Friday, October 13, 2023 9:00 AM

$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A APERTO , $\underline{x} \in A$

f DIFF IN $\underline{x} \in A$, $L_{\underline{x}}$ IL DIFF DI f IN $\underline{x}$.

$\quad\quad || \quad$ NOTAZIONE

$df(\underline{x})$ — PUNTO

DIFF — FUNZ

PROP. SIANO $f, g \in A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A APERTO, $\underline{x} \in A$

f, g DIFF IN $\underline{x} \in A$,

i) $f+g$ DIFF IN $\underline{x}$. DI PIU'

$$d(f+g)(\underline{x}) = df(\underline{x}) + dg(\underline{x})$$

ii) fg DIFF IN $\underline{x}$. DI PIU'

$$d(fg)(\underline{x}) = \underbrace{df(\underline{x})}_{LIN} \cdot \overset{cost}{g(\underline{x})} + \underbrace{f(\underline{x})}_{cost} \cdot \overset{LIN}{dg(\underline{x})} \quad !!!$$

iii) $\lambda \in \mathbb{R}$, λf DIFF. IN $\underline{x}$ DI PIU'

$$d(\lambda f)(\underline{x}) = \lambda\, df(\underline{x})$$

COROLLARY $\boxed{n=1}$ f DIFF IN $x \iff f$ DERIVABILE IN x

E, DI PIU', $f'(x) = L_x(1) = df(x)(1)$

ALLORA

$$d(f+g)(x)(1) = df(x)(1) + dg(x)(1)$$

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$d(fg)(x)(1) = df(x)(1) \cdot \overset{cost}{g(x)} + \overset{cost}{f(x)} \cdot dg(x)(1)$$

$$(fg)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x)\, g'(x).$$

APPLICAZIONE

1) SIA $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ LINEARE. E' VERO

CHE È DIFF IN OGNI PUNTO $x \in \mathbb{R}^n$? K. SÌ

SE SÌ, CHI È $df(x)$? R $\boxed{df(x) = f \quad \forall x \in \mathbb{R}^n}$

INFATTI, È VERO CHE:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - \overset{L_x(h)}{df(x)(h)}}{\|h\|} = 0 \; ?$$

PONENDO $df(x) = f$??? SÌ

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f(h)}{\|h\|} = 0 \; ?$$

f LINEARE $\Downarrow$ $\underline{f(x+h) = f(x) + f(h)}$ SÌ

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cancel{f(x)} + \cancel{f(h)} - \cancel{f(x)} - \cancel{f(h)}}{\|h\|} = 0 \; ? \quad \text{SÌ}$$

<u>APPLICAZIONE 2</u> LE FUNZIONI POLINOMIALI SONO <u>OVUNQUE DIFF</u>.

IN $n=3$ $\quad e_1, e_2, e_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ LINEARI t.c.

$\to e_1(x,y,z) = x$ <u>LIN</u> $\Rightarrow$ <u>DIFF</u>

$e_2(x,y,z) = y$ <u>LIN</u> $\Rightarrow$ <u>DIFF</u>

$e_3(x,y,z) = z$ <u>LIN</u> $\Rightarrow$ <u>DIFF</u>

<u>ORA</u> $\quad p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ IL POLINOMIO

$$p(x,y,z) = 3x^2yz^3 - 4xy^4z^2 + \sqrt{2}\, x z^2$$

$$= 3\, \underline{e_1^2 \cdot e_2} \cdot e_3^3 - 4\, e_1 \cdot e_2^4\, e_3^2 + \sqrt{2}\, e_1\, e_3^2 =$$

$$= 3\, \underline{e_1 \cdot e_1 \cdot e_1 \cdot e_2 \cdot e_3 e_3 e_3} - 4\, \underline{e_1 e_2 e_2 e_2 e_2 e_3 e_3} + \sqrt{2}\, \underline{e_1 e_3 e_3}$$

LIN $\Rightarrow$ DIFF $\qquad$ LIN $\Rightarrow$ DIFF $\qquad$ LIN $\Rightarrow$ DIFF

COME SI SCRIVE IN "<u>MODO INTRINSECO</u>" (?) UN <u>DIFFERENZIALE</u> ???

SIA $df(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ LINEARE DE DIFF DI f IN x ...

RICORDO CHE $\forall v \in \mathbb{R}^n$

$$\to \quad L_x(v) = df(x)(v) = \langle \text{grad} f(x), v \rangle$$

; "DESCRIZIONE PUNTO A PUNTO"

L_x È UNICO !!!

SPAZIO DUALE $(\mathbb{R}^n)^*$ DI $\mathbb{R}^n$.

PER DEF : $\mathbb{R}^n \overset{DEF}{=} \{ (x_1, \dots, x_n) \; ; \; x_i \in \mathbb{R}, \; i = 1, 2, \dots, n \}$

$$(\mathbb{R}^n)^* \overset{DEF}{=} \{ \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \; \varphi \text{ LINEARE} \}.$$

COME INSIEME

DEFINISCO , PER OGNI $\varphi, \psi \in (\mathbb{R}^n)^*$

SOMMA $+$) $(\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$

MOLT SC. $\cdot$) $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi \in (\mathbb{R}^n)^*$ SIA

$$(\lambda \varphi)(v) = \lambda \varphi(v) \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

NB $\left((\mathbb{R}^n)^*, \underset{\text{SOMMA}}{+}, \underset{\text{MOLT SC.}}{\cdot} \right)$ È SPAZIO VETTORIALE

(DUALE DI $\mathbb{R}^n$)

CHI È LO "ZERO" NEL DUALE $(\mathbb{R}^n)^*$?

È : $\underline{0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ LINEARE $(\Leftrightarrow \underline{0} \in (\mathbb{R}^n)^*)$

t.e.

$\underline{0}(v) = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$

$\underline{\underline{0}}(x) = 0 \in \mathbb{R} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$

CIOÈ $\underline{\underline{0}}$ È LA FUNZIONE "IDENTICAMENTE NULLA"?

DOBBIAMO MOSTRARE: $\forall \varphi \in (\mathbb{R}^n)^*$ SI HA:

$$\varphi + \underline{\underline{0}} \overset{?}{=} \varphi \overset{?}{=} \underline{\underline{0}} + \varphi$$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\varphi(x) + \underbrace{\underline{\underline{0}}(x)}_{0} \overset{?}{=} \varphi(x) = \underbrace{\underline{\underline{0}}(x)}_{0} + \varphi(x) \quad \text{VERO !!!}$$

OK BUON WEEKEND

BYE BYE