05 giugno 2023 analisi 2

1) Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{1-x}\, y + \frac{1}{x^2-1} \\ y(2) = 3 \end{cases}$$

Soluzione

In[ ]:=
```
DSolve[{y'[x] == 1/(1 - x) y[x] + 1/(x^2 - 1), y[2] == 3}, y[x], x]
```

Out[ ]=

$$\left\{\left\{y[x] \to \frac{3 - \text{Log}[3] + \text{Log}[1 + x]}{-1 + x}\right\}\right\}$$

svolgimento:

$A(x) = \int \frac{1}{1-x}\, dx = -\ln(x-1)$ (tenendo presente che deve essere $x > 1$)

$y(x) = \exp(-\ln(x-1)) \cdot \left(C + \int \frac{1}{x^2-1} \cdot \exp(\ln(x-1))\, dx\right) =$

$\frac{1}{x-1} \cdot \left(C + \int \frac{x-1}{x^2-1}\, dx\right) = \frac{1}{x-1} \cdot \left(C + \int \frac{1}{x+1}\, dx\right) = \frac{1}{x-1} \cdot (C + \ln(x+1))$.

$y(2) = C + \ln 3$ desiderato $= 3$; perciò $C = 3 - \ln 3$ e la soluzione del problema di Cauchy è
$y(x) = \frac{1}{x-1} \cdot (3 - \ln 3 + \ln(x+1))$, $x \in]1, +\infty[$

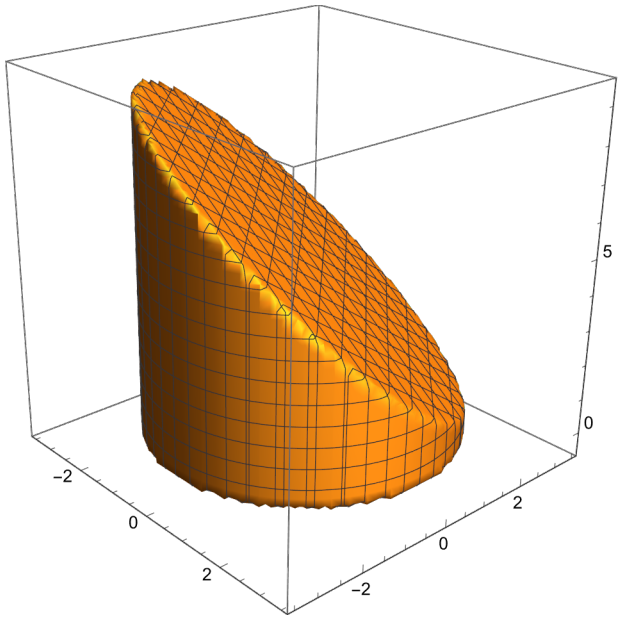
2) Sia $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ;\ z \geqslant 0,\ x^2 + y^2 \leq 9,\ x + y + z \leq 5\}$. Calcolare il volume di A.

Soluzione

```
aa = RegionPlot3D[{z ≥ 0 && x + y + z ≤ 5 && x^2 + y^2 ≤ 9},
   {x, -3.5, 3.5}, {y, -3.5, 3.5}, {z, -.5, 9.5}, PlotPoints → 80];

Show[aa, Axes → True]
```

Out[•]=



Sia $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x^2 + y^2 \leq 9\}$. Allora

Volume di $A = \int\int_P \left(\int_0^{5-x-y} 1\, dz\right) dx\, dy = \int\int_P (5 - x - y)\, dx\, dy$

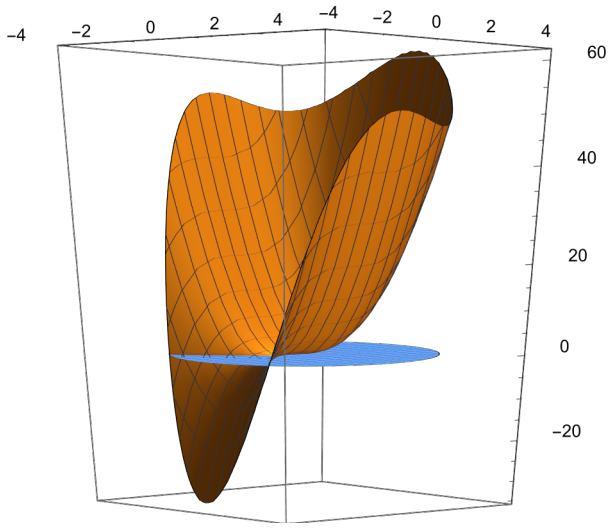
Adesso conviene usare le coordinate polari: $\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$ ottenendo

$\int\int_P (5 - x - y)\, dx\, dy = \int_0^3 \left(\int_0^{2\pi} (5\rho - \rho^2 \cos\theta - \rho^2 \operatorname{sen}\theta)\, d\theta\right) d\rho = \int_0^3 10\pi\rho\, d\rho = 45\pi.$

3) Calcolare il minimo e il massimo valore assunti dalla funzione $f(x, y) = 4x^2 + y^2 + y^3$ nell'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x^2 + y^2 \leq 13\}$

In[∘]:=
```
f[x_, y_] := 4 x^2 + y^2 + y^3;
Plot3D[{f[x, y], 0}, {x, -4, 4}, {y, -4, 4},
 RegionFunction → Function[{x, y, z}, x^2 + y^2 ≤ 13],
 BoxRatios → Automatic, AspectRatio → 1]
```

Out[∘]=



Soluzione

Punti critici interni al dominio e valori di *f* in tali punti:

In[∘]:=
```
grad = {D[f[x, y], x], D[f[x, y], y]}; Print[grad]
```

$\{8x, 2y + 3y^2\}$

In[∘]:=
```
Solve[grad == {0, 0}, {x, y}]
```

Out[∘]=

$\left\{\left\{x \to 0, y \to -\frac{2}{3}\right\}, \{x \to 0, y \to 0\}\right\}$

In[∘]:=
```
Print[{f[0, 0], f[0, -2/3]}]
```

$\left\{0, \frac{4}{27}\right\}$

Sulla frontiera di *A* è $x^2 = 13 - y^2$

In[∘]:=
```
g[y_] := 4 (13 - y^2) + y^2 + y^3; Print[Simplify[g[y]]]
```

$52 - 3y^2 + y^3$

con *y* che assume valori nell'intervallo $\left[-\sqrt{13}, \sqrt{13}\right]$

In[∘]:=
```
g'[y]
```

Out[∘]=

$-6y + 3y^2$

In[∘]:=
```
Solve[g'[y] == 0, y]
```

Out[∘]=

$\{\{y \to 0\}, \{y \to 2\}\}$

```
{f[0, 0], f[0, -2/3], g[0], g[2], g[-√13], g[√13]}
```

Out[•]=

$$\left\{0, \frac{4}{27}, 52, 48, 13 - 13\sqrt{13}, 13 + 13\sqrt{13}\right\}$$

In[•]:=
```
N[%]
```

Out[•]=

```
{0., 0.148148, 52., 48., -33.8722, 59.8722}
```

Perciò il minimo e il massimo valore assunti da f in A sono rispettivamente
$g\left[-\sqrt{13}\right] = f\left[0, -\sqrt{13}\right] = 13\left(1 - \sqrt{13}\right)$ e $g\left[\sqrt{13}\right] = f\left[0, \sqrt{13}\right] = 13\left(1 + \sqrt{13}\right)$.

4) **Calcolare** le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione: $z^3 = -30 + 10\,i$ **e rappresentarle graficamente nel piano complesso.**

Soluzione

```
w=
-30 + 10 i
modulo e argomento di w:
|w| =
```

$10\sqrt{10}$

```
Un argomento di w è
```

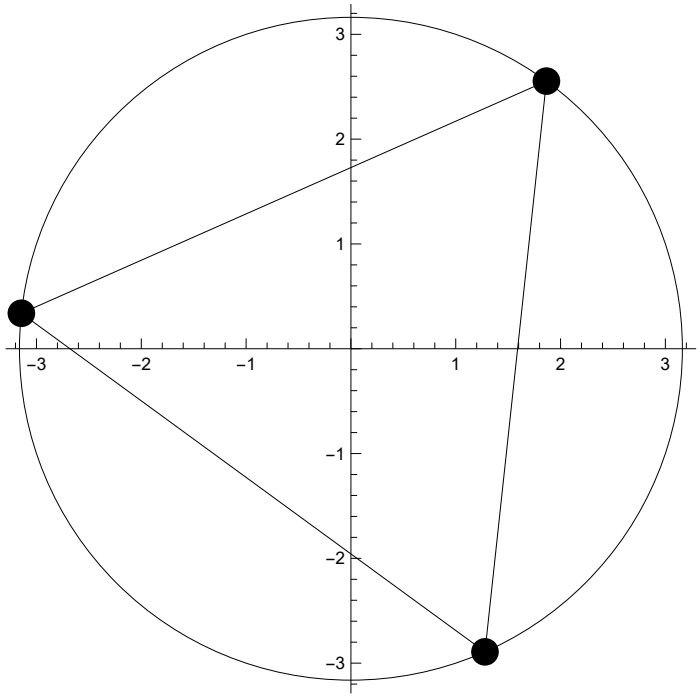
$\pi - \text{ArcTan}\left[\frac{1}{3}\right]$

e quindi le soluzioni dell'equazione proposta sono, per $k = 0, 1, 2,$ le seguenti:

$z = \sqrt{10}\left(\cos\left(\frac{1}{3}\left(2\,k\,\pi + \pi - \text{ArcTan}\left[\frac{1}{3}\right]\right)\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{1}{3}\left(2\,k\,\pi + \pi - \text{ArcTan}\left[\frac{1}{3}\right]\right)\right)\right)$

Questi tre punti si trovano ai vertici di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza con centro (0,0) e raggio $\sqrt{10}$

Out[ ]=



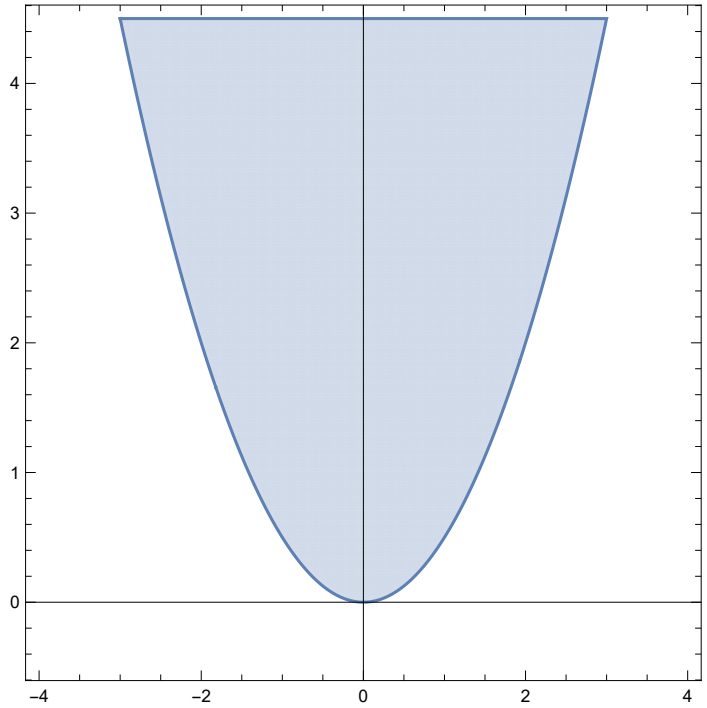
5) Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ;\ 2y - x^2 > 0\}$. Rappresentare graficamente D.

Sia poi, per $(x, y) \in D$, $F(x, y) = \left(\frac{x+x^2-2y}{x^2-2y}, \frac{1}{-x^2+2y}\right)$. Dimostrare che il campo F è conservativo; calcolare un suo potenziale e calcolare il lavoro del campo F lungo la curva γ immagine di $\varphi(t) = \left(\operatorname{sen} t, \sqrt{t}\right)$, $t \in [\pi, 6\pi]$, orientata nel verso in cui y cresce.

Soluzione

```
aa = RegionPlot[{2 y ≥ x^2}, {x, -4, 4}, {y, -0.5, 4.5}, PlotPoints → 200];
Show[aa, Axes → True]
```

Out[•]=



Verifichiamo se il campo F è chiuso.

In[•]:= $f[x\_, y\_] := \left\{\frac{x + x^2 - 2y}{x^2 - 2y}, \frac{1}{-x^2 + 2y}\right\};$

$\text{Print}\left[\text{Simplify}\left[\left\{D\left[\frac{x + x^2 - 2y}{x^2 - 2y}, y\right], D\left[\frac{1}{-x^2 + 2y}, x\right]\right\}\right]\right]$

$\left\{\frac{2x}{(x^2 - 2y)^2}, \frac{2x}{(x^2 - 2y)^2}\right\}$

Il campo è chiuso; il dominio D è stellato, quindi il campo è conservativo. Un suo potenziale $p(x, y)$ deve essere tale che

grad $p(x, y) = \left(\frac{x+x^2-2y}{x^2-2y}, \frac{1}{-x^2+2y}\right)$.

Da $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{-x^2+2y}$ otteniamo, per $(x, y) \in D$,

$p(x, y) = \frac{1}{2} \ln(2y - x^2) + C(x)$

e allora $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{-x}{-x^2+2y} + C'(x)$; questo deve dare $\frac{x+x^2-2y}{x^2-2y}$; perciò $C'(x)$ deve essere

In[•]:= $\text{Simplify}\left[\frac{x + x^2 - 2y}{x^2 - 2y} - \frac{-x}{-x^2 + 2y}\right]$

Out[•]=

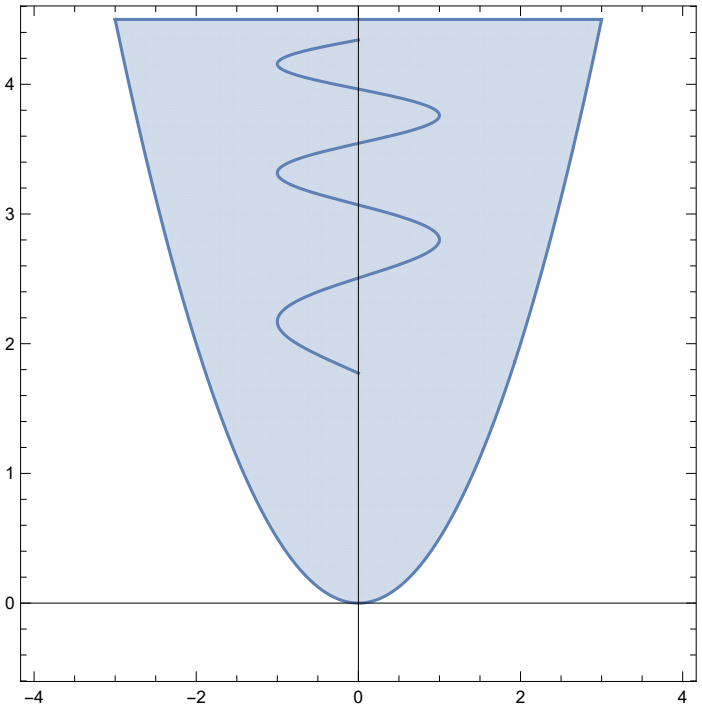
1

e quindi $C(x) = x + K$ con K costante. Un potenziale di F è, per esempio (assegnando a K valore 0)

In[•]:= $p[x\_, y\_] := x + \frac{1}{2} \text{Log}[2y - x^2]$

In[∘]:=
```
aa = RegionPlot[{2 y ≥ x^2}, {x, -4, 4}, {y, -0.5, 4.5}, PlotPoints → 200];
ab = ParametricPlot[{Sin[t], Sqrt[t]}, {t, π, 6 π}];
Show[aa, ab, Axes → True]
```

Out[∘]=



Il disegno di γ è peraltro inutile. Il lavoro è

In[∘]:=
```
p[0, Sqrt[6 π]] - p[0, Sqrt[π]]
```

Out[∘]=

$$-\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\left[2\sqrt{\pi}\right]+\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\left[2\sqrt{6\pi}\right]$$

In[∘]:=
```
Simplify[%]
```

Out[∘]=

$$\frac{\mathrm{Log}[6]}{4}$$