05 settembre 2023, es.1: Programmazione lineare

Discutere il seguente problema di Programmazione lineare: trovare il massimo di $p(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2\,x_1 + x_2 + 8\,x_3 + 3\,x_4$ con i vincoli $x_k \geq 0\ (1 \leq k \leq 4)$ e

$$\begin{cases} 3\,x_1 + x_2 + 5\,x_3 + 2\,x_4 = 10 \\ 11\,x_1 + 3\,x_2 + 13\,x_3 + 4\,x_4 = 24 \\ 10\,x_1 + x_2 + 4\,x_3 - x_4 \leq 10 \end{cases}$$

Si assuma come base iniziale per lo spazio delle colonne A^* $B_1 = \{A_2, A_4, A_5\}$ (in questo ordine), essendo A_5 la colonna relativa alla variabile di scarto x_5 .

Soluzione.

Aggiungiamo la “variabile di scarto” x_5 , per scrivere il sistema dei vincoli nella forma

$$\begin{cases} x_1 + 3\,x_2 + 5\,x_3 + 2\,x_4 = 10 \\ x_1 + 10\,x_2 + 4\,x_3 - x_4 = 10 \\ 3\,x_1 + 11\,x_2 + 13\,x_3 + 4\,x_4 + x_5 = 24 \end{cases}$$

Seguendo le indicazioni del testo scegliamo come prima base dello spazio A^* generato dalle colonne di A, matrice dei coefficienti del sistema scritto sopra, l’insieme $B_1 = \{A_2, A_4, A_5\}$; con questa scelta si ottiene la prima tabella del simplesso mediante operazioni tra le righe della matrice completa del sistema dei vincoli, cioè

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 2 & 0 & 10 \\ 11 & 3 & 13 & 4 & 0 & 24 \\ 10 & 1 & 4 & -1 & 1 & 10 \end{pmatrix} :$$

		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	B
$x_{v_1} = x_2$	$c_{v_1} = c_2 = 1$	5	1	3	0	0	4
$x_{v_2} = x_4$	$c_{v_2} = c_4 = 3$	−1	0	1	1	0	3
$x_{v_3} = x_5$	$c_{v_3} = c_5 = 0$	4	0	2	0	1	9
		−1	0	−2	0	0	13
		$(z_1 - c_1)$	$(z_2 - c_2)$	$(z_3 - c_3)$	$(z_4 - c_4)$	$(z_5 - c_5)$	(z)

Abbiamo $z_1 - c_1 = -1 < 0$, e anche $z_3 - c_3 = -2 < 0$,
e le colonne sovrastante contengono termini positivi. Allora bisogna operare la “trasformazione pivotale” facendo entrare nella base uno dei vettori A_1 o A_3 ; scegliamo A_3 .
Il criterio di uscita impone di calcolare $\frac{\beta_1}{\alpha_{1,3}} = \frac{4}{3}$; $\frac{\beta_2}{\alpha_{2,3}} = 3$; $\frac{\beta_3}{\alpha_{3,3}} = \frac{9}{2}$; il minimo di questi tre valori è $\frac{\beta_1}{\alpha_{1,3}} = \frac{4}{3}$, quindi il vettore che esce da B_1 è $A_{v_1} = A_2$. Svolgendo i calcoli si ottiene la nuova tabella del simplesso relativa alla base $B_2 = \{A_3,\ A_4,\ A_5\}$:

		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	B
$x_{v_1} = x_3$	$c_{v_1} = c_3 = 8$	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	0	$\frac{4}{3}$
$x_{v_2} = x_4$	$c_{v_2} = c_4 = 3$	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	0	$\frac{5}{3}$
$x_{v_3} = x_5$	$c_{v_3} = c_5 = 0$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0	1	$\frac{19}{3}$
		$\frac{7}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	0	$\frac{47}{3}$
		$(z_1 - c_1)$	$(z_2 - c_2)$	$(z_3 - c_3)$	$(z_4 - c_4)$	$(z_5 - c_5)$	(z)

Siccome adesso tutti gli $z_j - c_j$ sono ≥ 0 , l’algoritmo è terminato; la funzione obiettivo ha massimo nella regione ammissibile, il massimo vale $z = \frac{47}{3}$ ed è assunto per $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(0, 0, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{19}{3}\right)$.

05 settembre 2023, es.2: Distribuzioni

a) Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ una funzione sommabile su $\mathbb{R}$; per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$ sia $f_n(x) := f(n\,x)$, e sia $T_n = T_{f_n}$ la distribuzione di tipo funzione associata a f_n. Dimostrare che la successione (T_n) converge a zero in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

b) Dimostrare che la conclusione di (a) non è più vera se l'ipotesi su *f* si attenua, supponendo $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, cioè *localmente* sommabile, ma non sommabile in tutto $\mathbb{R}$.

Soluzione.

a) Per definizione di convergenza in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, dobbiamo dimostrare che per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ risulta $\lim_{n\to+\infty} \langle T_n, \varphi\rangle = 0$.

Sia dunque $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Allora

$$\langle T_n, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(n\,x)\cdot\varphi(x)\,dx$$

Applichiamo il cambiamento di variabile $x = \frac{y}{n}$. Otteniamo

$$\langle T_n, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(y)\cdot\varphi\left(\tfrac{y}{n}\right)\cdot\tfrac{1}{n}\,dy, \quad \text{e quindi}$$

$$|\langle T_n, \varphi\rangle| = \frac{1}{n}\left|\int_{\mathbb{R}} f(y)\cdot\varphi\left(\tfrac{y}{n}\right)dy\right| \le \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}} |f(y)|\cdot\left|\varphi\left(\tfrac{y}{n}\right)\right| dy \le \frac{1}{n}\max_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)|\cdot\int_{\mathbb{R}} |f(y)|\,dy$$

Tenendo conto dell'ipotesi di sommabilità di *f*, per ogni fissata φ la quantità $\max_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)|\cdot\int_{\mathbb{R}} |f(y)|\,dy$ è una costante non negativa; la disuguaglianza ottenuta sopra prova quindi che $\lim_{n\to+\infty}\langle T_n, \varphi\rangle = 0$, come si voleva dimostrare.

b) È sufficiente esibire un controesempio, cioè una *f* localmente sommabile ma non sommabile in $\mathbb{R}$ e una $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tali che *non sia* $\lim_{n\to+\infty}\langle T_n, \varphi\rangle = 0$. Con questa intenzione, scegliamo $f(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; *f* è localmente sommabile, ma non sommabile in $\mathbb{R}$. Sia poi $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ una funzione test tale che $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx \ne 0$. Allora

$$\langle T_n, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(n\,x)\cdot\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} 1\cdot\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\,dx$$

e l'ultimo membro si manifesta essere una costante $\ne 0$, indipendente da *n*. Pertanto *non è* $\lim_{n\to+\infty}\langle T_n, \varphi\rangle = 0$; abbiamo così ottenuto il controesempio desiderato.

05 settembre 2023, es.3: Estremanti e monotonia.

a) Fornire un esempio di una funzione $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ strettamente decrescente in $[-1, 0[$, strettamente crescente in $]0,1]$, per la quale 0 sia punto di massimo relativo.
b) Dimostrare che se una funzione $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ ha le proprietà specificate in (a), allora *f* è discontinua in 0.

Soluzione.

a) Un possibile esempio soddisfacente i requisiti è:

$$f(x) := \begin{cases} |x| & \text{se } x \in [-1, 1],\ x \ne 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

b) Se *f* ha le proprietà dichiarate in (a) allora, in particolare,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \inf\left\{f(x),\ x \in \left]0, 1\right]\right\} \le f(x)\ \forall\, x \in \left]0, 1\right].$$

0 punto di massimo relativo per *f* implica che

$$\exists\,\delta > 0,\ \forall\, x\,(0 < x < \delta \Rightarrow f(x) \le f(0))$$

Siano ora *p*, *q* tali che $0 < p < q < \delta$, e supponiamo per assurdo che *f* sia continua in 0. Allora:

$$f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x)\ \text{(per la continuità di } f \text{ in 0)} \le f(p) < f(q)\ \text{(per la stretta monotonia)} \le f(0)$$

da cui si deduce $f(0) < f(0)$, assurdo.

05 settembre 2023, es.4: Verifica di un limite.

Verificare applicando la definizione di limite, che $\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi}\frac{x^2-25}{\cos^2 x}=-\infty$.

Soluzione.

Il dominio naturale della funzione di cui ci si occupa è $D=\left\{x\in\mathbb{R};\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$. Ciò che si deve verificare è:

$$\forall M>0\,\exists\,\delta>0,\,\forall x\in D\left(0<\left|x-\frac{3}{2}\pi\right|<\delta\Rightarrow\frac{x^2-25}{\cos^2 x}<-M\right).$$

Sia $M>0$. La disuguaglianza che ci interessa, $\frac{x^2-25}{\cos^2 x}<-M$, equivale a $\frac{25-x^2}{\cos^2 x}>M$, ed è in questo modo che la gestiremo. E' utile avere una stima di $\frac{3}{2}\pi$:

In[∘]:= $N\left[\frac{3}{2}\pi\right]$

Out[∘]=

4.71239

Può bastarci notare che $4.6<\frac{3}{2}\pi<4.8$. Supponiamo d'ora in avanti $4.6<x<4.8$. In questo intervallo la funzione $x\mapsto 25-x^2$ è positiva e strettamente decrescente, quindi $25-x^2>25-4.8^2$

In[∘]:= $N\left[25-4.8^2\right]$

Out[∘]=

1.96

Ci basta prendere nota che in questo intervallo $25-x^2>1$, e quindi $\left|\frac{25-x^2}{\cos^2 x}\right|=\frac{25-x^2}{\cos^2 x}>\frac{1}{\cos^2 x}$. Abbiamo poi:

$$\frac{1}{\cos^2 x}>M\Leftrightarrow\cos^2 x<\frac{1}{M}\Leftrightarrow|\cos x|<\frac{1}{\sqrt{M}}$$

Quest'ultima disuguaglianza è sempre vera se $M<1$; invece, se $M>1$, detto $\alpha:=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right)$, essa è soddisfatta in particolare nell'intervallo $]\pi+\alpha,\ 2\pi-\alpha[$.

Pertanto, per ogni $M>1$, se $x\in]\pi+\alpha,\ 2\pi-\alpha[\cap[4.6,\ 4.8]$ allora

$$\left|\frac{25-x^2}{\cos^2 x}\right|=\frac{25-x^2}{\cos^2 x}>\frac{1}{\cos^2 x}>M$$

e questo completa la verifica.

05 settembre 2023, es.5: La previdenza autogestita.

Giulio compie oggi 34 anni e ha un buon lavoro; da oggi s'impegna a risparmiare ogni mese 1500 € che depositerà regolarmente in banca, la quale offre un rendimento annuo 2.42658%; primo versamento tra un mese. Giulio pensa di proseguire in questo modo per 36 anni; in quel momento smetterà di lavorare e di versare le rate, e convertirà il patrimonio accumulato in una rendita mensile costante, a partire dal mese successivo alla cessazione dei versamenti. Per la propria serenità, Giulio prevede un numero di rate a suo favore che giungano fino al suo 110° compleanno, che verranno pagate indipendentemente dalla sua esistenza in vita. In tutto il ragionamento si assume per semplicità che il tasso d'impiego dei capitali rimanga costante nel tempo.

a) Calcolare a quanto ammonta il capitale accumulato da Giulio nel momento del pagamento dell'ultima rata, e quanto percepirà ogni mese da lì in avanti.

b) Giulio vorrebbe che la sua "pensione" mensile fosse almeno 3500€, ed è disposto ad aumentare il numero di versamenti. Scrivere una relazione che esprima la condizione sul numero n di mensilità da 1500€ affinché sia soddisfatto il desiderio di Giulio.

Soluzione.

a) Poiché versamenti in “dare” e in “avere” consistono in rate rate *mensili*, occorre per prima cosa il tasso mensile equivalente al tasso annuo $i = 0.0242658$. Questo è i_{12}, che andiamo a calcolare:

In[◦]:=
```
i = 0.0242658; i12 = Round[(1 + i)^(1/12) - 1, 0.0001]
```
Out[◦]=
```
0.002
```

cioè 0.2% mensile. Ricordiamo le espressioni

In[◦]:=
$$a[n\_, x\_] := \frac{1 - (1 + x)^{-n}}{x};$$
$$s[n\_, x\_] := \frac{(1 + x)^{n} - 1}{x};$$

Il numero di rate mensili che Giulio si appresta a pagare è

In[◦]:=
```
36 * 12
```
Out[◦]=
```
432
```

Al termine di 432 mesi avrà realizzato un montante *m* pari a

In[◦]:=
```
m = 1500 * s[432, i12]
```
Out[◦]=
$$1.02794 \times 10^{6}$$

Quel giorno Giulio compità 70 anni; le rate a suo favore (o dei suoi eredi) saranno quindi fornite per altri 40 anni, pari a 480 mesi. L’importo *r* di ogni rata è tale che sia uguale a *m* il valore attuale di una rendita immediata posticipata di 480 mensilità di importo *r*. Perciò

In[◦]:=
$$r = \frac{m}{a[480, i_{12}]};\ \texttt{Print[Round[r, 0.01]]}$$
```
3333.46
```

b) Il numero di mesi che trascorrono da oggi al 110° compleanno di Giulio è

In[◦]:=
```
(110 - 34) * 12
```
Out[◦]=
```
912
```

Se Giulio versa 1500€ ogni mese per *n* mesi, avrà accumulato al termine dei versamenti un montante pari a $1500 \cdot s[n, i_{12}]$. Questo montante costituisce il valore attuale di una rendita costante immediata posticipata di $912 - n$ mensilità; l’importo della rata mensile è quindi uguale a $\frac{1500 \cdot s[n, i_{12}]}{a[912-n, i_{12}]}$. Il desiderio di Giulio equivale alla relazione

$$\frac{1500 \cdot s[n,i_{12}]}{a[912-n, i_{12}]} \geq 3500 \quad \text{cioè, esplicitamente,} \quad 1500 \cdot \frac{(1+i_{12})^{n}-1}{i_{12}} \cdot \frac{i_{12}}{1-(1+i_{12})^{-912+n}} \geq 3500 \quad \text{ossia}$$

$$\frac{(1+i_{12})^{n}-1}{1-(1+i_{12})^{-912+n}} \geq \frac{7}{3}.$$

Per completezza risolviamo numericamente la disequazione:

In[◦]:=
$$\texttt{FindRoot}\left[\frac{(1 + i_{12})^{n} - 1}{1 - (1 + i_{12})^{-912+n}} == \frac{7}{3}, \{n, 432\}\right]$$
Out[◦]=
$$\{n \to 442.388\}$$

cosicché Giulio dovrà versare almeno 443 mensilità. Dopo 443 versamenti mensili gli spetterà ogni mese

In[•]:=
```
Round[1500 * s[443, i12] / a[912 - 443, i12], 0.01]
```
$$\text{Round}\left[1500 * \frac{s[443, i_{12}]}{a[912-443, i_{12}]}, 0.01\right]$$

Out[•]=

3510.05

05 settembre 2023, es.6: La scelta di Jessica

E' imminente la pubblicazione dell'ultimo libro giallo di Jessica Fletcher. Si prevede che ne saranno vendute tra 100 000 e 200 000 copie, con distribuzione uniforme di probabilità tra questi due valori. L'editore propone a Jessica due diverse scelte per corrisponderle i diritti d'autore:

- (1) Un importo fisso v, in unica soluzione, indipendente dal numero di copie che saranno vendute.
- (2) 2 $ per ogni copia che che sarà venduta

a) Stabilire quale valore di v rende indifferenti le due alternative, se si adotta come criterio di scelta la massima speranza matematica del guadagno netto.

b) Stessa domanda, applicando come criterio di scelta la massima utilità attesa del guadagno netto, con utilità $u(x) = x - \frac{x^2}{1000}$, x espresso in *migliaia di* $.

Nello svolgimento, esprimere il numero di copie vendute in *migliaia.*

Soluzione.

a) Le scelte proposte a Jessica sono equivalenti secondo il criterio qui assunto, quando v è uguale alla speranza matematica del guadagno aleatorio che Jessica realizzerà se sceglie (2). Tale guadagno è una variabile aleatoria (che qui esprimiamo in *migliaia di $*) uniformemente distribuita tra 200 e 400. La media di tale variabile è $\frac{1}{2}(200 + 400) = 300$.

Perciò, secondo questo criterio, è $v = 300$ (cioè 300 000 $) l'importo certo che rende indifferenti le scelte (1) e (2)

b) Ora Jessica adotta la funzione utilità

In[•]:=
$$u[x\_] := x - \frac{x^2}{1000};$$

Le decisioni (1) e (2) si valutano indifferenti se $u(v)$ è uguale alla utilità attesa del guadagno aleatorio conseguente alla scelta (2). Abbiamo

In[20]:= u[v]

Out[20]=
$$v - \frac{v^2}{1000}$$

La variabile aleatoria che esprime il guadagno di Jessica conseguente alla scelta (2) ha densità f definita da

In[•]:=
$$f[x\_] := \begin{cases} \frac{1}{200} & 200 < x < 400 \\ 0 & x < 200 \\ 0 & x > 400 \end{cases};$$

Perciò la utilità attesa del guadagno è

In[•]:=
$$\int_{200}^{400} u[x] * f[x] \, dx$$

Out[•]=
$$\frac{620}{3}$$

Ricaviamo il valore cercato di v uguagliando questo risultato a $u(v)$:

In[∘]:= Solve$\left[u[v] == \frac{620}{3}, v\right]$

Out[∘]=

$$\left\{\left\{v \to \frac{100}{3}\left(15 - \sqrt{39}\right)\right\}, \left\{v \to \frac{100}{3}\left(15 + \sqrt{39}\right)\right\}\right\}$$

In[∘]:= N[%]

Out[∘]=

{{v → 291.833}, {v → 708.167}}

La soluzione è $v = 291.833$; l’altro valore non è pertinente perché superiore a 500, massimo guadagno ammissibile per essere valutato con la funzione utilità che stiamo adottando. Peraltro, 708.167 è un importo superiore al massimo guadagno che Jessica prevede di potere realizzare; nessun criterio ragionevole potrebbe sostenere che la scelta di tale importo certo è equivalente a un guadagno aleatorio non superiore a 400.
Invece il valore $v = 291.833$, leggermente inferiore a 300 calcolato in (a) manifesta la maggiore prudenza nelle scelte, suggerita dall’adozione di una funzione utilità.