1) Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 12x(t) + 2y(t) \end{cases} ; \quad \begin{cases} x(0) = 5 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Soluzione

In[∘]:=
```
A = {{4, 2}, {12, 2}}; Print[{Eigenvalues[A], Eigenvectors[A]}]
```

```
{{8, -2}, {{1, 2}, {-1, 3}}}
```

In[∘]:=
```
Expand[DSolve[{
    x'[t] == 4 x[t] + 2 y[t],
    y'[t] == 12 x[t] + 2 y[t]},
   {x[t], y[t]}, t]]
```

Out[∘]=

$$\left\{\left\{x[t] \to \frac{2}{5} e^{-2t} c_1 + \frac{3}{5} e^{8t} c_1 - \frac{1}{5} e^{-2t} c_2 + \frac{1}{5} e^{8t} c_2,\right.\right.$$
$$\left.\left. y[t] \to -\frac{6}{5} e^{-2t} c_1 + \frac{6}{5} e^{8t} c_1 + \frac{3}{5} e^{-2t} c_2 + \frac{2}{5} e^{8t} c_2\right\}\right\}$$

(osservazione: tutti i denominatori 5 possono essere soppressi, incorporandoli nelle costanti C[1] e C[2])

In[∘]:=
```
Expand[DSolve[{
    x'[t] == 4 x[t] + 2 y[t],
    y'[t] == 12 x[t] + 2 y[t],
    x[0] == 5,
    y[0] == 0},
   {x[t], y[t]}, t]]
```

Out[∘]=

$$\left\{\left\{x[t] \to 2 e^{-2t} + 3 e^{8t},\ y[t] \to -6 e^{-2t} + 6 e^{8t}\right\}\right\}$$

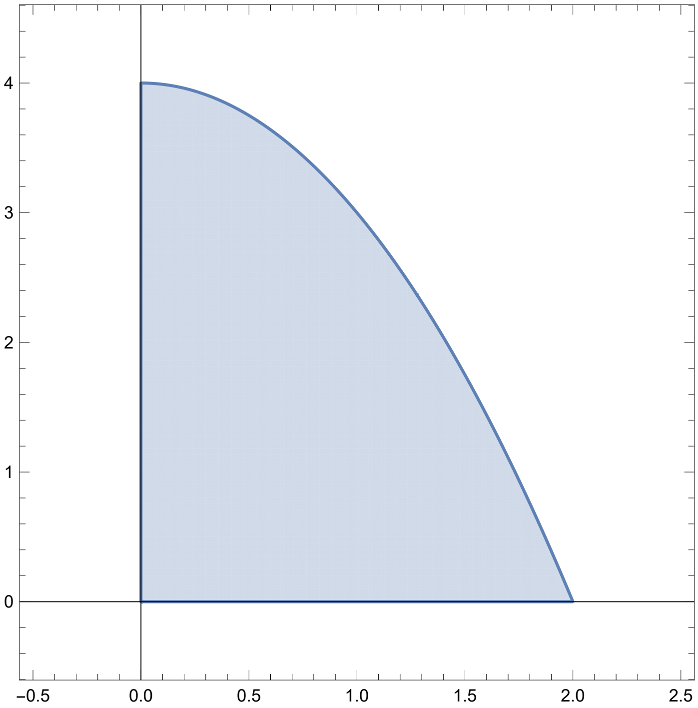
2) Sia $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 ;\ x \geqslant 0,\ \ 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$. Calcolare $\iint_A \frac{x}{16-y^2}\, dx\, dy$.

Soluzione

In[•]:=
```
aa = RegionPlot[{x ≥ 0 && 0 ≤ y ≤ 4 - x^2},
   {x, -0.5, 2.5}, {y, -0.5, 4.5}, PlotPoints → 200];

Show[aa, Axes → True]
```

Out[•]=



Conviene integrare internamente (quindi per prima) la variabile y.

$$\iint_A \frac{x}{16-y^2}\, dx\, dy = \int_0^4 \left(\int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{x}{16-y^2} \cdot dx \right) dy$$

In[•]:= $\int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{x}{16-y^2}\, dx$

Out[•]= $\frac{4-y}{2\,(16-y^2)}$

In[•]:= `FullSimplify[%]`

Out[•]= $\frac{1}{8+2\,y}$

In[•]:= $\int_0^4 \frac{1}{8+2\,y}\, dy$

Out[•]= $\frac{\text{Log}[2]}{2}$

3) Determinare e classificare i punti critici per la funzione $f(x, y) = (x + y)\, e^{x-\frac{y^2}{2}}$

Soluzione

In[∘]:=
```
f[x_, y_] := (x + y) e^(x - y^2/2);
Print[f[x, y]]
```

$e^{x-\frac{y^2}{2}}\,(x+y)$

In[∘]:=
```
grad = Simplify[{Together[D[f[x, y], x]], Together[D[f[x, y], y]]}];
Print[grad];
Reduce[grad == {0, 0}, {x, y}]
```

$\left\{e^{x-\frac{y^2}{2}}\,(1+x+y),\ -e^{x-\frac{y^2}{2}}\left(-1+x\,y+y^2\right)\right\}$

Out[∘]=

$x == 0\ \&\&\ y == -1$

In[∘]:=
```
H[x_, y_] = {{D[f[x, y], x, x], D[f[x, y], x, y]}, {D[f[x, y], x, y], D[f[x, y], y, y]}};
H[x, y];
Print[Simplify[MatrixForm[H[x, y]]]];
Print[MatrixForm[H[0, -1]]];
Print[Det[H[0, -1]]]
```

$$\begin{pmatrix} e^{x-\frac{y^2}{2}}\,(2+x+y) & -e^{x-\frac{y^2}{2}}\left(-1+y+x\,y+y^2\right) \\ -e^{x-\frac{y^2}{2}}\left(-1+y+x\,y+y^2\right) & e^{x-\frac{y^2}{2}}\left(y\left(-3+y^2\right)+x\left(-1+y^2\right)\right) \end{pmatrix}$$

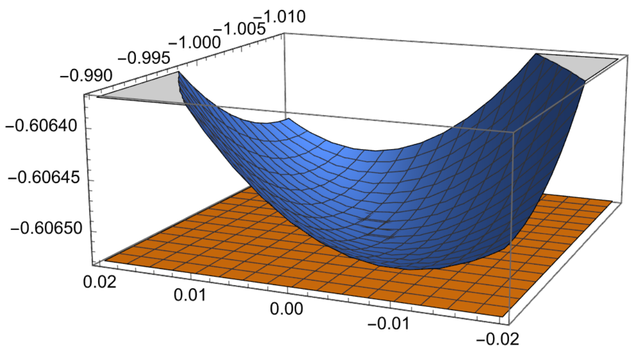
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{e}} & \frac{1}{\sqrt{e}} \\ \frac{1}{\sqrt{e}} & \frac{2}{\sqrt{e}} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{e}$$

Il punto critico $(0, -1)$ è punto di minimo relativo per *f*. La figura mostra il grafico di *f* nelle vicinanze del punto critico, insieme con il piano tangente in tale punto.

In[∘]:=
```
d2 = 0.01; d1 = .02; Plot3D[{f[0, -1], f[x, y]}, {x, -d1, d1}, {y, -1 - d2, -1 + d2}]
```

Out[∘]=



4) Sia $z = \frac{(3+i)^3}{(1+2\,i)^2}$. Rappresentare *z* nel piano complesso e calcolare il modulo e un argomento di *z.*

Soluzione

In[◦]:=
```
z = (3 + i)^3/(1 + 2 i)^2;
Print["z="]; Print[Re[z] + i Im[z]];
Print["modulo e argomento:"]
Print["|z|="]; Print[Abs[z]];
Print["Un argomento di z è"];
Print[Arg[z]]
```

z=

$2 - 6 i$

modulo e argomento:

|z|=

$2\sqrt{10}$

Un argomento di z è

-ArcTan[3]

5) Sia $F(x,y) = \left(\frac{1}{x^2} - 2y + 1,\ \frac{2}{y^3} - 2x\right)$ e sia γ la curva rappresentata dalla parametrizzazione

$$\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \ln t \end{cases},\quad t \in [1, e^2].$$

Calcolare (applicando la definizione) il lavoro del campo F lungo la curva γ, orientata nel verso compatibile con la parametrizzazione assegnata.

Soluzione

In[◦]:=
```
F[{x_, y_}] := {y/x, x + y};
φ[t_] = {√t, Log[t]};
Print[Simplify[F[φ[t]]]];
Print[Simplify[φ'[t]]];
Print[Expand[F[φ[t]].φ'[t]]];
∫_1^(e^2) F[φ[t]].φ'[t] dt
```

$\left\{\frac{\text{Log}[t]}{\sqrt{t}},\ \sqrt{t} + \text{Log}[t]\right\}$

$\left\{\frac{1}{2\sqrt{t}},\ \frac{1}{t}\right\}$

$\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{3\,\text{Log}[t]}{2t}$

Out[◦]=

$1 + 2e$