09 giugno 2023, es.1) Programmazione lineare

Discutere il seguente problema di Programmazione lineare: trovare il massimo di $p(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 + 2x_2 + 8x_3$ con i vincoli $x_k \geq 0$ $(1 \leq k \leq 3)$ e

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 12 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 \leq 18 \end{cases}$$

Si assuma come base iniziale per applicare l'algoritmo del simplesso, $\mathcal{B}_1 = \{A_4, A_1, A_5\}$, in cui A_1 è la prima colonna della matrice dei coefficienti del sistema dei vincoli e A_4, A_5 sono rispettivamente $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, colonne relative alle variabili di scarto x_4, x_5 che si debbono introdurre.

Soluzione

Avendo scelto come base di A^* $\mathcal{B}_1 = \{A_4, A_1, A_5\}$, dobbiamo operare sulla matrice dei coefficienti del sistema dei vincoli, ossia $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 12 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 1 & 18 \end{pmatrix}$ per ottenere $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ rispettivamente nella quarta colonna, nella prima e nella quinta. Con qualche calcolo si perviene alla tabella del simplesso relativa alla base $\mathcal{B}_1$:

		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	B
$x_{v_1} = x_4$	$c_{v_1} = c_4 = 0$	0	1	-1	1	0	8
$x_{v_2} = x_1$	$c_{v_2} = c_1 = 4$	1	1	2	0	0	4
$x_{v_2} = x_5$	$c_{v_2} = c_5 = 0$	0	2	1	0	1	6
		0	-1	-6	0	0	4
		$(z_1 - c_1)$	$(z_2 - c_2)$	$(z_3 - c_3)$	$(z_4 - c_4)$	$(z_5 - c_5)$	(z)

Abbiamo due valori negativi tra gli $z_j - c_j$; precisamente $z_2 - c_2 = -1 < 0$, $z_3 - c_3 = -6 < 0$, e in entrambi i casi la colonna sovrastante ha qualche termine positivo. Allora bisogna operare la "trasformazione pivotale" facendo entrare nella base uno tra i vettori A_2 o A_3 . Scegliamo di fare entrare A_3 perché $z_3 - c_3$ è maggiore in valore assoluto; il criterio non è vincolante: avremmo anche potuto fare entrare A_2 .

Per decidere quale vettore esce valutiamo $\frac{\beta_2}{\alpha_{2,3}} = \frac{4}{2} = 2$, $\frac{\beta_3}{\alpha_{3,3}} = 6$; il primo di questi è il minore, quindi esce $A_{v_1} = A_1$.
Svolgendo i calcoli si ottiene la nuova tabella del simplesso relativa alla base $\mathcal{B}_2 = \{A_4, A_3, A_5\}$:

		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	B
$x_{v_1} = x_4$	$c_{v_1} = c_4 = 0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	1	0	10
$x_{v_2} = x_3$	$c_{v_2} = c_3 = 8$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	0	2
$x_{v_2} = x_5$	$c_{v_2} = c_5 = 0$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0	1	4
		3	2	0	0	0	16
		$(z_1 - c_1)$	$(z_2 - c_2)$	$(z_3 - c_3)$	$(z_4 - c_4)$	$(z_5 - c_5)$	(z)

Siccome adesso tutti gli $z_j - c_j$ sono ≥ 0 , l'algoritmo è terminato; la funzione obiettivo ha massimo nella regione ammissibile, il massimo vale $z = 16$ ed è assunto per $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 2, 10, 4)$.

09 giugno 2023, es.2) Distribuzioni

Sia, per $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \begin{cases} (x - x^2)^{\frac{1}{n}} & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ e sia $T_n = T_{f_n}$ la distribuzione associata a f_n.

a) Dimostrare che la successione (T_n) converge in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ a una distribuzione T; descrivere T fornendo l'espressione di $\langle T, \varphi \rangle$ per una generica $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

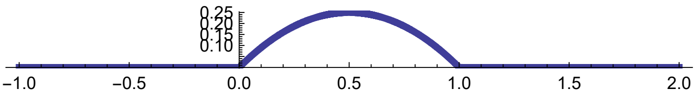
b) Dire se esiste e quanto vale il limite in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ della successione (T_n') delle derivate delle T_n.

Soluzione.

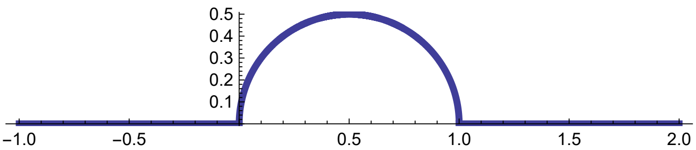
Grafico di f_1, f_2, f_4:

```
f[n_, x_] := { (x - x^2)^(1/n)   0 ≤ x ≤ 1
             { 0                 x < 0 ∨ x > 1 ;
```

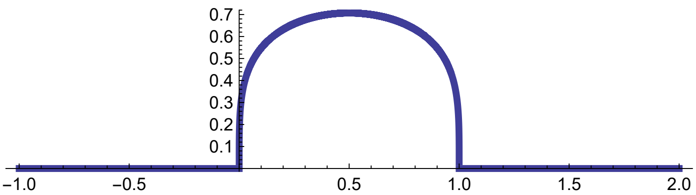
```
Plot[f[1, x], {x, -1, 2}, AspectRatio → Automatic, PlotPoints → 20000, PlotStyle → Thickness[.01]]
```




```
Plot[f[2, x], {x, -1, 2}, AspectRatio → Automatic, PlotPoints → 20000, PlotStyle → Thickness[.01]]
```

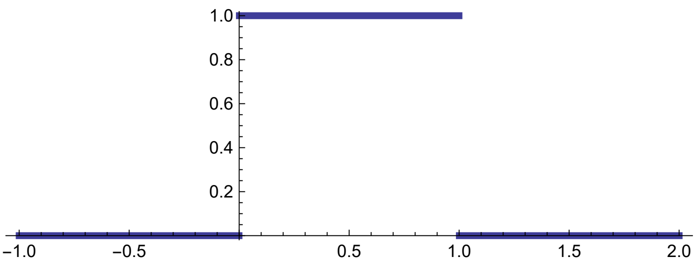



```
Plot[f[4, x], {x, -1, 2}, AspectRatio → Automatic, PlotPoints → 50000, PlotStyle → Thickness[.01]]
```



Per ogni $n \in \mathbb{N}$, f_n è una funzione continua in $\mathbb{R}$; per ogni $x \in]0, 1[$ è $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 1$; quindi (f_n) converge puntualmente in $\mathbb{R}$ alla funzione

```
f[x_] := { 1   0 < x < 1
         { 0   x ≤ 0 ∨ x ≥ 1 ;  Plot[f[x], {x, -1, 2}, AspectRatio → Automatic, PlotStyle → Thickness[.01]]
```



La convergenza non è uniforme perché le f_n sono continue mentre f non lo è. Si ha però convergenza, per esempio, in norma L^1 perché

$$\|f - f_n\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_0^1 \left(1 - (x - x^2)^{\frac{1}{n}}\right) dx$$

L'integrando converge puntualmente a 0 in [0,1], e per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x \in [0, 1]$ è $\left| 1 - (x - x^2)^{\frac{1}{n}} \right| < 1$; La funzione costante con valore 1 è sommabile in [0, 1]. Per il teorema della convergenza dominata si ha allora
$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \left(1 - (x - x^2)^{\frac{1}{n}}\right) dx = \int_0^1 \lim_{n \to +\infty} \left(1 - (x - x^2)^{\frac{1}{n}}\right) dx = \int_0^1 0 \, dx = 0.$
Questo è sufficiente per concludere che il limite in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ di T_{f_n} è T_f, cioè la distribuzione T tale che per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^1 \varphi(x) \, dx .$$

b) Dalla teoria sappiamo che se una successione (T_n) converge in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ a una distribuzione T, allora le successioni delle derivate di T_n di qualsiasi ordine convergono alle corrispondenti derivate di T. Nel caso attuale avremo perciò che la successione (T_n') converge a T', derivata di T. La derivata di T è la somma di due δ centrate in 0 e 1, moltiplicate per l'ampiezza dei "salti", rispettivamente 1 e -1; vale a dire che per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle T', \varphi \rangle = \varphi(0) - \varphi(1) .$$

09 giugno 2023, es.3) Funzioni "quasi crescenti"

Conveniamo di chiamare *quasi crescente* una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se esiste $T > 0$ tale che per ogni $a \in \mathbb{R}$, $\inf_{x \in [a, +\infty[} f(x) \geq \sup_{x \in]-\infty, a-T]} f(x)$.

a) Dimostrare che: se f è quasi crescente e superiormente illimitata, allora $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

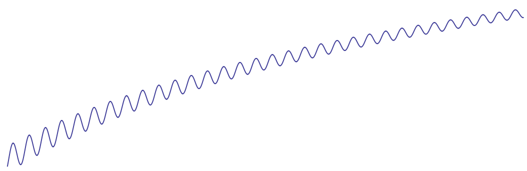
(suggerimento: fissato $M > 0$, M non è maggiorante per l'insieme dei valori assunti da f)

b) Dimostrare che: se f è quasi crescente e superiormente limitata, con $\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) = l$, allora $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$.

(suggerimento: fissato $\varepsilon > 0$, $l - \varepsilon$ non è maggiorante per l'insieme dei valori assunti da f)

Soluzione.

La figura qui sotto dà un'idea della nozione introdotta sopra



a) Supponiamo f superiormente illimitata. Sia $M > 0$; allora esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0) > M$. Sia adesso $x > x_0 + T$, con T come sopra. Allora

$$f(x) \geq \inf_{y \in [x_0 + T, +\infty[} f(y) \geq \sup_{y \in]-\infty, x_0]} f(y) \geq f(x_0) > M.$$

Abbiamo così provato, in base alla definizione di limite, che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b) Sia $\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) = l$, e $\varepsilon > 0$. Allora $l - \varepsilon$ non è maggiorante per l'insieme dei valori assunti da f, perciò esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0) > l - \varepsilon$. Sia adesso $x > x_0 + T$. Allora

$$f(x) \geq \inf_{y \in [x_0 + T, +\infty[} f(y) \geq \sup_{y \in]-\infty, x_0]} f(y) \geq f(x_0) > l - \varepsilon.$$

Inoltre per ogni $x \in \mathbb{R}$ è $f(x) \leq l < l + \varepsilon$; perciò, se $x > x_0 + T$, allora $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$.

Abbiamo così provato, in base alla definizione di limite, che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$.

09 giugno 2023, es.4) Verifica di un limite.

Verificare in base alla definizione di limite che $\lim_{x\to 3} \frac{x^3+2x}{10-x^2} = 33$.

Soluzione.

Si tratta di provare che:

$$\forall \varepsilon > 0 \,\exists\, \delta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \left(0 < \left| x-3 \right| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^3+2x}{10-x^2} - 33 \right| < \varepsilon\right).$$

Sia $\varepsilon > 0$. Il denominatore $10 - x^2$ impone che sia $x \neq \pm\sqrt{10}$; per la buona riuscita della verifica sarà anche opportuno che x si mantenga sufficientemente lontano da questi valori. Supponiamo dunque fin da ora $0 < x < 3.1$. Si ha

```
Together[(x^3 + 2 x)/(10 - x^2) - 33]
```

$$\frac{330 - 2x - 33x^2 - x^3}{-10 + x^2}$$

Il numeratore (naturalmente!) si annulla per $x = 3$; quindi è divisibile per $(x - 3)$. Eseguiamo la fatorizzazione.

```
Factor[330 - 2 x - 33 x^2 - x^3]
```

$-(-3 + x)\,(110 + 36x + x^2)$

Adesso osserviamo che, se $0 < x < 3.1$, allora $10 - x^2 > 10 - 3.1^2$

```
10 - 3.1^2
```

0.39

e quindi $0 < \frac{1}{10-x^2} < \frac{1}{0.39}$. Poi anche $\left| x^2 + 36x + 110 \right| < 3.1^2 + 36 \cdot 3.1 + 110 = 231.21$.

Perciò, se $0 < x < 3.1$, allora $\left| \frac{x^3+2x}{10-x^2} - 33 \right| < \frac{231.21}{0.39} \left| x-3 \right| < 593 \left| x-3 \right|$, osservando che è

$$\frac{231.21}{0.39}$$

592.846

Perciò, se $0 < x < 3.1$ e $\left| x-3 \right| < \frac{\varepsilon}{593}$ allora $\left| \frac{x^3+2x}{10-x^2} - 33 \right| < 593 \left| x-3 \right| < \varepsilon$.

La verifica è pertanto realizzata, con $\delta = \min\left\{0.1,\ \frac{\varepsilon}{593}\right\}$.

Osservazione. Le maggiorazioni possono essere più rozze per facilitare il calcolo, raggiungendo ugualmente l'obiettivo. Nel nostro caso avremmo potuto per esempio fare così: se $0 < x < 3.1$, allora $10 - x^2 > 0.39$, perciò $0 < \frac{1}{10-x^2} < \frac{1}{0.39} < 3$; poi $\left| x^2 + 36x + 110 \right| < 4^2 + 36 \cdot 4 + 110 = 270$ cosicché $\left| \frac{x^3+2x}{10-x^2} - 33 \right| < 810 \left| x-3 \right|$; avremmo così determinato $\delta = \min\left\{0.1,\ \frac{\varepsilon}{810}\right\}$, un po' più restrittivo del valore precedentemente indicato, ma altrettanto valido ai fini della verifica della definizione di limite.

09 giugno 2023, es.5) Il televisore a rate

Mirko vuole acquistare un televisore reclamizzato in un volantino che ha trovato nella posta; il negozio propone un pagamento rateale in 12 rate mensili da 140€, la prima tra un mese. Il volantino dell'offerta precisa "T.A.N. 2.4266% annuo.

a) Calcolare il prezzo del televisore, se pagato immediatamente in contanti.

b) Leggendo meglio il volantino, Mirko osserva che per aderire al pagamento rateale è richiesto il pagamento immediato di un importo per "spesa di apertura pratica"; la stampa è difettosa, non si legge a quanto ammonta;

inoltre, a ogni rata va aggiunto 1€ per "commissioni di incasso"; infine legge “T.A.E.G. 6.168% annuo”. La differenza fra T.A.N. e T.A.E.G. è dovuta alle spese accessorie su indicate. Calcolare a quanto ammonta la "spesa di apertura pratica".

Soluzione.

a) Il prezzo del televisore è il valore attuale della rendita di 12 mensilità immediate posticipate, del valore di 140€ ciascuna, la tasso annuo 2.4266 × %.
Lo possiamo calcolare direttamente mediante la funzione

$$a[n\_, i\_] := \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i};$$

in cui adesso $n = 12$ e i è il tasso *mensile* i_{12} equivalente al tasso annuo 2.4266%, cioè

$$i_{12} = \text{Round}\left[(1.024266)^{\frac{1}{12}} - 1, 0.001\right]$$

0.002

cosicché il prezzo è

p = Round[140 * a[12, i_{12}], 0.01]

1658.36

Altrimenti potevamo calcolare il valore attuale direttamente, senza bisogno di ricavare il tasso equivalente mensile:

$$\text{Round}\left[140 * \sum_{k=1}^{12} (1.024266)^{-\frac{k}{12}}, 0.01\right]$$

1658.36

b) Il tasso mensile equivalente a 6.168% annuo è

$$j_{12} = \text{Round}\left[(1.06168)^{\frac{1}{12}} - 1, 0.001\right]$$

0.005

Detta S la spesa iniziale per "apertura pratica", il prezzo del televisore, che abbiamo calcolato sopra, deve essere uguale al valore attuale al tasso mensile j_{12}, di una rendita costituita da 12 mensilità immediate posticipate di 141€, più una rata anticipata pagata adesso, di importo S; cioè S si ricava dalla seguente relazione:

Solve[p == S + 141 * a[12, j_{12}], S]

{{S → 20.0906}}

xx giugno 2023, es.6) Viaggio aereo con o senza scalo

Elisa deve viaggiare da Los Angeles a Bologna in un determinato giorno. Può scegliere un volo diretto Lufthansa, costo 1200$, oppure Los Angeles-Londra con British Airways, 900$ e Londra-Bologna con Ryanair, 100$. In quest'ultimo caso però c'è il rischio che il volo per Londra abbia un ritardo tale da non arrivare in tempo per il volo prenotato da Londra a Bologna; Elisa stima 0.2 la probabilità di questo spiacevole evento. In tal caso Elisa perderà l'importo pagato a Ryanair, e dovrà acquistare un altro volo da Londra a Bologna (lo chiameremo "volo di riserva")
a) Calcolare quale prezzo del volo di riserva rende indifferente la scelta di Elisa tra il viaggio con o senza scalo, in base al criterio della massima speranza matematica di guadagno.
b) Stesso problema, adottando come criterio di decisione la utilità attesa, con funzione utilità $u(x) = 1 - e^{-\frac{x}{5}}$, in cui x è espresso in *centinaia di $.*

Si presti attenzione al fatto che in questo problema i "guadagni" sono tutti negativi; per il calcolo delle utilità utilizzare valori decimali approssimati alla seconda cifra dopo la virgola.

Soluzione.

a) Sia *R* l'evento "ritardo del volo di British Airways" (con conseguente mancata coincidenza); sia *p* il prezzo del volo di riserva, espresso in centinaia di $. La seguente tabella riassume le diverse possibilità e i corrispondenti guadagni attesi, se Elisa sceglie il volo diretto Lufthansa oppure lo scalo a Londra; gli importi monetari sono indicati in *centinaia di $.*

decisione / Evento	Volo diretto	Scalo a Londra	probabilità
R	−12	−10 − p	0.2
non R	−12	−10	0.8
Valori medi	−12	−10 − 0.2 p	

Secondo questo criterio di scelta le due decisioni sono equivalenti se $10+0.2\,p=12$, ossia $p=10$, vale a dire se il costo del volo di riserva è di 1000$. Un costo del volo di riserva inferiore a 1000$ rende preferibile la scelta del viaggio con scalo, un costo superiore suggerisce la scelta del volo diretto.

b) Dobbiamo effettuare un confronto simile a quello di (a), non più tra le speranze matematiche associate a ciascuna decisione bensì tra le rispettive utilità attese. Compiliamo quindi la tabella con le utilità; il calcolo dei valori in tabella è svolto subito sotto.

decisione / Evento	Volo diretto	Scalo a Londra	probabilità
R	$u(-12) = -10.02$	$u(-10-p) = 1 - e^{\frac{10+p}{5}}$	0.2
non R	$u(-12) = -10.02$	$u(-10) = -6.39$	0.8
Valori medi	$E(u(X_1)) = -10.02$	$E(u(X_2)) = -4.91 - 0.2 * e^{\frac{10+p}{5}}$	

Valori delle utilità:

```
u[x_] := 1 - e^(-x/5); Round[N[{u[-12], u[-10]}], 0.01]
```

```
{-10.02, -6.39}
```

Per il calcolo della utilità attesa nel caso di "Scalo a Londra":

```
Round[0.2 - 6.39 * 0.8, 0.01]
```

```
-4.91
```

Questo criterio di decisione rende indifferenti le due scelte se *p* rende uguali le due utilità attese. Si ottiene

```
NSolve[-10.02 == -4.91 - 0.2 * e^((10+p)/5), p]
```

```
{{p → 6.20319}}
```

Perciò l'applicazione di questa funzione utilità valuta indifferenti le due alternative, se il volo di riserva costa 620.31$.
Si noti che il valore è inferiore a quello calcolato attraverso i guadagni attesi, in conformità con il fatto che l'adozione di una funzione utilità manifesta una "avversione al rischio" di cui non si tiene conto quando si adotta la speranza matematica come "equivalente certo" di un guadagno aleatorio.