 3.1) e del calore (v. Sezione 4.3).

Per ogni $s\geq 0$, consideriamo la soluzione dell'equazione delle onde definita per $t\geq s$ che per $t=s$ vale 0 e ha derivata rispetto a t uguale a $f(x,s)$. Cioè consideriamo $u^{(s)}$

tale che

$$\begin{cases} u_{tt}^{(s)}(x,t) = c^2 u_{xx}^{(s)}(x,t), & x \in \mathbb{R},\ t \geq s\,, \\ u^{(s)}(x,s) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t^{(s)}(x,s) = f(x,s), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Posto

$$u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \qquad u(x,t) = \int_0^t u^{(s)}(x,t)\,ds\,, \tag{5.4.2}$$

la funzione u è soluzione del problema di Cauchy (5.4.1). Infatti, per il Teor. El-14.4.8, si ha

$$u_t(x,t) = u^{(t)}(x,t) + \int_0^t u_t^{(s)}(x,t)\,ds = \int_0^t u_t^{(s)}(x,t)\,ds\,,$$

$$u_{tt}(x,t) = u_t^{(t)}(x,t) + \int_0^t u_{tt}^{(s)}(x,t)\,ds = f(x,t) + c^2 \int_0^t u_{xx}^{(s)}(x,t)\,ds\,.$$

Per il Teor. El-14.4.2 risulta $\int_0^t u_{xx}^{(s)}(x,t)\,ds = u_{xx}(x,t)$, pertanto u verifica l'equazione non omogenea. Inoltre dalla definizione è evidente che $u(x,0) = 0$ e dall'espressione di u_t ottenuta sopra segue $u_t(x,0) = 0$.

Ricaviamo dall'equazione (5.4.2) l'espressione esplicita di u. Per la formula di d'Alembert (5.1.2), effettuando successivamente le sostituzioni $s = t - \tau$ e $\xi = x - y$, si ha

$$u(x,t) = \int_0^t u^{(s)}(x,t)\,ds = \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(\xi,s)\,d\xi\,ds =$$

$$= \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c\tau}^{x+c\tau} f(\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau = \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{-c\tau}^{c\tau} f(x-y,t-\tau)\,dy\,d\tau\,.$$

Abbiamo quindi il seguente teorema.

5.4.1 Teorema

Sia $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ derivabile parzialmente 2 volte rispetto a x con u_{xx} continua. Allora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t), & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

ha come soluzione la funzione

$$u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \qquad \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(\xi,s)\,d\xi\,ds\,.$$

Un procedimento del tutto analogo consente di trovare una soluzione per il problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione delle onde non omogenea su un intervallo limitato

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t), & (x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}_+^*, \\ u(0,t) = 0, & t \in \mathbb{R}_+, \\ u(L,t) = 0, & t \in \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = 0, & x \in [0,L], \\ u_t(x,0) = 0, & x \in [0,L]. \end{cases}$$

Questo problema ha la soluzione

$$u:\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R},\qquad \frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)}\widetilde{f}(\xi,s)\,d\xi\,ds\,,$$

dove con $\widetilde{f}$ indichiamo la ripetizione periodica del prolungamento dispari rispetto alla prima variabile di f.

Calcoliamo la soluzione u in un caso particolare. Sia $L=\pi$ e

$$f:[0,\pi]\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R},\qquad f(x,t)=\sin(nx)\cos(bt),$$

con $n\in\mathbb{N}^*$ e $b\in\mathbb{R}_+^*$. La ripetizione 2π-periodica del prolungamento dispari di f è definita dalla stessa formula.

Supponiamo anzitutto $b\neq nc$. Si ha, utilizzando l'equazione (5.3.4),

$$\begin{aligned}
u(x,t)&=\frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}\sin(ny)\cos(b\tau)\,dy\,d\tau=\\
&=\frac{1}{2nc}\int_0^t\Big(\cos\big(n(x-c(t-\tau))\big)-\cos\big(n(x+c(t-\tau))\big)\Big)\cos(b\tau)\,d\tau=\\
&=\frac{1}{nc}\int_0^t\sin(nx)\sin\big(nc(t-\tau)\big)\cos(b\tau)\,d\tau=\\
&=\frac{1}{2nc}\int_0^t\Big(\sin\big(nc(t-\tau)+b\tau\big)+\sin\big(nc(t-\tau)-b\tau\big)\,d\tau\,\sin(nx)=\\
&=\frac{1}{2nc}\Big[\frac{1}{nc-b}\cos\big(nc(t-\tau)+b\tau\big)+\frac{1}{nc+b}\cos\big(nc(t-\tau)-b\tau\big)\Big]_{\tau=0}^{\tau=t}\sin(nx)=\\
&=\Big(\frac{1}{2nc(nc-b)}\big(\cos(bt)-\cos(nct)\big)+\frac{1}{2nc(nc+b)}\big(\cos(bt)-\cos(nct)\big)\Big)\sin(nx)=\\
&=\frac{1}{n^2c^2-b^2}\sin(nx)\big(\cos(bt)-\cos(nct)\big).
\end{aligned}$$

Se invece $b=nc$, cioè $f(x,t)=\sin(nx)\cos(nct)$, otteniamo

$$\begin{aligned}
u(x,t)&=\frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}\sin(ny)\cos(nc\tau)\,dy\,d\tau=\\
&=\frac{1}{2nc}\int_0^t\Big(\cos\big(n(x-c(t-\tau))\big)-\cos\big(n(x+c(t-\tau))\big)\Big)\cos(nc\tau)\,d\tau=\\
&=\frac{1}{nc}\int_0^t\sin(nx)\sin\big(nc(t-\tau)\big)\cos(nc\tau)\,d\tau=\\
&=\frac{1}{2nc}\int_0^t\Big(\sin(nct)+\sin\big(nc(t-2\tau)\big)\,d\tau\,\sin(nx)=\\
&=\frac{1}{2nc}\Big[\sin(nct)\tau+\frac{1}{2nc}\cos\big(nc(t-2\tau)\big)\Big]_{\tau=0}^{\tau=t}\sin(nx)=\frac{1}{2nc}t\sin(nx)\sin(nct).
\end{aligned}$$

In questo caso la soluzione è illimitata, per la presenza del fattore t. Siamo in presenza di risonanza: la forza f è periodica rispetto al tempo con periodo $2\pi/b$, la vibrazione non forzata della corda ha periodo $2\pi/c$; se $b=nc$ il periodo della forza è un sottomultiplo del periodo di vibrazione della corda non forzata e il sistema entra in risonanza.

5.5 Unicità della soluzione

5.5.1 Problema di Cauchy-Dirichlet

Abbiamo già visto che una soluzione del problema di Cauchy per l'equazione delle onde in tutto l'asse reale è univocamente determinata dalla formula di d'Alembert (v. Teor. 5.1.2). Studiamo ora l'unicità della soluzione per un problema di Cauchy-Dirichlet in un intervallo limitato.

Consideriamo il problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione delle onde

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t), & (x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}_+, \\ u(0,t) = g_0(t), & t \in \mathbb{R}_+, \\ u(L,t) = g_L(t), & t \in \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0,L], \\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \in [0,L], \end{cases} \tag{5.5.1}$$

dove $c, L \in \mathbb{R}_+^*$ e sono assegnate le funzioni $f \in C\big([0,L] \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}\big)$, $g_0, g_L \in C^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $\varphi \in C^2\big([0,L], \mathbb{R}\big)$, $\psi \in C^1\big([0,L], \mathbb{R}\big)$, tali che $\varphi(0) = g_0(0)$, $\varphi(L) = g_L(0)$, $\psi(0) = g_0'(0)$, $\psi(L) = g_L'(0)$.

Supponiamo che $v, w \in C^2\big([0,L] \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}\big)$ siano soluzioni di questo problema. Allora si verifica immediatamente che la funzione $v - w$ è soluzione del corrispondente problema omogeneo, cioè

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), & (x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}_+, \\ u(0,t) = 0, & t \in \mathbb{R}_+, \\ u(L,t) = 0, & t \in \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = 0, & x \in [0,L], \\ u_t(x,0) = 0, & x \in [0,L]. \end{cases} \tag{5.5.2}$$

È evidente che v e w sono diverse tra loro se, e solo se, $v - w$ non è identicamente nulla. Pertanto se esistono due soluzioni diverse del problema (5.5.1), allora esiste una soluzione non identicamente nulla del problema omogeneo (5.5.2). Viceversa se v è soluzione del problema (5.5.1) e z è soluzione non identicamente nulla del problema (5.5.2), allora $v + z$ è soluzione di (5.5.1) diversa da v. Pertanto la soluzione di (5.5.1) è unica se, e solo se, il problema omogeneo (5.5.2) ha solo la soluzione identicamente nulla.

Sia quindi $u \in C^2\big([0,L] \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}\big)$ soluzione di (5.5.2). Posto

$$F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \qquad F(t) = \int_0^L \big(u_t(x,t)\big)^2 \, dx,$$

per il Teor. El-14.4.2 (v. anche Oss. El-14.4.3) F è derivabile e, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, si ha

$$F'(t) = \int_0^L \frac{d}{dt}\big(u_t(x,t)\big)^2 \, dx = \int_0^L 2u_t(x,t)u_{tt}(x,t)\, dx = 2c^2 \int_0^L u_t(x,t)u_{xx}(x,t)\, dx =$$

$$= 2c^2 \big[u_t(x,t)u_x(x,t)\big]_{x=0}^{x=L} - 2c^2 \int_0^L u_{tx}(x,t)u_x(x,t)\, dx.$$

Poiché le funzioni $t \mapsto u(0,t)$ e $t \mapsto u(L,t)$ si annullano identicamente, anche le loro derivate sono nulle, quindi il primo addendo è nullo. Perciò, utilizzando nuovamente il Teor. El-14.4.2, si ha

$$F'(t) = -c^2 \int_0^L \frac{d}{dt}\big(u_x(x,t)\big)^2\,dx = -c^2 \frac{d}{dt}\int_0^L \big(u_x(x,t)\big)^2\,dx\,.$$

Pertanto la funzione

$$t \mapsto \int_0^L \Big(\big(u_t(x,t)\big)^2 + c^2\big(u_x(x,t)\big)^2\Big)\,dx$$

ha derivata nulla e quindi è costante. Per $t = 0$ si ha

$$\int_0^L \Big(\big(u_t(x,0)\big)^2 + c^2\big(u_x(x,0)\big)^2\Big)\,dx = 0\,,$$

quindi la funzione F è identicamente nulla.

Abbiamo già osservato (v. Sottosezione 4.4.1) che una funzione continua e non negativa che ha integrale nullo è identicamente nulla. Pertanto, $\forall (x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}_+$, risulta $\big(u_t(x,t)\big)^2 + c^2\big(u_x(x,t)\big)^2 = 0$, quindi $u_t(x,t) = 0$ e $u_x(x,t) = 0$. Perciò u ha gradiente nullo e quindi, per il Teorema sulle funzioni a differenziale nullo El-11.7.5, u è costante. Poiché u si annulla in $(0,0)$ essa è identicamente nulla.

Abbiamo così dimostrato il seguente teorema.

5.5.1 Teorema
Il problema

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t)\,, & (x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}_+\,, \\ u(0,t) = 0\,, & t \in \mathbb{R}_+\,, \\ u(L,t) = 0\,, & t \in \mathbb{R}_+\,, \\ u(x,0) = 0\,, & x \in [0,L]\,, \\ u_t(x,0) = 0\,, & x \in [0,L]\,, \end{cases}$$

ha solo la soluzione identicamente nulla.

Da questo, per quanto illustrato all'inizio della sezione, si ottiene il seguente teorema.

5.5.2 Teorema
Siano $f \in C\big([0,L]\times\mathbb{R}_+,\mathbb{R}\big)$, $g_0, g_L \in C^2(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, $\varphi \in C^2\big([0,L],\mathbb{R}\big)$, $\psi \in C^1\big([0,L],\mathbb{R}\big)$, *tali che* $\varphi(0) = g_0(0)$, $\varphi(L) = g_L(0)$, $\psi(0) = g_0'(0)$, $\psi(L) = g_L'(0)$. *Se* $v, w \in C^2\big([0,L]\times\mathbb{R}_+,\mathbb{R}\big)$ *sono soluzioni del problema*

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t)\,, & (x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}_+\,, \\ u(0,t) = g_0(t)\,, & t \in \mathbb{R}_+\,, \\ u(L,t) = g_L(t)\,, & t \in \mathbb{R}_+\,, \\ u(x,0) = \varphi(x)\,, & x \in [0,L]\,, \\ u_t(x,0) = \psi(x)\,, & x \in [0,L]\,, \end{cases}$$

allora $v = w$.

Osserviamo che, per provare che la funzione

$$t \mapsto \int_0^L \Big(\big(u_t(x,t)\big)^2 + c^2 \big(u_x(x,t)\big)^2 \Big)\, dx$$

ha derivata nulla, e quindi è costante, abbiamo utilizzato il fatto che sia soluzione dell'equazione delle onde omogenea e che sia nulla negli estremi dell'intervallo $[0,L]$. Nella Sezione 2.3 abbiamo ottenuto l'equazione delle onde come descrizione del moto di una corda. In particolare in tale sezione abbiamo posto $c^2 = \tau/\rho$, dove τ è una forza che corrisponde alla tensione della corda e ρ è la densità della corda. Allora se u è soluzione dell'equazione delle onde con dati nulli negli estremi dell'intervallo, si ha

$$\int_0^L \frac{\rho}{2} \big(u_t(x,t)\big)^2\, dx + \int_0^L \frac{\tau}{2} \big(u_x(x,t)\big)^2\, dx = K.$$

Questa uguaglianza esprime la conservazione dell'energia durante il moto della corda, perché il primo addendo è l'energia cinetica della corda, il secondo l'energia potenziale.

5.5.2 Problema di Cauchy-Neumann

Analogamente a quanto osservato relativamente al problema di Cauchy-Dirichlet, anche nel caso del problema di Cauchy-Neumann per dimostrare l'unicità della soluzione è sufficiente dimostrare che il problema omogeneo

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), & (x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}_+, \\ u_x(0,t) = 0, & t \in \mathbb{R}_+, \\ u_x(L,t) = 0, & t \in \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = 0, & x \in [0,L], \\ u_t(x,0) = 0, & x \in [0,L], \end{cases}$$

ha solo la soluzione nulla. La dimostrazione di questo fatto è del tutto analoga a quella fatta per il problema di Cauchy-Dirichlet, l'unica modifica riguarda il motivo per cui il termine $\big[u_t(x,t)u_x(x,t)\big]_{x=0}^{x=L}$ si annulla: in questo caso è nullo il fattore u_x anziché il fattore u_t.

Quindi vale il seguente teorema.

5.5.3 Teorema
Siano $f \in C\big([0,L]\times\mathbb{R}_+,\mathbb{R}\big)$, $g_0, g_L \in C^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, $\varphi \in C^2\big([0,L],\mathbb{R}\big)$, $\psi \in C^1\big([0,L],\mathbb{R}\big)$, *tali che* $\varphi'(0) = g_0(0)$, $\varphi'(L) = g_L(0)$, $\psi'(0) = g_0'(0)$, $\psi'(L) = g_L'(0)$. *Se* $v, w \colon [0,L]\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *sono soluzioni del problema*

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t), & (x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}_+, \\ u_x(0,t) = g_0(t), & t \in \mathbb{R}_+, \\ u_x(L,t) = g_L(t), & t \in \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in [0,L], \\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \in [0,L], \end{cases}$$

allora $v = w$.

Capitolo 6

Equazione di Laplace

6.1 Equazione di Laplace in un rettangolo

6.1.1 Problema di Dirichlet

Consideriamo il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace in un rettangolo

$$\begin{cases} \Delta u(x,y)=0, & (x,y)\in[0,L]\times[0,M], \\ u(x,y)=g(x,y), & (x,y)\in\partial\big([0,L]\times[0,M]\big), \end{cases}$$

dove $L,M\in\mathbb{R}_+^*$ ed è assegnata $g:\partial\big([0,L]\times[0,M]\big)\to\mathbb{R}$.

Le funzioni che hanno laplaciano nullo in tutto il dominio sono dette funzioni **armoniche**.

Studiamo anzitutto il problema nel caso particolare che la g sia non nulla solo nel lato in basso di $\partial\big([0,L]\times[0,M]\big)$, cioè per $y=0$. In questo caso il problema si può scrivere nella forma

$$\begin{cases} \Delta u(x,y)=0, & (x,y)\in[0,L]\times[0,M], \\ u(x,0)=h(x), & x\in[0,L], \\ u(x,M)=0, & x\in[0,L], \\ u(0,y)=0, & y\in[0,M], \\ u(L,y)=0, & y\in[0,M], \end{cases}$$

dove è assegnata $h:[0,L]\to\mathbb{R}$. Le condizioni nei punti $(0,0)$ e $(L,0)$ richiedono che sia $h(0)=h(L)=0$.

Utilizziamo il metodo di separazione delle variabili (v. Sottosezione 4.2.1); per questo cerchiamo una soluzione non identicamente nulla u nella forma $u(x,y)=X(x)Y(y)$, con X e Y di classe C^2. L'equazione diventa

$$X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)=0$$

da cui, dividendo per $X(x)Y(y)$, si ha

$$\frac{X''(x)Y(y)}{X(x)Y(y)}+\frac{X(x)Y''(y)}{X(x)Y(y)}=0,$$

cioè

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

Come già visto, poiché i due membri di questa uguaglianza dipendono da variabili diverse, essi sono costanti, quindi esiste $K \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = K. \tag{6.1.1}$$

Risolviamo l'equazione relativa alla funzione X. Imponendo anche le condizioni per $x = 0$ e $x = L$, dobbiamo cercare $K \in \mathbb{R}$ e $X \in C^2([0,L],\mathbb{R})$, non identicamente nulla, soluzione del seguente problema

$$\begin{cases} X''(x) = KX(x), & x \in [0,L], \\ X(0) = 0, \\ X(L) = 0, \end{cases}$$

che è un problema di autovalori con condizioni di Dirichlet. Per il Teor. 1.1.1 esiste una soluzione non identicamente nulla se, e solo se, $K = -n^2\pi^2/L^2$, con $n \in \mathbb{N}^*$, e si ha

$$X(x) = c \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \qquad c \in \mathbb{R}^*.$$

Da (6.1.1) segue

$$-\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\frac{n^2\pi^2}{L^2},$$

cioè

$$Y''(y) = \frac{n^2\pi^2}{L^2} Y(y).$$

Questa equazione differenziale è lineare a coefficienti costanti, l'equazione caratteristica è $s^2 = n^2\pi^2/L^2$, che ha le soluzioni $s = \pm n\pi/L$. Pertanto

$$Y(y) = c_1 \exp\left(\frac{n\pi}{L} y\right) + c_2 \exp\left(-\frac{n\pi}{L} y\right), \qquad (c_1, c_2) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^*.$$

Dalla condizione per $y = M$ segue $Y(M) = 0$, pertanto c_1 e c_2 devono essere tali che

$$c_1 \exp\left(\frac{n\pi}{L} M\right) + c_2 \exp\left(-\frac{n\pi}{L} M\right) = 0,$$

cioè

$$c_2 = -c_1 \exp\left(2\frac{n\pi}{L} M\right).$$

Quindi

$$Y(y) = c_1 \left(\exp\left(\frac{n\pi}{L} y\right) - \exp\left(\frac{n\pi}{L}(2M - y)\right)\right),$$

che si può scrivere nella forma

$$\begin{aligned} Y(y) &= c_1 \exp\left(\frac{n\pi}{L} M\right)\left(\exp\left(\frac{n\pi}{L}(y - M)\right) - \exp\left(\frac{n\pi}{L}(M - y)\right)\right) = \\ &= -2c_1 \exp\left(\frac{n\pi}{L} M\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{L}(M - y)\right). \end{aligned}$$

Quindi la funzione

$$u(x,t) = c \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{L}(M-y)\right)$$

verifica l'equazione $\Delta u = 0$ e le condizioni $u(0,y) = u(L,y) = u(x,M) = 0$. Ciò è vero anche per ogni combinazione lineare di funzioni di questo tipo e, sotto opportune condizioni di convergenza, anche per il limite di tali combinazioni lineari. Abbiamo pertanto il seguente teorema.

6.1.1 Teorema
Sia $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *una successione in* $\mathbb{R}$ *tale che la serie di funzioni*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{L}(M-y)\right)$$

converge uniformemente per $(x,y) \in [0,L]\times[0,M]$ *insieme alle derivate parziali di ordine* 1 *e* 2. *Allora la funzione* $u : [0,L]\times[0,M] \to \mathbb{R}$ *somma di tale serie verifica*

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, & (x,y) \in [0,L]\times[0,M], \\ u(x,M) = 0, & x \in [0,L], \\ u(0,y) = 0, & y \in [0,M], \\ u(L,y) = 0, & y \in [0,M], \end{cases}$$

Non abbiamo finora considerato la condizione $u(x,0) = h(x)$. Imponiamo che la funzione u, definita nel teorema precedente, verifichi questa condizione, cioè che sia

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{L} M\right) = h(x). \tag{6.1.2}$$

Come nel caso dell'equazione del calore, indicata con $\widetilde{h}$ la ripetizione periodica del prolungamento dispari di h, affinché l'equazione (6.1.2) sia verificata i numeri $c_n \sinh(n\pi M/L)$ devono essere i coefficienti di Fourier dei seni di $\widetilde{h}$, pertanto

$$c_n = \frac{2}{L \sinh\left(\frac{n\pi}{L} M\right)} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}\xi\right) h(\xi)\, d\xi .$$

Poiché $\widetilde{h}$ è di classe C^1 e $\widetilde{h}'$ è C^1 a tratti (vedi sottosezione 4.2.1), per il Teor. El-15.5.14 risulta $c_n \sinh(n\pi M/L) = o(n^{-2})$, per $n \to +\infty$. Pertanto la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{L}(M-y)\right)$$

converge totalmente. Si può dimostrare che convergono uniformemente anche le serie delle derivate parziali fino all'ordine 2, se $\widetilde{h}$ è di classe C^2; ciò richiede che sia $h''(0) = h''(L) = 0$.
Pertanto vale il seguente teorema.

6.1.2 Teorema
Sia $h \in C^2([0,L],\mathbb{R})$ *tale che* $h(0)=h(L)=0$ *e* $h''(0)=h''(L)=0$. *Allora la serie di funzioni*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{L\sinh\left(\frac{n\pi}{L}M\right)} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}\xi\right) h(\xi)\, d\xi \, \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{L}(M-y)\right)$$

converge uniformemente per $(x,y) \in [0,L]\times[0,M]$ *a una funzione* u *di classe* C^2, *soluzione del problema*

$$\begin{cases} \Delta u(x,y)=0, & (x,y)\in[0,L]\times[0,M], \\ u(x,0)=h(x), & x\in[0,L], \\ u(x,M)=0, & x\in[0,L], \\ u(0,y)=0, & y\in[0,M], \\ u(L,y)=0, & y\in[0,M]. \end{cases}$$

Le considerazioni fatte finora nel caso che il valore di u assegnato alla frontiera sia non nullo solo sul lato in basso del rettangolo si possono ripetere per ciascuno degli altri tre lati.

Nel caso generale in cui si richiede che sia $u(x,y)=g(x,y)$ per $(x,y)\in\partial([0,L]\times[0,M])$, con g arbitraria, si può scrivere g come somma di quattro funzioni, ciascuna delle quali è nulla su tre lati del rettangolo. Poiché la somma di funzioni armoniche è una funzione armonica, la soluzione del problema assegnato è somma delle quattro soluzioni così trovate. Questo modo di procedere presenta però un problema: la funzione ottenuta ponendo uguale a 0 la condizione al bordo su tre lati deve essere continua, questo richiede che la funzione g sia nulla nei quattro vertici del rettangolo. Ci si può sempre ricondurre a questa situazione osservando che la funzione $v\colon [0,L]\times[0,M]\to\mathbb{R}$, tale che

$$v(x,y)=\frac{g(0,0)}{LM}(L-x)(M-y)+\frac{g(L,0)}{LM}x(M-y)+\frac{g(M,0)}{LM}(L-x)y+\frac{g(L,M)}{LM}xy,$$

è armonica e si ha

$$v(0,0)=g(0,0), \quad v(L,0)=g(L,0), \quad v(0,M)=g(0,M), \quad v(L,M)=g(L,M).$$

Pertanto la funzione

$$h\colon \partial([0,L]\times[0,M])\to\mathbb{R}, \qquad h(x,y)=g(x,y)-v(x,y),$$

si annulla nei quattro vertici del rettangolo. Allora, con il metodo illustrato sopra, possiamo trovare una soluzione w del problema

$$\begin{cases} \Delta w(x,y)=0, & (x,y)\in[0,L]\times[0,M], \\ w(x,y)=h(x,y), & (x,y)\in\partial([0,L]\times[0,M]). \end{cases}$$

La funzione $u=w+v$ è soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u(x,y)=0, & (x,y)\in[0,L]\times[0,M], \\ u(x,y)=g(x,y), & (x,y)\in\partial([0,L]\times[0,M]). \end{cases}$$

6.1.2 Problema di Neumann

Consideriamo il problema di Neumann per l'equazione di Laplace in un rettangolo

$$\begin{cases} \Delta u(x,y)=0, & (x,y)\in[0,L]\times[0,M], \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x,y)=g(x,y), & (x,y)\in\partial\big([0,L]\times[0,M]\big), \end{cases}$$

dove $L,M\in\mathbb{R}_+^*$ ed è assegnata $g:\partial\big([0,L]\times[0,M]\big)\to\mathbb{R}$.

Con la notazione $\partial u/\partial \nu$ indichiamo la **derivata normale alla frontiera** della funzione u, cioè la derivata direzionale di u nella direzione del campo vettoriale normale esterno a $[0,L]\times[0,M]$ (v. Def. El-17.7.6). Tale derivata è uguale a $-u_y$ in $]0,L[\,\times\{0\}$, a u_y in $]0,L[\,\times\{M\}$, a $-u_x$ in $\{0\}\times\,]0,M[$ e a u_x in $\{L\}\times\,]0,M[$. La derivata normale non è definita nei vertici del rettangolo, perché in tali punti non è definita la normale alla frontiera.

Limitiamoci a studiare il problema nel caso particolare che la g sia non nulla solo nel lato in basso di $\partial\big([0,L]\times[0,M]\big)$, cioè per $y=0$. In questo caso il problema si può scrivere nella forma

$$\begin{cases} \Delta u(x,y)=0, & (x,y)\in[0,L]\times[0,M], \\ u_y(x,0)=h(x), & x\in[0,L], \\ u_y(x,M)=0, & x\in[0,L], \\ u_x(0,y)=0, & y\in[0,M], \\ u_x(L,y)=0, & y\in[0,M], \end{cases}$$

dove è assegnata $h:[0,L]\to\mathbb{R}$.

Osserviamo che, poiché nei punti del segmento $]0,L[\,\times\{0\}$ si ha $\partial u/\partial\nu=-u_y$, la funzione h è l'opposto della derivata normale.

Procediamo per separazione delle variabili, cercando una funzione non identicamente nulla u nella forma $u(x,y)=X(x)Y(y)$, con X e Y classe C^2. Come nel caso del problema di Dirichlet, dall'equazione segue che esiste $K\in\mathbb{R}$ tale che

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}=K. \tag{6.1.3}$$

Risolviamo l'equazione relativa alla funzione X. Imponendo anche le condizioni per $x=0$ e $x=L$, dobbiamo cercare $K\in\mathbb{R}$ e $X\in C^2\big([0,L],\mathbb{R}\big)$, non identicamente nulla, soluzione del seguente problema

$$\begin{cases} X''(x)=KX(x), & x\in[0,L], \\ X'(0)=0, \\ X'(L)=0, \end{cases}$$

che è un problema di autovalori con condizioni di Neumann. Per il Teor. 1.2.1 esiste una soluzione non identicamente nulla se, e solo se, $K=-n^2\pi^2/L^2$, con $n\in\mathbb{N}$, e si ha

$$X(x)=c\cos\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big), \qquad c\in\mathbb{R}^*.$$

Da (6.1.3) segue

$$-\frac{Y''(y)}{Y(y)}=-\frac{n^2\pi^2}{L^2},$$

cioè

$$Y''(y) = \frac{n^2\pi^2}{L^2}\,Y(y).$$

Questa equazione differenziale è lineare a coefficienti costanti, l'equazione caratteristica è $s^2 = n^2\pi^2/L^2$, che ha le soluzioni $s = \pm n\pi/L$. Pertanto, se $n \neq 0$

$$Y(y) = \begin{cases} c_1 \exp\left(\frac{n\pi}{L}y\right) + c_2 \exp\left(-\frac{n\pi}{L}y\right), & (c_1, c_2) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^*, \qquad \text{se } n \neq 0, \\ c_1 + c_2 t\,, & (c_1, c_2) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^*, \qquad \text{se } n = 0. \end{cases}$$

quindi

$$Y'(y) = \begin{cases} c_1 \frac{n\pi}{L} \exp\left(\frac{n\pi}{L}y\right) - c_2 \frac{n\pi}{L} \exp\left(-\frac{n\pi}{L}y\right), & \text{se } n \neq 0, \\ c_2\,, & \text{se } n = 0. \end{cases}$$

Dalla condizione per $y = M$ segue $Y'(M) = 0$; pertanto, se $n \neq 0$, allora c_1 e c_2 devono essere tali che

$$c_1 \frac{n\pi}{L} \exp\left(\frac{n\pi}{L}M\right) - c_2 \frac{n\pi}{L} \exp\left(-\frac{n\pi}{L}M\right) = 0\,,$$

cioè

$$c_2 = c_1 \exp\left(2\,\frac{n\pi}{L}M\right).$$

Quindi

$$Y(y) = c_1\left(\exp\left(\frac{n\pi}{L}y\right) + \exp\left(\frac{n\pi}{L}(2M - y)\right)\right),$$

che si può scrivere nella forma

$$\begin{aligned} Y(y) &= c_1 \exp\left(\frac{n\pi}{L}M\right)\left(\exp\left(\frac{n\pi}{L}(y - M)\right) + \exp\left(\frac{n\pi}{L}(M - y)\right)\right) = \\ &= -2c_1 \exp\left(\frac{n\pi}{L}M\right)\cosh\left(\frac{n\pi}{L}(M - y)\right). \end{aligned}$$

Se invece $n = 0$ deve essere $c_2 = 0$, quindi $Y(y) = c_1$.

Quindi, per $n \in \mathbb{N}$, la funzione

$$u(x,t) = c\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cosh\left(\frac{n\pi}{L}(M - y)\right)$$

verifica l'equazione $\Delta u = 0$ e le condizioni $u_x(0,y) = u_x(L,y) = u_y(x,M) = 0$. Ciò è vero anche per ogni combinazione lineare di funzioni di questo tipo e, sotto opportune condizioni di convergenza, anche per il limite di tali combinazioni lineari.

Abbiamo pertanto il seguente teorema.

6.1.3 Teorema

Sia $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$ tale che la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cosh\left(\frac{n\pi}{L}(M - y)\right)$$

converge uniformemente per $(x,y)\in[0,L]\times[0,M]$ *insieme alle derivate parziali di ordine* 1 *e* 2. *Allora la funzione* $u\colon[0,L]\times[0,M]\to\mathbb{R}$ *somma di tale serie verifica*

$$\begin{cases} \Delta u(x,y)=0, & (x,y)\in[0,L]\times[0,M],\\ u_y(x,M)=0, & x\in[0,L],\\ u_x(0,y)=0, & y\in[0,M],\\ u_x(L,y)=0, & y\in[0,M], \end{cases}$$

Non abbiamo finora considerato la condizione $u_y(x,0)=h(x)$. Imponiamo che la funzione u, definita nel teorema precedente, verifichi questa condizione. Poiché

$$u_y(x,y)=-\sum_{n=1}^{+\infty}c_n\frac{n\pi}{L}\cos\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)\sinh\Big(\frac{n\pi}{L}(M-y)\Big),$$

deve essere

$$u_y(x,0)=-\sum_{n=1}^{+\infty}c_n\frac{n\pi}{L}\cos\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)\sinh\Big(\frac{n\pi}{L}M\Big)=h(x). \tag{6.1.4}$$

Abbiamo una serie di Fourier di coseni, in cui manca il termine costante. Analogamente a quanto fatto per l'equazione del calore (v. Sottosezione 4.2.2), possiamo considerare $\widetilde{h}$, ripetizione periodica del prolungamento pari di h, e ricavare i c_n a partire dai coefficienti di Fourier di $\widetilde{h}$, ma la somma della serie non può essere h se $\widetilde{h}$ ha coefficiente a_0 diverso da 0, cioè se $\int_0^L h(\xi)\,d\xi\neq 0$. Sotto questa ipotesi, affinché l'equazione (6.1.4) sia verificata i coefficienti c_n moltiplicati per $-(n\pi/L)\sinh(n\pi M/L)$ devono essere i coefficienti di Fourier dei coseni di $\widetilde{h}$.

Si può dimostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}c_n\cos\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)\cosh\Big(\frac{n\pi}{L}(M-y)\Big)$$

converge totalmente. Se inoltre $\widetilde{h}$ è di classe C^1, cioè $h'(0)=h'(L)=0$ convergono uniformemente anche le serie delle derivate parziali fino all'ordine 2.

Pertanto vale il seguente teorema.

6.1.4 Teorema

Sia $h\in C^2\big([0,L],\mathbb{R}\big)$ *tale che* $\int_0^L h(\xi)\,d\xi=0$ *e* $h'(0)=h'(L)=0$. *Allora la serie di funzioni*

$$-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n\pi\sinh\Big(\frac{n\pi}{L}M\Big)}\int_0^L\cos\Big(\frac{n\pi}{L}\xi\Big)h(\xi)\,d\xi\,\cos\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)\cosh\Big(\frac{n\pi}{L}(M-y)\Big)$$

converge uniformemente per $(x,y)\in[0,L]\times[0,M]$ *a una funzione* u *di classe* C^2, *soluzione del problema*

$$\begin{cases} \Delta u(x,y)=0, & (x,y)\in[0,L]\times[0,M],\\ u_y(x,0)=h(x), & x\in[0,L],\\ u_y(x,M)=0, & x\in[0,L],\\ u_x(0,y)=0, & y\in[0,M],\\ u_x(L,y)=0, & y\in[0,M]. \end{cases}$$

Osserviamo che questa non è l'unica soluzione. Qualunque funzione costante ha laplaciano nullo e derivata normale nulla in ogni punto della frontiera. Pertanto, sommando una costante a una soluzione si ha ancora una soluzione.

6.2 Equazione di Laplace in un cerchio

6.2.1 Il laplaciano in coordinate polari

Sia $u \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$; consideriamo la funzione v ottenuta da u passando in coordinate polari (v. Es. El-13.5.6), cioè

$$v(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Si ha, omettendo gli argomenti di u, di v e delle loro derivate,

$$\begin{aligned}
v_r &= u_x \cos\theta + u_y \sin\theta, \\
v_{rr} &= (u_{xx}\cos\theta + u_{xy}\sin\theta)\cos\theta + (u_{yx}\cos\theta + u_{yy}\sin\theta)\sin\theta = \\
&= u_{xx}\cos^2\theta + u_{yy}\sin^2\theta + 2u_{xy}\cos\theta\sin\theta, \\
v_\theta &= -u_x r\sin\theta + u_y r\cos\theta, \\
v_{\theta\theta} &= -(-u_{xx} r\sin\theta + u_{xy} r\cos\theta) r\sin\theta - u_x r\cos\theta + \\
&\qquad + (-u_{yx} r\sin\theta + u_{yy} r\cos\theta) r\cos\theta - u_y r\sin\theta = \\
&= u_{xx} r^2\sin^2\theta + u_{yy} r^2\cos^2\theta - 2u_{xy} r^2\cos\theta\sin\theta - u_x r\cos\theta - u_y r\sin\theta.
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
& v_{rr} + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} = \\
&= u_{xx}(\cos^2\theta + \cos^2\theta) + u_{yy}(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + 2u_{xy}(\cos\theta\sin\theta - \cos\theta\sin\theta) - \\
&\qquad - u_x \frac{1}{r}\cos\theta - u_y \frac{1}{r}\sin\theta = \\
&= u_{xx} + u_{yy} - u_x \frac{1}{r}\cos\theta - u_y \frac{1}{r}\sin\theta = u_{xx} + u_{yy} - \frac{1}{r} v_r.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\Delta u = v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta}.$$

Abbiamo così dimostrato il seguente teorema.

6.2.1 Teorema
Sia $u \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ *; posto*

$$v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad v(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta),$$

$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, *si ha*

$$\Delta u(r\cos\theta, r\sin\theta) = v_{rr}(r,\theta) + \frac{1}{r} v_r(r,\theta) + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta}(r,\theta). \tag{6.2.1}$$

Questo teorema vale anche se u è definita in un aperto di $\mathbb{R}^2$, modificando opportunamente il dominio di v.

6.2.2 Problema di Dirichlet

Se $(c,d)\in\mathbb{R}^2$ e $L\in\mathbb{R}^*_+$, indichiamo con $S\big((c,d),L\big)$ il cerchio aperto di centro (x,y) e raggio L, cioè

$$S\big((c,d),L\big)=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-c)^2+(y-d)^2<L^2\big\}.$$

Ovviamente la sua chiusura è il corrispondente cerchio chiuso, cioè

$$\overline{S\big((c,d),L\big)}=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-c)^2+(y-d)^2\leq L^2\big\},$$

mentre la frontiera è la circonferenza di centro (c,d) e raggio L, cioè

$$\partial S\big((c,d),L\big)=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-c)^2+(y-d)^2=L^2\big\}.$$

Consideriamo il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace

$$\begin{cases}\Delta u(x,y)=0, & (x,y)\in\overline{S(0,L)},\\ u(x,y)=g(x,y), & (x,y)\in\partial S(0,L),\end{cases}$$

dove $L\in\mathbb{R}^*_+$ ed è assegnata $g\colon\partial S(0,L)\to\mathbb{R}$.

Sia $u\in C^2\big(\overline{S(0,L)},\mathbb{R}\big)$. Passiamo in coordinate polari, ponendo

$$v\colon[0,L]\times[-\pi,\pi]\to\mathbb{R},\qquad v(r,\theta)=u(r\cos\theta,r\sin\theta).$$

Per il Teor. 6.2.1 se u verifica l'equazione di Laplace allora v è tale che

$$v_{rr}(r,\theta)+\frac{1}{r}v_r(r,\theta)+\frac{1}{r^2}v_{\theta\theta}(r,\theta)=0,\qquad (r,\theta)\in\,]0,L]\times[-\pi,\pi].\tag{6.2.2}$$

Viceversa se v verifica tale uguaglianza, allora u ha laplaciano nullo in $\overline{S(0,L)}\setminus\{0\}$; ma, poiché u è di classe C^2, le derivate parziali seconde sono continue, quindi Δu è nullo anche in 0.

Se u è di classe C^2 allora v è composizione di una funzione C^2 con una di classe C^∞, quindi è di classe C^2. Viceversa, sia $v\colon[0,L]\times[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ soluzione di (6.2.2) e supponiamo che v sia la trasformata in coordinate polari di una funzione u di classe C^2 in $\overline{S(0,L)}$. Poiché sia $v(r,\pi)$ che $v(r,-\pi)$ sono uguali a $u(-r,0)$, deve essere $v(r,\pi)=v(r,-\pi)$, per $r\in\,]0,L]$. Inoltre, $\forall\theta\in[-\pi,\pi]$, si ha $v(0,\theta)=u(0,0)$, pertanto $v(0,\theta)$ non deve dipendere da θ. Inoltre si verifica facilmente che, $\forall x\in\,]-L,0[$, si ha

$$\lim_{y\to0^+}\frac{u(x,y)-u(x,0)}{y}=v_\theta(-x,\pi),\qquad \lim_{y\to0^-}\frac{u(x,y)-u(x,0)}{y}=v_\theta(-x,-\pi);$$

pertanto affinché u sia derivabile rispetto a y in $(-x,0)$ deve risultare $v_\theta(r,\pi)=v_\theta(r,-\pi)$, $\forall r\in\,]0,L[$; per continuità l'uguaglianza deve valere anche per $r=L$. Analoghi ragionamenti relativi alla derivata seconda porterebbero a chiedere che valga $v_{\theta\theta}(r,\pi)=v_{\theta\theta}(r,-\pi)$, ma se v verifica l'equazione di Laplace questa uguaglianza è conseguenza dell'uguaglianza

$v(r,\pi) = v(r,-\pi)$. Infatti da qui segue $v_r(r,\pi) = v_r(r,-\pi)$ e $v_{rr}(r,\pi) = v_{rr}(r,-\pi)$, pertanto risulta

$$v_{\theta\theta}(r,\pi) = -r^2 v_{rr}(r,\pi) - r v_r(r,\pi) = -r^2 v_{rr}(r,-\pi) - r v_r(r,-\pi) = v_{\theta\theta}(r,-\pi).$$

Quindi, passando in coordinate polari, consideriamo il problema

$$\begin{cases} v_{rr}(r,\theta) + \dfrac{1}{r} v_r(r,\theta) + \dfrac{1}{r^2} v_{\theta\theta}(r,\theta) = 0, & (r,\theta) \in]0,L] \times [-\pi,\pi], \\ v(r,\pi) = v(r,-\pi), & r \in]0,L], \\ v_\theta(r,\pi) = v_\theta(r,-\pi), & r \in]0,L], \\ v(L,\theta) = h(\theta), & \theta \in [-\pi,\pi], \end{cases}$$

dove h è tale che $h(\theta) = g(L\cos\theta, L\sin\theta)$. Occorrerà verificare a posteriori che $v(0,\theta)$ sia costante rispetto a θ e che la soluzione espressa in coordinate cartesiane abbia derivate parziali fino al secondo ordine continue anche nell'origine.

Utilizziamo il metodo di separazione delle variabili, cercando una funzione non identicamente nulla v nella forma $v(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$, con $(r,\theta) \in [0,L] \times [-\pi,\pi]$, dove R e Θ sono funzioni di classe C^2. L'equazione di Laplace diventa

$$R''(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r} R'(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2} R(r)\Theta''(\theta) = 0,$$

da cui, dividendo per $R(r)\Theta(\theta)/r^2$, si ha

$$r^2 \frac{R''(r)\Theta(\theta)}{R(r)\Theta(\theta)} + r \frac{R'(r)\Theta(\theta)}{R(r)\Theta(\theta)} + \frac{R(r)\Theta''(\theta)}{R(r)\Theta(\theta)} = 0,$$

cioè

$$r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r \frac{R'(r)}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}.$$

Come già visto, poiché i due membri di questa uguaglianza dipendono da variabili diverse, essi sono costanti, quindi esiste $K \in \mathbb{R}$ tale che

$$r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r \frac{R'(r)}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = K. \tag{6.2.3}$$

Risolviamo l'equazione relativa a Θ. Imponendo anche le condizioni per $\theta = \pi$ e $\theta = -\pi$, dobbiamo cercare $K \in \mathbb{R}$ e $R \in C^2\big([-\pi,\pi],\mathbb{R}\big)$, non identicamente nulla, soluzione del seguente problema

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) = -K\Theta(\theta), & \theta \in [-\pi,\pi], \\ \Theta(\pi) = \Theta(-\pi), \\ \Theta'(\pi) = \Theta'(-\pi), \end{cases}$$

che è un problema di autovalori con condizioni periodiche. Per il Teor. 1.3.1 esiste una soluzione non identicamente nulla se, e solo se, $-K = -n^2$, con $n \in \mathbb{N}$, e si ha

$$\Theta(\theta) = c, \qquad c \in \mathbb{R}^*,$$

se $K = 0$ e

$$\Theta(\theta) = c_1 \cos(n\theta) + c_2 \sin(n\theta), \qquad (c_1,c_2) \in \big(\mathbb{R}^2\big)^*.$$

se $K = n^2$, con $n \in \mathbb{N}^*$.

Da (6.2.3) segue

$$r^2\,\frac{R''(r)}{R(r)}+r\,\frac{R'(r)}{R(r)}=n^2\,,$$

cioè

$$r^2R''(r)+r\,R'(r)-n^2R(r)=0\,.$$

Questa equazione differenziale è lineare e può facilmente essere trasformata in una equazione a coefficienti costanti considerando una nuova funzione incognita $T\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tale che $T(t)=R(e^t)$, cioè $R(r)=T(\log r)$. Risulta quindi

$$\begin{aligned}R'(r)&=\frac{1}{r}\,T'(\log r)\,,\\ R''(r)&=-\frac{1}{r^2}\,T'(\log r)+\frac{1}{r^2}\,T''(\log r)\,,\end{aligned}$$

pertanto si ha

$$r^2R''(r)+r\,R'(r)-n^2R(r)=-T'(\log r)+T''(\log r)+T'(\log r)-n^2T(\log r)\,.$$

Quindi R è soluzione dell'equazione $r^2R''(r)+r\,R'(r)-n^2R(r)=0$ se, e solo se, T è soluzione dell'equazione $T''(t)-n^2T(t)=0$. Questa equazione è a coefficienti costanti, l'equazione caratteristica è $s^2-n^2=0$, che ha le soluzioni $\pm n$ se $n\in\mathbb{N}^*$ e la soluzione doppia 0 se $n=0$. Abbiamo quindi le due soluzioni linearmente indipendenti $T(t)=e^{nt}$ e $T(t)=e^{-nt}$ nel primo caso e $T(t)=1$ e $T(t)=t$ nel secondo. A queste corrispondono rispettivamente le soluzioni $R(r)=r^n$, $R(r)=r^{-n}$, $R(r)=1$ e $R(r)=\log r$. La soluzione $R(r)\Theta(\theta)$ deve essere riscritta in coordinate cartesiane, quindi deve essere definita anche per $r=0$, pertanto le soluzioni r^{-n} e $\log r$ non sono accettabili. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}&v(r,\theta)=c\,, && c\in\mathbb{R}^*\,,\\ &v(r,\theta)=c_1r^n\cos(n\theta)+c_2r^n\sin(n\theta)\,, && (c_1,c_2)\in\left(\mathbb{R}^2\right)^*,n\in\mathbb{N}^*\,.\end{aligned}$$

Come osservato sopra, per concludere che queste sono soluzioni dell'equazione di Laplace occorre verificare che, in coordinate cartesiane, sono ben definite nell'origine e di classe C^2. Nel caso della funzione costante questo è verificato. Per $n\in\mathbb{N}^*$ si ha

$$\begin{aligned}r^n\cos(n\theta)&=r^n\,\frac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2}=\frac{(re^{i\theta})^n+(re^{-i\theta})^n}{2}=\\ &=\frac{(r\cos\theta+i\,r\sin\theta)^n+(r\cos\theta-i\,r\sin\theta)^n}{2}=\frac{(x+iy)^n+(x-iy)^n}{2}\,.\end{aligned}$$

Quindi in coordinate cartesiane otteniamo una funzione polinomiale, che è di classe C^∞. In modo analogo si ottiene che anche la funzione $r^n\sin(n\theta)$, espressa in coordinate cartesiane, è polinomiale. Perciò le funzioni

$$\begin{aligned}&v(r,\theta)=c\,,\\ &v(r,\theta)=c_1r^n\cos(n\theta)+c_2r^n\sin(n\theta)\,, && n\in\mathbb{N}^*\,.\end{aligned}$$

hanno laplaciano nullo e si ottengono scrivendo in coordinate polari funzioni di classe C^2 in coordinate cartesiane. Ciò è vero anche per ogni combinazione lineare di funzioni di questo tipo e, sotto opportune condizioni di convergenza, anche per il limite di tali combinazioni lineari. Abbiamo pertanto il seguente teorema.

6.2.2 Teorema
Siano $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *successioni in* $\mathbb{R}$ *tali che la serie di funzioni*

$$c_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\big(c_n r^n\cos(n\theta)+d_n r^n\sin(n\theta)\big) \tag{6.2.4}$$

converge uniformemente per $(r,\vartheta)\in\,]0,L[\,\times[-\pi,\pi]$ *insieme alle derivate parziali di ordine* 1 *e* 2. *Allora la funzione* $v\colon\,]0,L[\,\times[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$, *somma di tale serie, verifica l'equazione*

$$v_{rr}(r,\theta)+\frac{1}{r}v_r(r,\theta)+\frac{1}{r^2}v_{\theta\theta}(r,\theta)=0,\qquad (r,\theta)\in\,]0,L[\,\times[-\pi,\pi]\,.$$

Non abbiamo finora considerato la condizione sulla frontiera. Affinché questa sia verificata i coefficienti della serie scritta sopra devono essere tali che

$$c_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\big(c_nL^n\cos(n\theta)+d_nL^n\sin(n\theta)\big)=h(\theta),$$

$\forall\theta\in[-\pi,\pi]$. Quindi, indicati come sempre con a_n e b_n i coefficienti di Fourier di h, deve essere $c_0=a_0/2$, $c_nL^n=a_n$ e $d_nL^n=b_n$. Pertanto si ha la soluzione

$$v(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n}{L^n}\big(a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)\big),$$

con

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(\varphi)\cos(n\varphi)\,d\varphi,\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(\varphi)\sin(n\varphi)\,d\varphi\,.$$

Si può dimostrare che, se h è di classe C^2, allora la serie converge uniformemente insieme alle serie delle derivate di ordine 1 e 2.

Quindi

$$v(r,\theta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n}{L^n}\big(\cos(n\varphi)\cos(n\theta)+\sin(n\varphi)\sin(n\theta)\big)\right)h(\varphi)\,d\varphi\,.$$

Si ha

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n}{L^n}\big(\cos(n\varphi)\cos(n\theta)+\sin(n\varphi)\sin(n\theta)\big)=\\
&=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n}{L^n}\cos\big(n(\theta-\varphi)\big)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n}{L^n}\,\frac{e^{in(\theta-\varphi)}+e^{-in(\theta-\varphi)}}{2}=\\
&=\frac{1}{2}\left(1+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{re^{i(\theta-\varphi)}}{L}\right)^n+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{re^{-i(\theta-\varphi)}}{L}\right)^n\right)=\\
&=\frac{1}{2}\left(1+\frac{re^{i(\theta-\varphi)}}{L}\,\frac{1}{1-\dfrac{re^{i(\theta-\varphi)}}{L}}+\frac{re^{-i(\theta-\varphi)}}{L}\,\frac{1}{1-\dfrac{re^{-i(\theta-\varphi)}}{L}}\right)=\\
&=\frac{1}{2}\left(1+\frac{re^{i(\theta-\varphi)}}{L-re^{i(\theta-\varphi)}}+\frac{re^{-i(\theta-\varphi)}}{L-re^{-i(\theta-\varphi)}}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{rLe^{i(\theta-\varphi)}+rLe^{-i(\theta-\varphi)}-2r^2}{L^2-rLe^{i(\theta-\varphi)}-rLe^{-i(\theta-\varphi)}+r^2}\right)=\\
&=\frac{1}{2}\,\frac{L^2-r^2}{L^2-2rL\cos(\theta-\varphi)+r^2},
\end{aligned}$$

pertanto

$$v(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{L^2-r^2}{L^2-2rL\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,h(\varphi)\,d\varphi\,.$$

Notiamo che

$$\begin{aligned}&\|(r\cos\theta, r\sin\theta)-(L\cos\varphi, L\sin\varphi)\|^2=(r\cos\theta-L\cos\varphi)^2+(r\sin\theta-L\sin\varphi)^2=\\&=r^2-2rL(\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi)+L^2=r^2-2rL\cos(\theta-\varphi)+L^2\,;\end{aligned}$$

quindi, tornando in coordinate cartesiane,

$$u(x,y)=\frac{L^2-\|(x,y)\|^2}{2\pi L}\int_{\partial S(0,L)}\frac{1}{\|(\xi,\eta)-(x,y)\|^2}\,g(\xi,\eta)\,ds_{(\xi,\eta)}\,.$$

Poiché $\|(\xi,\eta)-(x,y)\|^2=(\xi-x)^2+(\eta-y)^2$ è continua rispetto a (ξ,η,x,y), indefinitamente derivabile rispetto a x e a y, con derivate parziali di qualunque ordine continue, la funzione integranda nella formula precedente ha le stesse proprietà. Pertanto, adattando il Teor. El-14.4.2, si prova che la funzione u definita sopra è di classe C^∞.

Quindi si ha il seguente teorema.

6.2.3 Teorema
Sia $g\in C\big(\partial S(0,L),\mathbb{R}\big)$. *Allora la funzione* $u:\overline{S(0,L)}\to\mathbb{R}$,

$$u(x,y)=\begin{cases}\dfrac{L^2-\|(x,y)\|^2}{2\pi L}\displaystyle\int_{\partial S(0,L)}\frac{1}{\|(\xi,\eta)-(x,y)\|^2}\,g(\xi,\eta)\,ds_{(\xi,\eta)}, & \textit{se } (x,y)\in S(0,L),\\ g(x,y), & \textit{se } (x,y)\in\partial S(0,L),\end{cases}$$

è continua, la sua restrizione a $S(0,L)$ *è di classe* C^∞ *ed è soluzione del problema*

$$\begin{cases}\Delta u(x,y)=0, & (x,y)\in S(0,L),\\ u(x,y)=g(x,y), & (x,y)\in\partial S(0,L).\end{cases}$$

La funzione

$$(x,y,\xi,\eta)\mapsto\frac{L^2-\|(x,y)\|^2}{2\pi L\,\|(\xi,\eta)-(x,y)\|^2}$$

è detta **nucleo di Poisson** per il problema di Dirichlet per l'operatore di Laplace.

6.2.3 Problema di Neumann

Consideriamo il problema di Neumann per l'equazione di Laplace

$$\begin{cases}\Delta u(x,y)=0, & (x,y)\in\overline{S(0,L)},\\ \dfrac{\partial u}{\partial\nu}(x,y)=g(x,y), & (x,y)\in\partial S(0,L),\end{cases}$$

dove $L\in\mathbb{R}_+^*$ ed è assegnata $g:\partial S(0,L)\to\mathbb{R}$.

Passando in coordinate polari, ricordando le osservazioni già fatte nella sottosezione precedente, il problema diventa

$$\begin{cases} v_{rr}(r,\theta)+\dfrac{1}{r}v_r(r,\theta)+\dfrac{1}{r^2}v_{\theta\theta}(r,\theta)=0, & (r,\theta)\in\,]0,L[\,\times[-\pi,\pi]\,, \\ v(r,\pi)=v(r,-\pi), & r\in\,]0,L[\,, \\ v_\theta(r,\pi)=v_\theta(r,-\pi), & r\in\,]0,L[\,, \\ v_r(L,\theta)=h(\theta), & \theta\in[-\pi,\pi]\,, \end{cases}$$

dove h è tale che $h(\theta)=g(L\cos\theta,L\sin\theta)$.

Procedendo come sopra otteniamo la funzione armonica (6.2.4), imponiamo che verifichi la condizione di Neumann. Poiché si ha

$$v_r(r\theta)=\sum_{n=1}^{+\infty}\bigl(nc_n r^{n-1}\cos(n\theta)+nd_n r^{n-1}\sin(n\theta)\bigr),$$

deve essere

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\bigl(nc_n r^{n-1}\cos(n\theta)+nd_n r^{n-1}\sin(n\theta)\bigr)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\bigl(a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)\bigr),$$

dove gli a_n e i b_n sono i coefficienti di Fourier di h, cioè

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(\varphi)\cos(n\varphi)\,d\varphi,\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(\varphi)\sin(n\varphi)\,d\varphi.$$

Affinché valga l'uguaglianza deve essere $a_0=0$ e, per $n\in\mathbb{N}^*$,

$$c_n=\frac{a_n}{nL^{n-1}},\qquad d_n=\frac{b_n}{nL^{n-1}},$$

mentre il coefficiente c_0 può essere scelto arbitrariamente. Si ha quindi

$$v(r,\theta)=c_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n}{nL^{n-1}}\bigl(a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)\bigr).$$

Si verifica facilmente che questa serie converge puntualmente in $\overline{S(0,L)}$ e converge totalmente in ogni cerchio di raggio minore di L.

Abbiamo trovato una soluzione solo se il coefficiente di Fourier a_0 è nullo, cioè se h ha integrale nullo in $[-\pi,\pi]$; questo equivale alla condizione che g abbia integrale nullo in $\partial S(0,L)$. Questa restrizione non è dovuta al metodo utilizzato per risolvere il problema, ma è una proprietà generale del problema di Neumann. Infatti, se u è armonica, per il Teorema della divergenza in $\mathbb{R}^2$ El-17.7.21, si ha

$$\int_{\partial S(0,L)}\frac{\partial u}{\partial \nu}\,ds=\int_{\partial S(0,L)}\nabla u\cdot\nu\,ds=\iint_{S(0,L)}\nabla\cdot\nabla u(x,y)\,dx\,dy=\iint_{S(0,L)}\Delta u(x,y)\,dx\,dy=0.$$

Osserviamo che, poiché la dimostrazione si basa sul Teorema della divergenza, il risultato vale per aperti regolari arbitrari.

Anche il fatto che la soluzione non è unica è un fenomeno generale; evidentemente ogni funzione costante ha laplaciano nullo e derivata normale alla frontiera nulla; quindi la somma di una soluzione del problema di Neumann con una costante è ancora soluzione dello stesso problema.

Considerando il caso $a_0 = 0$, si ha

$$v(r,\theta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n}{nL^{n-1}}\big(\cos(n\varphi)\cos(n\theta)+\sin(n\varphi)\sin(n\theta)\big)h(\varphi)\,d\varphi\,.$$

Risulta

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n}{nL^{n-1}}\big(\cos(n\varphi)\cos(n\theta)+\sin(n\varphi)\sin(n\theta)\big) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n}{nL^{n-1}}\cos\big(n(\theta-\varphi)\big) =$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n}{nL^{n-1}}\,\frac{e^{in(\theta-\varphi)}+e^{-in(\theta-\varphi)}}{2} = \frac{L}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{re^{i(\theta-\varphi)}}{L}\right)^n + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{re^{-i(\theta-\varphi)}}{L}\right)^n\right).$$

Poiché (v. Es. El-15.2.8), per $a\in\mathbb{C}$ con $|a|<1$, si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{n} = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-a)^n = -\log(1-a)\,,$$

quanto scritto sopra è uguale a

$$-\frac{L}{2}\left(\log\left(1-\frac{re^{i(\theta-\varphi)}}{L}\right)+\log\left(1-\frac{re^{-i(\theta-\varphi)}}{L}\right)\right) =$$
$$= -\frac{L}{2}\log\left(\frac{(L-re^{i(\theta-\varphi)})(L-re^{-i(\theta-\varphi)})}{L^2}\right) = \frac{L}{2}\log\left(\frac{L^2}{L^2-2rL\cos(\theta-\varphi)+r^2}\right),$$

pertanto risulta

$$v(r,\theta) = \frac{L}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left(\frac{L^2}{L^2-2rL\cos(\theta-\varphi)+r^2}\right)h(\varphi)\,d\varphi\,.$$

Poiché, come già osservato,

$$\|(r\cos\theta, r\sin\theta)-(L\cos\varphi, L\sin\varphi)\|^2 = r^2-2rL\cos(\theta-\varphi)+L^2\,,$$

tornando in coordinate cartesiane si ha

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial S(0,L)}\log\left(\frac{L^2}{\|(\xi,\eta)-(x,y)\|^2}\right)g(\xi,\eta)\,ds_{(\xi,\eta)}\,.$$

Osserviamo che, se $(x,y)\in\partial S(0,L)$, allora la funzione integranda non è definita in tutto $\partial S(0,L)$. Abbiamo un integrale generalizzato, che è sempre convergente, per la presenza della funzione logaritmo.

Utilizzando questa formula, si può dimostrare il seguente teorema.

6.2.4 Teorema
Sia $g \in C\big(\partial S(0,L),\mathbb{R}\big)$ *tale che* $\int_{\partial S(0,L)} g\,ds = 0$. *Allora la funzione*

$$u\colon \overline{S(0,L)} \to \mathbb{R}, \qquad u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial S(0,L)} \log\left(\frac{L^2}{\|(\xi,\eta)-(x,y)\|^2}\right) g(\xi,\eta)\,ds_{(\xi,\eta)}.$$

è continua, la sua restrizione a $S(0,L)$ *è di classe* C^∞, *ammette derivata normale in ogni punto di* $\partial S(0,L)$ *ed è soluzione del problema*

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, & (x,y)\in S(0,L),\\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x,y) = g(x,y), & (x,y)\in \partial S(0,L). \end{cases}$$

6.3 Equazione di Laplace nell'esterno di un cerchio

Sia v una funzione di classe C^2 nel cerchio $\overline{S(0,L)}$, espressa in coordinate polari; per $r>L$ poniamo

$$w(r,\theta) = v\Big(\frac{L^2}{r},\theta\Big).$$

Allora

$$\begin{aligned} w_r(r,\theta) &= -\frac{L^2}{r^2} D_1 v\Big(\frac{L^2}{r},\theta\Big),\\ w_{rr}(r,\theta) &= \frac{2L^2}{r^3} D_1 v\Big(\frac{L^2}{r},\theta\Big) + \frac{L^4}{r^4} D_{11} v\Big(\frac{L^2}{r},\theta\Big),\\ w_{\theta\theta}(r,\theta) &= D_{22} v\Big(\frac{L^2}{r},\theta\Big). \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \Delta w(r,\theta) &= w_{rr}(r,\theta) + \frac{1}{r}\,w_r(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\,w_{\theta\theta}(r,\theta) =\\ &= \frac{L^4}{r^4} D_{11} v\Big(\frac{L^2}{r},\theta\Big) + \frac{L^2}{r^3} D_1 v\Big(\frac{L^2}{r},\theta\Big) + \frac{1}{r^2} D_{22} v\Big(\frac{L^2}{r},\theta\Big) =\\ &= \frac{L^4}{r^4}\left(D_{11} v\Big(\frac{L^2}{r},\theta\Big) + \frac{1}{L^2/r} D_1 v\Big(\frac{L^2}{r},\theta\Big) + \frac{1}{L^4/r^2} D_{22} v\Big(\frac{L^2}{r},\theta\Big)\right) = \frac{L^4}{r^4}\,\Delta v\Big(\frac{L^2}{r},\theta\Big). \end{aligned}$$

Pertanto se v è definita in $\overline{S(0,L)}$ e ha laplaciano nullo, allora w è definita nel complementare di $S(0,L)$ e ha laplaciano nullo.

La trasformazione che a (r,θ) fa corrispondere $(L^2/r,\theta)$, espressa in coordinate cartesiane a $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ fa corrispondere $(L^2/r^2)(r\cos\theta, r\sin\theta)$, quindi a (x,y) fa corrispondere $\big(L^2/(x^2+y^2)\big)(x,y)$. Pertanto se u è soluzione del problema

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, & (x,y)\in \overline{S(0,L)},\\ u(x,y) = g(x,y), & (x,y)\in \partial S(0,L), \end{cases}$$

allora la funzione $(x,y) \mapsto u\big((L^2/(x^2+y^2))(x,y)\big)$ è soluzione del problema

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0\,, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus S(0,L)\,, \\ u(x,y) = g(x,y)\,, & (x,y) \in \partial S(0,L)\,. \end{cases}$$

Questa non è l'unica soluzione. Infatti nella Sottosezione 6.2.2, utilizzando il metodo di separazione delle variabili, abbiamo visto che le funzioni, in coordinate polari, $\log r$ e 1 sono armoniche in $(\mathbb{R}^2)^*$. Pertanto la funzione $\log r - \log L$, cioè $\log\big(\sqrt{x^2+y^2}/L\big)$, è armonica in $\mathbb{R}^2 \setminus S(0,L)$ e si annulla in $\partial S(0,L)$; quindi è soluzione non nulla del problema precedente con $g = 0$. Tale problema ha anche la soluzione identicamente nulla, quindi ha due soluzioni distinte.

Si può dimostrare che, aggiungendo la condizione che la soluzione sia limitata all'infinito, si ha unicità.

6.4 Equazione di Poisson

In questa sezione studiamo l'equazione di Laplace non omogenea $\Delta u = f$, detta **equazione di Poisson**.

6.4.1 Identità di Green

Ricaviamo due formule utili per lo studio dell'equazione di Poisson.

Siano A un aperto di $\mathbb{R}^2$, $u \in C^1(A,\mathbb{R})$ e $v \in C^2(A,\mathbb{R})$; si ha

$$\nabla \cdot (u \nabla v) = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j}\big(u v_{x_j}\big) = \sum_{j=1}^{2}\big(u_{x_j} v_{x_j} + u v_{x_j x_j}\big) = \nabla u \cdot \nabla v + u \Delta v\,.$$

Questa uguaglianza vale anche in dimensione maggiore di 2. Se Ω è un aperto regolare (v. Def. El-17.7.3) tale che $\overline{\Omega} \subseteq A$, allora, per il Teorema della divergenza in $\mathbb{R}^2$ El-17.7.21, si ha

$$\begin{aligned} &\iint_\Omega u \Delta v \, dx\, dy = -\iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx\, dy + \iint_\Omega \nabla \cdot (u \nabla v)\, dx\, dy = \\ &= -\iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx\, dy + \int_{\partial\Omega} u \nabla v \cdot \nu \, ds = -\iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx\, dy + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu}\, ds\,. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi dimostrato il seguente teorema.

6.4.1 Teorema (prima identità di Green)

Siano A un aperto di $\mathbb{R}^2$, Ω un aperto regolare tale che $\overline{\Omega} \subseteq A$, $u \in C^1(A,\mathbb{R})$ e $v \in C^2(A,\mathbb{R})$; allora

$$\iint_\Omega u \Delta v \, dx\, dy = -\iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx\, dy + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu}\, ds\,. \tag{6.4.1}$$

Se u e v sono entrambe di classe C^2, possiamo riscrivere la prima identità di Green scambiando u e v, si ottiene

$$\iint_\Omega v\Delta u\,dx\,dy = -\iint_\Omega \nabla v \cdot \nabla u\,dx\,dy + \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \nu}\,ds\,.$$

Sottraendo membro a membro queste due identità si ha il seguente teorema.

6.4.2 Teorema (seconda identità di Green)
Siano A un aperto di $\mathbb{R}^2$, Ω un aperto regolare tale che $\overline{\Omega}\subseteq A$, $u,v\in C^2(A,\mathbb{R})$; allora

$$\iint_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\,dx\,dy = \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)ds\,. \tag{6.4.2}$$

6.4.2 Equazione non omogenea

Sia $(c,d)\in\mathbb{R}^2$ e poniamo

$$w:\mathbb{R}^2\setminus\{(c,d)\}\to\mathbb{R}, \qquad w(x,y)=\log\|(x,y)-(c,d)\| = \frac{1}{2}\log\big((x-c)^2+(y-d)^2\big).$$

Si ha, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(c,d)\}$,

$$\begin{aligned}
w_x(x,y) &= \frac{x-c}{(x-c)^2+(y-d)^2},\\
w_{xx}(x,y) &= \frac{(x-c)^2+(y-d)^2-2(x-c)^2}{\big((x-c)^2+(y-d)^2\big)^2} = \frac{-(x-c)^2+(y-d)^2}{\big((x-c)^2+(y-d)^2\big)^2},\\
w_y(x,y) &= \frac{y-d}{(x-c)^2+(y-d)^2},\\
w_{yy}(x,y) &= \frac{(x-c)^2+(y-d)^2-2(y-c)^2}{\big((x-c)^2+(y-d)^2\big)^2} = \frac{(x-c)^2-(y-d)^2}{\big((x-c)^2+(y-d)^2\big)^2},
\end{aligned}$$

pertanto $\Delta w(x,y) = w_{xx}(x,y)+w_{yy}(x,y)=0$.

Siano Ω un aperto regolare di $\mathbb{R}^2$, $z\in C\big(\overline{\Omega},\mathbb{R}\big)$, di classe C^2 in Ω, armonica e tale che $z=w$ in $\partial\Omega$ e u una funzione di classe C^2 in un aperto contenente $\overline{\Omega}$. Fissato $(c,d)\in\Omega$, poniamo $S_\varepsilon = S\big((c,d),\varepsilon\big)$, con $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ tale che $\overline{S_\varepsilon}\subset\Omega$. Dalla seconda identità di Green (6.4.2), applicata a u e $w-z$, segue

$$\begin{aligned}
-\iint_{\Omega\setminus S_\varepsilon}\Delta u(w-z)\,dx\,dy &= \int_{\partial(\Omega\setminus S_\varepsilon)}\left(u\frac{\partial(w-z)}{\partial\nu} - \frac{\partial u}{\partial\nu}(w-z)\right)ds =\\
&= \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial(w-z)}{\partial\nu}\,ds - \int_{\partial S_\varepsilon} u\frac{\partial(w-z)}{\partial\nu}\,ds + \int_{\partial S_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial\nu}(w-z)\,ds\,,
\end{aligned}$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che $w-z$ è nulla in $\partial\Omega$ e la normale esterna a ∂S_ε è opposta alla normale esterna a $\partial(\Omega\setminus S_\varepsilon)$ nello stesso punto.

Poiché $\Delta u(w-z)$ è i. s. g. in Ω e l'area di S_ε tende a 0 per ε che tende a 0, si ha

$$\iint_{\Omega\setminus S_\varepsilon} \Delta u(w-z)\,dx\,dy \to \iint_\Omega \Delta u(w-z)\,dx\,dy\,.$$

Consideriamo la curva ∂S_ε parametrizzata da

$$f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}^2, \qquad f(\varphi)=(c+\varepsilon\sin\varphi, d+\varepsilon\cos\varphi);$$

si ha

$$\|f'(\varphi)\| = \|(-\varepsilon\sin\varphi, \varepsilon\cos\varphi)\| = \sqrt{\varepsilon^2\cos^2\varphi+\varepsilon^2\sin^2\varphi}=\varepsilon\,.$$

Abbiamo quindi

$$\int_{\partial S_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \nu}(w-z)\,ds =$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} \nabla u(c+\varepsilon\cos\varphi, d+\varepsilon\sin\varphi)\cdot(\cos\varphi,\sin\varphi)\big(\log\varepsilon - z(c+\varepsilon\cos\varphi, d+\varepsilon\sin\varphi\partial S_\varepsilon)\big)\,\varepsilon\,d\varphi$$
$$\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0,$$
$$\int_{\partial S_\varepsilon} u\,\frac{\partial z}{\partial \nu}\,ds =$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} u(c+\varepsilon\cos\varphi, d+\varepsilon\sin\varphi)\nabla z(c+\varepsilon\cos\varphi, d+\varepsilon\sin\varphi)\cdot(\cos\varphi,\sin\varphi)\,\varepsilon\,d\varphi \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0,$$
$$\int_{\partial S_\varepsilon} u\,\frac{\partial w}{\partial \nu}\,ds =$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} u(c+\varepsilon\cos\varphi, d+\varepsilon\sin\varphi)\nabla w(c+\varepsilon\cos\varphi, d+\varepsilon\sin\varphi)\cdot(\cos\varphi,\sin\varphi)\,\varepsilon\,d\varphi =$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} u(c+\varepsilon\cos\varphi, d+\varepsilon\sin\varphi)\left(\frac{\cos\varphi}{\varepsilon},\frac{\sin\varphi}{\varepsilon}\right)\cdot(\cos\varphi,\sin\varphi)\,\varepsilon\,d\varphi =$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} u(c+\varepsilon\cos\varphi, d+\varepsilon\sin\varphi)\frac{1}{\varepsilon}\,\varepsilon\,d\varphi \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 2\pi u(c,d).$$

Quindi

$$-\iint_\Omega \Delta u(w-z)\,dx\,dy = \int_{\partial\Omega} u\,\frac{\partial(w-z)}{\partial\nu}\,ds - 2\pi u(c,d),$$

da cui segue

$$u(c,d)=\frac{1}{2\pi}\iint_\Omega \Delta u(w-z)\,dx\,dy + \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega} u\,\frac{\partial(w-z)}{\partial\nu}\,ds\,.$$

Abbiamo quindi dimostrato il seguente teorema.

6.4.3 Teorema
Siano Ω un aperto regolare di $\mathbb{R}^2$, $f:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$ e $g:\partial\Omega\to\mathbb{R}$. Se $u\in C^2(A,\mathbb{R})$, con A aperto contenente $\overline{\Omega}$, è soluzione del problema

$$\begin{cases}\Delta u(x,y)=f(x,y), & (x,y)\in\Omega,\\ u(x,y)=g(x,y), & (x,y)\in\partial\Omega,\end{cases}$$

allora, $\forall(x,y)\in\Omega$, si ha

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\iint_\Omega f(\xi,\eta)\big(w(\xi,\eta)-z(\xi,\eta)\big)\,d\xi\,d\eta+\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega} g\,\frac{\partial(w-z)}{\partial\nu}\,ds, \qquad (6.4.3)$$

dove

$$w:\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y)\}\to\mathbb{R}, \qquad w(\xi,\eta)=\log\|(x,y)-(\xi,\eta)\|$$

e $z:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$ è armonica in Ω e coincide con w in $\partial\Omega$.

Questo teorema fornisce una rappresentazione della soluzione, nel caso che essa esista. Si può viceversa dimostrare che la funzione definita dalla (6.4.3) è soluzione del problema di Dirichlet purché la funzione f sia di classe C^1. Per scrivere tale equazione è però necessario che esista la funzione armonica z che coincide con w in in $\partial\Omega$. vi sono aperti regolari per cui tale funzione non esiste. Una condizione che assicura l'esistenza di z è che Ω sia convesso.

6.4.3 Equazione non omogenea in un cerchio

Se $\Omega=S(0,L)$, la funzione z che compare nel Teor. 6.4.3 può essere determinata esplicitamente. Fissato $(c,d)\in S(0,L)$ dobbiamo trovare z tale che

$$\begin{cases}\Delta z(x,y)=0, & (x,y)\in S(0,L),\\ z(x,y)=\log\|(x,y)-(c,d)\|, & (x,y)\in\partial S(0,L).\end{cases}$$

Per quanto visto nella Sezione 6.3, tale funzione si può ottenere con la trasformazione

$$(x,y)\mapsto\frac{L^2}{\|(x,y)\|^2}(x,y),$$

a partire da una funzione armonica nell'esterno di $S(0,L)$, che abbia limite reale all'infinito e che assuma i valori richiesti in $\partial S(0,L)$. La funzione $\log\|(x,y)-(c,d)\|$ ha queste proprietà, ad eccezione dell'esistenza del limite reale all'infinito; per ottenere la funzione cercata è sufficiente sottrarre $\log\big(\|(x,y)\|/L\big)$, che si annulla in $\partial S(0,L)$ e cancella la singolarità all'infinito. Otteniamo la funzione

$$(x,y)\mapsto\log\left(\frac{L\,\|(x,y)-(c,d)\|}{\|(x,y)\|}\right).$$

Quindi

$$z(x,y)=\log\left(\frac{L\left\|\frac{L^2}{\|(x,y)\|^2}(x,y)-(c,d)\right\|}{\left\|\frac{L^2}{\|(x,y)\|^2}(x,y)\right\|}\right)=\log\left\|\frac{L}{\|(x,y)\|}(x,y)-\frac{\|(x,y)\|}{L}(c,d)\right\|=$$
$$=\log\frac{\left\|L^2(x,y)-\|(x,y)\|^2(c,d)\right\|}{L\|(x,y)\|},$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
z(x,y)-w(x,y)&=\log\left(\frac{\left\|L^2(x,y)-\|(x,y)\|^2(c,d)\right\|}{L\|(x,y)\|\,\|(x,y)-(c,d)\|}\right)=\\
&=\frac{1}{2}\log\left(\frac{\left\|L^2(x,y)-\|(x,y)\|^2(c,d)\right\|^2}{L^2\|(x,y)\|^2\|(x,y)-(c,d)\|^2}\right)=\\
&=\frac{1}{2}\log\left(\frac{L^4\|(x,y)\|^2-2L^2\|(x,y)\|^2(x,y)\cdot(c,d)+\|(x,y)\|^4\|(c,d)\|^2}{L^2\|(x,y)\|^2\left(\|(x,y)\|^2-2(x,y)\cdot(c,d)+\|(c,d)\|^2\right)}\right)=\\
&=\frac{1}{2}\log\left(\frac{L^4-2L^2(x,y)\cdot(c,d)+\|(x,y)\|^2\|(c,d)\|^2}{L^2\left(\|(x,y)\|^2-2(x,y)\cdot(c,d)+\|(c,d)\|^2\right)}\right)=\\
&=\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{L^4+\|(x,y)\|^2\|(c,d)\|^2-L^2\|(x,y)\|^2-L^2\|(c,d)\|^2}{L^2\left(\|(x,y)\|^2-2(x,y)\cdot(c,d)+\|(c,d)\|^2\right)}\right)=\\
&=\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\left(L^2-\|(x,y)\|^2\right)\left(L^2-\|(c,d)\|^2\right)}{L^2\|(x,y)-(c,d)\|^2}\right).
\end{aligned}$$

Abbiamo quindi il seguente teorema.

6.4.4 Teorema
Siano $L\in\mathbb{R}_+^*$, $f\in C^1\left(\overline{S(0,L)}\right)$. *Allora la funzione* $u:\overline{S(0,L)}\to\mathbb{R}$

$$u(x,y)=\begin{cases}-\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\iint_{S(0,L)}f(\xi,\eta)\log\left(1+\frac{\left(L^2-\|(x,y)\|^2\right)\left(L^2-\|(\xi,\eta)\|^2\right)}{L^2\|(x,y)-(\xi,\eta)\|^2}\right)d\xi\,d\eta, & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{se } (x,y)\in S(0,L), & \\ 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{se } (x,y)\in\partial S(0,L). \end{cases}$$

è soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases}\Delta u(x,y)=f(x,y), & (x,y)\in S(0,L),\\ u(x,y)=0, & (x,y)\in\partial S(0,L).\end{cases}$$

6.5 Unicità della soluzione

Da quanto esposto nella Sezione 6.4 segue l'unicità della soluzione del problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace. Ciò si può ricavare anche con metodi più semplici. A tale scopo proviamo anzitutto il seguente teorema.

6.5.1 Teorema (principio della media per funzioni armoniche)
Siano A *un aperto di* $\mathbb{R}^2$, $u \in C^2(A,\mathbb{R})$ *tale che,* $\forall (x,y) \in A$, *si ha* $\Delta u(x,y) = 0$. *Se* $(c,d) \in A$ *e* $R \in \mathbb{R}_+^*$ *sono tali che* $\overline{S\big((c,d),R\big)} \subset A$, *allora*

$$u(c,d) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial S((c,d),R)} u(x,y)\, ds_{(x,y)}.$$

Questo teorema afferma che se una funzione è armonica allora il suo valore in un punto è la media del valore nella frontiera di ogni cerchio centrato in quel punto e contenuto nel dominio della funzione. Si può dimostrare che vale anche il viceversa.

Dimostrazione. Poniamo

$$F:]0,R] \to \mathbb{R}, \qquad F(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial S((c,d),r)} u(x,y)\, ds_{(x,y)}.$$

Si ha

$$\begin{aligned}\int_{\partial S((c,d),r)} u(x,y)\, ds_{(x,y)} &= \int_{-\pi}^{\pi} u(c + r\cos\theta, d + r\sin\theta)\sqrt{(-r\sin\theta)^2 + (r\cos\theta)^2}\, d\theta = \\ &= r\int_{-\pi}^{\pi} u(c + r\cos\theta, d + r\sin\theta)\, d\theta.\end{aligned}$$

Pertanto, per il Teor. El-14.4.2, si ha

$$\begin{aligned}F'(r) &= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial r}\int_{-\pi}^{\pi} u(c + r\cos\theta, d + r\sin\theta)\, d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial r} u(c + r\cos\theta, d + r\sin\theta)\, d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big(u_x(c + r\cos\theta, d + r\sin\theta)\cos\theta + u_y(c + r\cos\theta, d + r\sin\theta)\sin\theta\big)\, d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \nabla u(c + r\cos\theta, d + r\sin\theta)\cdot(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi r}\int_{\partial S((c,d),r)} \nabla u \cdot \nu\, ds.\end{aligned}$$

Poiché $\Delta u = 0$, per il Teorema della divergenza in $\mathbb{R}^2$ El-17.7.19, si ha

$$\int_{\partial S((c,d),r)} \nabla u \cdot \nu\, ds = \int_{S((c,d),r)} \nabla \cdot \nabla u(x,y)\, dx\, dy = \int_{S((c,d),r)} \Delta u(x,y)\, dx\, dy = 0.$$

Pertanto, $\forall r \in]0,R]$, si ha $F'(r) = 0$, quindi F è costante. Poiché

$$\lim_{r\to 0} F(r) = \lim_{r\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(c + r\cos\theta, d + r\sin\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(c,d)\, d\theta = u(c,d),$$

tale costante è $u(c,d)$, quindi

$$\frac{1}{2\pi R}\int_{\partial S((c,d),R)} u(x,y)\,ds_{(x,y)} = F(R) = u(c,d). \qquad \square$$

6.5.2 Teorema (principio del massimo per funzioni armoniche)

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^2$, $u \in C(\overline{\Omega},\mathbb{R})$, la cui restrizione a Ω è di classe C^2. Se, $\forall (x,y)\in\Omega$, si ha $\Delta u(x,y)=0$, allora

$$\max\left\{ u(x,y) \,\middle|\, (x,y)\in\overline{\Omega}\right\} = \max\{ u(x,y) \mid (x,y)\in\partial\Omega\},$$
$$\min\left\{ u(x,y) \,\middle|\, (x,y)\in\overline{\Omega}\right\} = \min\{ u(x,y) \mid (x,y)\in\partial\Omega\}.$$

Osserviamo che i massimi e i minimi che compaiono nell'enunciato esistono per il Teorema di Weierstrass El-10.6.12.

Dimostrazione. Dimostriamo la proprietà relativa al massimo, quella relativa al minimo si dimostra in modo analogo.

Se $\forall (x,y)\in\Omega$ si ha $u(x,y)<\max\limits_{\overline{\Omega}} u$ la tesi è verificata.

In caso contrario u assume il suo valore massimo in Ω, quindi esiste $(c,d)\in\Omega$ tale che $u(c,d)=\max\limits_{\overline{\Omega}} u$. Per il Principio della media 6.5.1, qualunque sia $R\in\mathbb{R}_+^*$, tale che $\overline{S((c,d),R)}\subset\Omega$, si ha

$$2\pi R u(c,d) = \int_{\partial S((c,d),R)} u(x,y)\,ds_{(x,y)},$$

cioè

$$\int_{\partial S((c,d),R)} \big(u(c,d)-u(x,y)\big)\,ds_{(x,y)} = 0.$$

Poiché $u(c,d)$ è il massimo di u, la funzione integranda è non negativa. Se esistesse (x,y) per cui la funzione integranda è positiva anche l'integrale sarebbe positivo, il che è assurdo. Pertanto, $\forall (x,y)\in\partial S\big((c,d),R\big)$, si ha $u(x,y)=u(c,d)$.

Sia (x_0,y_0) il punto di $\partial\Omega$ a distanza minima da (c,d) e poniamo $L=\|(x_0,y_0)-(c,d)\|$. Allora $S\big((c,d),L\big)\subseteq\Omega$ e $(x_0,y_0)\in\overline{S\big((c,d),L\big)}$. Qualunque sia $(x,y)\in S\big((c,d),L\big)$, posto $R=\|(x,y)-(c,d)\|$, si ha $(x,y)\in\overline{S\big((c,d),R\big)}\subset S\big((c,d),L\big)\subseteq\Omega$, quindi, per quanto già provato, $u(x,y)=u(c,d)$. Pertanto u vale costantemente $u(c,d)$ in $S\big((c,d),L\big)$; per continuità ciò è vero anche in $\overline{S\big((c,d),L\big)}$, in particolare in (x_0,y_0). Quindi $u(x_0,y_0)=u(c,d)$, da cui

$$\max_{\partial\Omega} u \geq u(x_0,y_0) = u(c,d) = \max_{\overline{\Omega}} u.$$

Pertanto $\max_{\partial\Omega} u = \max_{\overline{\Omega}} u$. $\square$

Dal Principio del massimo segue che se una funzione armonica si annulla nella frontiera del dominio, quindi ha massimo e minimo nulli nella frontiera, allora ha massimo e minimo nulli in tutto il dominio e quindi è nulla. Abbiamo quindi il seguente teorema.

6.5.3 Teorema
Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^2$. Il problema

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, & (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) = 0, & (x,y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

ha solo la soluzione identicamente nulla.

Da questo segue immediatamente l'unicità della soluzione del problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson.

Capitolo 7

Equazione delle onde in dimensione 2 e 3

7.1 Alcune proprietà del laplaciano

Sia $u \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$; consideriamo la funzione v ottenuta da u passando in coordinate sferiche (v. Sottosezione El-13.9.3), cioè

$$v(r, \theta, \varphi) = u(r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta).$$

Si ha, omettendo l'argomento di u e delle sue derivate,

$$\begin{aligned}
v_r &= u_x \sin\theta \cos\varphi + u_y \sin\theta \sin\varphi + u_z \cos\theta, \\
v_{rr} &= (u_{xx} \sin\theta \cos\varphi + u_{xy} \sin\theta \sin\varphi + u_{xz} \cos\theta) \sin\theta \cos\varphi + \\
&\quad + (u_{yx} \sin\theta \cos\varphi + u_{yy} \sin\theta \sin\varphi + u_{yz} \cos\theta) \sin\theta \sin\varphi + \\
&\quad + (u_{zx} \sin\theta \cos\varphi + u_{zy} \sin\theta \sin\varphi + u_{zz} \cos\theta) \cos\theta = \\
&= u_{xx} \sin^2\theta \cos^2\varphi + u_{yy} \sin^2\theta \sin^2\varphi + u_{zz} \cos^2\theta + \\
&\quad + 2u_{xy} \sin^2\theta \cos\varphi \sin\varphi + 2u_{xz} \cos\theta \sin\theta \cos\varphi + 2u_{yz} \cos\theta \sin\theta \sin\varphi, \\
v_\theta &= u_x r \cos\theta \cos\varphi + u_y r \cos\theta \sin\varphi - u_z r \sin\theta, \\
v_{\theta\theta} &= (u_{xx} r \cos\theta \cos\varphi + u_{xy} r \cos\theta \sin\varphi - u_{xz} r \sin\theta) r \cos\theta \cos\varphi - u_x r \sin\theta \cos\varphi + \\
&\quad + (u_{yx} r \cos\theta \cos\varphi + u_{yy} r \cos\theta \sin\varphi - u_{yz} r \sin\theta) r \cos\theta \sin\varphi - u_y r \sin\theta \sin\varphi - \\
&\quad - (u_{zx} r \cos\theta \cos\varphi + u_{zy} r \cos\theta \sin\varphi - u_{zz} r \sin\theta) r \sin\theta - u_z r \cos\theta = \\
&= u_{xx} r^2 \cos^2\theta \cos^2\varphi + u_{yy} r^2 \cos^2\theta \sin^2\varphi + u_{zz} r^2 \sin^2\theta + \\
&\quad + 2u_{xy} r^2 \cos^2\theta \cos\varphi \sin\varphi - 2u_{xz} r^2 \cos\theta \sin\theta \cos\varphi - 2u_{yz} r^2 \cos\theta \sin\theta \sin\varphi - \\
&\quad - u_x r \sin\theta \cos\varphi - u_y r \sin\theta \sin\varphi - u_z r \cos\theta, \\
v_\varphi &= -u_x r \sin\theta \sin\varphi + u_y r \sin\theta \cos\varphi, \\
v_{\varphi\varphi} &= -(-u_{xx} r \sin\theta \sin\varphi + u_{xy} r \sin\theta \cos\varphi) r \sin\theta \sin\varphi - u_x r \sin\theta \cos\varphi + \\
&\quad + (-u_{yx} r \sin\theta \sin\varphi + u_{yy} r \sin\theta \cos\varphi) r \sin\theta \cos\varphi - u_y r \sin\theta \sin\varphi = \\
&= u_{xx} r^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi + u_{yy} r^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi - 2u_{xy} r^2 \sin^2\theta \cos\varphi \sin\varphi - \\
&\quad - u_x r \sin\theta \cos\varphi - u_y r \sin\theta \sin\varphi.
\end{aligned}$$

Pertanto

$$
\begin{aligned}
&v_{rr} + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} v_{\varphi\varphi} = \\
&= u_{xx}(\sin^2\theta\cos^2\varphi + \cos^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + u_{yy}(\sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) + \\
&\quad + u_{zz}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + 2u_{xy}(\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi + \cos^2\theta\cos\varphi\sin\varphi - \cos\varphi\sin\varphi) + \\
&\quad + 2u_{xz}(\cos\theta\sin\theta\cos\varphi - \cos\theta\sin\theta\cos\varphi) + 2u_{yz}(\cos\theta\sin\theta\sin\varphi - \cos\theta\sin\theta\sin\varphi) + \\
&\quad - u_x \frac{1}{r}\sin\theta\cos\varphi - u_y\frac{1}{r}\sin\theta\sin\varphi - u_z\frac{1}{r}\cos\theta - u_x\frac{1}{r\sin\theta}\cos\varphi - u_y\frac{1}{r\sin\theta}\sin\varphi = \\
&= u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - 2u_x\frac{1}{r}\sin\theta\cos\varphi - 2u_y\frac{1}{r}\sin\theta\sin\varphi - 2u_z\frac{1}{r}\cos\theta - \\
&\quad - u_x\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta\right)\cos\varphi - u_y\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta\right)\sin\varphi + u_z\frac{1}{r}\cos\theta = \\
&= u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - \frac{2}{r}v_r - \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta} v_\theta .
\end{aligned}
$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= v_{rr} + \frac{2}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}v_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}v_{\varphi\varphi} = \\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\, v_\theta\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}v_{\varphi\varphi} .
\end{aligned}
$$

Abbiamo così dimostrato il seguente teorema.

7.1.1 Teorema
Sia $u \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ *; posto*

$$
v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad v(r,\theta,\varphi) = u(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta),
$$

$\forall (r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^* \times]0,\pi[\times \mathbb{R}$ *, si ha*

$$
\begin{aligned}
&\Delta u(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) = \\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r(r,\theta,\varphi)\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\, v_\theta(r,\theta,\varphi)\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}v_{\varphi\varphi}(r,\theta,\varphi).
\end{aligned}
\tag{7.1.1}
$$

Questo teorema vale anche se u è definita in un aperto di $\mathbb{R}^3$, modificando opportunamente il dominio di v .

Sia $u \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, consideriamo la funzione $M(u)$ che a ogni punto dello spazio fa corrispondere la media di u nella superficie sferica centrata nell'origine passante per quel punto. Cioè $M(u) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$
M(u)(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi(x^2+y^2+z^2)} \displaystyle\iint_{\partial S(0,\|(x,y,z)\|)} u \, d\sigma , & \text{se } (x,y,z) \neq 0, \\ u(0), & \text{se } (x,y,z) = 0. \end{cases}
$$

Posto $r = \|(x,y,z)\|$, la superficie $\partial S(0, \|(x,y,z)\|)$ è la sfera di centro l'origine e raggio r è può essere parametrizzata dalla funzione

$$f : [0,\pi] \times [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad f(\theta,\varphi) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta).$$

Si ha

$$f_\theta(\theta,\varphi) \times f_\varphi(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} =$$
$$= \left(r^2\sin^2\theta\cos\varphi, r^2\sin^2\theta\sin\varphi, r^2\sin\theta\cos\theta\right);$$

pertanto

$$\|f_\theta(\theta,\varphi) \times f_\varphi(\theta,\varphi)\| = \sqrt{r^4\sin^4\theta\cos^2\varphi + r^4\sin^4\theta\sin^2\varphi + r^4\sin^2\theta\cos^2\theta} = r^2\sin\theta.$$

Quindi, esplicitando l'integrale di superficie, si ha

$$M(u)(x,y,z) =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\iint_{[0,\pi]\times[-\pi,\pi]} u\left(\|(x,y,z)\|\sin\theta\cos\varphi, \|(x,y,z)\|\sin\theta\sin\varphi, \|(x,y,z)\|\cos\theta\right)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

oppure, se v è la funzione ottenuta da u passando in coordinate sferiche,

$$M(u)(x,y,z) = \frac{1}{4\pi}\iint_{[0,\pi]\times[-\pi,\pi]} v\left(\|(x,y,z)\|, \theta, \varphi\right)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

La funzione $M(u)$ evidentemente ha simmetria radiale, cioè il suo valore in un punto dipende solo dalla distanza del punto dall'origine; pertanto esiste $\overline{u} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tale che, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, si ha $M(u)(x,y,z) = \overline{u}\left(\|(x,y,z)\|\right)$.

In modo analogo possiamo definire la media di Δu; anch'essa ha simmetria radiale, quindi esiste $\overline{\Delta u} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tale che $M(\Delta u)(x,y,z) = \overline{\Delta u}\left(\|(x,y,z)\|\right)$.

Per l'equazione (7.1.1) si ha

$$\overline{\Delta u}(r) = \frac{1}{4\pi}\iint_{[0,\pi]\times[-\pi,\pi]} \Delta v(r,\theta,\varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\left(\iint_{[0,\pi]\times[-\pi,\pi]} v_{rr}(r,\theta,\varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi + \iint_{[0,\pi]\times[-\pi,\pi]} \frac{2}{r} v_r(r,\theta,\varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi + \right.$$
$$\left. + \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(v_\theta(r,\theta,\varphi)\sin\theta\right) d\theta\, d\varphi + \int_0^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{r^2\sin\theta} v_{\varphi\varphi}(r,\theta,\varphi)\, d\varphi\, d\theta\right) =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d^2}{dr^2}\iint_{[0,\pi]\times[-\pi,\pi]} v(r,\theta,\varphi)\sin\theta\, d\varphi\, d\theta + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}\iint_{[0,\pi]\times[-\pi,\pi]} v(r,\theta,\varphi)\sin\theta\, d\varphi\, d\theta + \right.$$
$$\left. + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{r^2}\left[\sin\theta\, v_\theta(r,\theta,\varphi)\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} d\varphi + \int_0^{\pi} \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[v_\varphi(r,\theta,\varphi)\right]_{\varphi=-\pi}^{\varphi=\pi} d\varphi\, d\theta\right) =$$
$$= \overline{u}_{rr}(r) + \frac{2}{r}\overline{u}_r(r),$$

dove il terzo addendo è nullo perché la funzione seno si annulla in 0 e in π e l'ultimo addendo è nullo perché v è una funzione in coordinate sferiche, quindi v_φ assume gli stessi valori per $\varphi=\pi$ e $\varphi=-\pi$. Pertanto

$$M(\Delta u)(x,y,z)=\overline{\Delta u}\big(\|(x,y,z)\|\big)=\overline{u}_{rr}\big(\|(x,y,z)\|\big)+\frac{2}{r}\,\overline{u}_r\big(\|(x,y,z)\|\big)=\Delta M(u)(x,y,z),$$

dove l'ultima uguaglianza è giustificata dal fatto che $M(u)$, in coordinate sferiche, non dipende né da θ né da φ.

È evidente che questa uguaglianza vale anche se, fissato (x_0,y_0,z_0) diverso dall'origine, le medie vengono fatte nelle superfici sferiche di centro (x_0,y_0,z_0).

7.2 Il problema di Cauchy in dimensione 3

7.2.1 Soluzioni a simmetria radiale

Sia $u\in C^2\big(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}_+,\mathbb{R}\big)$ una soluzione dell'equazione delle onde a simmetria radiale. Supponiamo cioè che, $\forall(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}_+$, sia

$$u_{tt}(x,y,z,t)=c^2\Delta u(x,y,z,t)$$

e che esista $v\in C^2\big(\mathbb{R}_+^2,\mathbb{R}\big)$ tale che $\forall(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}_+$ sia

$$u(x,y,z,t)=v\big(\|(x,y,z)\|,t\big).$$

Scrivendo il laplaciano di u tramite v in coordinate sferiche (vedi equazione (7.1.1)), visto che una funzione a simmetria radiale non dipende da θ e da φ, si ottiene l'equazione

$$v_{tt}(r,t)=c^2\left(v_{rr}(r,t)+\frac{2}{r}\,v_r(r,t)\right),\qquad (r,t)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+.$$

Poniamo

$$w:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R},\qquad w(r,t)=r\,v(r,t).$$

Si ha

$$\begin{aligned}w_r(r,t)&=r\,v_r(r,t)+v(r,t),\\ w_{rr}(r,t)&=r\,v_{rr}(r,t)+v_r(r,t)+v_r(r,t)=r\,v_{rr}(r,t)+2v_r(r,t).\end{aligned}$$

Quindi, se v verifica l'equazione delle onde, allora per w si ha

$$w_{tt}(r,t)=r\,v_{tt}(r,t)=c^2\big(r\,v_{rr}(r,t)+2v_r(r,t)\big)=c^2w_{rr}(r,t).$$

Perciò w è soluzione dell'equazione delle onde in $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+$.

Si ha $w(0,t)=0$, per ogni t, quindi $w_{tt}(0,t)=0$. Inoltre, poiché è radiale, u è pari rispetto alla variabile x, quindi u_x è dispari, perciò $u_x(0,0,0,t)=0$, cioè $v_r(0,t)=0$. Allora

$$w_{rr}(0,t)=\lim_{r\to0}\frac{w_r(r,t)-w_r(0,t)}{r}=\lim_{r\to0}\frac{r\,v_r(r,t)+v(r,t)-v(0,t)}{r}=2v_r(0,t)=0.$$

Quindi $w_{tt}(0,t)=c^2w_{rr}(0,t)$, pertanto w verifica l'equazione delle onde anche per $r=0$. Inoltre, indicato con $\widetilde{w}$ il prolungamento dispari rispetto a r di w, poiché $w(0,t)=0$ e

$w_{rr}(0,t)=0$, si verifica facilmente che $\widetilde{w}$ è di classe C^2. È inoltre immediato verificare che, se $r<0$, si ha $\widetilde{w}_{tt}(r,t)=-w_{tt}(-r,t)$ e $\widetilde{w}_{rr}(r,t)=-w_{rr}(-r,t)$, quindi $\widetilde{w}$ verifica l'equazione delle onde in tutto $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$. Pertanto, per la formula di d'Alembert (5.1.2), si ha

$$\widetilde{w}(r,t)=\frac{1}{2}\big(\widetilde{w}(r+ct,0)+\widetilde{w}(r-ct,0)\big)+\frac{1}{2c}\int_{r-ct}^{r+ct}\widetilde{w}_t(\rho,0)\,d\rho. \tag{7.2.1}$$

Se $r>ct$ si ottiene

$$\begin{aligned}w(r,t)&=\frac{1}{2}\big(w(r+ct,0)+w(r-ct,0)\big)+\frac{1}{2c}\int_{r-ct}^{r+ct}w_t(\rho,0)\,d\rho=\\&=\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\int_{r-ct}^{ct+r}w(\rho,0)\,d\rho+\frac{1}{2c}\int_{r-ct}^{ct+r}w_t(\rho,0)\,d\rho.\end{aligned}$$

Se invece $r\le ct$, poiché $\rho\mapsto\widetilde{w}_t(\rho,0)$ è dispari, il suo integrale da $r-ct$ a $ct-r$ è nullo, quindi la (7.2.1) diventa

$$\begin{aligned}w(r,t)&=\frac{1}{2}\big(w(ct+r,0)-w(ct-r,0)\big)+\frac{1}{2c}\int_{ct-r}^{ct+r}w_t(\rho,0)\,d\rho=\\&=\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\int_{ct-r}^{ct+r}w(\rho,0)\,d\rho+\frac{1}{2c}\int_{ct-r}^{ct+r}w_t(\rho,0)\,d\rho.\end{aligned}$$

Quindi in ogni caso si ha

$$w(r,t)=\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\int_{|ct-r|}^{ct+r}w(\rho,0)\,d\rho+\frac{1}{2c}\int_{|ct-r|}^{ct+r}w_t(\rho,0)\,d\rho.$$

Se $r\ne 0$ da qui segue

$$v(r,t)=\frac{1}{2cr}\frac{\partial}{\partial t}\int_{|ct-r|}^{ct+r}\rho v(\rho,0)\,d\rho+\frac{1}{2cr}\int_{|ct-r|}^{ct+r}\rho v_t(\rho,0)\,d\rho. \tag{7.2.2}$$

Inoltre

$$\begin{aligned}v(0,t)&=\lim_{r\to 0}v(r,t)=\lim_{r\to 0}\frac{w(r,t)}{r}=\\&=\lim_{r\to 0}\frac{1}{2r}\big(w(ct+r,0)-w(ct-r,0)\big)+\lim_{r\to 0}\frac{1}{2cr}\int_{ct-r}^{ct+r}w_t(\rho,0)\,d\rho=\\&=\lim_{r\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{w(ct+r,0)-w(ct,0)}{r}+\frac{w(ct-r,0)-w(ct,0)}{-r}\right)+\frac{1}{c}w_t(ct,0)=\\&=w_r(ct,0)+\frac{1}{c}w_t(ct,0)=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}w(ct,0)+\frac{1}{c}w_t(ct,0)=\\&=\frac{\partial}{\partial t}\big(tv(ct,0)\big)+tv_t(ct,0).\end{aligned}$$

Quindi

$$v(0,t)=\frac{\partial}{\partial t}\big(tv(ct,0)\big)+tv_t(ct,0). \tag{7.2.3}$$

Si può viceversa dimostrare che se v è una funzione che verifica le equazioni (7.2.2) e (7.2.3), allora la funzione a simmetria radiale definita a partire da v è soluzione dell'equazione delle onde. Queste equazioni consentono di ricavare v a partire dal valore di v e di v_t per $t=0$, quindi se si conoscono posizione e velocità iniziali si conosce v.

Studiando l'equazione delle onde in una variabile di spazio, abbiamo supposto che la posizione iniziale fosse una funzione di classe C^2 e la velocità iniziale di classe C^1. In questo caso ciò non è sufficiente per avere una soluzione sia di classe C^2. Infatti dall'equazione (7.2.3) risulta che per assicurare che la funzione $t \mapsto v(0,t)$ sia di classe C^2 occorre supporre che la posizione iniziale sia di classe C^3 e la velocità iniziale di classe C^2.

Si verifica facilmente che una funzione radiale ha derivate di ordine dispari nulle in 0. Questa condizione deve essere rispettata dalle condizioni iniziali imposte.

Si ha quindi il teorema seguente.

7.2.1 Teorema

Siano $\varphi \in C^3(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ e $\psi \in C^2(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, tali che $\varphi'(0)=\varphi'''(0)=\psi'(0)=0$. Sia $v\colon \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ tale che

$$v(r,t)=\begin{cases} \dfrac{1}{2cr}\dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int_{|ct-r|}^{ct+r}\rho\varphi(\rho)\,d\rho+\dfrac{1}{2cr}\displaystyle\int_{|ct-r|}^{ct+r}\rho\psi(\rho)\,d\rho, & \text{se } r>0,\\ \dfrac{\partial}{\partial t}\big(t\varphi(ct)\big)+t\psi(ct) & \text{se } r=0. \end{cases}$$

Allora la funzione

$$u\colon \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}, \qquad u(x,y,z,t)=v\big(\|(x,y,z)\|\big),$$

è l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt}(x,y,z,t)=c^2\Delta u(x,y,z,t), & (x,y,z,t)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}_+,\\ u(x,y,z,0)=\varphi\big(\|(x,y,z)\|\big), & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\\ u_t(x,y,z,0)=\psi\big(\|(x,y,z)\|\big), & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3. \end{cases}$$

7.2.2 Soluzioni generali

Utilizziamo la soluzione radiale ottenuta nella Sottosezione precedente per determinare un'arbitraria soluzione dell'equazione delle onde. Sia $u \in C^2\big(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}_+,\mathbb{R}\big)$ soluzione dell'equazione delle onde. Fissato $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$, consideriamo la media di u nelle superfici sferiche centrate nel punto (x_0,y_0,z_0), cioè sia $M(u)\colon \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$,

$$M(u)(x,y,z,t)=$$
$$=\begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\|(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)\|^2}\displaystyle\iint_{\partial S((x_0,y_0,z_0),\|(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)\|)} u(\xi,\eta,\zeta,t)\,d\sigma_{(\xi,\eta,\zeta)}, & \\ & \text{se } (x,y,z)\neq(x_0,y_0,z_0),\\ u(x_0,y_0,z_0,t), & \text{se } (x,y,z)=(x_0,y_0,z_0). \end{cases}$$

Allora $M(u)_{tt}$ è la media di u_{tt} e, per quanto provato nella Sottosezione 7.1.1, $\Delta M(u)$ è la media di Δu. Quindi anche $M(u)$ verifica l'equazione delle onde.

Sia $v \in C^2\big((\mathbb{R}_+)^2, \mathbb{R}\big)$ tale che $\forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$ sia

$$M(u)(x,y,z,t) = v\big(\|(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)\|, t\big).$$

Poiché $M(u)$ è radiale, per (7.2.3) si ha

$$\begin{aligned}
u(x_0,y_0,z_0,t) &= M(u)(x_0,y_0,z_0,t) = v(0,t) = \frac{\partial}{\partial t}\big(t v(ct,0)\big) + t v_t(ct,0) = \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi c^2 t}\iint_{\partial S((x_0,y_0,z_0),ct)} u(\xi,\eta,\zeta,0)\, d\sigma_{(\xi,\eta,\zeta)}\right) + \\
&\qquad + \frac{1}{4\pi c^2 t}\iint_{\partial S((x_0,y_0,z_0),ct)} u_t(\xi,\eta,\zeta,0)\, d\sigma_{(\xi,\eta,\zeta)}.
\end{aligned}$$

Pertanto se u è soluzione del problema di Cauchy per l'equazione delle onde

$$\begin{cases} u_{tt}(x,y,z,t) = c^2 \Delta u(x,y,z,t), & (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,y,z,0) = \varphi(x,y,z), & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \\ u_t(x,y,z,0) = \psi(x,y,z), & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{7.2.4}$$

allora

$$\begin{aligned}
&u(x,y,z,t) = \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi c^2 t}\iint_{\partial S((x,y,z),ct)} \varphi(\xi,\eta,\zeta)\, d\sigma_{(\xi,\eta,\zeta)}\right) + \frac{1}{4\pi c^2 t}\iint_{\partial S((x,y,z),ct)} \psi(\xi,\eta,\zeta)\, d\sigma_{(\xi,\eta,\zeta)}.
\end{aligned}$$

Viceversa si può verificare che questa funzione è soluzione del problema (7.2.4), purché φ e ψ abbiano la regolarità richiesta nel Teor. 7.2.1.

Si ha quindi il seguente teorema.

7.2.2 Teorema (formula di Kirchhoff)
Siano $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ e $\psi \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Allora l'unica soluzione del problema (7.2.4) *è la funzione $u: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$u(x,y,z,t) = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{1}{4\pi c^2 t}\displaystyle\iint_{\partial S((x,y,z),ct)} \varphi\, d\sigma\right) + \dfrac{1}{4\pi c^2 t}\displaystyle\iint_{\partial S((x,y,z),ct)} \psi\, d\sigma, & \text{se } t > 0, \\ \varphi(x,y,z), & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

7.3 Il problema di Cauchy in dimensione 2

Sia u soluzione del problema di Cauchy per l'equazione delle onde

$$\begin{cases} u_{tt}(x,y,t) = c^2 \Delta u(x,y,t), & (x,y,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,y,0) = \varphi(x,y), & (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ u_t(x,y,0) = \psi(x,y), & (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{7.3.1}$$

Posto

$$v\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \qquad v(x,y,z,t) = u(x,y,t),$$

la funzione v è soluzione del problema

$$\begin{cases} v_{tt}(x,y,z,t) = c^2 \Delta v(x,y,z,t), & (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+, \\ v(x,y,z,0) = \varphi(x,y), & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \\ v_t(x,y,z,0) = \psi(x,y), & (x,y,z) \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Per la formula di Kirchhoff, $\forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, si ha

$$v(x,y,z,t) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{\partial S((x,y,z),ct)} \varphi(\xi,\eta)\, d\sigma_{(\xi,\eta,\zeta)} \right) + \frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{\partial S((x,y,z),ct)} \psi(\xi,\eta)\, d\sigma_{(\xi,\eta,\zeta)}.$$

Trasformiamo gli integrali sulla superficie sferica in integrali su un cerchio. La superficie sferica è unione delle due semisfere

$$S_+ = \{ (\xi,\eta,\zeta) \in \partial S((x,y,z),ct) \mid \zeta \geq z \},$$
$$S_- = \{ (\xi,\eta,\zeta) \in \partial S((x,y,z),ct) \mid \zeta \leq z \}.$$

Poiché la funzione integranda non dipende da ζ l'integrale in S_+ coincide con quello in S_-, pertanto si ha

$$\frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{\partial S((x,y,z),ct)} \varphi(\xi,\eta)\, d\sigma_{(\xi,\eta,\zeta)} = \frac{1}{2\pi c^2 t} \iint_{S_+} \varphi(\xi,\eta)\, d\sigma_{(\xi,\eta,\zeta)} =$$
$$= \frac{t}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x + ct\sin\theta\cos\varphi, y + ct\sin\theta\sin\varphi) \sin\theta\, d\varphi\, d\theta.$$

Ponendo $r = ct\sin\theta$, quindi $\theta = \arcsin(r/ct)$, l'integrale risulta uguale a

$$\frac{t}{2\pi} \int_0^{ct} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x + r\cos\varphi, y + r\sin\varphi) \frac{r}{ct} \frac{1}{ct\sqrt{1-(r/ct)^2}}\, d\varphi\, dr =$$
$$= \frac{1}{2\pi c} \int_0^{ct} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x + r\cos\varphi, y + r\sin\varphi) r \frac{1}{\sqrt{c^2t^2 - r^2}}\, d\varphi\, dr =$$
$$= \frac{1}{2\pi c} \iint_{S((x,y),ct)} \varphi(\xi,\eta) \frac{1}{\sqrt{c^2t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}\, d\xi\, d\eta.$$

Un'analoga uguaglianza vale per la funzione ψ, quindi vale il seguente teorema.

7.3.1 Teorema
Siano $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ e $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. Allora l'unica soluzione del problema (7.3.1) *è la funzione $u\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,*

$$u(x,y,t) = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{1}{2\pi c} \displaystyle\iint_{S((x,y),ct)} \dfrac{\varphi(\xi,\eta)}{\sqrt{c^2t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}\, d\xi\, d\eta \right) + \\ \qquad + \dfrac{1}{2\pi c} \displaystyle\iint_{S((x,y),ct)} \dfrac{\psi(\xi,\eta)}{\sqrt{c^2t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}\, d\xi\, d\eta, & \text{se } t > 0, \\ \varphi(x,y), & \text{se } t = 0. \end{cases}$$