Thursday, May 04, 2023 10:11 AM

QUINDI $M : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ t.c.

$$M(n,k) \overset{DEF}{=} C(n,k)$$

	0	1	2	3	4	k
0	1	0	0	0	0	0
1	0					
2	0					
3	0					
4	0					
n-1	0					
n	0					

CIOÈ

$$C(0,k) = \delta_{0k}$$

$$C(n,0) = \delta_{n0}$$

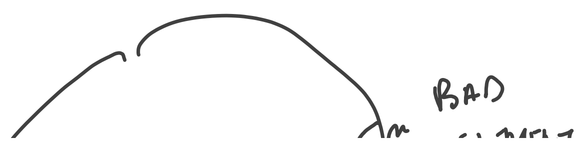
$$C(n-1,k-1) + (n-1)\,C(n-1,k)$$

$$C(n,k)$$

RICURSIONE (BAD ELEMENT)

$\underline{n} = \{1, 2, \ldots, n\}$

DUE CASI DISGIUNTI / ESAUSTIVI



1) $\{n\}$ CICLO A SÉ.

C ELEMENTI

AVREMO

n $C(n-1, k-1)$ CASI

2) n NON È CICLO.

COSTRUIAMO k CICLI SUI VERTICI $1, 2, \ldots, n-1$ IN QUANTI MODI?

DEF $C(n-1, k)$

\# MODI

$$(n-1)C(n-1,k)$$

$n-1$

n BAD EL.

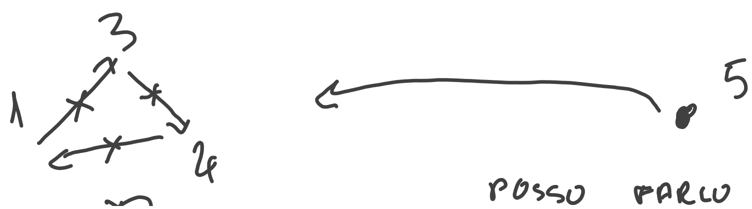
$C(n-1,k)$

PERM.

$n=5$

BAD EL 5

$n-1=4$



$k=2$

POSSO FARLO IN # MODI

2

= # FRECCE GIÀ PRESENTI

= # VERTICI = $n-1$

THM $\quad C(n,k) = C(n-1,k-1) + (n-1)\,C(n-1,k)$

$$\begin{cases} C(n,0) = \delta_{n0} \quad C(0,k) = \delta_{0k} \\ C(n,k) = C(n-1,k-1) + (n-1)\,C(n-1,k) \end{cases}$$

	0	1	2	3	4	
0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	
2	0	1	1	0	0	
3	0	1	3	1	0	
4	0	1	10	6	1	0 — — —
	0	1				

|

TIPO DI UNA PERMUTAZIONE $\sigma : \underline{n} \xrightarrow[1-1]{su} \underline{n}$.

σ HA TIPO $1^{\nu_1} 2^{\nu_2} 3^{\nu_3} \dots$

SE E SOLO SE

σ HA ESATT. ν_1 CICLI DI LUNGHEZZA 1

2) " " ν_2 " " " 2

3) " " ν_3 " " " 3

ETC.

AD ES

$\sigma = (5\,2\,1)(4\,3)(6)$ HA TIPO $1^1 2^1 3^1 \dots$

SIA $\sum_{i=1}^{n} i\nu_i = n$ (ALTRIMENTI È BANALE, CIOÈ ZERO)

$C(n;\ 1^{\nu_1} 2^{\nu_2} 3^{\nu_3} \dots) \overset{DEF}{=}$ # n-PERMUTAZIONI DI TIPO $= ?$

$C(n; \ldots)$ $1^{\nu_1}2^{\nu_2}3^{\nu_3}\ldots$

COEFF. DI CAUCHY

FORMA CHIUSA

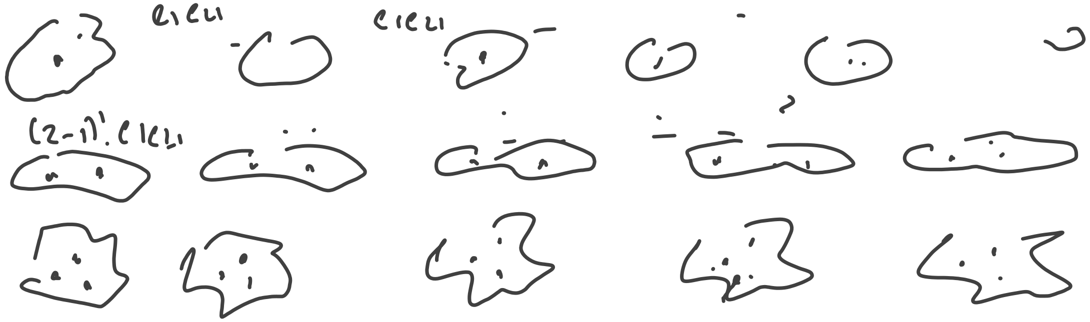
DATO $1^{\nu_1}2^{\nu_2}3^{\nu_3}$

DEVO CALCOLARE # PERMUTAZIONI DI TIPO $1^{\nu_1}2^{\nu_2}3^{\nu_3}\ldots$

PARTO DA PARTIZIONI DI TIPO $1^{\nu_1}2^{\nu_2}3^{\nu_3}$ (PECORE)

$(1-1)! = 0! = 1$ cicli

card 1



ν_1

$(2-1)!$ cicli

card 2

ν_2

card 3

$(3-1)! = 2!$ cicli

PARTIZIONE DI $\underline{n}$ DI TIPO $1^{\nu_1}2^{\nu_2}3^{\nu_3}\ldots$

QUANTE SONO?

$\underline{P}(n; 1^{\nu_1}2^{\nu_2}3^{\nu_3}\ldots)$

FAA' DI BRUNO

PERMUTAZIONI = "ZAMPE"

QUANTE ZAMPE

PER OGNI PECORA?

OGNI "PECORA" (PARTIZIONE DI TIPO $1^{\nu_1} 2^{\nu_2} 3^{\nu_3} \dots$)

HA ESATTAMENTE QUANTE "ZAMPE" (PERMUTAZIONI DI TIPO $1^{\nu_1} 2^{\nu_2} 3^{\nu_3} \dots$)?

CARD 1 $\quad (1-1)! = 0! \quad \underline{\nu_1 \text{ VOLTE}}$

CARD 2 $\quad (2-1)! = 1! = 1 \quad \nu_2$ VOLTE

CARD 3 $\quad (3-1)! = 2! \quad \nu_3$ VOLTE

CARD 4 $\quad (4-1)! = 3! \quad \nu_4$ VOLTE

— — —

$$C(n; 1^{\nu_1} 2^{\nu_2} 3^{\nu_3} \dots) = P(n; 1^{\nu_1} 2^{\nu_2} 3^{\nu_3}) \left(\underbrace{((1-1)!)^{\nu_1} (2-1)!^{\nu_2} (3-1)!^{\nu_3}}\right)$$

$$= \frac{n!}{(\cancel{1!})^{\nu_1} (\cancel{2!})^{\nu_2} (\cancel{3!})^{\nu_3} \dots \nu_1! \nu_2! \nu_3!} \times \cancel{(1-1)!}^{\nu_1} \cancel{(2-1)}!^{\nu_2} (3-\cancel{1})!^{\nu_3} \dots$$

$$= \frac{n!}{\quad}$$

$$1^{\nu_1} 2^{\nu_3} 3^{\nu_3} \qquad \nu_1! \nu_2! \nu_3$$

<u>THM</u>

$$C(n; 1^{\nu_1} 2^{\nu_2} 3^{\nu_3} \ldots) = \frac{n!}{1^{\nu_1} 2^{\nu_2} 3^{\nu_3} \ldots \quad \nu_1! \nu_2! \nu_3!}$$