Thursday, May 04, 2023 10:13 AM

PERMUTAZIONI (SUNTO)

$C(n,k) \overset{\text{DEF}}{=} \#$ n-PERMUTAZIONI con k cicli

THM $C(n,0) = \delta_{0n}, \quad C(0,k) = \delta_{0k}$

RICORSIONE: $C(n,k) = C(n-1,k-1) + (n-1)\,C(n-1,k)$

$C(n; 1^{\nu_1} 2^{\nu_2} 3^{\nu_3} \dots) \overset{\text{DEF}}{=} \#$ n-PERMUTAZIONI di TIPO $1^{\nu_1} 2^{\nu_2} 3^{\nu_3} \dots$

OVVIAMENTE **COROLLARIO** (PER $n \in \mathbb{N}$ FISSATO)

$$\sum_{k=0}^{n} C(n,k) = n! = \sum_{\substack{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n \\ \sum_{i=1}^{n} i\nu_i = n}} C(n; 1^{\nu_1} 2^{\nu_2} 3^{\nu_3} \dots)$$

TRE BASI PER LO SPAZIO VETTORIALE $\mathbb{R}[x]$

DI POLINOMI (A COEFF. REALI $\mathbb{R}$) NELLA VARIABILE x

1) SIA $\{x^n ; n \in \mathbb{N}\}$ (I "POLINOMI POTENZA")

SONO BASE DI $\mathbb{R}[x]$.

2) SIA $\{(x)_n ; n \in \mathbb{N}\}$ OVE

$(x)_0 = 1$

POLINOMI "FATTORIALE DECRESCENTE"

PER $n \in \mathbb{Z}^+$ $\quad (x)_n = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$

ORA $\deg((x)_n) = n$

NB $\{(x)_n ; n \in \mathbb{N}\}$ È BASE DI $\mathbb{R}[x]$.

3) SIA $\{\langle x\rangle_n ; n \in \mathbb{N}\}$ OVE

POLINOMI

$$\left.\begin{array}{l} \langle x \rangle_0 = 1 \\ \& \quad \langle x \rangle_n = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1) \end{array}\right\} \text{"FATTORIALE CRESCENTE"}$$

ORA $\deg(\langle x \rangle_n) = n$ E QUINDI

PERCIO' $\{\langle x \rangle_n \,;\, n \in \mathbb{N}\}$ BASE PER $\mathbb{R}[x]$.

TEOREMA DI UNICA FATTORIZZAZIONE PER FUNZIONI

$$F : X \longrightarrow Y$$

SIA $F : X \longrightarrow Y$ UNA FUNZIONE QUALSIASI DA $\underset{\text{DOM}}{X}$ AD $\underset{\text{CODOMINIO}}{Y}$

$$X \xrightarrow{F} Y$$

1) CONSIDERIAMO LA REL. BINARIA SU X : $\sim_F \subseteq X \times X$

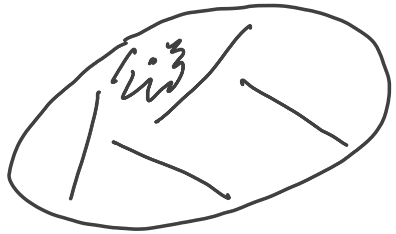
COSÌ DEFINITA:

$$x, x' \in X \qquad x \sim_F x' \overset{DEF}{\iff} F(x) = F(x')$$

OVVIAMENTE, $\sim_f$ REL. DI EQUIVALENZA !!!

2) SIA $\Pi_{\sim_f} = \{ [x]_{\sim_f} \text{; CLASSI DI EQUIVALENZA} \} = X/_{\sim_F}$ "INSIEME QUOZIENTE"

X



$$\begin{tikzcd}
x \in X \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"', "\text{sw}"] & Y \\
{[x]_{\sim_F}} \quad \Pi_{\sim_f} = X/_{\sim_F} \arrow[ru, dashed, "\exists ?"']
\end{tikzcd}$$

$\exists ?\ \overline{F} : \Pi_{\sim_F} \longrightarrow Y$

t.c. IL DIAGRAMMA COMMUTI (??)

CIOÈ

$$F \overset{?}{=} \overline{F} \circ \Pi$$

CIOÈ

$$F(x) = \overline{F}(\Pi(x)) \quad \forall x \in X$$

DEFINIAMO $\overline{F} : \Pi_{\sim_F} = X/_{\sim_F} \longrightarrow Y$ t.c.

$(*) \quad \bar{F}\left([x]_{\sim_F}\right) \overset{DEF}{=} F(x)$???...

$(*)$ È "BEN POSTA"? CIOÈ $x, x' \in X$, $x \neq x'$

MA $[x]_{\sim_F} = [x']_{\sim_F}$ IN $X/_{\sim_F}$, È VERO CHE

$\bar{F}\left([x]_{\sim_F}\right) = \bar{F}\left([x']_{\sim_F}\right)$, (SE SÌ OK ALTRIMENTI NO)

ORA:

$$[x]_{\sim_F} = [x']_{\sim_F} \iff x \sim_F x' \iff F(x) = F(x') \overset{(*)}{\iff} \bar{F}\left([x]_{\sim_F}\right) =$$

$\Longrightarrow$ $\Longrightarrow$ $\Longrightarrow$

QUINDI $[x]_{\sim_F} = [x']_{\sim_F} \Longrightarrow \bar{F}\left([x]_{\sim_F}\right) = \bar{F}\left([x']_{\sim_F}\right)$

QUINDI $(*)$ È BEN POSTA !!!

ORA

ORA

$\Longleftarrow$) $\Longleftarrow$) $\Longleftarrow$

CIOÈ

$$\bar F([x]_{\sim_F}) = \bar F([x']_{\sim_F}) \Rightarrow [x]_{\sim_F} = [x']_{\sim_F}$$

CIOÈ $\bar F$ È **INIETTIVA**.

CIOÈ **THM**

$$\begin{tikzcd} x \in X \arrow[rr, "F"] \arrow[d, "\pi"', "SU"] & & Y \\ {[x]_{\sim_F}} \arrow[urr, "\bar F \ \underline{1-1}"'] & & \end{tikzcd}$$

$\pi_{\sim_F} = X/\sim_F$

DEF $\bar F : [x]_{\sim_F} \to F(x)$

E IL DIAGR COMMU

INFATTI

$(\bar F \circ \pi)(x) =$ $\quad x \in X$

$$\overset{\text{DEF}}{=} \bar{F}(\pi(x)) = \bar{F}([x]_{\sim_F}) \overset{\text{DEF}}{=} F(x)$$

cioè $F = \underset{1-1}{\bar{F}} \circ \underset{SU}{\pi}$.

BREAK QUESTIONS?

INIZIO ORE 10.15