Esercizi suggeriti di CALCOLO DIFFERENZIALE

1. Si considerino le funzioni

$$f : A \subset R^2 \to R, \quad A = \{(x, y) \in R^2;\ x > 0\}; \qquad g : R \to R^2$$

definite da

$$f(x, y) = \frac{y^2}{x}, \qquad g(z) = (e^{-z}, e^z).$$

- La funzione f e' differenziabile su A?
- La funzione g e' differenziabile su R?
- La funzione $g \circ f$ e' differenziabile su A?
- Siano $\alpha = (1, -1)$ e $v = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Si determinino il differenziale di f in α e la derivata parziale di f in α lungo la direzione v.

2. Si considerino le funzioni

$$f : R^2 \to R; \qquad g :]0, +\infty[\to R^2$$

definite da

$$f(x, y) = (x^2 - 3)e^x + e^{y^2}, \qquad g(t) = (t, 1/t).$$

- La funzione f e' differenziabile su R^2?
- Siano $\alpha = (0, 1)$ e $v = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Si determinino il differenziale di f in α e la derivata parziale di f in α lungo la direzione v.
- Si determinino gli eventuali punti di massimo relativo e minimo relativo per f.
- La funzione $f \circ g$ e' differenziabile su $]0, +\infty[$?

3. Si considerino le funzioni

$$f : R^3 \to R; \qquad g : R \to R^3$$

definite da

$$f(x, y, z) = -x^2 + y^2 e^z, \qquad g(t) = (t, t^2, 0).$$

- La funzione f e' differenziabile su R^3?
- Siano $\alpha = (1, 1, 1)$ e $v = (-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5})$. Si determinino il differenziale di f in α e la derivata parziale di f in α lungo la direzione v.
- Si determinino gli eventuali punti di massimo relativo e minimo relativo per f.
- La funzione $f \circ g$ e' differenziabile su R?

4. Si considerino le funzioni

$$f : R^2 \to R^2, \qquad g : R^2 \to R$$

definite da

$$f(u, v) = (e^u + e^v, e^u - e^v), \qquad g(x, y) = x^3 - 3x + e^{y^2}.$$

- La funzione f e' differenziabile su R^2?
- La funzione g e' differenziabile su R^2?
- Si determinino gli eventuali punti di massimo relativo e minimo relativo per g.
- La funzione $g \circ f$ e' differenziabile su R^2?
- Si determini il gradiente di $g \circ f$ nel punto $(0,0)$.

5. Si considerino le funzioni

$$f : R \to R^2, \qquad g : R^2 \to R$$

definite da

$$f(t) = (te^t, t^2+1), \qquad g(x,y) = \sin(xy).$$

- La funzione f e' differenziabile su R?
- La funzione g e' differenziabile su R^2?
- Si scriva "in modo intrinseco" il differenziale di g nel punto $\alpha = (0,1)$.
- Si calcoli la derivata direzionale di g nel punto $\alpha = (0,1)$, secondo la direzione $v = (\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$.

6. Si consideri la funzione

$$F = (F_1, F_2) : R^2 \to R^2,$$

definita da

$$F_1(x,y) = x\cos(y), \qquad F_2(x,y) = x\sin(y).$$

- La funzione F e' differenziabile su R^2?
- Si scriva il differenziale di F nel punto $\alpha = (1,\pi)$.
- Si scriva il differenziale di F_1 nel punto $\beta = (1,0)$.
- Si calcoli la derivata direzionale di F_1 nel punto β, secondo la direzione $v = (-3/5, 4/5)$.
- Si determini la matrice Jacobiana della funzione $F \circ F$ nel punto α.

7. Si consideri la funzione

$$F = (F_1, F_2) : R^2 \to R^2,$$

definita da

$$F_1(x,y) = x^3 - 3x^2 - 9x + \frac{1}{y^2+1}, \qquad F_2(x,y) = e^y.$$

- La funzione F e' differenziabile su R^2?
- Si scriva il differenziale di F nel punto $\alpha = (0,0)$.
- Si calcoli la derivata direzionale di F_2 nel punto $\alpha = (0,0)$, secondo la direzione $v = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.
- Si determinino gli eventuali punti di minimo relativo e di massimo relativo per F_1.

8. Si consideri la funzione

$$F = (F_1, F_2) : R^2 \to R^2,$$

definita da

$$F_1(x,y) = ye^x, \qquad F_2(x,y) = x(y^2+1).$$

- La funzione F e' differenziabile su R^2?
- Si scriva il differenziale di F nel punto $\alpha = (0,0)$.
- F e' un diffeomorfismo locale in α?
- Si scriva il differenziale di F_2 nel punto $\beta = (1,2)$.
- Si calcoli la derivata direzionale di F_2 nel punto β, secondo la direzione $v = (-3/5, 4/5)$.

9. Si consideri la funzione
$$F = (F_1, F_2) : R^2 \to R^2,$$
definita da
$$F_1(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}, \qquad F_2(x,y) = \ln(x^2+y^2+1).$$
   - La funzione F e' differenziabile su R^2?
   - Si scriva il differenziale di F nel punto $\alpha = (1,1)$.
   - Si scriva il differenziale di F_2 nel punto $\alpha = (1,1)$.
   - Si calcoli la derivata direzionale di F_2 nel punto α, secondo la direzione $v = (-3/5, 4/5)$.

10. Si consideri la funzione $f : R^2 \to R$, $f(x,y) = (x^2+1)(y^3-3y)$.
    - f e' differenziabile in ogni punto di R^2?
    - Si determinino il differenziale di f in $\alpha = (0,0)$ e la derivata di f lungo la direzione $v = (\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ nel punto α.
    - Quale fra i punti α, $\beta = (0,1)$ e $\gamma = (0,-1)$ e' un estremo relativo per f?

11. Si considerino le funzioni
$$f : R^2 \to R, \qquad g : R \to R^2$$
definite da
$$f(x,y) = (x^2+1)(y^3+3y^2+1), \qquad g(t) = (t+1, \frac{1}{t+1}).$$
    - La funzione f e' differenziabile su R^2?
    - Si determini il differenziale $df(1,1)$ di f in $(1,1)$.
    - Si determini la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial v}(1,1)$ di f lungo la direzione $v = (-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ nel punto $(1,1)$.
    - La funzione $f \circ g$ e' derivabile su R? Si calcoli la derivata di $f \circ g$ in $t = 0$.
    - Si determinino gli eventuali punti di massimo e minimo relativo per la funzione f.

12. Si considerino le funzioni $f : R^2 \to R$ e $g : R \to R^2$ definite da
$$f(x,y) = \frac{y^2+y+1}{x^2+1}, \qquad g(t) = (cos(t), sen(t)).$$
    - Si determini il differenziale di f in $(1,0)$.

- Si determini la derivata di f lungo la direzione $v = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ nel punto $(1, 0)$.
- Si calcoli la derivata di $f \circ g$ in $t = 0$.

13. Si considerino le funzioni

$$f : R^2 \to R, \qquad g :]0, +\infty[\to R^2, \qquad h : R \to R$$

definite da

$$f(x, y) = (y^3 + y)(3x^2 - x), \qquad g(t) = (t, 1/t), \qquad h(z) = e^{-z^2}.$$

- Si determinino il differenziale di f in $(1, 1)$ e la derivata di f lungo la direzione $v = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ nel punto $(1, 1)$.
- Perche' la funzione $h \circ f \circ g :]0, +\infty[\to R$ e' derivabile su $]0, +\infty[$? Si calcoli la derivata di $h \circ f \circ g$ in $t = 1$.

14.
- Si consideri la funzione $f : R^2 \to R$, $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$.
- f e' differenziabile in ogni punto di R^2?
- Si determinino il differenziale di f in $\alpha = (-2, 1)$ e la derivata di f lungo la direzione $v = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ nel punto α.
- Il punto $\beta = (0, 0)$ e' di minimo relativo per f?

15. Si consideri la funzione $f : R^2 \to R$, $f(x, y) = (x^2 + 1)(y^3 - 3y)$.

- f e' differenziabile in ogni punto di R^2?
- Si determinino il differenziale di f in $\alpha = (0, 0)$ e la derivata di f lungo la direzione $v = (\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ nel punto α.
- Quale fra i punti α, $\beta = (0, 1)$ e $\gamma = (0, -1)$ e' un estremo relativo per f?

16. Siano

$$f : R^2 \to R, \qquad f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + 18,$$
$$r = (r_1, r_2) : R \to R^2, \qquad r_1(t) = e^t, \; r_2(t) = sen(t).$$

- f e' differenziabile in ogni punto di R^2? Si scriva il differenziale di f nel punto $(2, 1)$.
- Quali sono i punti critici di f? f ha punti di estremo relativo?
- Perche' la funzione composta $f \circ r$ e' derivabile nel punto $t = 0$? Si calcoli la derivata ordinaria $(f \circ r)'(0)$.

17. Siano

$$f : R^2 \to R, \qquad f(x, y) = e^{\cos x + \cos y},$$
$$r = (r_1, r_2) : R \to R^2, \qquad r_1(t) = e^t - 1, \; r_2(t) = e^t - 1.$$

- f e' differenziabile in ogni punto di R^2? Si scriva il differenziale di f nel punto $\alpha = (\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$. Si calcoli la derivata direzionale di f nel punto α lungo la direzione $v = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.
- Quale fra i punti $\alpha = (\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$, $\beta = (0, 0)$ e $\gamma = (0, \pi)$ e' un estremo relativo per f?

- Perche' la funzione composta $f \circ r$ e' derivabile nel punto $t = 0$? Si calcoli la derivata ordinaria $(f \circ r)'(0)$.

18. Siano

$$f : R^3 \to R, \qquad f(x,y,z) = x^3 + x^2y + xyz + 1,$$
$$r = (r_1, r_2, r_3) : R \to R^3, \qquad r_1(t) = e^t,\ r_2(t) = cos(t),\ r_3(t) = sen(t).$$

- f e' differenziabile in ogni punto di R^3? Si scriva il differenziale di f nel punto $\alpha = (1,0,1)$.
- Si determini la derivata di f lungo il versore $v = (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ nel punto α.
- Perche' la funzione composta $f \circ r$ e' derivabile nel punto $t = 0$? Si calcoli la derivata ordinaria $(f \circ r)'(0)$.

19. Sia

$$f : R^2 \to R, \qquad f(x,y) = e^{x^2y} + xy^2.$$

- f e' differenziabile in R^2?
- Si calcoli il differenziale di f nel punto $x_0 = (1,-1)$.
- Si calcoli la derivata direzionale di f in $x_0 = (1,-1)$ secondo la direzione $v = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$.

20. Sia

$$f : R^2 \to R, \qquad f(x,y) = sen(x) + cos(y).$$

- Considerati i punti

$$A = (\pi/2, 0), \quad B = (\pi/2, \pi), \quad C = (3\pi/2, 0), \quad D = (3\pi/2, \pi),$$

determinare quali di essi sono di massimo o minimo relativo per f.

21. Sia

$$f : R^2 \to R, \qquad f(x,y) = x^2 + xy - y^2.$$

- f e' differenziabile in R^2?
- Si calcoli il differenziale di f nel punto $x_0 = (1,1)$.
- Si calcoli la derivata direzionale di f in $x_0 = (1,1)$ secondo la direzione $v = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.
- La funzione f ammette punti di estremo relativo?

22.
- Si consideri la funzione $f : R^2 \to R$, $f(x,y) = cos(y) + x^2$.
- f e' differenziabile in ogni punto di R^2?
- Si determinino il differenziale di f in $\alpha = (\pi, 2)$ e la derivata di f lungo la direzione $v = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ nel punto α.
- Si determinio i punti critici di f. Quali di questi sono punti di estremo relativo per f?

23.
- Si consideri la funzione $f : R^2 \to R$, $f(x,y) = x^2 - y^2 + y$.

- f e' differenziabile in ogni punto di R^2?
- Si determinino il differenziale di f in $\alpha = (-3, 2)$ e la derivata di f lungo la direzione $v = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ nel punto α.
- Si determinio i punti critici di f. Quali di questi sono punti di estremo relativo per f?

24. Sia
$$f : R^2 \to R, \qquad f(x, y) = x^2 + xy + y^2.$$

• f e' differenziabile in R^2?

• Si calcoli il differenziale di f nel punto $x_0 = (1, 1)$.

• Si calcoli la derivata direzionale di f in $x_0 = (1, 1)$ secondo la direzione $v = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

• La funzione f ammette punti di estremo relativo?

25. Sia
$$f : R^3 \to R, \qquad f(x, y, z) = xyz^2 + \mid y \mid .$$

• In quali punti di R^3 la funzione f non e' differenziabile?

• Perche' f e' differenziabile nel punto $x_0 = (1, -1, 1)$?. Si calcoli il differenziale di f nel punto $x_0 = (1, -1, 1)$.

• Si calcoli la derivata direzionale di f in $x_0 = (1, -1, 1)$ secondo la direzione $v = (\sqrt{2}/2, 0, -\sqrt{2}/2)$.

26. Sia
$$f : R^2 \to R, \qquad f(x, y) = x^2 - xy + y^2.$$

• f e' differenziabile in R^2?

• Si calcoli il differenziale di f nel punto $x_0 = (1, 1)$.

• Si calcoli la derivata direzionale di f in $x_0 = (1, 1)$ secondo la direzione $v = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

• La funzione f ammette punti di estremo relativo?

27. Si consideri la funzione
$$F = R^2 \to R,$$
definita da
$$F(x, y) = x \sin(y).$$
•La funzione F e' differenziabile su R^2? • Si scriva il differenziale di F nel punto $\alpha = (\pi, \pi)$. • Si calcoli la derivata direzionale di F nel punto α, secondo la direzione $v = (-1/2, \sqrt{3}/2)$. • Si deteminino i punti critici di F. •Il punto (0,0)e' punto di estremo relativo per F?

28. Si consideri la funzione
$$f : R^2 \to R, \qquad f(x, y) = ye^{xy} + sen(x).$$
   - La funzione f e' differenziabile su R^2?
   - Si scriva il differenziale di f nel punto $\alpha = (1, 0)$.

- Si calcoli la derivata direzionale di f nel punto $\alpha = (1,0)$, secondo la direzione $v = (\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$.

29. Si consideri la funzione

$$f : R^2 \to R, \qquad f(x,y) = ye^{x+y^2}.$$

- La funzione f e' differenziabile su R^2?
- Si scriva il differenziale di f nel punto $\alpha = (1,-1)$.
- Si calcoli la derivata direzionale di f nel punto $\alpha = (1,-1)$, secondo la direzione $v = (\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$.

30. Si consideri la funzione

$$f : R^2 \to R, \qquad f(x,y) = e^{y^3-3y+2x^3-3x^2}.$$

- Si determinino i punti critici per f.
- Si determinino gli eventuali punti di estremo relativo per f.

31. Sia

$$f : R^2 \to R, \qquad f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2.$$

- f e' differenziabile in R^2?
- Si calcoli il differenziale di f nel punto $x_0 = (1,1)$.
- Si calcoli la derivata direzionale di f in $x_0 = (1,1)$ secondo la direzione $v = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.
- La funzione f ammette punti di estremo relativo?

32. Si consideri la funzione

$$F = R^2 \to R,$$

definita da

$$F(x,y) = x\sin(y).$$

•La funzione F e' differenziabile su R^2? • Si scriva il differenziale di F nel punto $\alpha = (\pi, \pi)$. • Si calcoli la derivata direzionale di F nel punto α, secondo la direzione $v = (-1/2, \sqrt{3}/2)$. • Si deteminino i punti critici di F. •Il punto (0,0)e' punto di estremo relativo per F?