Tuesday, May 16, 2023 10:21 AM

UN POSET $(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{INS}}}{P}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{REL. ORD}}}{\leq})$ SI DICE

RETICOLO (LATTICE) $\iff$

i) $x, y \in P$, $\exists \inf\{z \in P;\ z \geq x, y\} = \sup\{x, y\} = x \vee y$ ← NOTAZIONI

JOIN

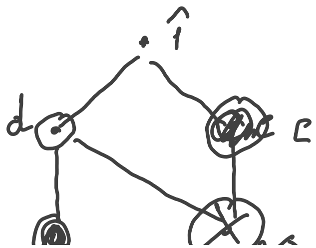
ii) $x, y \in P$; $\exists \sup\{z \in P;\ z \leq x, y\} = \inf\{x, y\} = x \wedge y$ NOTAZIONE

MEET

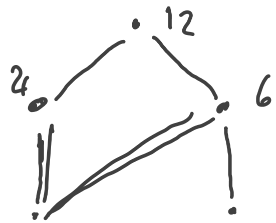
EX ELEMENTARI TRAMITE DIAGRAMMI DI HASSE

1) $P \rightsquigarrow$

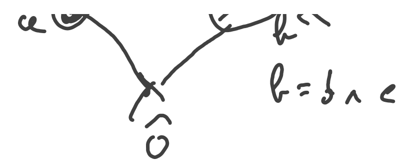
$a \vee c = \hat{1}$

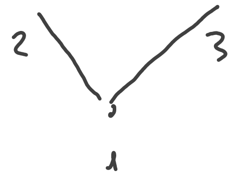


$\cong$



DIVISORI DI 12 ORDINATI CON LA REL



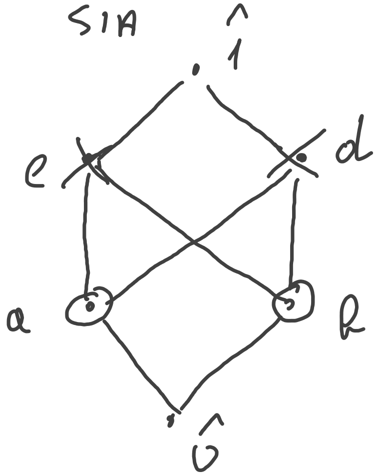


DIVIDE' |"

È UN RETICOLO (LATTICE)??? SI'

2) <u>CONTROESEMPIO</u> SIA

$P \rightsquigarrow$

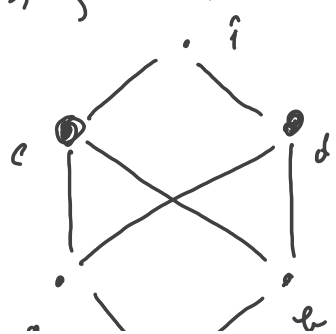


È UN RETICOLO???

$\exists\ a \vee b$???

I MAGGIORANTI DI $\{a, b\}$ SONO

$\{c, d, \hat{1}\}$ HA MINIMO? <u>NO</u>



$\exists\ c \wedge d$? I MINORANTI DELLA COPPIA $\{c, d\}$

SONO $\{a, b, \hat{0}\}$. NON HA MASSIMO; PERCIÒ

$\nexists\ c \wedge d$

DUE MODELLI FONDAMENTALI DI RETICOLI

1) S INSIEME, POSET $(\mathbb{P}(S), \subseteq)$.

INS. — REL. ORDINE: INCLUSIONE

$(\mathbb{P}(S), \subseteq)$ POSET, È UN RETICOLO ???

CIOÈ, DATI $A, B \in \mathbb{P}(S)$ $(\Leftrightarrow A, B \subseteq S)$,

i) $\exists\ A \vee B \overset{\text{DEF}}{=} \min\{C \subseteq S;\ C \supseteq A, B\}$? SÌ

E, DI PIÙ, $A \vee B = A \cup B$!!!

ii) $\exists\ A \wedge B \overset{DEF}{=} \sup\{C \in S;\ C \subseteq A, B\}$? $\underline{\text{SÌ}}$

E, DI PIÙ, $A \wedge B = A \cap B$!!!

2.) SIA $\mathbb{Z}^+ = \{n \in \mathbb{N};\ n > 0\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

ORDINATO CON LA RELAZIONE "DIVIDE" (|) OVE È

$\underline{a \mid b} \Leftrightarrow b$ È MULTIPLO (INTERO) DI a.

i) DATI $a, b \in \mathbb{Z}^+$,

$\exists\ a \vee b \overset{DEF}{=} \inf\{z \in \mathbb{Z}^+;\ a \mid z,\ b \mid z\}$ $\underline{\text{SÌ}}$.

DI PIÙ, $a \vee b \overset{!}{=} m.c.m\{a, b\}$!!!

$\underline{\text{EX}}$ $a = 5$, $b = 4$ $\quad a \vee b = 5 \vee 4 = mcm\{5, 4\} = 20$

ii) DATI $a, b \in \mathbb{Z}^+$,

$\exists\ a \wedge b \overset{DEF}{=} \sup\{z \in \mathbb{Z}^+;\ z \mid a,\ z \mid b\}$ $\underline{\text{SÌ}}$

DI PIÙ, $a \wedge b = MCD\{a, b\}$!!!

DI MD , $a \wedge b = \text{MCD}\{a, b\}$ ...

EX $a = 10$, $b = 6$ $a \wedge b = 10 \wedge 6 = \text{MCD}\{10, 6\} = 2$.

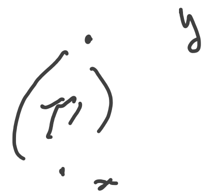
DEF $(P, \leq)$ POSET , SI DICE

LOCALMENTE FINITO $\iff$

DATI $x, y \in P$, $x \leq y$, L'INSIEME

$$[x, y] = \{z \in P \,;\; x \leq z \leq y\}$$ È FINITO !!!

$[x,y]$ È FINITA $\to$



$x \leq y$

EX $(\mathbb{Z}^+, |)$ È LOCALMENTE FINITO !!!

$|$ DIVIDE

È UN RETICOLO

LA FUNZIONE DI MÖBIUS DI UN POSET LOCALMENTE FINITO

(MOEBIUS)

SIA $(\underline{P}, \leq)$ POSET LOC. FINITO.

LA SUA <u>FUNZIONE DI MOEBIUS</u> È LA FUNZIONE:

$$\mu_{\underline{P}} : \underline{P} \times \underline{P} \longrightarrow \mathbb{Z} \qquad t.c.$$

1) $\mu_{\underline{P}}(x, y) = 0$ SE $x \not\leq y$

2) $\mu_{\underline{P}}(x, x) = \underline{1} \quad \forall x \in \underline{P}$

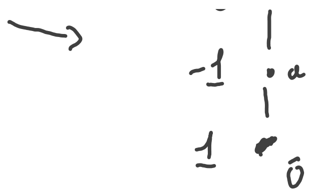
3) $x \leq y$ SI HA:

$$\mu_{\underline{P}}(x, y) = - \sum_{x \leq z < y} \mu_P(x, z)$$

$$= - \sum_{x < z \leq y} \mu_P(z, y)$$

???

<u>EX</u> SIA $\underline{P}$ 0 . $\hat{1}$ 0 ! e HASSE



CALCOLIAMO I VALORI $\mu(\hat{0}, ?)$?

ALLORA :

$$\mu(\hat{0},\hat{0}) = 1 \quad , \quad \mu(\hat{0}, a) \overset{3)}{=} -\mu(\hat{0},\hat{0}) = -1$$

$$\mu(\hat{0}, b) = -(\underbrace{\mu(\hat{0},\hat{0})}_{=1} + \underbrace{\mu(\hat{0}, a)}_{=-1}) = 0$$

$$\mu(0, c) = -(\underbrace{\mu(\hat{0},\hat{0})}_{=1} + \underbrace{\mu(\hat{0}, a)}_{=-1} + \underbrace{\mu(\hat{0}, b)}_{=0}) = 0$$

BREAK QUESTIONS?

INIZIO 15.15