28 giugno 2023 analisi 2

1) Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 2y' = 8x + 2 \\ y(0) = 3 \;; \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

Soluzione

In[ ]:=
```
Simplify[DSolve[{y''[x] + 2 y'[x] == 8 x + 2, y[0] == 3, y'[0] == 0}, y[x], x]]
```

Out[ ]=

$$\left\{\left\{y[x] \to \frac{7}{2} - \frac{e^{-2x}}{2} - x + 2x^2\right\}\right\}$$

2) Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x \geq 0\,,\ 0 \leq y \leq x^2\,,\ x^2 + y^2 \leq 2\}$. Calcolare $\iint_A \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$, applicando il cambiamento di variabili

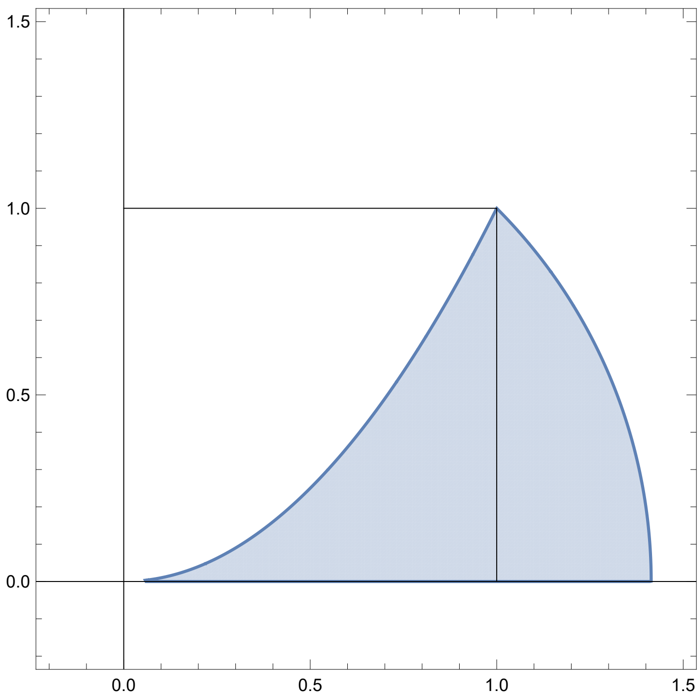
$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

Soluzione

In[ ]:=
```
aa = RegionPlot[{x ≥ 0 && 0 ≤ y ≤ x^2 && x^2 + y^2 ≤ 2},
   {x, -0.2, 1.5}, {y, -0.2, 1.5}, PlotPoints → 200];
ab = Graphics[Line[{{1, 0}, {1, 1}, {0, 1}}]];

Show[aa, ab, Axes → True]
```

Out[ ]=



$$\iint_A \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{\rho}\cdot\rho\,d\rho\right)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sqrt{2} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}\right)d\theta =$$

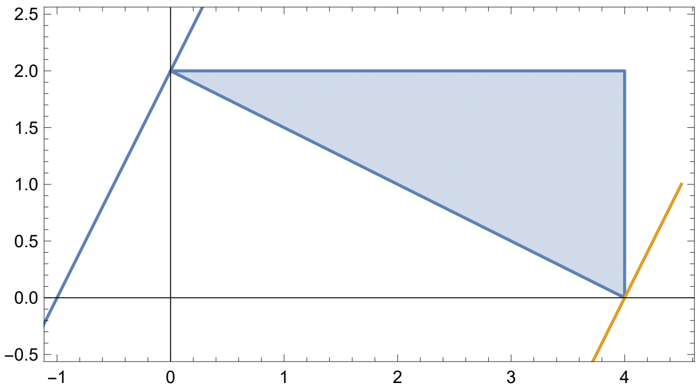
$$=\left[\sqrt{2}\cdot\theta + \frac{1}{\cos\theta}\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{4} + \sqrt{2} - 1.$$

3) Calcolare il minimo e il massimo valore assunti dalla funzione $f(x, y) = -2x + y$ nell'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \le 4,\ \ y \le 2,\ \ x + 2y \ge 4\}$

Soluzione

Le linee di livello di f sono rette parallele tra loro e alla retta L_0) $-2x + y = 0$. La retta L_k) $-2x + y = k$ si sposta verso sinistra all'aumentare di k; perciò il minimo e il massimo valore di f vengono assunti rispettivamente nei vertici (4,0) e (0,2) di A e valgono $f(4, 0) = -8$, $f(0, 2) = 2$

Out[∘]=



In[∘]:=
```
aa = RegionPlot[{x ≤ 4 && y ≤ 2 && x + 2 y ≥ 4},
  {x, -0.2, 4.5}, {y, -0.2, 2.5}, PlotPoints → 200]
```

4) **Calcolare** le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione: $z^3 = -30 + 10\,i$ **e rappresentarle graficamente nel piano complesso.**

Soluzione

w=

$-30 + 10\,i$

modulo e argomento di w:

|w| =

$10\sqrt{10}$

Un argomento di w è

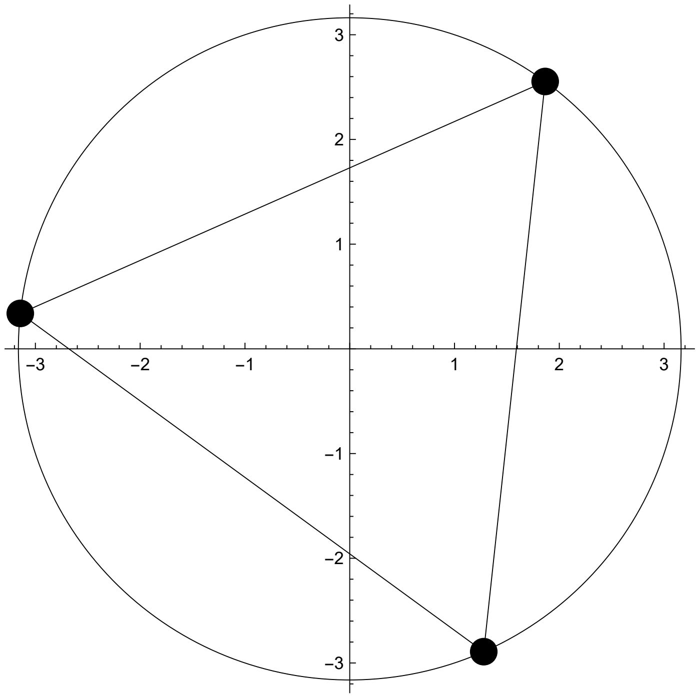
$\pi - \operatorname{ArcTan}\left[\frac{1}{3}\right]$

e quindi le soluzioni dell'equazione proposta sono, per $k = 0, 1, 2$, le seguenti:

$$z = \sqrt{10}\left(\cos\left(\tfrac{1}{3}\left(2k\pi + \pi - \operatorname{ArcTan}\left[\tfrac{1}{3}\right]\right)\right) + i\,\operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{3}\left(2k\pi + \pi - \operatorname{ArcTan}\left[\tfrac{1}{3}\right]\right)\right)\right)$$

Questi tre punti si trovano ai vertici di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza con centro (0,0) e raggio $\sqrt{10}$

Out[ ]=



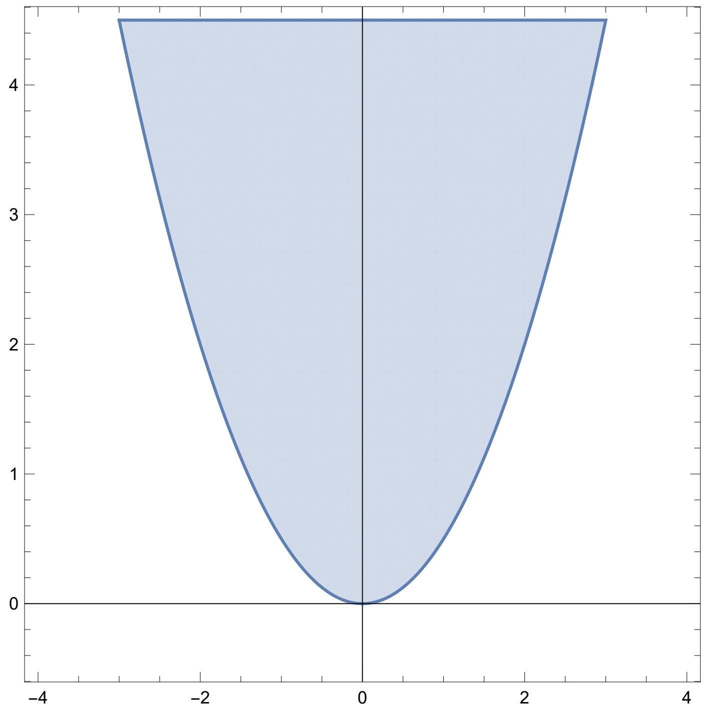
5) Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ;\ 2y - x^2 > 0\}$. Rappresentare graficamente *D.*

Sia poi, per $(x, y) \in D$, $F(x, y) = \left(\frac{x + x^2 - 2y}{x^2 - 2y}, \frac{1}{-x^2 + 2y}\right)$. Dimostrare che il campo F è conservativo; calcolare un suo potenziale e calcolare il lavoro del campo F lungo la curva γ immagine di $\varphi(t) = \left(\operatorname{sen} t, \sqrt{t}\right)$, $t \in [\pi, 6\pi]$, orientata nel verso in cui y cresce.

Soluzione

```
aa = RegionPlot[{2 y ≥ x^2}, {x, -4, 4}, {y, -0.5, 4.5}, PlotPoints → 200];
Show[aa, Axes → True]
```

Out[∘]=



Verifichiamo se il campo F è chiuso.

In[∘]:=
```
f[x_, y_] := {(x + x^2 - 2 y)/(x^2 - 2 y), 1/(-x^2 + 2 y)};
Print[Simplify[{D[(x + x^2 - 2 y)/(x^2 - 2 y), y], D[1/(-x^2 + 2 y), x]}]]
```

$$\left\{\frac{2x}{(x^2-2y)^2},\ \frac{2x}{(x^2-2y)^2}\right\}$$

Il campo è chiuso; il dominio D è stellato, quindi il campo è conservativo. Un suo potenziale $p(x, y)$ deve essere tale che

grad $p(x, y) = \left(\frac{x+x^2-2y}{x^2-2y}, \frac{1}{-x^2+2y}\right)$.

Da $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{-x^2+2y}$ otteniamo, per $(x, y) \in D$,

$p(x, y) = \frac{1}{2}\ln(2y - x^2) + C(x)$

e allora $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{-x}{-x^2+2y} + C'(x)$; questo deve dare $\frac{x+x^2-2y}{x^2-2y}$; perciò $C'(x)$ deve essere

In[∘]:=
```
Simplify[(x + x^2 - 2 y)/(x^2 - 2 y) - (-x)/(-x^2 + 2 y)]
```

Out[∘]=

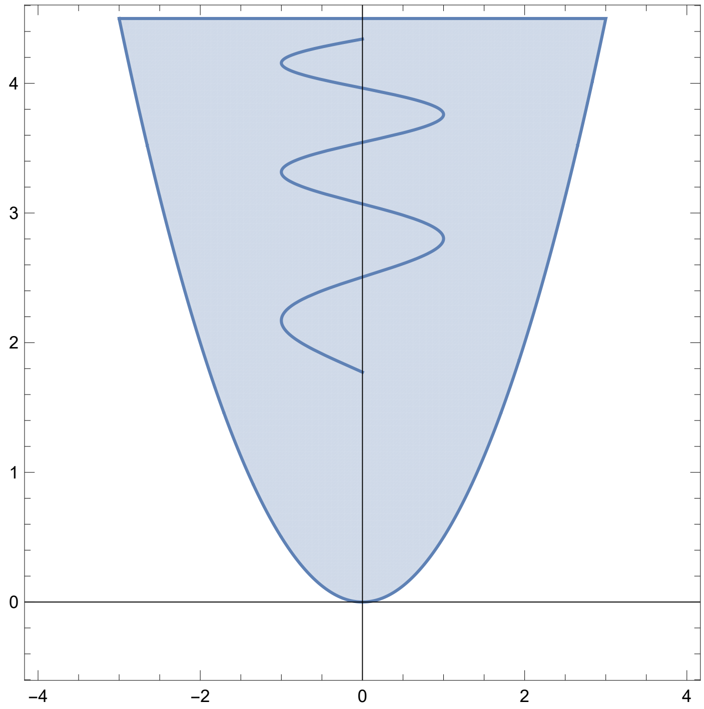
1

e quindi $C(x) = x + K$ con K costante. Un potenziale di F è, per esempio (assegnando a K valore 0)

In[∘]:=
```
p[x_, y_] := x + 1/2 Log[2 y - x^2]
```

In[ ]:=
```
aa = RegionPlot[{2 y ≥ x^2}, {x, -4, 4}, {y, -0.5, 4.5}, PlotPoints → 200];
ab = ParametricPlot[{Sin[t], √t}, {t, π, 6 π}];
Show[aa, ab, Axes → True]
```

Out[ ]=



Il disegno di y è peraltro inutile. Il lavoro è

In[ ]:=
```
p[0, √(6 π)] - p[0, √π]
```

Out[ ]=

$$-\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\left[2\sqrt{\pi}\right]+\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\left[2\sqrt{6\,\pi}\right]$$

In[ ]:=
```
Simplify[%]
```

Out[ ]=

$$\frac{\mathrm{Log}[6]}{4}$$