**Esercizio 1A.** Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la seguente matrice è invertibile. Per tali valori calcolare l'inversa.

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ \alpha & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Soluzione:* Applichiamo l'algoritmo di Gauss con la seguente catena di operazioni

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \alpha & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Se $\alpha = 0$ la forma a scalini ridotta di $A$ ha una riga nulla, quindi $A$ non è invertibile. Altrimenti per $\alpha \neq 0$ possiamo continuare l'algoritmo

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1/\alpha & 1/\alpha & -2/\alpha \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1/\alpha & 1/\alpha & -2/\alpha \\ 0 & 0 & 1 & -2/\alpha & 2/\alpha & 1-4/\alpha \end{array}\right),$$

da cui si ottiene

$$A^{-1} = \frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ \alpha & 0 & 2\alpha \\ -2 & 2 & \alpha-4 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 1B.** Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la seguente matrice è invertibile. Per tali valori calcolare l'inversa.

$$A := \begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ \alpha & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Soluzione:* Applichiamo l'algoritmo di Gauss con la seguente catena di operazioni

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ \alpha & 0 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Se $\alpha = 0$ la forma a scalini ridotta di $A$ ha una riga nulla, quindi $A$ non è invertibile. Altrimenti per $\alpha \neq 0$ possiamo continuare l'algoritmo

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1/\alpha & 1/\alpha & -3/\alpha \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1/\alpha & 1/\alpha & -3/\alpha \\ 0 & 0 & 1 & -3/\alpha & 3/\alpha & 1-9/\alpha \end{array}\right),$$

da cui si ottiene

$$A^{-1} = \frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ \alpha & 0 & 3\alpha \\ -3 & 3 & \alpha-9 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 2A.** Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il vettore $v$ è autovettore di $A$, dove

$$v := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad A := \begin{pmatrix} 2\alpha & 14 & 4-\alpha^2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per ogni $\alpha$ trovato sopra, determinare $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $Av = \lambda v$.

*Soluzione:* Abbiamo

$$Av = \begin{pmatrix} 2\alpha & 14 & 4-\alpha^2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2+6\alpha-4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

La condizione $Av = \lambda v$ implica

$$\begin{cases} \lambda = -3 \\ \alpha^2+6\alpha-4 = -9 \Leftrightarrow \alpha^2+6\alpha+5 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -5, \alpha = -1. \end{cases}$$

**Esercizio 2B.** Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il vettore $v$ è autovettore di $A$, dove

$$v := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 9-\alpha^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Per ogni $\alpha$ trovato sopra, determinare $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $Av = \lambda v$.

*Soluzione:* Abbiamo

$$Av = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 9-\alpha^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-\alpha^2 \\ 0 \\ 2\alpha+1 \end{pmatrix}.$$

La condizione $Av = \lambda v$ implica

$$\begin{cases} \lambda = 2\alpha+1 \\ 9-\alpha^2 = 2\alpha+1 \Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha-8 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 4, \alpha = -2. \end{cases}$$