Esercizio 1A. Sia α un numero reale qualsiasi. Determinare per quali α abbiamo $v \in \ker A$, dove

$$v := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix} \quad ; \quad A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soluzione: Abbiamo $v \in \ker A \Leftrightarrow \alpha = k$ infatti

$$Av = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\alpha \\ 3+\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 3.$$

Esercizio 1B. Sia α un numero reale qualsiasi. Determinare per quali α abbiamo $v \in \ker A$, dove

$$v := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix} \quad ; \quad A := \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soluzione: Abbiamo $v \in \ker A \Leftrightarrow \alpha = k$ infatti

$$Av = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-\alpha \\ 3+\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = -3.$$

Esercizio 2A. Calcolare l'inversa della matrice A seguente

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

Soluzione: Applichiamo l'algoritmo di Gauss con la seguente catena di operazioni

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & 1-5 \end{array}\right).$$

Quindi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -5 & 1 & 5 \\ 5 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2B. Calcolare l'inversa della matrice A seguente

$$A := \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

Soluzione: Applichiamo l'algoritmo di Gauss con la seguente catena di operazioni

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & -7 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & -7 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -1 & 1-7 \end{array}\right).$$

Quindi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & -1 & -6 \end{pmatrix}.$$