Esercizio 1A. Mostrare che $\lambda = 3$ è l'unico autovalore reale della seguente matrice A. Determinare la dimensione ed una base dell'autospazio corrispondente.

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soluzione: Il polinomio caratteristico di A è

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 3 \\ 6 & -3 & -\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)\big(\lambda^2+9\big)$$

e $\lambda = 3$ è l'unica radice reale. L'autospazio corrispondente è

$$\ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

che ha dimensione 1 ed una cui base è data dal vettore $(1,1,1)$.

Esercizio 1B. Mostrare che $\lambda = -2$ è l'unico autovalore reale della sueguente matrice A. Determinare la dimensione ed una base dell'autospazio corrispondente.

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soluzione: Il polinomio caratteristico di A è

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -2 \\ -4 & 2 & -\lambda \end{pmatrix} = (-2-\lambda)\big(\lambda^2+4\big)$$

e $\lambda = -2$ è l'unica radice reale. L'autospazio corrispondente è

$$\ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

che ha dimensione 1 ed una cui base è data dal vettore $(1,1,1)$.

Esercizio 1A Data la matrice

$$A := \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix},$$

determinare, se esistono, vettori u, v in $\mathbb{R}^3$ tali che rispettivamente

$$Av = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Au := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione: Abbiamo

$$v = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad u = \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 1B Data la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

determinare, se esistono, vettori u, v in $\mathbb{R}^3$ tali che rispettivamente

$$Av = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Au := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione: Abbiamo

$$v = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad u = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$