Tuesday, May 16, 2023 10:20 AM

IERI ABBIAMO DIMOSTRATO

LA FAMIGLIA DI IDENTITÀ NUMERICHE:

FATTO $n, m \in \mathbb{N}$

$$m^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)\,(m)_k .$$

RICHIAMI SUI POLINOMI IN $\mathbb{R}[x]$.

DATO $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\deg(p(x)) = n$, CIOÈ

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n, \quad a_n \neq 0.$$

DATO $\alpha \in \mathbb{R}$, LA VALUTAZIONE DI $p(x)$ IN $\alpha \in \mathbb{R}$ È:

$$p(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n \alpha^n \in \mathbb{R}.$$

DEF α È RADICE DI $p(x) \iff p(\alpha) = 0$.

THM DI RUFFINI SIA $p(x) \neq \underline{0}$. SE α È RADICE DI $p(x) \Rightarrow$

$p(x) = (x-\alpha)\,q(x)$ CON $\deg(q(x)) < \deg(p(x))$

$p(x)$ ... $q(x)$, ove $\deg[q(x)] < \deg(p(x))$.

<u>COROLLARIO 1</u> $\underline{p(x) \neq \underline{0}}$. ALLORA # DELLE SUE RADICI È $\begin{pmatrix}\text{MINORE}\\ \text{O}\\ \text{UGUALE}\end{pmatrix} \leq \deg(p(x))$.

<u>COROLLARIO 2</u> $p(x)$ HA <u>INFINITE</u> RADICI $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow p(x) = \underline{0}$. !!!

<u>COROLLARIO 3</u> SIANO $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$ $(p(x), q(x) \neq 0.)$

SE $p(x)$ e $q(x)$ HANNO INFINITE RADICI COMUNI,

DICIAMO $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ $\alpha_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

ALLORA $p(x) = q(x)$.

<u>PROOF</u> SIANO $p(\alpha_n) = q(\alpha_n)$ $\forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow$

$\underline{\alpha_n}$ È RADICE DI $\underline{p(x) - q(x)}$, $\forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow p(x) - q(x) = \underline{0} \Longrightarrow p(x) = q(x)$.

TORNANDO AL NOSTRO FATTO

$\forall m \in \mathbb{N}$

$$m^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)\,(m)_k$$, cioè

I POLINOMI

$$x^n$$

&

$$\sum_{k=0}^{n} S(n,k)\,(x)_k$$

HANNO VALUTAZIONI UGUALI $\forall m \in \mathbb{N}$

NE SEGUE: UNICA IDENTITÀ IN $\mathbb{R}[x]$:

(1) $$x^n \overset{!}{=} \sum_{k=0}^{n} S(n,k)\,(x)_k .$$!!!

BASE DI $\mathbb{R}[x]$.

ESPRESSIONE DEI POLINOMI

$$\underline{\langle x \rangle_n = x(x+1)\cdots(x+n-1)} \quad , \; n \neq 0$$

$$\langle x \rangle_0 = \underline{1}$$

COME COMBINAZIONE LINEARE DEI POLINOMI

POTENZA x^k, $k \in \mathbb{N}$.

SIA $\langle x \rangle_n \stackrel{!}{=} \sum_{k=0}^{n} c(n,k)\, x^k$. (NOTAZIONE). $(\dagger)$

ORA $\langle x \rangle_n = \underbrace{x(x+1)\cdots(x+n-2)}_{\langle x \rangle_{n-1}}(x+n-1)$

CIOÈ $\langle x \rangle_n = \langle x \rangle_{n-1}(x+n-1) =$

$= x\langle x \rangle_{n-1} + (n-1)\langle x \rangle_{n-1}$ DA $(\dagger)$

$= x \sum_{k=0}^{n-1} c(n-1,k)\, x^k + (n-1) \sum_{k=0}^{n-1} c(n-1,k)\, x^k =$

$k=0$ $\qquad$ $h=0$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} c(n-1,k)\, x^{k+1} + \sum_{h=0}^{n-1} c(n-1,h)\, x^h (n-1) =$$

PONENDO $k+1=h \iff k=h-1$

$$= \sum_{h=0}^{n-1} c(n-1,h-1)\, x^h + \sum_{h=0}^{n-1} c(n-1,h)\, x^h (n+1) =$$

$$= \sum_{h=0}^{n-1} \big(c(n-1,h-1) + (n-1)\, c(n-1,h) \big)\, x^h \qquad (\#)$$

CIOÈ

$$\langle x \rangle_n \overset{(\#)}{=} \sum_{h=0}^{n-1} \big(\underline{c(n-1,h-1) + (n-1)\, c(n-1,h)} \big)\, x^h =$$

$$\overset{\text{(NOTAZIONE)}}{=} \sum_{h=0}^{n-1} \underline{c(n,h)}\, x^h$$

CIOÈ

$$c(n,k) = c(n-1,k-1) + (n-1)\,c(n-1,k)$$

E, DI PIÙ,

$$c(n,0) = \delta_{0n} \quad , \quad c(0,k) = \delta_{0k}.$$

ORA RICORDIAMO

$C(n,k) \overset{DEF}{=}$ # n-PERMUTAZIONI CON k CICLI

RICORDO

$$C(n,0) = \delta_{n0} \quad , \quad C(0,k) = \delta_{0k} \quad ,$$

$$C(n,k) = C(n-1,k-1) + (n-1)\,C(n-1,k)$$

COROLLARIO $c(n,k) = C(n,k) \quad \forall\, n,k \in \mathbb{N}.$

PERCIÒ

THM

$$\langle x \rangle_n \stackrel{!}{=} \sum_{k=0}^{n} C(n,k) \quad x^k$$

ORA $\quad (x)_n = \underline{x(x-1)\cdots(x-n-1)} \quad , n \neq 0$

$(x)_0 = \underline{1}$

POSTO , PER DEF :

$$(x)_n \stackrel{!}{=} \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\, x^k \qquad \text{SI HA :}$$

↑ NUMERI DI STIRLING DI I SPECIE

$$s(n,k) = \underline{(-1)}^{n-k}\, C(n,k) \quad .$$

MA , RIASSUMENDO .

→ 1) $x^n \stackrel{!}{=} \sum_{k=0}^{n} S(n,k)\,(x)_k$

NUMERI DI STIRLING DI II SPECIE.

→ 2) $(x)_n \stackrel{!}{=} \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\, x^k$

NUMERI DI STIRLING DI I SPECIE, E DI PIU'

$$s(n,k) = (-1)^{n-k}\, C(n,k)$$

QUINDI, SIANO

II SPECIE

$$\mathcal{S} = \left(S(n,k) \right)_{n,k \in \mathbb{N}}$$

$$\mathfrak{s} = \left(s(n,k) \right)_{n,k \in \mathbb{N}}$$

I SPECIE

DA 1) & 2) SI HA

$$S = s^{-1} \iff s = S^{-1}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$s \times S = S \times s = I$$ IDENTITÀ

I PRODOTTI SONO BEN DEFINITI:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & S(n,k) & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}}_{S} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ s(n,k) & & 1 \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}}_{s}$$

PRODOTTO RIGA/COLONNA

OGNI PRODOTTO E' "FINITO".

BREAK QUESTIONS?

INIZIO ORE 17.15