MATHEMATICS (Differenziabilta' di funzioni composte)

A. Brini

September 10, 2013

Siano date $g \equiv (g_1, \ldots, g_n) : A \to B \subseteq \mathbb{R}^n$ ed $f \equiv (f_1, \ldots, f_p) : B \to \mathbb{R}^p$. Sia $a \in A$ e $b = g(a) \in B$, con g differenziabile in a ed f differenziabile in $b = g(a)$.

Allora la funzione composta $f \circ g$ e' differenziabile in $a \in A$.

La matrice Jacobiana $J_{(f \circ g)(a)}$ e' una matrice $p \times r$: Dati $i = 1, \ldots, p$ e $k = 1, \ldots, r$, vogliamo provare che l'elemento di posto (i, k) in $J_{(f \circ g)(a)}$:

$$\frac{\partial (f \circ g)_i(a)}{\partial x_k}$$

esiste e vogliamo calcolarlo in termini delle matrici Jacobiane

$$J_{f(g(a))}, \quad J_{g(a)}.$$

Notiamo, in primo luogo, che la componente scalare $i-$esima $(f \circ g)_i$ coincide con la funzione composta $(f_i \circ g)$.

Inoltre la derivata parziale

$$\frac{\partial (f \circ g)_i(a)}{\partial x_k} = \frac{\partial (f_i \circ g)(a)}{\partial x_k}$$

puo' essere pensata come la derivata ordinaria della funzione $f_i \circ g$ *riguardata come funzione della singola variabile* x_k, la quale, a sua volta, e' la funzione composta della funzione f_i con la funzione $g \equiv (g_1, \ldots, g_n)$ *riguardata come funzione della singola variabile* x_k.

Ora, essendo g differenziabile in a, le derivate (parziali) di $g_1, \ldots, g_n$ rispetto alla variabile x_k esistono in a e, di conseguenza - essendo f_i differenziabile in $g(a)$ - la derivata (parziale)

$$\frac{\partial (f_i \circ g)(a)}{\partial x_k}$$

esiste in a; di piu', si ha:

$$\frac{\partial (f_i \circ g)(a)}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(g(a))}{\partial x_j} \, \frac{\partial g_j(a)}{\partial x_k}.$$

Pertanto l'elemento
$$\frac{\partial(f\circ g)_i(a)}{\partial x_k} = \frac{\partial(f_i\circ g)(a)}{\partial x_k} \in J_{(f\circ g)(a)}$$
coincide con il prodotto tra la $i-$esima riga di $J_{f(g(a))}$ e la $k-$esima colonna di $J_{g(a)}$.

Andrea Brini

Dipartimento di Matematica, Universita di Bologna

40126 Bologna, Italy

E-mail: brini@dm.unibo.it