Tuesday, May 16, 2023 10:20 AM

MOEBIUS/ROTA INVERSION THEORY

$\Downarrow$

ROTA 1964 TEORIA GENERALE

STEELE PRIZE AMS (1988 CIRCA)

POSET (PARTIALLY ORDERED SET)

R RELAZIONE DI ORDINE SU UN INSIEME P:

CIOÈ R BINARIA, CIOÈ $R \subseteq P \times P$ t.e.

i) $xRx \quad \forall x \in P$ (RIFLESSIVA)

ii) $xRy,\ yRx \Rightarrow x = y$ (ANTISIMMETRIA)

iii) $xRy,\ yRz \Rightarrow xRz$ (TRANSITIVITÀ)

IN GENERE, SE R È RELAZIONE D'ORDINE, SI SCRIVE

$$R = \leq .$$

<u>ES</u> S INSIEME, $\mathbb{P}(S) = \{ A ; A \subseteq S \}$

LA RELAZIONE DI INCLUSIONE $\subseteq$ È UNA RELAZIONE D'ORDINE SU $\mathbb{P}(S)$.

<u>UN POSET È UNA COPPIA</u>

$$(\underline{P}, \leq) .$$

INSIEME RELAZIONE D'ORDINE

<u>POSET FINITI E LORO DIAGRAMMI DI HASSE</u>

SIA $(P, \leq)$ POSET <u>FINITO</u>. SIANO $x, y \in \underline{P}$.

INS. REL. ORD

DIREMO CHE x È COPERTO DA y

$$\overline{(x \lessdot y) \iff}$$

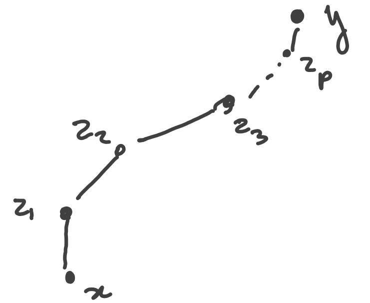
i) $x \leq y$

ii) $x \neq y$

iii) $\{ z \,;\, z \neq x, y \,,\, x < z < y \} = \emptyset .$

"y È "IMMEDIATAMENTE MAGGIORE" DI x"

CONCRETAMENTE (PASSO 1))



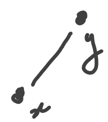
$x \lessdot y$

CON

$x \lessdot z_1 \lessdot z_2 \lessdot \dots \lessdot z_p \lessdot y .$

$(P, \leq)$ PUÒ RAPPRESENTATO DA UN GRAFO

OVE SE $x < y$ (y È PIÙ IN ALTO DI x)

È 

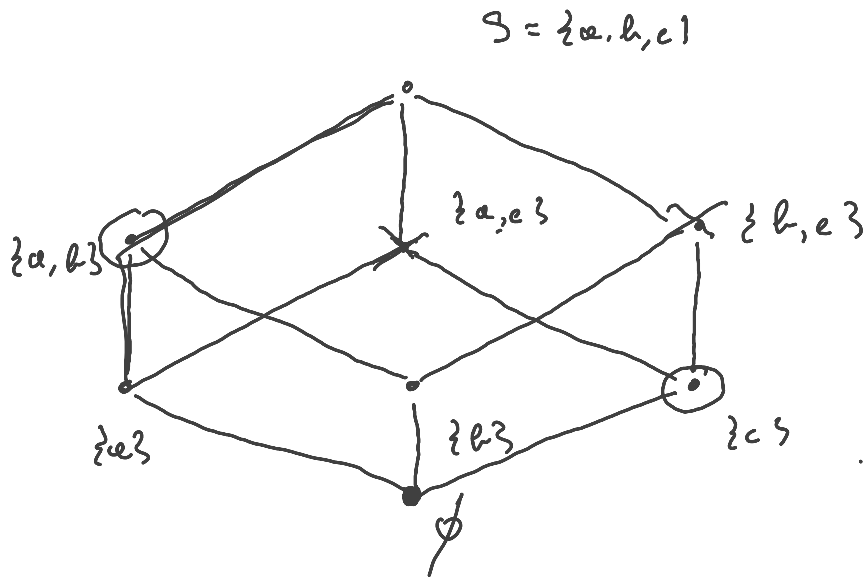
$\iff x \lessdot y .$

ESEMPIO 1 $S = \{a, b, c\}$, $\mathbb{P}(S) = \{ A : A \subseteq S = \{a, b, c\} \}$

CONSIDERIAMO IL POSET $(\mathbb{P}(S), \subseteq)$

INS — INCLUSIONE (REL DI ORDINE)

CHI È IL SUO DIAGRAMMA DI HASSE???



$S = \{a, b, c\}$

$(P(S), \subseteq)$

HASSE DIAGRAM

$\{a, b, c\} \supseteq \{a\}$

RELAZIONE "DIVIDE"

$n, m \in \mathbb{N}^+$

DIREMO CHE n DIVIDE m $\iff$ m È MULTIPLO DI n

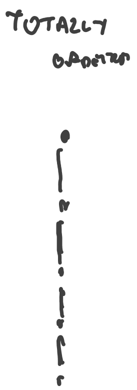
$(n \mid m)$

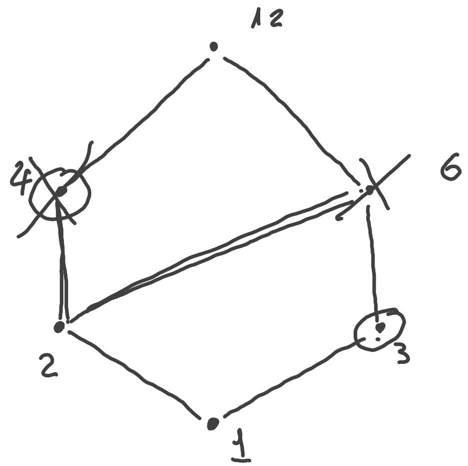
LA RELAZIONE "DIVIDE" È RELAZIONE DI ORDINE

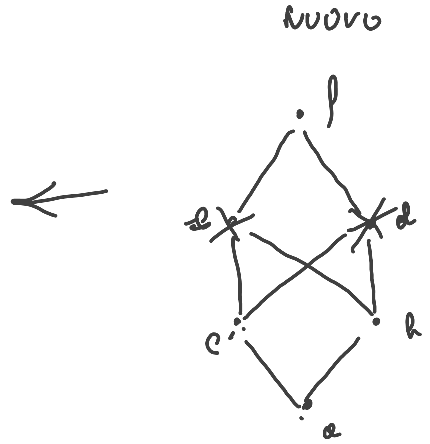
ORA SIA $D = \{ x \in \mathbb{Z}^+ ; \ x \mid 12 \}$

E LO MUNIAMO DELLA RELAZIONE DIVIDE $(x \mid y)$.

CHI È IL SUO DIAGRAMMA DI HASSE???







STOP QUESTIONS?