Esercizio 1A. Stabilire per quali valori di α la seguente matrice ha 3 autovalori distinti. Per ciascuno di tali α dare i 3 autovalori di A in funziona di α.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 9-\alpha^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Soluzione: La matrice A ha per polinomio caratteristico

$$\begin{aligned} P(t) = \det(A - t\mathrm{Id}) &= (1-t)\big(-t(2\alpha - t) - (9-\alpha^2)\big) = (1-t)\big(t^2 - 2\alpha t + \alpha^2 - 9\big) \\ &= (1-t)\big((t-\alpha)^2 - 9\big) = (1-t)(t-\alpha-3)(t-\alpha+3). \end{aligned}$$

I 3 autovalori sono

$$\lambda_1 = 1 \quad ; \quad \lambda_2 = \alpha + 3 \quad ; \quad \lambda_3 = \alpha - 3,$$

che sono distinti per $\alpha + 3 \neq 1 \Leftrightarrow \alpha \neq -2$ e per $\alpha - 3 \neq 1 \Leftrightarrow \alpha \neq 4$.

Esercizio 1B. Stabilire per quali valori di α la seguente matrice ha 3 autovalori distinti. Per ciascuno di tali α dare i 3 autovalori di A in funziona di α.

$$\begin{pmatrix} 2\alpha & 14 & 4-\alpha^2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A ha per polinomio caratteristico

$$\begin{aligned} P(t) = \det(A - t\mathrm{Id}) &= (3-t)\big(-t(2\alpha - t) - (4-\alpha^2)\big) = (3-t)\big(t^2 - 2\alpha t + \alpha^2 - 4\big) \\ &= (3-t)\big((t-\alpha)^2 - 4\big) = (1-t)(t-\alpha-2)(t-\alpha+2). \end{aligned}$$

I 3 autovalori sono

$$\lambda_1 = 3 \quad ; \quad \lambda_2 = \alpha + 2 \quad ; \quad \lambda_3 = \alpha - 2,$$

che sono distinti per $\alpha + 2 \neq 3 \Leftrightarrow \alpha \neq 1$ e per $\alpha - 2 \neq 3 \Leftrightarrow \alpha \neq 5$.

Esercizio 2A. Determinare le coordinate $[v]_{\mathcal{B}}$ del vettore $v := (1, -1, 1)$ nella base $\mathcal{B} := \{v_1, v_2, v_3\}$, dove

$$v_1 := \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad v_2 := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione: applichiamo l'algoritmo di Gauss con la seguente catena di operazioni:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 11 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Quindi

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2B. Determinare le coordinate $[v]_{\mathcal{B}}$ del vettore $v := (1, 1, -1)$ nella base $\mathcal{B} := \{v_1, v_2, v_3\}$, dove

$$v_1 := \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad v_2 := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione: applichiamo l'algoritmo di Gauss con la seguente catena di operazioni:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right).$$

Quindi

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix}.$$