

Corso di Analisi Matematica T-1
Docente prof. G. Dore
Corso di Laurea in Ingegneria dell'Automazione
Anno Accademico 2023/2024

Esercizi

(1) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definita da

$$f(x) = \sin(3 \exp(x^2 - 2)).$$

Calcolare $f'(2)$.

(2) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = (\sin(5x))^{\sin(7x)}.$$

Calcolare $f'\left(\frac{3}{7}\pi\right)$.

(3) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = (x + 1) \sqrt{|x + 2|}.$$

Calcolare $f''(x)$ per $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

(4) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = (4 + x^2)^{\log(5x)}.$$

Calcolare $f'(1)$.

(5) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \frac{\cos x \sin(6x)}{\sin(x^4)}.$$

Calcolare $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

(6) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = (\log(\log(2x) + e^{5x}))^3.$$

Calcolare $f'(1/2)$.

(7) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = x \exp(\sqrt{x^2 - 3} - 2).$$

Calcolare $f'(\sqrt{7})$.

(8) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{\sin(5x^2) + 10}.$$

Calcolare $f'\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\pi\right)$.

(9) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = x^6 \log(2 + \sin(5x)).$$

Calcolare $f'(\pi)$.

(10) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = e^{x^4} \sin(\sqrt{x^2 + 4x + 3}).$$

Calcolare $f'(1)$.

(11) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \log \frac{|x^2 - 3x - 10|}{x + 5}.$$

Calcolare $f'(0)$.

(12) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \frac{\log(1 + 3 \cos^4 x)}{\exp(1 + 3 \sin^4 x)}.$$

Calcolare $f'(-\pi/4)$.

(13) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = (2 + \arctan x)^x.$$

Calcolare $f'(0)$.

(14) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \cos(2\pi x) \sin\left(\frac{6\pi}{x}\right).$$

Calcolare $f'(2)$.

(15) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x-3}{x-5}\right).$$

Calcolare $f'(0)$.

(16) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = x^{\sin x}.$$

Calcolare $f'(\pi)$.

(17) Studiare, nel suo dominio naturale, la funzione definita da:

$$f(x) = |2x^3 - 9x| + 9x.$$

(18) Studiare, nel suo dominio naturale, la funzione definita da:

$$f(x) = \arcsin |x^2 + 4x + 3|.$$

(19) Studiare, nel suo dominio naturale, la funzione definita da:

$$f(x) = \sqrt{|x+5|-1} e^{1/x}.$$

(20) Studiare, nel suo dominio naturale, la funzione definita da:

$$f(x) = \sqrt{|x^2 - 2x|} - x,$$

(21) Studiare, nell'intersezione del suo dominio naturale con l'intervallo $[-\pi, \pi]$, la funzione definita da:

$$f(x) = \sqrt{|\sin x|} \exp\left(\frac{1}{4 \sin x}\right).$$

(22) Studiare, nell'intersezione del suo dominio naturale con l'intervallo $[-\pi, \pi]$, la funzione definita da:

$$f(x) = \frac{2 \cos^2 x - 1}{-2 \tan x + \sin(2x)}.$$

(23) Studiare, nel suo dominio naturale, la funzione definita da:

$$f(x) = \frac{x^3 + 9x^2}{x^2 - 1}.$$

(24) Studiare, nel suo dominio naturale, la funzione definita da:

$$f(x) = |x+1| \sqrt{x+2}.$$

(25) Studiare, nel suo dominio naturale, la funzione definita da:

$$f(x) = \log\left(1 - \frac{4}{x^3 - x^2}\right).$$

(26) Studiare, nel suo dominio naturale, la funzione definita da:

$$f(x) = \cos\left(\arcsin\left(\frac{3x^2 - x - 2}{5x - 2}\right)\right).$$

(27) Studiare, nel suo dominio naturale, la funzione definita da:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} (x^2 - 4).$$

(28) Studiare, nel suo dominio naturale, la funzione definita da:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x}{x^2 - 3}.$$

(29) Studiare, nel suo dominio naturale, la funzione definita da:

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x^2 - 1|}}{x - 2}.$$

(30) Studiare, nell'intersezione del suo dominio naturale con l'intervallo $[-\pi, \pi]$, la funzione definita da:

$$f(x) = \sqrt{\sin^2 x - \frac{1}{2}} + \sin x |\sin x|.$$

(31) Studiare, nell'intersezione del suo dominio naturale con l'intervallo $[-\pi, \pi]$, la funzione definita da:

$$f(x) = \frac{(2 \sin x - 1)^2}{\sin x}.$$

(32) Studiare, nell'intersezione del suo dominio naturale con l'intervallo $[-\pi, \pi]$, la funzione definita da:

$$f(x) = \sqrt{2 \sin^2 x + \sin x} + \frac{1}{\sqrt{2 \sin^2 x + \sin x}}.$$

(33) Sapendo che

$$\begin{aligned} \sin y &= y - \frac{1}{6} y^3 + o(y^4), & \text{per } y \rightarrow 0, \\ \cos y &= 1 - \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{24} y^4 + o(y^5), & \text{per } y \rightarrow 0, \end{aligned}$$

calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{(\cos x - 1)(4 + x^2)} + \frac{1}{2x \sin x + x^4} \right).$$

(34) Sapendo che

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + o(y^2), \quad \text{per } y \rightarrow 0,$$

calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log\left(\frac{x^3+4}{x^3+2}\right) \log\left(\frac{4x^3+1}{2x^3+1}\right)}{\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2+2} - \frac{1}{2x}}.$$

(35) Sapendo che

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + o(y^2), \quad \text{per } y \rightarrow 0,$$

$$\log(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2), \quad \text{per } y \rightarrow 0,$$

calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{e^2x^2 - 2x^4 + 2x^6} - ex \log\left(e - \frac{x^2}{e}\right)}{x \log(1 + 3x^4)}.$$

(36) Sapendo che

$$\cos y = 1 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{24}y^4 + o(y^5), \quad \text{per } y \rightarrow 0,$$

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2), \quad \text{per } y \rightarrow 0,$$

calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(2 \cos x - x^2) - e^2 + 2e^2x^2}{\cos(2x) - \exp(-2x^2)}.$$

(37) Sapendo che

$$\sqrt[3]{1+y} = 1 + \frac{1}{3}y - \frac{1}{9}y^2 + o(y^2), \quad \text{per } y \rightarrow 0,$$

$$\log(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2), \quad \text{per } y \rightarrow 0,$$

calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 9x^2} - x - 3}{\log(3 \cosh(5x)) \left(\log\left(\frac{3+x}{x}\right) - \frac{3}{x+5} \right)}.$$

(38) Sapendo che

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y + o(y), \quad \text{per } y \rightarrow 0,$$

$$\sqrt[3]{1+y} = 1 + \frac{1}{3}y + o(y), \quad \text{per } y \rightarrow 0,$$

$$\cos y = 1 - \frac{1}{2}y^2 + o(y^3), \quad \text{per } y \rightarrow 0,$$

calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sinh(4x) \left(\log(\sinh(2x)) + \log 2 - 2x \right) \left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 + 3x} \right)}{\arctan(2x) \log \left(\cos \frac{1}{x} \right) \left(\sqrt{x^4 + x^2} - \sqrt{x^2 + 4} \right)}.$$

(39) Sapendo che

$$\sin y = y - \frac{1}{6}y^3 + o(y^4), \quad \text{per } y \rightarrow 0,$$

$$\sinh y = y + \frac{1}{6}y^3 + o(y^4), \quad \text{per } y \rightarrow 0,$$

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 + o(y^3), \quad \text{per } y \rightarrow 0,$$

calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(e^{2x} - 1) - \sin(e^{2x} - 1)}{\cos(6x) \log(1 + 2x) (\sqrt{1 - x^2} - 1)}.$$

(40) Sapendo che

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + o(y^2), \quad \text{per } y \rightarrow 0,$$

$$\sqrt[3]{1+y} = 1 + \frac{1}{3}y - \frac{1}{9}y^2 + o(y^2), \quad \text{per } y \rightarrow 0,$$

$$\cos y = 1 - \frac{1}{2}y^2 + o(y^3), \quad \text{per } y \rightarrow 0,$$

calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + 2x^3} - \sqrt[3]{x^3 + 3x^4}}{\sqrt{x^2 - 4x^4} - \cos(3x^2)}.$$

(41) Sapendo che

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + o(y^2), \quad \text{per } y \rightarrow 0,$$

$$\sqrt[3]{1+y} = 1 + \frac{1}{3}y - \frac{1}{9}y^2 + o(y^2), \quad \text{per } y \rightarrow 0,$$

calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^6 + 4x^4} - \sqrt[3]{x^9 + 6x^7}).$$

(42) Sapendo che

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + o(y^2), \quad \text{per } y \rightarrow 0,$$

calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log(e^{x^2} + e^{3x}) \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{\sqrt{x^2+4x}} \right).$$

(43) Sapendo che

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + o(y^2), \quad \text{per } y \rightarrow 0,$$

$$\sin y = y - \frac{1}{6}y^3 + o(y^4), \quad \text{per } y \rightarrow 0,$$

calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^6 + 4x^5 + 6x^4} - x^3 - 2x^2) \left(\sin\left(\frac{x+4}{x^4+1}\right) - \frac{1}{x^3} \right) \exp(6 + 3 \log x).$$

(44) Sapendo che

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2), \quad \text{per } y \rightarrow 0,$$

$$\cosh y = 1 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{24}y^4 + o(y^5), \quad \text{per } y \rightarrow 0,$$

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + o(y^2), \quad \text{per } y \rightarrow 0,$$

calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(\sqrt{1+4x^2}) - e \cosh(2x)}{(\sqrt{x^4 + 2x^5 - 2x^6 - x^2 - x^3})(\cosh(e^x) - \cosh x)}.$$

(45) Sapendo che

$$\begin{aligned}e^y &= 1 + y + o(y), && \text{per } y \rightarrow 0, \\ \log(1 + y) &= y - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2), && \text{per } y \rightarrow 0,\end{aligned}$$

calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\log\left(\frac{x+1}{x+2}\right) + \frac{1}{x} \right) \left(\exp\left(\frac{x+1}{x+2}\right) - \exp\left(\frac{x}{x+2}\right) \right) \log(1 + xe^{x^3}).$$

(46) Sapendo che

$$\begin{aligned}e^y &= 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2), && \text{per } y \rightarrow 0, \\ \cos y &= 1 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{24}y^4 + o(y^5), && \text{per } y \rightarrow 0, \\ \sqrt{1+y} &= 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + o(y^2), && \text{per } y \rightarrow 0,\end{aligned}$$

calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\exp(2 \cos(2x)) - e^2)(1 + \sqrt{x^2 + 4x^3} - e^x)}{(\sqrt{\cos(2x)} - 1 + x^2)(\sqrt{1 + \cos(2x)} - 1 + x^2)}.$$

(47) Sapendo che

$$\begin{aligned}\sin y &= y - \frac{1}{6}y^3 + o(y^4), && \text{per } y \rightarrow 0, \\ \cos y &= 1 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{24}y^4 + o(y^5), && \text{per } y \rightarrow 0, \\ \sqrt{1+y} &= 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + o(y^2), && \text{per } y \rightarrow 0, \\ (1+y)^{-1/2} &= 1 - \frac{1}{2}y + \frac{3}{8}y^2 + o(y^2), && \text{per } y \rightarrow 0,\end{aligned}$$

calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+x^{16}} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+6}} - \frac{\sqrt{x^2-6}}{x} \right) \left(\cos\left(\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)\right) - \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right) \right).$$

(48) Sapendo che

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + o(y^2), \quad \text{per } y \rightarrow 0,$$

$$\sin y = y - \frac{1}{6}y^3 + o(y^4), \quad \text{per } y \rightarrow 0,$$

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + o(y^3), \quad \text{per } y \rightarrow 0,$$

calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x^2} \sin x - x}{e^{-3x} \sin(\sqrt{x^2 + 6x^3}) - x}.$$

(49) Calcolare

$$\int_1^4 \frac{x+3}{x(4x+3)} dx.$$

(50) Calcolare

$$\int_1^2 \frac{\log x}{3x(\log^2 x + 4)} dx.$$

(51) Calcolare

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos x}{\cos x + 2} dx.$$

(52) Calcolare

$$\int_0^{\pi/4} 2x \frac{-2 \sin x + 5 \cos x}{(5 \sin x + 2 \cos x)^3} dx.$$

(53) Calcolare

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{-x^2 + 4}}{x} dx.$$

(54) Calcolare

$$\int_{1/2}^1 \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{3x-1}} dx.$$

(55) Calcolare

$$\int_1^2 (x+1) \frac{e^x - 3e^{-x}}{(e^x + 4 + 3e^{-x})^2} dx.$$

(56) Calcolare

$$\int_2^5 \frac{x+3}{x^2+9} dx.$$

(57) Calcolare

$$\int_0^{1/2} (6x^2+2) \arcsin x dx.$$

(58) Calcolare

$$\int_0^1 \frac{x\sqrt{1+8x^2}}{1+4x^2} dx.$$

(59) Calcolare

$$\int_0^1 \frac{\cosh x + 4 \sinh x}{\cosh x - \sinh x} dx.$$

(60) Calcolare

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+2x^2+2}} dx.$$

(61) Calcolare

$$\int_0^1 \frac{\cosh x + 4 \sinh x}{\cosh x - \sinh x} dx.$$

(62) Calcolare

$$\int_{\sqrt{2}}^2 \arctan(\sqrt{x^2-1}) dx.$$

(63) Calcolare

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x + \sin x \cos x}{-2 \cos x + \cos x \sin^2 x} dx.$$

(64) Calcolare

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x - 2 \cos x}{2 \sin x + \cos x} dx.$$

(65) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$2z^2 + (2\sqrt{3} + 6i)z + 1 - \sqrt{3}i = 0.$$

(66) Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$\left(\frac{(-1+i)z - 1 - i}{z^2 + 2iz - 1} \right)^2 = (1+i)^6.$$

(67) Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$\left(\frac{1}{z^2} - 4\sqrt{3}i \right)^3 = (1 - 3\sqrt{3}i)^3.$$

(68) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$e^{1/z} = -2 - i.$$

(69) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$\left(e^z + \frac{1}{2}i \right)^3 = i.$$

(70) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$e^{iz} - 2ie^{-iz} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i.$$

(71) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$(z+4)^6 = (z-4)^6.$$

(72) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$e^{(1+i)z} = 1 + i.$$

(73) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$(z^3 + 3\sqrt{3} + i)^2 = 2 - 2\sqrt{3}i.$$

(74) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$(z^2 + 1 + 2i)^2 = -18i.$$

(75) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$(e^z + 4 - 4i)^2 = (ie^z + 1)^2.$$

(76) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$(1 + i)z^6 + (4 + 8i)z^3 + 3 + 15i = 0.$$

(77) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$e^{2z} + 2ie^z + 7 + 8\sqrt{3}i = 0.$$

(78) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$\left(\frac{z^2 + 2\sqrt{3} - \sqrt{3}i}{z^2}\right)^3 = -8.$$

(79) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$e^z + (2 - 3i) - (1 + 3i)e^{-z} = 0.$$

(80) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$(e^z + 1 - 2\sqrt{3}i)^3 = -8.$$

Soluzioni

(1) Utilizzando la formula di derivazione di funzione composta, $\forall x \in \mathbb{R}$, si ha

$$f'(x) = \cos(3 \exp(x^2 - 2)) 3 \exp(x^2 - 2) 2x;$$

perciò

$$f'(2) = \cos(3 \exp(2^2 - 2)) 3 \exp(2^2 - 2) 2 \cdot 2 = 12e^2 \cos(3e^2).$$

(2) Per calcolare la derivata di f è utile riscrivere la formula che la definisce sotto forma di esponenziale; abbiamo quindi

$$f(x) = \exp(\sin(7x) \log(\sin(5x))).$$

Perciò, per x appartenente al dominio naturale di tale funzione, si ha

$$f'(x) = \exp(\sin(7x) \log(\sin(5x))) \left(7 \cos(7x) \log(\sin(5x)) + \sin(7x) \frac{5 \cos(5x)}{\sin(5x)} \right).$$

Da ciò segue

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{3}{7}\pi\right) &= \exp\left(\sin(3\pi) \log\left(\sin\left(\frac{15}{7}\pi\right)\right)\right) \cdot \\ &\quad \cdot \left(7 \cos(3\pi) \log\left(\sin\left(\frac{15}{7}\pi\right)\right) + \sin(3\pi) \frac{5 \cos\left(\frac{15}{7}\pi\right)}{\sin\left(\frac{15}{7}\pi\right)} \right) = \\ &= \exp(0) \left(-7 \log\left(\sin\left(\frac{15}{7}\pi\right)\right) + 0 \right) = -7 \log\left(\sin\left(\frac{15}{7}\pi\right)\right). \end{aligned}$$

(3) Ricordando che la derivata della funzione valore assoluto, in \mathbb{R}^* , è la funzione segno, si ha, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{|x+2|} + (x+1) \frac{1}{2\sqrt{|x+2|}} \operatorname{sgn}(x+2) = \frac{2|x+2| + (x+1) \operatorname{sgn}(x+2)}{2\sqrt{|x+2|}} = \\ &= \frac{2(x+2) \operatorname{sgn}(x+2) + (x+1) \operatorname{sgn}(x+2)}{2\sqrt{|x+2|}} = \frac{(3x+5) \operatorname{sgn}(x+2)}{2\sqrt{|x+2|}}. \end{aligned}$$

Dovendo calcolare la derivata seconda di f , cioè la derivata di f' , è utile raccogliere nell'espressione di f' le costanti moltiplicative; tra queste comprendiamo anche la funzione segno; infatti ai fini del calcolo delle derivate si comporta come una costante, visto che, fissato un qualunque punto in cui è derivabile, essa è costante in un opportuno intorno di tale punto. Possiamo quindi scrivere

$$f'(x) = \frac{\operatorname{sgn}(x+2)}{2} \frac{3x+5}{\sqrt{|x+2|}};$$

perciò si ha

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{\operatorname{sgn}(x+2)}{2} \frac{3\sqrt{|x+2|} - (3x+5) \frac{1}{2\sqrt{|x+2|}} \operatorname{sgn}(x+2)}{(\sqrt{|x+2|})^2} = \\
 &= \frac{\operatorname{sgn}(x+2)}{2} \frac{6|x+2| - (3x+5) \operatorname{sgn}(x+2)}{2|x+2|^{3/2}} = \\
 &= \frac{\operatorname{sgn}(x+2)}{2} \frac{6(x+2) \operatorname{sgn}(x+2) - (3x+5) \operatorname{sgn}(x+2)}{2|x+2|^{3/2}} = \frac{3x+7}{4|x+2|^{3/2}}.
 \end{aligned}$$

(4) Per calcolare la derivata di f è utile riscrivere la formula che la definisce sotto forma di esponenziale; abbiamo quindi

$$f(x) = \exp(\log(4+x^2) \log(5x)),$$

pertanto

$$f'(x) = \exp(\log(4+x^2) \log(5x)) \left(\frac{2x}{4+x^2} \log(5x) + \log(4+x^2) \frac{5}{5x} \right).$$

Quindi si ha

$$f'(1) = \exp(\log 5 \log 5) \left(\frac{2}{5} \log 5 + \log 5 \right) = 5^{\log 5} \frac{7}{5} \log 5.$$

(5) Si ha, per x appartenente al dominio naturale di f ,

$$f'(x) = \frac{(-\sin x \sin(6x) + 6 \cos x \cos(6x)) \sin(x^4) - \cos x \sin(6x) 4x^3 \cos(x^4)}{\sin^2(x^4)},$$

quindi

$$\begin{aligned}
 f'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \\
 &= \frac{\left(-\sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{3\pi}{2} + 6 \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{3\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi^4}{4^4}\right) - \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{3\pi}{2} 4 \frac{\pi^3}{4^3} \cos\left(\frac{\pi^4}{4^4}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi^4}{4^4}\right)} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi^4}{4^4}\right) + \frac{\pi^3}{16} \cos\left(\frac{\pi^4}{4^4}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi^4}{4^4}\right)}.
 \end{aligned}$$

(6) Si ha, per x appartenente al dominio naturale di f ,

$$f'(x) = 3(\log(\log(2x)) + e^{5x})^2 \frac{1}{\log(2x) + e^{5x}} \left(\frac{1}{x} + 5e^{5x} \right),$$

perciò

$$\begin{aligned} f' \left(\frac{1}{2} \right) &= 3(\log(\log 1 + e^{5/2}))^2 \frac{1}{\log 1 + e^{5/2}} (2 + 5e^{5/2}) = \\ &= 3(\log(e^{5/2}))^2 \frac{1}{e^{5/2}} (2 + 5e^{5/2}) = \frac{75}{4} (2e^{-5/2} + 5). \end{aligned}$$

$$(7) \quad f'(\sqrt{7}) = \frac{9}{2}.$$

$$(8) \quad f' \left(\sqrt{\frac{3}{5}} \pi \right) = \sqrt{\frac{3\pi}{3\pi + 20}} \frac{25 + 3\pi}{50}.$$

$$(9) \quad f'(\pi) = 6\pi^5 \log 2 - \frac{5}{2} \pi^6.$$

$$(10) \quad f'(1) = 5e \sin(2\sqrt{2}) + \frac{3e}{2\sqrt{2}} \cos(2\sqrt{2}).$$

$$(11) \quad f'(0) = \frac{1}{10}.$$

$$(12) \quad f'(-\pi/4) = \frac{\frac{12}{7} - 3 \log \frac{7}{4}}{\exp\left(\frac{7}{4}\right)}.$$

$$(13) \quad f'(0) = \log 2.$$

$$(14) \quad f'(2) = \frac{3}{2} \pi.$$

$$(15) \quad f'(0) = -\frac{1}{10}.$$

$$(16) \quad f'(\pi) = -\log \pi.$$

(17) Il dominio naturale di f è \mathbb{R} .

La funzione è continua.

Studiamo il comportamento negli estremi del dominio.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2|x^3| \left(\left(1 - \frac{9}{2}x^{-2} \right) + \frac{9x}{|2x^3|} \right) = +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2|x^3| \left(\left(1 - \frac{9}{2}x^{-2} \right) + \frac{9x}{|2x^3|} \right) = +\infty. \end{aligned}$$

Evidentemente f non ha asintoti orizzontali o verticali e, poiché per $x \rightarrow \pm\infty$ si ha $f(x) \sim 2|x|^3$, non ha neppure asintoti obliqui.

Cerchiamo le intersezioni del grafico di f con gli assi. Si ha $f(0) = 0$, quindi il grafico interseca l'asse delle ordinate nell'origine. Inoltre si ha $f(x) = 0$ se e solo se

$|2x^3 - 9x| = -9x$; poiché il valore assoluto è sempre non negativo, se x è soluzione deve essere $-9x \geq 0$, cioè $x \leq 0$. Quindi $f(x)$ è nullo se e solo se x è non positivo e verifica una delle due equazioni $2x^3 - 9x = -9x$ e $2x^3 - 9x = 9x$. La prima equazione è verificata solo per $x = 0$, la seconda equivale a $2x^3 - 18x = 0$ e quindi ha le soluzioni $x = 0$, $x = -3$ e $x = 3$. Deve essere $x \leq 0$, quindi f si annulla in 0 e in -3 .

Studiamo la derivata di f . La funzione f è derivabile in tutti i punti che non annullano l'argomento del valore assoluto, cioè è derivabile in x se $2x^3 - 9x \neq 0$. Si ha $2x^3 - 9x = x(2x^2 - 9)$, quindi risulta $2x^3 - 9x = 0$ per $x = 0$ e per $x = \pm 3/\sqrt{2}$. Pertanto f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{-3/\sqrt{2}, 0, 3/\sqrt{2}\}$. Se x appartiene a tale insieme si ha

$$f'(x) = (6x^2 - 9) \operatorname{sgn}(2x^3 - 9x) + 9.$$

Per studiare il segno di f' è utile determinare per quali x risulta $\operatorname{sgn}(2x^3 - 9x) = 1$ e per quali x risulta $\operatorname{sgn}(2x^3 - 9x) = -1$. Si ha

$$2x^3 - 9x = 2x \left(x + \frac{3}{\sqrt{2}} \right) \left(x - \frac{3}{\sqrt{2}} \right),$$

quindi il segno di $2x^3 - 9x$ risulta dal seguente schema

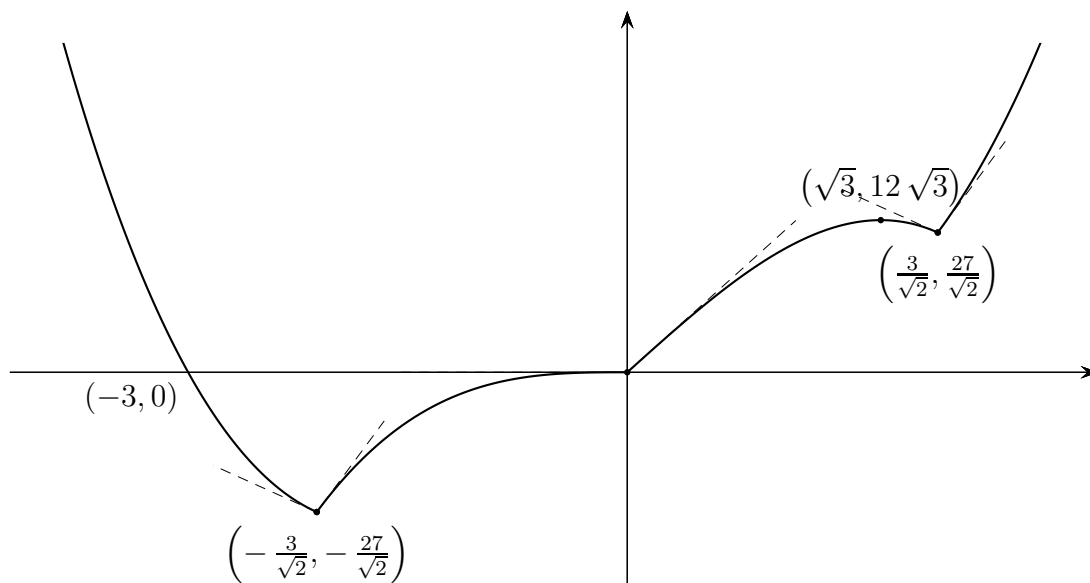
		$-\frac{3}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{3}{\sqrt{2}}$	
$2x$	-	-	-	-	+	+	+
$x + \frac{3}{\sqrt{2}}$	-	-	+	+	+	+	+
$x - \frac{3}{\sqrt{2}}$	-	-	-	-	-	-	-
$2x^3 - 9x$	-	-	+	+	-	-	-

Perciò $\operatorname{sgn}(2x^3 - 9x) = 1$ per $x \in]-3/\sqrt{2}, 0[\cup]3/\sqrt{2}, +\infty[$, e $\operatorname{sgn}(2x^3 - 9x) = -1$ per $x \in]-\infty, -3/\sqrt{2}[\cup]0, 3/\sqrt{2}[$.

Calcoliamo il limite della derivata nei punti $-3/\sqrt{2}$, 0 e $3/\sqrt{2}$ per determinare la derivabilità di f in tali punti.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3/\sqrt{2}^-} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow -3/\sqrt{2}^-} -(6x^2 - 9) + 9 = -9, \\ \lim_{x \rightarrow -3/\sqrt{2}^+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow -3/\sqrt{2}^+} (6x^2 - 9) + 9 = 27, \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (6x^2 - 9) + 9 = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -(6x^2 - 9) + 9 = 18, \\ \lim_{x \rightarrow 3/\sqrt{2}^-} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 3/\sqrt{2}^-} -(6x^2 - 9) + 9 = -9, \\ \lim_{x \rightarrow 3/\sqrt{2}^+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 3/\sqrt{2}^+} (6x^2 - 9) + 9 = 27. \end{aligned}$$

In ciascuno dei punti considerati il limite sinistro di f' è diverso dal limite destro, perciò anche limite sinistro e limite destro dei rapporti incrementali sono diversi tra



(18) Poiché il dominio della funzione arcoseno è $[-1, 1]$, si ha

$$\text{dom } f = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq |x^2 + 4x + 3| \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x^2 + 4x + 3 \leq 1\}.$$

Dobbiamo quindi risolvere il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} x^2 + 4x + 3 \leq 1, \\ x^2 + 4x + 3 \geq -1, \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x^2 + 4x + 2 \leq 0, \\ x^2 + 4x + 4 \geq 0. \end{cases}$$

Il trinomio $x^2 + 4x + 2$ si annulla per

$$x = -2 \pm \sqrt{2^2 - 2} = -2 \pm \sqrt{2},$$

pertanto la prima disequazione è verificata per $x \in [-2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}]$; dall'uguaglianza $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ segue che la seconda disequazione è sempre verificata. Pertanto

$$\text{dom } f = [-2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}].$$

Poiché f è composizione di funzioni continue, è continua.

I valori di f negli estremi del dominio sono:

$$\begin{aligned} f(-2 - \sqrt{2}) &= \arcsin|(-2 - \sqrt{2})^2 + 4(-2 - \sqrt{2}) + 3| = \\ &= \arcsin|4 + 4\sqrt{2} + 2 - 8 - 4\sqrt{2} + 3| = \arcsin|1| = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-2 + \sqrt{2}) &= \arcsin|(-2 + \sqrt{2})^2 + 4(-2 + \sqrt{2}) + 3| = \\ &= \arcsin|4 - 4\sqrt{2} + 2 - 8 + 4\sqrt{2} + 3| = \arcsin|1| = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Il grafico di f non interseca l'asse delle ordinate perché $0 \notin \text{dom } f$. Cerchiamo le intersezioni con l'asse delle ascisse; si ha $f(x) = 0$ se e solo se

$$\arcsin |x^2 + 4x + 3| = 0,$$

che equivale a $x^2 + 4x + 3 = 0$. Questo trinomio si annulla per

$$x = -2 \pm \sqrt{2^2 - 3} = -2 \pm 1 = \begin{cases} -3, \\ 1, \end{cases}$$

quindi f interseca l'asse delle ascisse per $x = -3$ e $x = 1$.

Poiché la funzione arcoseno assume valori non negativi quando il suo argomento è non negativo, f è sempre non negativa.

La funzione non ha asintoti orizzontali o obliqui perché il dominio è limitato e non ha asintoti verticali perché, per il teorema di Weierstrass, è limitata.

La funzione f è derivabile in $x \in \mathbb{R}$ se per tale x l'argomento del valore assoluto è diverso da 0 e l'argomento dell'arcoseno è diverso da ± 1 . Deve quindi essere $x^2 + 4x + 3 \neq 0$ e $|x^2 + 4x + 3| \neq 1$, la disuguaglianza $|x^2 + 4x + 3| \neq -1$ è sempre verificata. Come già trovato in precedenza $x^2 + 4x + 3 = 0$ per $x = -3$ e per $x = -1$. Si ha $|x^2 + 4x + 3| = 1$ se e solo se $x^2 + 4x + 3 = 1$ oppure $x^2 + 4x + 3 = -1$, tali equazioni, già risolte per determinare il dominio di f , hanno le soluzioni $x = -2 - \sqrt{2}$ e $x = -2 + \sqrt{2}$ la prima e $x = -2$ la seconda. Pertanto f è derivabile nell'insieme

$$\text{dom } f \setminus \left\{ -2 - \sqrt{2}, -3, -2, -1, -2 + \sqrt{2} \right\},$$

la derivabilità nei punti $-2 - \sqrt{2}$, -3 , -2 , -1 , $-2 + \sqrt{2}$ sarà studiata in seguito.

Per $x \in \text{dom } f \setminus \left\{ -2 - \sqrt{2}, -3, -2, -1, -2 + \sqrt{2} \right\}$ si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 - |x^2 + 4x + 3|^2}} \text{sgn}(x^2 + 4x + 3) (2x + 4) = \\ &= \text{sgn}(x^2 + 4x + 3) \frac{2x + 4}{\sqrt{(1 - (x^2 + 4x + 3))(1 + (x^2 + 4x + 3))}} = \\ &= \text{sgn}(x^2 + 4x + 3) \frac{2x + 4}{\sqrt{(-x^2 - 4x - 2)(x^2 + 4x + 4)}} = \\ &= \text{sgn}(x^2 + 4x + 3) \frac{2x + 4}{\sqrt{(-x^2 - 4x - 2)(x + 2)^2}} = \\ &= \text{sgn}(x^2 + 4x + 3) \frac{2(x + 2)}{|x + 2| \sqrt{-x^2 - 4x - 2}} = \\ &= \text{sgn}(x^2 + 4x + 3) \text{sgn}(x + 2) \frac{2}{\sqrt{-x^2 - 4x - 2}}. \end{aligned}$$

Il segno di $f'(x)$ coincide con il segno di $\operatorname{sgn}(x^2 + 4x + 3) \operatorname{sgn}(x + 2)$, che risulta dal seguente schema:

$$\begin{array}{cccccccc} & & -2 - \sqrt{2} & -3 & & -2 & & -1 & -2 + \sqrt{2} \\ \operatorname{sgn}(x^2 + 4x + 3) & & + & - & - & - & - & - & + \\ \operatorname{sgn}(x + 2) & & - & - & - & - & + & + & + \\ \operatorname{sgn}(x^2 + 4x + 3) \operatorname{sgn}(x + 2) & & - & + & + & + & - & - & + \end{array}$$

Quindi la funzione f è crescente in $[-3, -2]$ e in $[-1, -2 + \sqrt{2}]$, è decrescente in $[-2 - \sqrt{2}, -3]$ e in $[-2, -1]$; inoltre $-2 - \sqrt{2}$, -2 e $-2 + \sqrt{2}$ sono punti di massimo locale per f , -3 e -1 sono punti di minimo locale per f .

Studiamo la derivabilità di f nei punti $-2 - \sqrt{2}$, -3 , -2 , -1 , $-2 + \sqrt{2}$. Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2 - \sqrt{2}^+} f'(x) &= - \lim_{x \rightarrow -2 - \sqrt{2}^+} \frac{2}{\sqrt{-x^2 - 4x - 2}} = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -3^-} f'(x) &= - \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{2}{\sqrt{-x^2 - 4x - 2}} = -2, \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2}{\sqrt{-x^2 - 4x - 2}} = 2, \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2}{\sqrt{-x^2 - 4x - 2}} = \sqrt{2}, \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f'(x) &= - \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2}{\sqrt{-x^2 - 4x - 2}} = -\sqrt{2}, \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) &= - \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{2}{\sqrt{-x^2 - 4x - 2}} = -2, \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2}{\sqrt{-x^2 - 4x - 2}} = 2, \\ \lim_{x \rightarrow -2 + \sqrt{2}^-} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow -2 + \sqrt{2}^-} \frac{2}{\sqrt{-x^2 - 4x - 2}} = +\infty. \end{aligned}$$

Poiché il limite della derivata (se esiste) coincide con il limite del rapporto incrementale, risulta che f non è derivabile in nessuno dei punti considerati, perché nei due estremi del dominio il limite del rapporto incrementale non è reale, mentre in tutti gli altri punti il limite sinistro del rapporto incrementale è diverso dal limite destro.

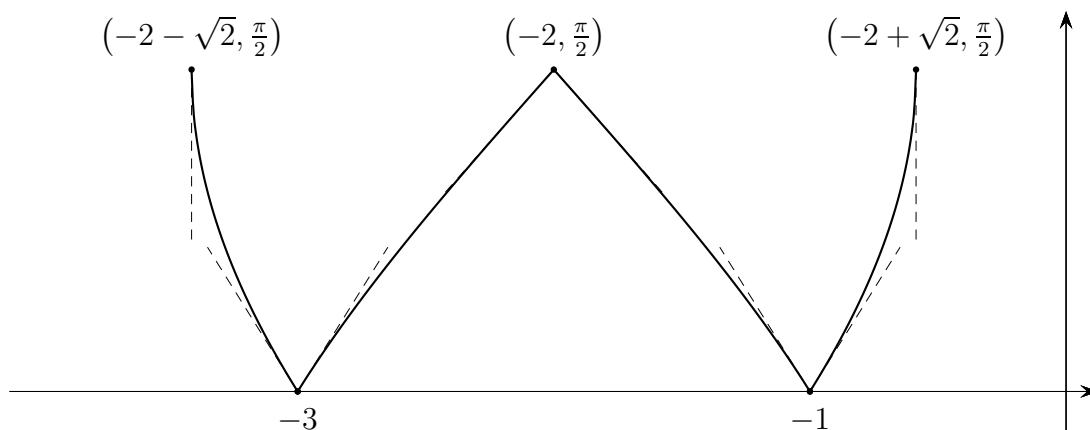
Calcoliamo il valore di f negli estremanti locali. Sappiamo che si ha:

$$f(-2 - \sqrt{2}) = f(-2 + \sqrt{2}) = \pi/2.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} f(-3) &= \arcsin|(-3)^2 + 4 \cdot (-3) + 3| = \arcsin|0| = 0, \\ f(-2) &= \arcsin|(-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 3| = \arcsin|-1| = \frac{\pi}{2}, \\ f(-1) &= \arcsin|(-1)^2 + 4 \cdot (-1) + 3| = \arcsin|0| = 0. \end{aligned}$$

Il grafico di f è quindi, approssimativamente, il seguente.



(19) La funzione f è definita per gli x reali tali che $x \neq 0$, (perché per $x = 0$ si annulla il denominatore dell'esponente) e tali che l'argomento della radice $|x + 5| - 1$ è maggiore o uguale a 0. Si ha $|x + 5| - 1 \geq 0$ se e solo se $|x + 5| \geq 1$ e ciò è verificato se $x + 5 \geq 1$ oppure $x + 5 \leq -1$, che equivale a $x \geq -4$ o $x \leq -6$. Pertanto

$$\text{dom } f =]-\infty, -6] \cup [-4, 0[\cup]0, +\infty[.$$

Il grafico di f non interseca l'asse delle ordinate perché $0 \notin \text{dom } f$. Cerchiamo le intersezioni con l'asse delle ascisse. Si ha $f(x) = 0$ se e solo se $\sqrt{|x + 5| - 1} = 0$, cioè $|x + 5| - 1 = 0$ che è verificato se $x = -6$ o $x = -4$.

Poiché è prodotto di funzioni che assumono valori non negativi, f ha sempre valori non negativi.

La funzione f è prodotto di composizioni di funzioni continue, quindi è continua.

Studiamo il comportamento di f negli estremi degli intervalli che ne costituiscono il dominio.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= +\infty, \\ f(-6) &= \sqrt{|-6 + 5| - 1} e^{-1/6} = 0, \\ f(-4) &= \sqrt{|-4 + 5| - 1} e^{-1/4} = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty. \end{aligned}$$

Pertanto la retta di equazione $x = 0$ è un asintoto verticale e non vi sono asintoti orizzontali. È evidente che, sia per $x \rightarrow +\infty$ che per $x \rightarrow -\infty$, si ha $f(x) \sim \sqrt{|x|}$, quindi non vi sono asintoti obliqui.

La funzione è derivabile nei punti in cui non si annulla né l'argomento del valore assoluto né l'argomento della radice. Quindi deve essere $x + 5 \neq 0$ e $|x + 5| - 1 \neq 0$. Se $x \in \text{dom } f$, allora $x \neq -5$ e, come già visto, $|x + 5| - 1$ si annulla per $x = -6$ e per $x = -4$. Pertanto f è derivabile in $]-\infty, -6[\cup]-4, 0[\cup]0, +\infty[$, mentre la derivabilità in -6 e in -4 verrà studiata in seguito.

Si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{|x+5|-1}} \operatorname{sgn}(x+5) e^{1/x} + \sqrt{|x+5|-1} \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{1/x} = \\ &= \frac{x^2 \operatorname{sgn}(x+5) - 2((x+5) \operatorname{sgn}(x+5) - 1)}{2x^2\sqrt{|x+5|-1}} e^{1/x} = \\ &= \frac{(x^2 - 2x - 10) \operatorname{sgn}(x+5) + 2}{2x^2\sqrt{|x+5|-1}} e^{1/x}. \end{aligned}$$

Studiamo le derivabilità in -6 e -4 . Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -6^-} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow -6^-} \frac{-x^2 + 2x + 12}{2x^2\sqrt{-x-6}} e^{1/x} = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -4^+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{x^2 - 2x - 8}{2x^2\sqrt{x+4}} e^{1/x} = +\infty. \end{aligned}$$

Poiché il limite della derivata coincide con il limite del rapporto incrementale, il limite del rapporto incrementale non è reale, pertanto f non è derivabile in nessuno dei due punti.

Poiché $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ è reale, per conoscere il comportamento di f è utile calcolare il limite corrispondente della derivata. Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 2x - 8}{2x^2\sqrt{x+4}} e^{1/x} = -\frac{8}{4} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{1/x}}{x^2} = 0.$$

Per $x \in \operatorname{dom} f'$ si ha

$$f'(x) \geq 0 \iff (x^2 - 2x - 10) \operatorname{sgn}(x+5) + 2 \geq 0,$$

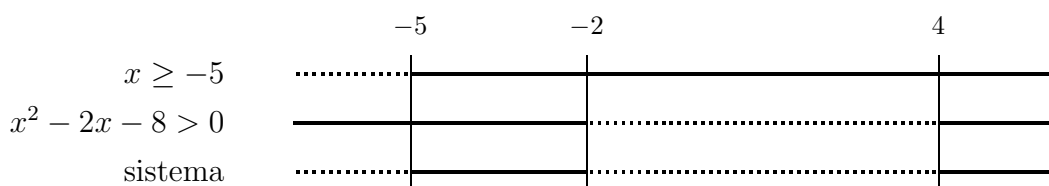
quindi, distinguendo a seconda che sia $\operatorname{sgn}(x+5) = 1$ o $\operatorname{sgn}(x+5) = -1$, $f'(x)$ è non negativa se e solo se x è un elemento del dominio di f' che soddisfa uno dei seguenti sistemi di disequazioni:

$$\begin{cases} x \geq -5, \\ x^2 - 2x - 8 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < -5, \\ -x^2 + 2x + 12 \geq 0. \end{cases}$$

Il trinomio $x^2 - 2x - 8$ si annulla per

$$x = 1 \pm \sqrt{1+8} = 1 \pm 3 = \begin{cases} -2, \\ 4. \end{cases}$$

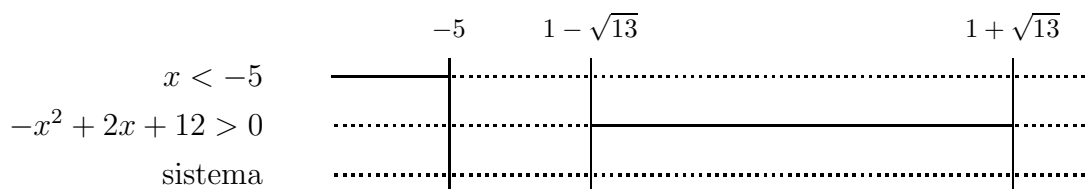
Pertanto le soluzioni del primo sistema risultano dal seguente schema



Quindi l'insieme delle soluzioni è $[-5, -2] \cup [4, +\infty[$. Il trinomio $-x^2 + 2x + 12$ si annulla per

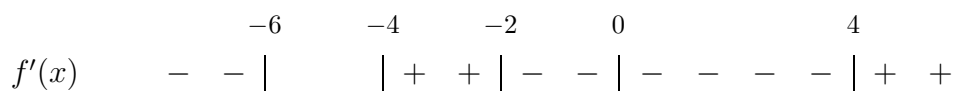
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+12}}{-1} = 1 \mp \sqrt{13},$$

pertanto per il secondo sistema si ha:



perciò questo sistema non ha soluzioni.

Il segno di f' è quindi rappresentato nel seguente schema:



Pertanto f è crescente in $[-4, -2]$ e in $[4, +\infty[$ ed è decrescente in $]-\infty, -6]$, in $[-2, 0[$ e in $]0, 4]$.

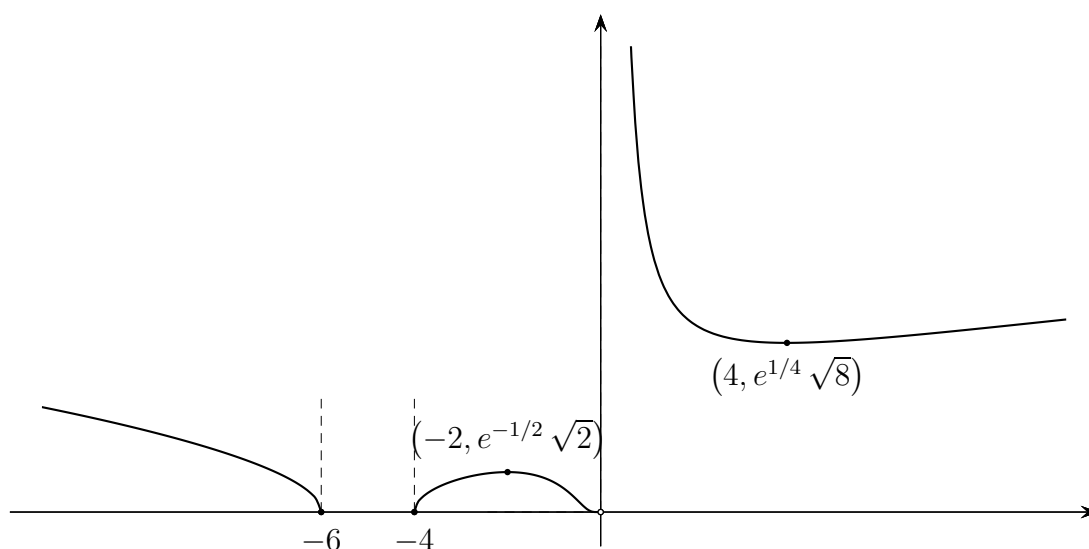
Inoltre -6 , -4 e 4 sono punti di minimo locale per f , -2 è un punto di massimo locale.

Sappiamo che $f(-6) = f(-4) = 0$, inoltre:

$$f(-2) = e^{-1/2} \sqrt{|-2+5|-1} = e^{-1/2} \sqrt{2},$$

$$f(4) = e^{1/4} \sqrt{|4+5|-1} = e^{1/4} \sqrt{8}.$$

Il grafico di f è quindi, approssimativamente, il seguente.



(20) Poiché l'argomento della radice è sempre non negativo, si ha $\text{dom } f = \mathbb{R}$.

Cerchiamo le intersezioni del grafico con gli assi cartesiani.

Si ha $f(0) = \sqrt{|0-0|} + 0 = 0$.

Inoltre $f(x) = 0$ se e solo se $\sqrt{|x^2 - 2x|} = x$, che equivale a $|x^2 - 2x| = x^2$ purché sia $x \geq 0$. Risulta $x^2 - 2x \geq 0$ se e solo se $x \in]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$, pertanto per tali x l'equazione $|x^2 - 2x| = x^2$ equivale a $x^2 - 2x = x^2$, che è verificata per $x = 0$. Se invece $x \in]0, 2[$, allora l'equazione $|x^2 - 2x| = x^2$ equivale a $-x^2 + 2x = x^2$, cioè $2x^2 - 2x = 0$ che, nell'intervallo considerato, è verificata per $x = 1$. Pertanto $f(x) = 0$ per $x = 0$ e $x = 1$.

La funzione f è somma di composizione di funzioni continue e quindi è continua.

Studiamo il comportamento di f negli estremi del dominio.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 \left| 1 - \frac{2}{x} \right|} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(|x| \sqrt{1 - \frac{2}{x}} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \left(1 - \frac{1}{2} \frac{2}{x} + o(x^{-1}) \right) - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x + 1 + o(1) - x) = \\ &= +\infty, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 \left| 1 - \frac{2}{x} \right|} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(|x| \sqrt{1 - \frac{2}{x}} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \left(1 - \frac{1}{2} \frac{2}{x} + o(x^{-1}) \right) - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1 + o(1) - x) = -1. \end{aligned}$$

Pertanto la retta di equazione $y = -1$ è asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$ e la retta di equazione $y = -2x + 1$ è asintoto obliquo per $x \rightarrow -\infty$, come si prova facilmente esaminando i passaggi fatti per calcolare il limite.

La funzione f è somma e composizione di funzioni che sono derivabili in tutto il dominio, con l'esclusione delle funzioni radice quadrata e valore assoluto che non sono derivabili in 0. Perciò f è derivabile in ogni punto del suo dominio in cui non si annullano né l'argomento del valore assoluto né l'argomento della radice; tali argomenti si annullano per gli x tali che $x^2 - 2x = 0$, cioè per $x = 0$ e $x = 2$. Quindi f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$, mentre dobbiamo studiare a parte la derivabilità della funzione in 0 e in 2.

Per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ si ha

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{|x^2 - 2x|}} \text{sgn}(x^2 - 2x) (2x - 2) - 1 = \frac{(x - 1) \text{sgn}(x^2 - 2x)}{\sqrt{|x^2 - 2x|}} - 1.$$

Per studiare f' osserviamo che si ha $x^2 - 2x > 0$ se e solo se $x > 2$ o $x < 0$, quindi risulta $\text{sgn}(x^2 - 2x) = 1$ per $x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$ e $\text{sgn}(x^2 - 2x) = -1$ per $x \in]0, 2[$, pertanto il comportamento della derivata nei punti 0 e 2 è il seguente:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{(x - 1)}{\sqrt{|x^2 - 2x|}} - 1 \right) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{(x-1)}{\sqrt{|x^2 - 2x|}} - 1 \right) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = - \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{(x-1)}{\sqrt{|x^2 - 2x|}} - 1 \right) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{(x-1)}{\sqrt{|x^2 - 2x|}} - 1 \right) = +\infty;$$

poiché il limite destro o sinistro della derivata (se esiste), coincide con il corrispondente limite del rapporto incrementale, si deduce che f non è derivabile né in 0 né in 2 . Sappiamo che $f(0) = 0$, inoltre

$$f(2) = \sqrt{|2^2 - 2 \cdot 2|} - 2 = -2.$$

Studiamo il segno della derivata. La disequazione $f'(x) \geq 0$ è abbastanza complessa, è opportuno determinare anzitutto gli zeri della derivata e utilizzare questa informazione per studiare il segno.

Se $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$, si ha $f'(x) = 0$ se e solo se

$$\frac{(x-1) \operatorname{sgn}(x^2 - 2x)}{\sqrt{|x^2 - 2x|}} = 1,$$

pertanto deve essere $(x-1) \operatorname{sgn}(x^2 - 2x) > 0$. Il segno di questo prodotto risulta dal seguente schema

		0	1	2					
$x - 1$	-	-	-	-	-	-	-	+	+
$\operatorname{sgn}(x^2 - 2x)$	+	+	+	+	+	-	-	-	-
$(x-1) \operatorname{sgn}(x^2 - 2x)$	-	-	-	-	-	+	+	-	-

Quindi se $f'(x) = 0$ risulta $x \in]0, 1[\cup]2, +\infty[$. Per x in tale insieme si ha $f'(x) = 0$ se e solo se

$$\frac{(x-1)^2}{|x^2 - 2x|} = 1,$$

cioè

$$x^2 - 2x + 1 = |x^2 - 2x|.$$

Se $x \in]0, 1[$ si ha $x^2 - 2x < 0$, quindi l'equazione diventa

$$x^2 - 2x + 1 = -x^2 + 2x,$$

cioè $2x^2 - 4x + 1 = 0$, che è verificata per

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 2}}{2} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Risulta $1 - (1/\sqrt{2}) \in]0, 1[$ e $1 + (1/\sqrt{2}) \notin]0, 1[$. Se $x \in]2, +\infty[$ si ha $x^2 - 2x > 0$, quindi l'equazione diventa

$$x^2 - 2x + 1 = x^2 - 2x,$$

che non ha soluzione. Perciò $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 1 - (1/\sqrt{2})$.

Studiamo il segno della derivata. Poiché f' è continua e diversa da 0 in $]-\infty, 0[$, per il teorema di Bolzano, in tale intervallo f è sempre positiva o sempre negativa. Si ha $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -\infty$, perciò f' è negativa in $]-\infty, 0[$. In $]0, 2[$ f' è continua, si annulla solo in $1 - (1/\sqrt{2})$, quindi essa ha segno costante in $]0, 1 - (1/\sqrt{2})[$ e in $]1 - (1/\sqrt{2}), 2[$. Poiché $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = -\infty$, la funzione f' è positiva nel primo intervallo e negativa nel secondo. Infine in $]2, +\infty[$ f' è continua e non si annulla, poiché $\lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = +\infty$ essa è positiva.

Il segno di f' è quindi rappresentato dal seguente schema:

$$f'(x) \quad - \quad - \quad - \quad - \quad | \quad + \quad | \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad | \quad + \quad + \quad + \quad +$$

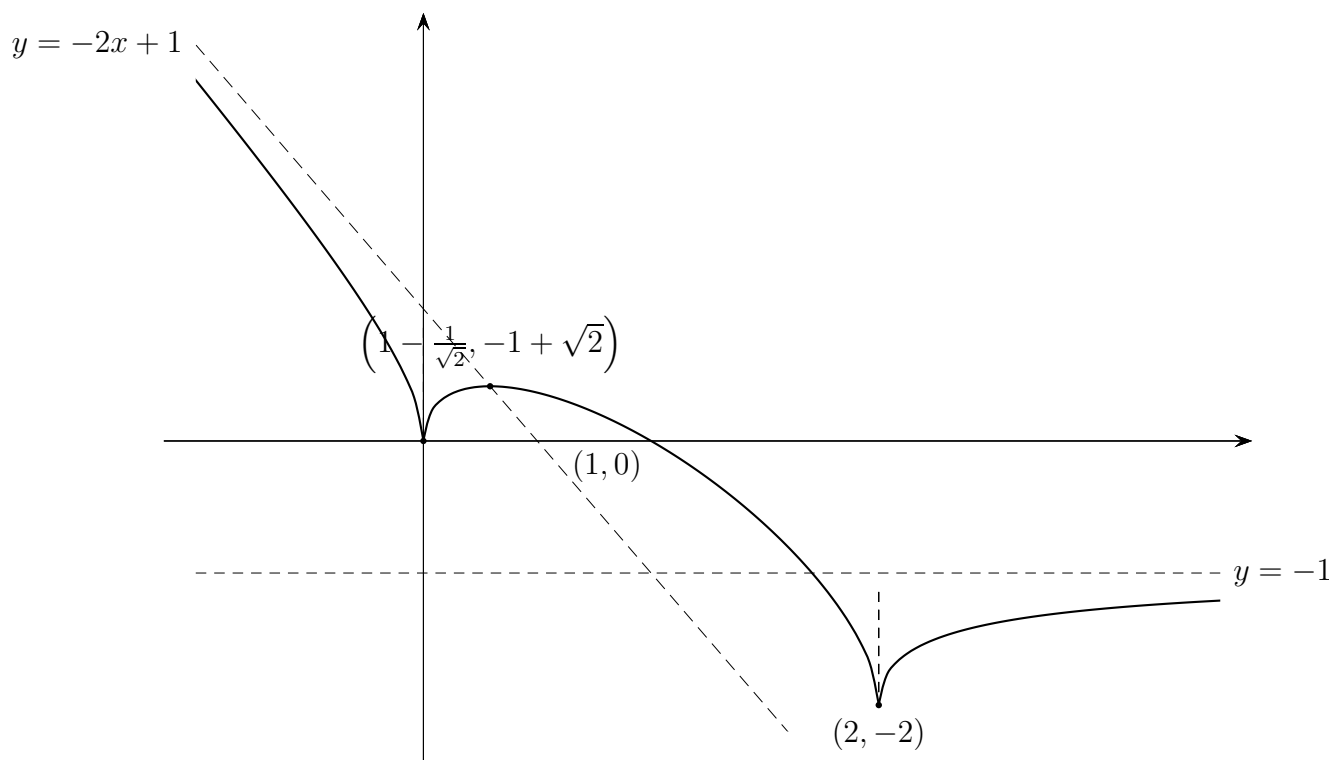
$0 \quad 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 2$

Pertanto f è crescente in $[0, 1 - (1/\sqrt{2})]$ e in $[2, +\infty[$ ed è decrescente in $]-\infty, 0[$ e in $[1 - (1/\sqrt{2}), 2]$. Da ciò segue che 0 e 2 sono punti di minimo locale per f , $1 - (1/\sqrt{2})$ è punto di massimo locale.

Il valore della funzione in 0 e in 2 è già stato calcolato;

$$\begin{aligned} f\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \sqrt{\left|\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right|} - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \\ &= \sqrt{\left|1 - 2\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} - 2 + 2\frac{1}{\sqrt{2}}\right|} - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)} - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = -1 + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Il grafico di f è quindi, approssimativamente, il seguente.



(21) Poiché $\sin x$ compare al denominatore, il dominio naturale di f è costituito dagli x tali che $\sin x \neq 0$. Se $x \in [-\pi, \pi]$ si ha $\sin x = 0$ per $x = 0$, $x = \pi$ e $x = -\pi$. Pertanto

$$\text{dom } f \cap [-\pi, \pi] =]-\pi, 0[\cup]0, \pi[.$$

La funzione f è continua, perché prodotto di composizioni di funzioni continue.

Il grafico non interseca l'asse delle ordinate, perché $0 \notin \text{dom } f$. Inoltre f non si annulla, perché l'esponenziale è sempre positivo e il seno si annulla in punti non appartenenti al dominio.

Studiamo il comportamento negli estremi degli intervalli che costituiscono il dominio. Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\pi^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\pi^+} \sqrt{|\sin x|} \lim_{x \rightarrow -\pi^+} \exp\left(\frac{1}{4 \sin x}\right) = 0 \cdot 0 = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{|\sin x|} \lim_{x \rightarrow 0^-} \exp\left(\frac{1}{4 \sin x}\right) = 0 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Per $x \rightarrow 0^+$ si ha $\sqrt{\sin x} \rightarrow 0$ e $\exp(1/(4 \sin x)) \rightarrow +\infty$, pertanto il limite si presenta in forma indeterminata. Ponendo $y = 1/(4 \sin x)$, risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{|\sin x|} \exp\left(\frac{1}{4 \sin x}\right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{4y}} e^y = \frac{1}{2} \frac{e^y}{\sqrt{y}} = +\infty.$$

Analogamente $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = +\infty$.

Pertanto f ha gli asintoti verticali $x = 0$ e $x = \pi$.

In ogni punto di $\text{dom } f$ l'argomento del valore assoluto è non nullo, lo stesso vale per l'argomento della radice, quindi f è derivabile. Si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos x \operatorname{sgn}(\sin x)}{2 \sqrt{|\sin x|}} \exp\left(\frac{1}{4 \sin x}\right) + \sqrt{|\sin x|} \exp\left(\frac{1}{4 \sin x}\right) \frac{1}{4} \left(-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right) = \\ &= \exp\left(\frac{1}{4 \sin x}\right) \left(\frac{\cos x \operatorname{sgn}(\sin x)}{2 \sqrt{|\sin x|}} - \frac{1}{4} \frac{\cos x}{|\sin x|^{3/2}}\right) = \\ &= \frac{1}{4 |\sin x|^{3/2}} \exp\left(\frac{1}{4 \sin x}\right) (2 \cos x |\sin x| \operatorname{sgn}(\sin x) - \cos x) = \\ &= \frac{1}{4 |\sin x|^{3/2}} \exp\left(\frac{1}{4 \sin x}\right) \cos x (2 \sin x - 1). \end{aligned}$$

Si ha $f'(x) \geq 0$ se e solo se $\cos x (2 \sin x - 1) \geq 0$. Per risolvere questa disequazione osserviamo che in $[-\pi, \pi]$ risulta $\sin x = 1/2$ per $x = \pi/6$ e per $x = 5\pi/6$, da ciò si ricava facilmente che si ha $\sin x \geq 1/2$ per $x \in [\pi/6, 5\pi/6]$. Il segno di f' è quindi rappresentato dal seguente schema:

	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5}{6}\pi$	π			
$2 \sin x - 1$	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-
$\cos x$	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-
$f'(x)$	+	+	+	+	-	-	-	-	+	+	-	-	+	+

Pertanto f è crescente in $]-\pi, -\pi/2]$, in $[\pi/6, \pi/2]$ e in $[5\pi/6, \pi[$ ed è decrescente in $[-\pi/2, 0[$, in $]0, \pi/6]$ e in $[\pi/2, 5\pi/6]$. Quindi $-\pi/2$ e $\pi/2$ sono punti di massimo locale, mentre $\pi/6$ e $5\pi/6$ sono punti di minimo locale. In tali punti si ha

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\left|\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right|} \exp\left(\frac{1}{4\sin(-\pi/2)}\right) = \sqrt{|-1|} \exp\left(\frac{1}{-4}\right) = e^{-1/4},$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{\left|\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right|} \exp\left(\frac{1}{4\sin(\pi/6)}\right) = \sqrt{\left|\frac{1}{2}\right|} \exp\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{1/2}}{\sqrt{2}},$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|} \exp\left(\frac{1}{4\sin(\pi/2)}\right) = \sqrt{|1|} \exp\left(\frac{1}{4}\right) = e^{1/4},$$

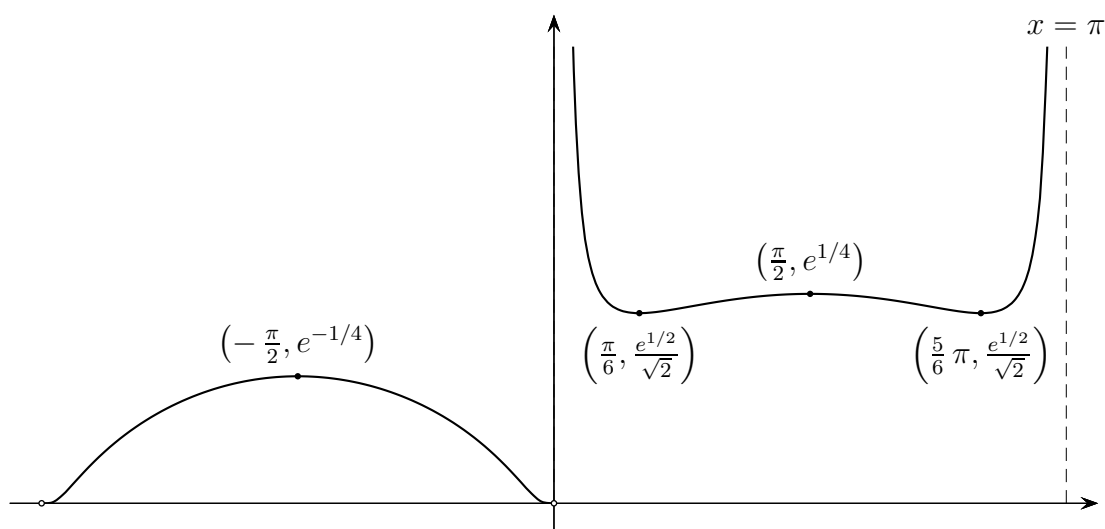
$$f\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \sqrt{\left|\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right|} \exp\left(\frac{1}{4\sin(5\pi/6)}\right) = \sqrt{\left|\frac{1}{2}\right|} \exp\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{1/2}}{\sqrt{2}}.$$

Poiché $f(x)$ ha limite reale per $x \rightarrow -\pi^+$ e per $x \rightarrow 0^-$, è utile calcolare i corrispondenti limiti della derivata. Per $x \rightarrow 0^-$ e per $x \rightarrow -\pi^-$ il limite di $f'(x)$ si presenta in forma indeterminata. Ponendo $y = 1/(4\sin x)$, si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{4|\sin x|^{3/2}} \exp\left(\frac{1}{4\sin x}\right) \lim_{x \rightarrow 0^-} (\cos x (2\sin x - 1)) = \\ &= - \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{1}{4|1/4y|^{3/2}} e^y = - \lim_{y \rightarrow -\infty} 2|y|^{3/2} e^y = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\pi^+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow -\pi^+} \frac{1}{4|\sin x|^{3/2}} \exp\left(\frac{1}{4\sin x}\right) \lim_{x \rightarrow -\pi^+} (\cos x (2\sin x - 1)) = \\ &= \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{1}{4|1/4y|^{3/2}} e^y = \lim_{y \rightarrow -\infty} 2|y|^{3/2} e^y = 0. \end{aligned}$$

Pertanto il grafico di f è, approssimativamente, il seguente.



(22) Affinché x appartenga a $\text{dom } f$, esso deve appartenere al dominio della funzione tangente e non deve annullare il denominatore $-2 \tan x + \sin(2x)$. Poiché la funzione tangente ha dominio $\mathbb{R} \setminus \{(\pi/2) + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, deve essere $x \neq (\pi/2) + k\pi$, qualunque sia $k \in \mathbb{Z}$, e $-2 \tan x + \sin(2x) \neq 0$. Si ha

$$-2 \tan x + \sin(2x) = -2 \frac{\sin x}{\cos x} + 2 \sin x \cos x = \frac{-2 \sin x + 2 \sin x \cos^2 x}{\cos x} = \frac{-2 \sin^3 x}{\cos x},$$

quindi risulta $-2 \tan x + \sin(2x) = 0$ se e solo se $\sin x = 0$, cioè $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Quindi $\text{dom } f$ è costituito dai reali che non sono né multipli interi di π né somma di $\pi/2$ con multipli interi di π . Si ha quindi

$$\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \left\{ k \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Dalla periodicità delle funzioni seno, coseno e tangente segue che f è periodica di periodo 2π . Inoltre f è dispari, perché, $\forall x \in \text{dom } f$, si ha

$$f(-x) = \frac{2 \cos^2(-x) - 1}{-2 \tan(-x) + \sin(-2x)} = \frac{2 \cos^2 x - 1}{2 \tan x - \sin(2x)} = -f(x).$$

Come richiesto studiamo la funzione in $[-\pi, \pi]$. Essa è dispari, quindi se la si studia in $[0, \pi]$, per simmetria si può ricavare il comportamento in tutto $[-\pi, \pi]$. Osserviamo che

$$\text{dom } f \cap [0, \pi] =]0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[.$$

La funzione f è continua e derivabile, perché quoziente di somma di funzioni continue e derivabili.

È utile un'espressione di f che contenga solo le funzioni seno e coseno. Si ha:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2 \cos^2 x - 1}{-2(\sin x / \cos x) + 2 \sin x \cos x} = \frac{\cos x(2 \cos^2 x - 1)}{-2 \sin x + 2 \sin x \cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos x(1 - 2 \cos^2 x)}{2 \sin^3 x}. \end{aligned}$$

Cerchiamo le intersezioni del grafico di f con gli assi cartesiani. Poiché $0 \notin \text{dom } f$ non vi sono intersezioni con l'asse delle ordinate. Poiché per $x \in \text{dom } f$ si ha $\cos x \neq 0$, $f(x)$ si annulla se e solo se $1 - 2 \cos^2 x = 0$, cioè se $\cos x = \pm 1/\sqrt{2}$. Se $x \in [0, \pi]$ ciò avviene per $x = \pi/4$ e $x = 3\pi/4$.

Poiché per $x \in]0, \pi[$ si ha $\sin x > 0$, il segno di $f(x)$ coincide con il segno del numeratore, quindi risulta dal seguente schema

	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π
$\cos x$	+ + + +	+ + + +	- - - -	- - - -	- - - -
$1 - 2 \cos^2 x$	- - - -	+ + + +	+ + + +	- - - -	- - - -
$f(x)$	- - - -	+ + + +	- - - -	+ + + +	+ + + +

Pertanto f è positiva in $]\pi/4, \pi/2[\cup]3\pi/4, \pi[$ ed è negativa in $]0, \pi/4[\cup]\pi/2, 3\pi/4[$.

Studiamo il comportamento di f negli estremi degli intervalli che costituiscono il dominio.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x (1 - 2 \cos^2 x)}{2 \sin^3 x} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2 \sin^3 x} = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{\cos x (1 - 2 \cos^2 x)}{2 \sin^3 x} = \frac{0 \cdot (1 - 2 \cdot 0)}{2 \cdot 1} = 0, \\ \lim_{x \rightarrow \pi/2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pi/2^+} \frac{\cos x (1 - 2 \cos^2 x)}{2 \sin^3 x} = \frac{0 \cdot (1 - 2 \cdot 0)}{2 \cdot 1} = 0, \\ \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\cos x (1 - 2 \cos^2 x)}{2 \sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{1}{2 \sin^3 x} = +\infty.\end{aligned}$$

Le rette $x = 0$ e $x = \pi$ sono quindi asintoti verticali per f .

La funzione f è derivabile e, per $x \in \text{dom } f$, si ha

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{2} \frac{(-\sin x + 6 \cos^2 x \sin x) \sin^3 x - 3 \sin^2 x \cos x (\cos x - 2 \cos^3 x)}{(\sin^3 x)^2} = \\ &= \frac{(-\sin x + 6 \cos^2 x \sin x) \sin x - 3 \cos x (\cos x - 2 \cos^3 x)}{2 \sin^4 x} = \\ &= \frac{-\sin^2 x + 6 \cos^2 x \sin^2 x - 3 \cos^2 x + 6 \cos^4 x}{2 \sin^4 x} = \\ &= \frac{-\sin^2 x + 6(1 - \sin^2 x) \sin^2 x - 3(1 - \sin^2 x) + 6(1 - \sin^2 x)^2}{2 \sin^4 x} = \\ &= \frac{-\sin^2 x + 6 \sin^2 x - 6 \sin^4 x - 3 + 3 \sin^2 x + 6 - 12 \sin^2 x + 6 \sin^4 x}{2 \sin^4 x} = \\ &= \frac{-4 \sin^2 x + 3}{2 \sin^4 x}.\end{aligned}$$

Il denominatore è sempre positivo, quindi il segno della derivata prima dipende esclusivamente dal segno del numeratore. Si ha $f'(x) \geq 0$ se e solo se $\sin^2 x \leq 3/4$. Poiché nell'intervallo $[0, \pi]$ la funzione seno è non negativa, tale disequazione equivale a $\sin x \leq \sqrt{3}/2$; quest'ultima disuguaglianza è verificata se $x \leq \pi/3$ oppure se $x \geq 2\pi/3$ (continuiamo a considerare solo i valori di x in $[0, \pi]$). Il segno di f' è quindi rappresentato dal seguente schema:

$$f'(x) \quad \begin{array}{cccccccccccc} & 0 & & & \frac{\pi}{3} & & & \frac{\pi}{2} & & & \frac{2}{3}\pi & & & \pi \\ | & + & + & + & + & + & | & - & - & | & - & - & | & + & + & + & + & + & | \end{array}$$

La funzione f è quindi crescente negli intervalli $]0, \pi/3[$ e $]2\pi/3, \pi[$ e decrescente negli intervalli $] \pi/3, \pi/2[$ e $] \pi/2, 2\pi/3[$; da ciò segue che $\pi/3$ è un punto di massimo locale per f , $2\pi/3$ è un punto di minimo locale per f .

Poiché che f ha limite finito per x che tende a $\pi/2$, per conoscere l'andamento del grafico vicino a tale punto è utile calcolare il limite di f' . Si ha:

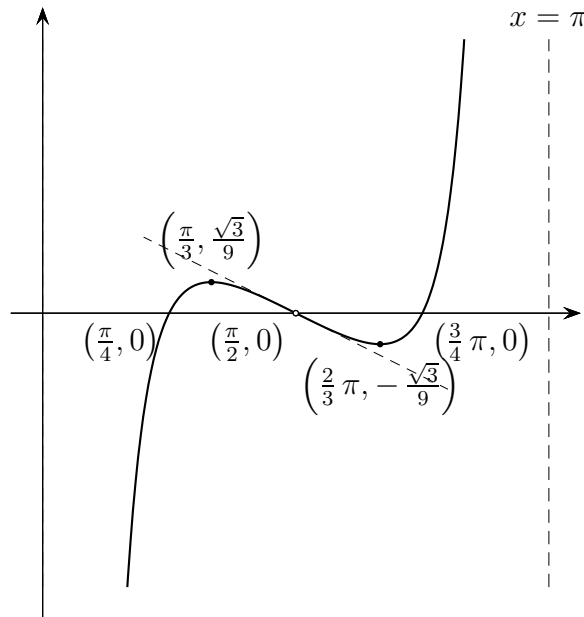
$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{-4 \sin^2 x + 3}{2 \sin^4 x} = \frac{-4 + 3}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Calcoliamo il valore di f negli estremanti locali.

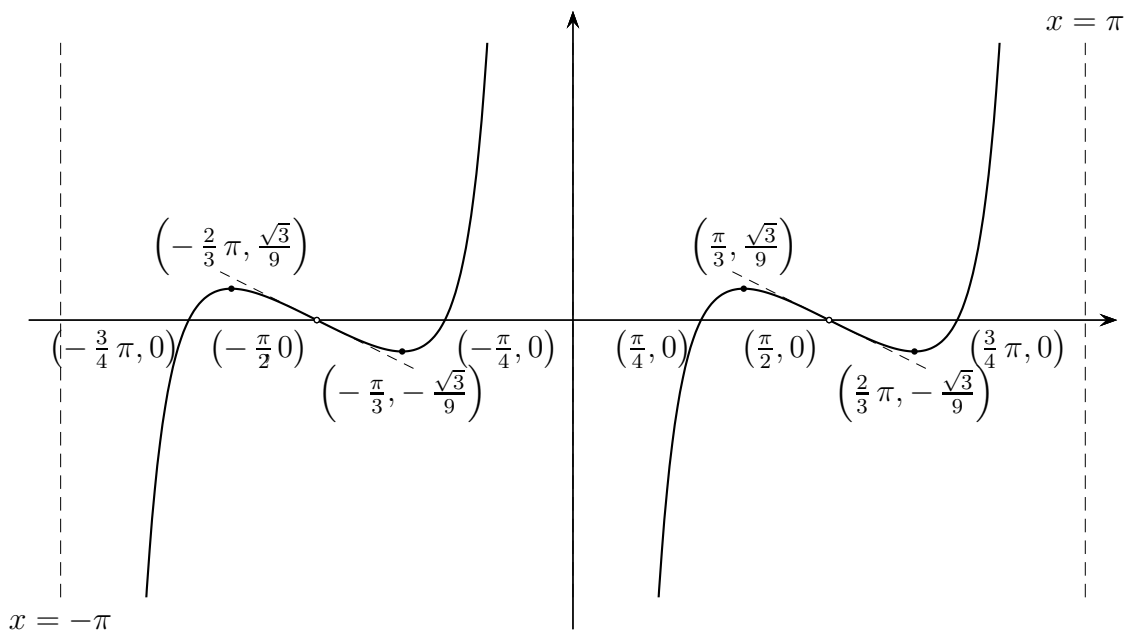
$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\cos(\pi/3)(1 - 2\cos^2(\pi/3))}{2\sin^3(\pi/3)} = \frac{(1/2)(1 - 2(1/2)^2)}{2(\sqrt{3}/2)^3} = \frac{1}{3\sqrt{3}},$$

$$f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\cos(2\pi/3)(1 - 2\cos^2(2\pi/3))}{2\sin^3(2\pi/3)} = \frac{(-1/2)(1 - 2(-1/2)^2)}{2(\sqrt{3}/2)^3} = -\frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Il grafico di f ristretta a $\text{dom } f \cap [0, \pi]$ è quindi, approssimativamente, il seguente:



Poiché f è dispari, il grafico di f ristretta a $\text{dom } f \cap [-\pi, 0]$ è il simmetrico di questo grafico rispetto all'origine. Quindi il grafico di f ristretta a $\text{dom } f \cap [-\pi, \pi]$ è:



Osserviamo che questo grafico suggerisce che f , oltre a essere periodica di periodo 2π , sia anche periodica di periodo π ; verificiamo se ciò è vero. Anzitutto si ha

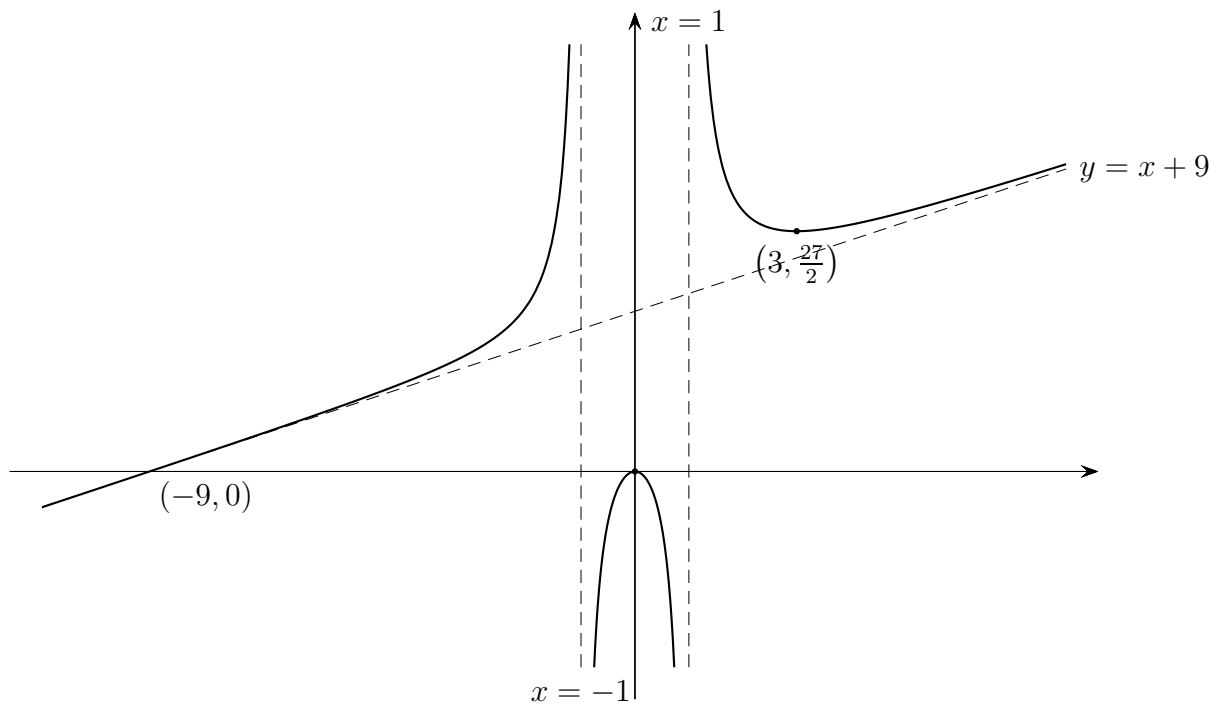
$$x \in \text{dom } f \iff \forall k \in \mathbb{Z}, x \neq k \frac{\pi}{2} \iff \forall k \in \mathbb{Z}, x + \pi \neq k\pi/2 \iff x + \pi \in \text{dom } f;$$

inoltre se $x \in \text{dom } f$ allora

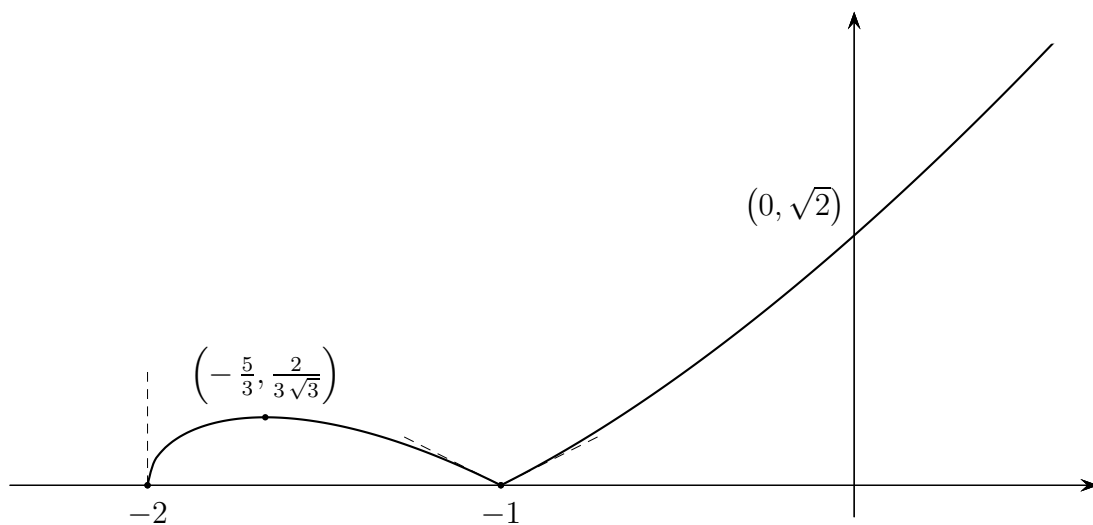
$$f(x + \pi) = \frac{2 \cos^2(x + \pi) - 1}{-2 \tan(x + \pi) + \sin(2(x + \pi))} = \frac{2(-\cos x)^2 - 1}{-2 \tan x + \sin(2x)} = f(x);$$

quindi f è periodica di periodo π .

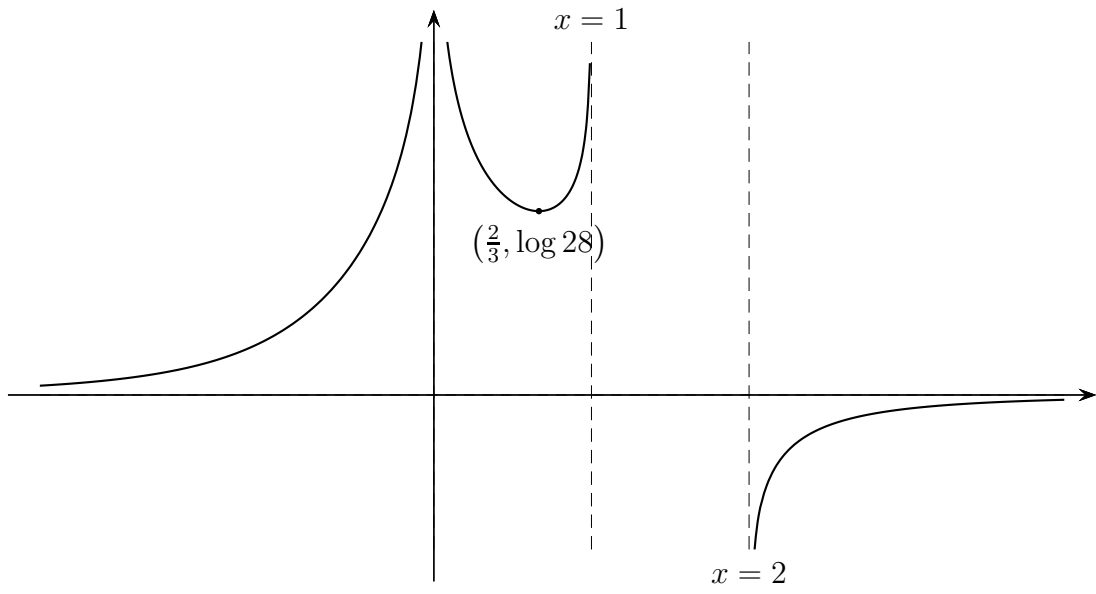
(23)



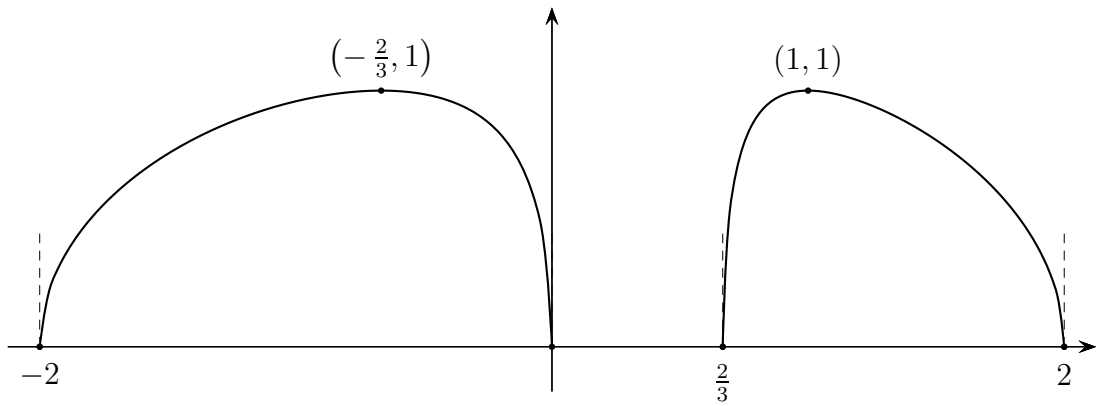
(24)



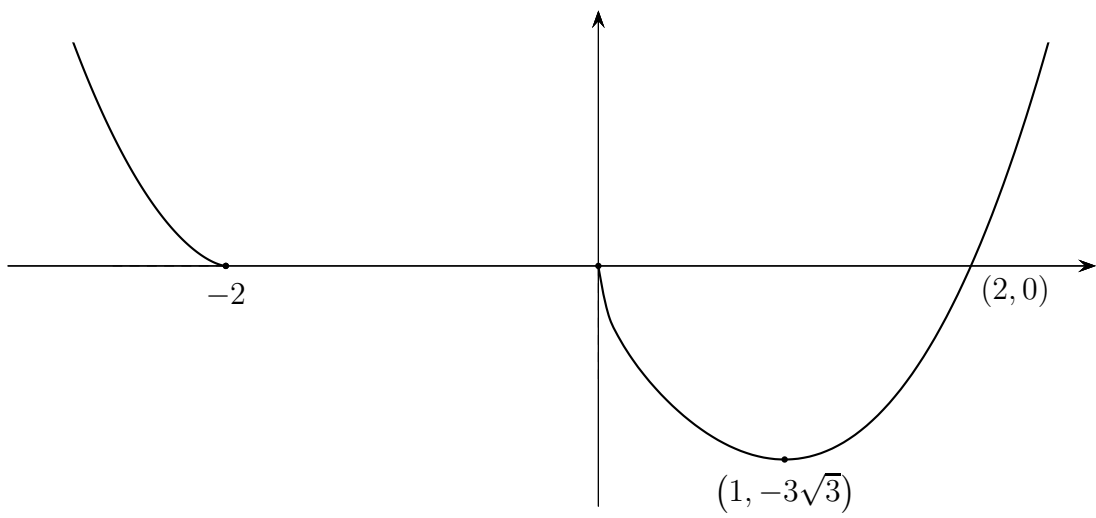
(25)



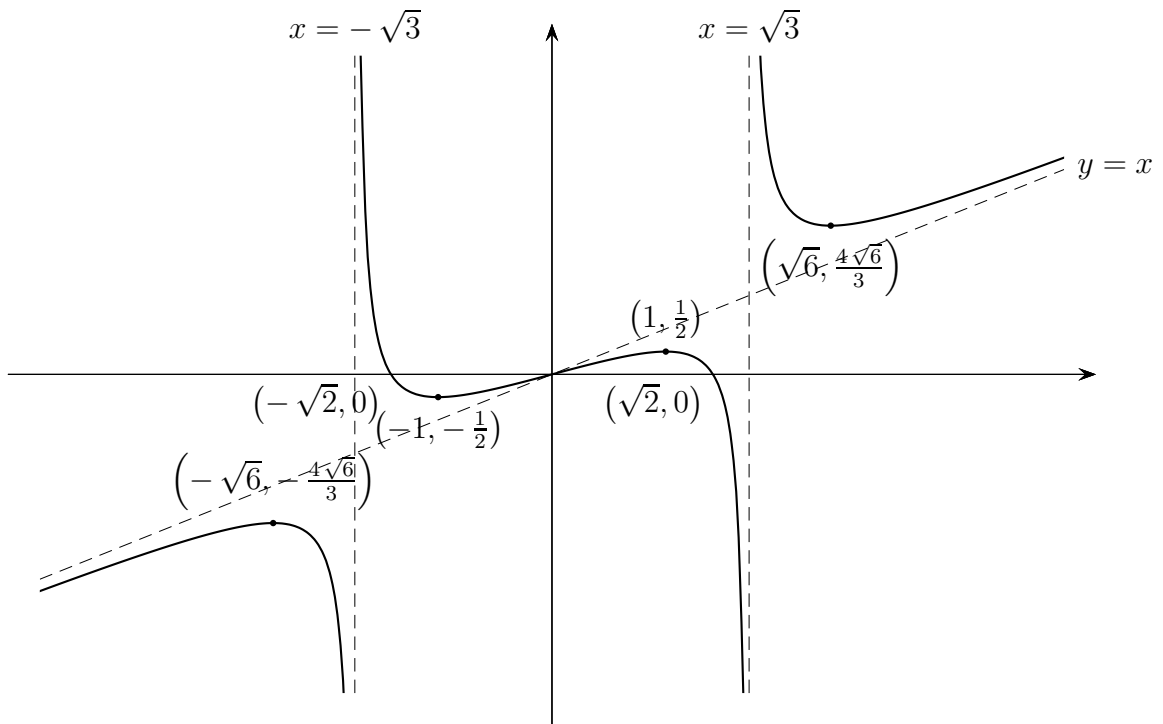
(26)



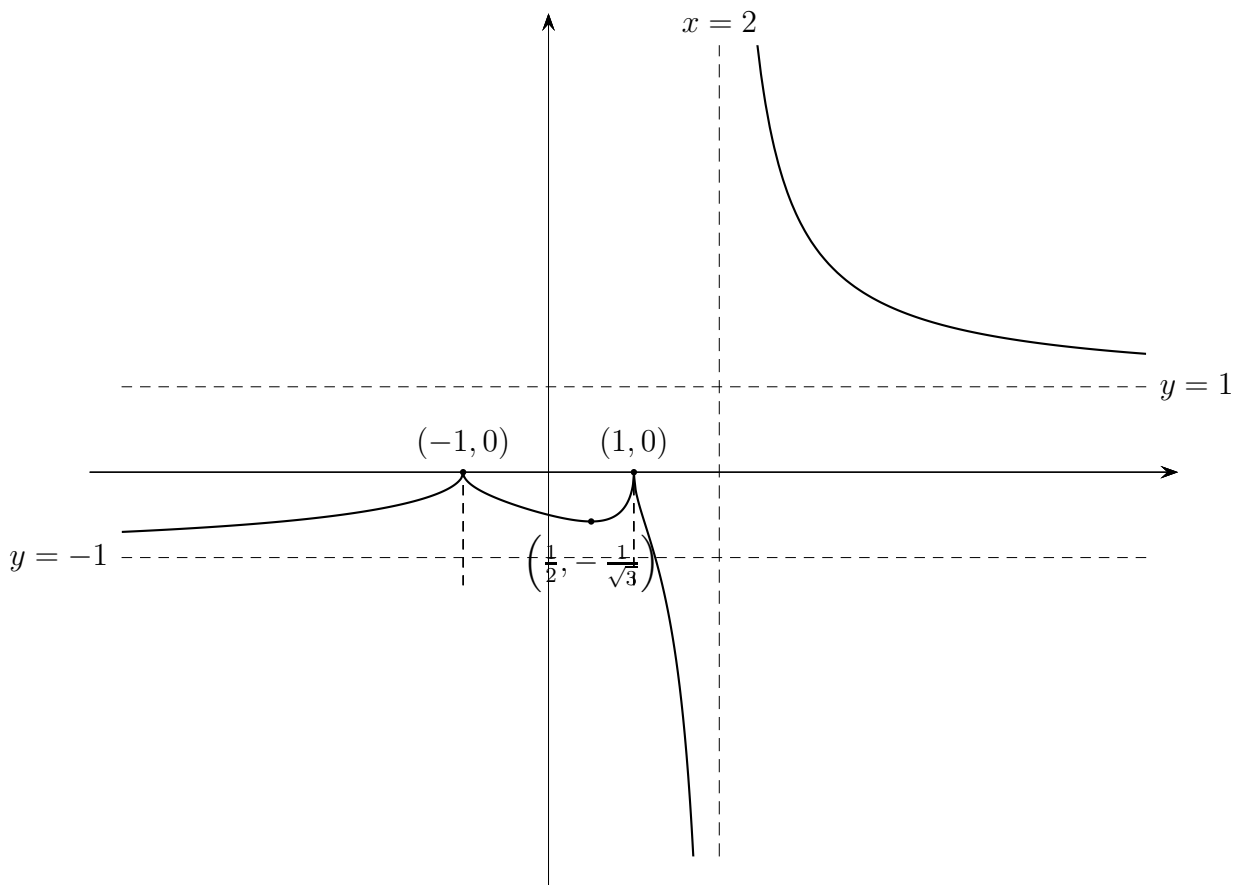
(27)



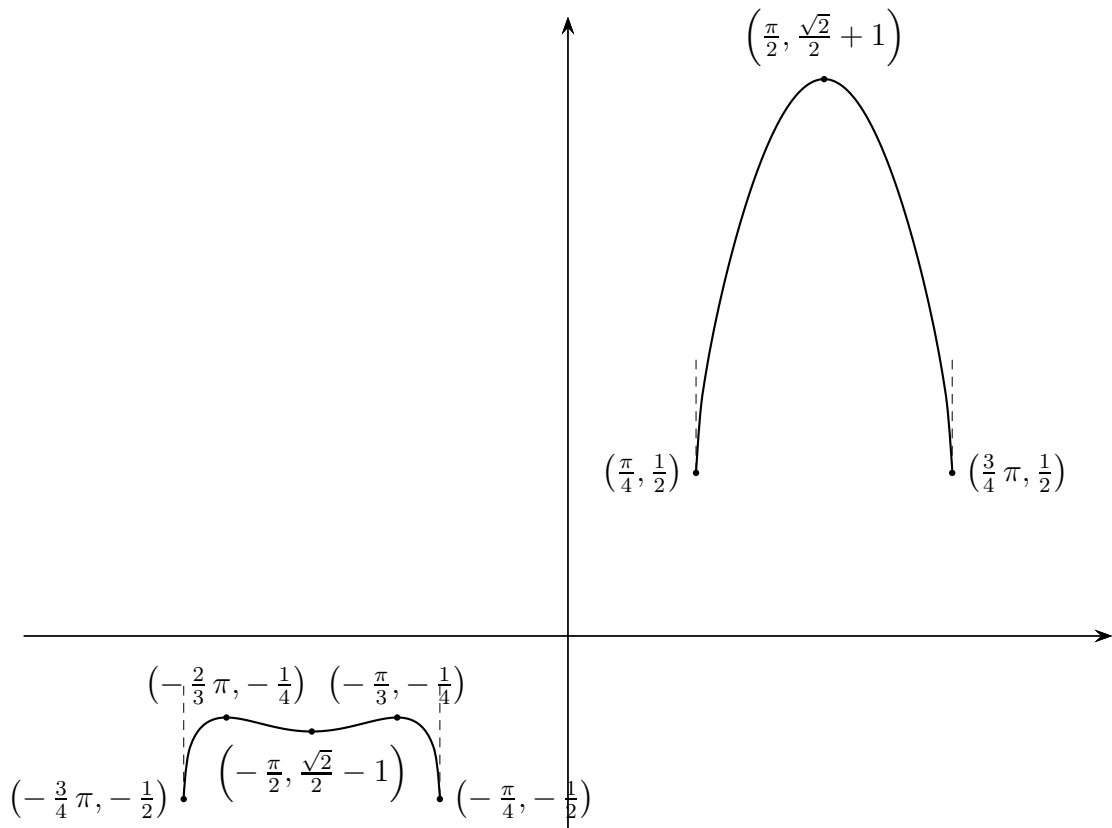
(28)



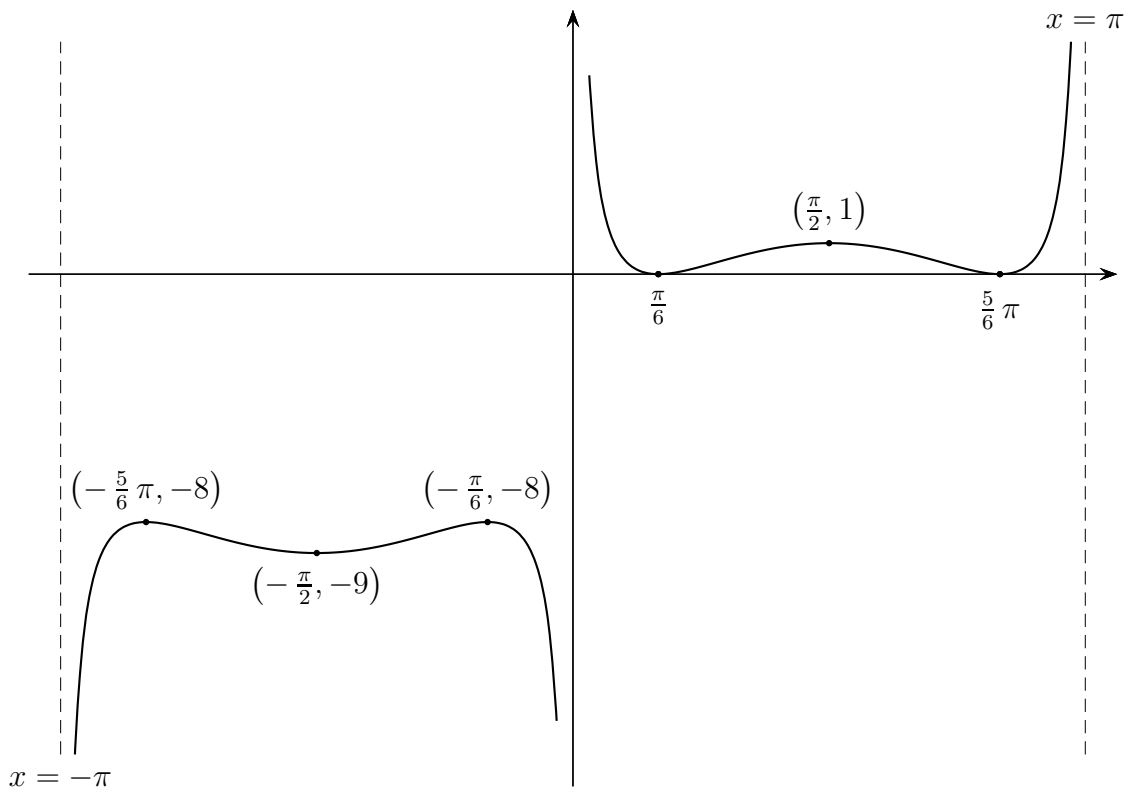
(29)



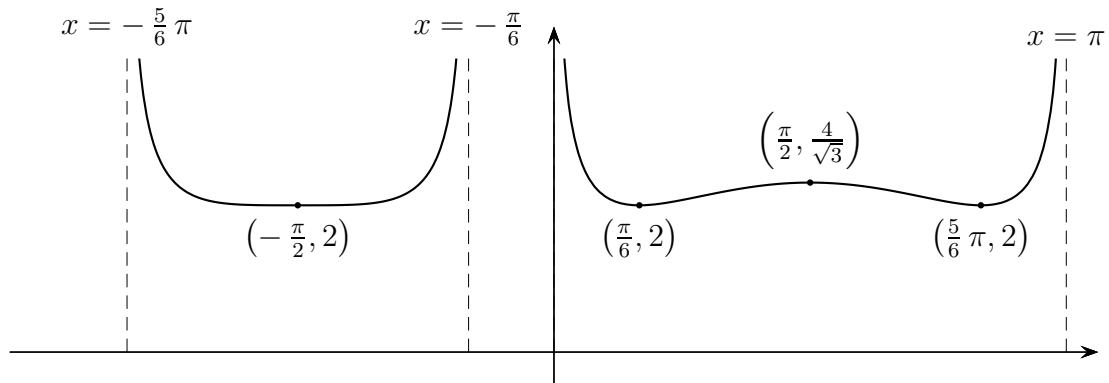
(30)



(31)



(32)



(33) La funzione di cui vogliamo calcolare il limite è somma di due funzioni, ciascuna delle quali ha numeratore uguale a 1 e denominatore che tende a 0. Per stabilire il limite di ciascun addendo occorre studiare il segno dei denominatori vicino a 0. Evidentemente per x in un opportuno intorno di 0, escluso 0, si ha $\cos x - 1 < 0$ e $4 + x^2 > 0$, perciò $(\cos x - 1)(4 + x^2) < 0$, perciò

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\cos x - 1)(4 + x^2)} = -\infty;$$

inoltre (sempre per x in un intorno di 0, ma diverso da 0) si ha $2x \sin x + x^4 > 0$, perché somma di numeri maggiori di 0, quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x \sin x + x^4} = +\infty;$$

perciò il limite è nella forma indeterminata $-\infty + \infty$.

Per calcolare il limite occorre studiare il comportamento per $x \rightarrow 0$ dei due denominatori. Si ha

$$\begin{aligned} (\cos x - 1)(4 + x^2) &= \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)\right)(4 + x^2) = \\ &= -2x^2 + \frac{1}{6}x^4 + o(x^5) - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{24}x^6 + o(x^7) = -2x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^5) \end{aligned}$$

e

$$2x \sin x + x^4 = 2x \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right) + x^4 = 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^5).$$

Perciò

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\cos x - 1)(4 + x^2)} + \frac{1}{2x \sin x + x^4} &= \frac{1}{-2x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^5)} + \frac{1}{2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^5)} = \\ &= \frac{2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^5) - 2x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^5)}{\left(-2x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^5)\right) \left(2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^5)\right)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}x^4 + o(x^5)}{\left(-2x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^5)\right)\left(2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^5)\right)} \sim \frac{\frac{1}{3}x^4}{-4x^4} = -\frac{1}{12}.$$

Quindi il limite cercato è uguale a $-\frac{1}{12}$.

(34) Per $x \rightarrow +\infty$ l'argomento del primo logaritmo a numeratore tende a 1, mentre l'argomento del secondo logaritmo tende a 2, quindi il numeratore ha limite $\log 1 \log 2 = 0$. Il denominatore è invece in forma indeterminata, perché ciascuna delle due radici tende a $+\infty$.

Studiamo anzitutto il numeratore. Si ha, per $x \rightarrow +\infty$,

$$\log\left(\frac{x^3+4}{x^3+2}\right) \sim \frac{x^3+4}{x^3+2} - 1 = \frac{2}{x^3+2} \sim 2x^{-3},$$

$$\log\left(\frac{4x^3+1}{2x^3+1}\right) \rightarrow \log 2,$$

quindi il numeratore è equivalente a $2 \log 2 x^{-3}$.

Il denominatore, per $x \rightarrow +\infty$, è uguale a

$$\begin{aligned} & |x|\sqrt{1+3x^{-2}} - |x|\sqrt{1+2x^{-2}} - \frac{1}{2x} = \\ & = x\left(1 + \frac{3}{2}x^{-2} - \frac{9}{8}x^{-4} + o(x^{-4})\right) - x\left(1 + x^{-2} - \frac{1}{2}x^{-4} + o(x^{-4})\right) - \frac{1}{2}x^{-1} = \\ & = x + \frac{3}{2}x^{-1} - \frac{9}{8}x^{-3} + o(x^{-3}) - x - x^{-1} + \frac{1}{2}x^{-3} - \frac{1}{2}x^{-1} \sim -\frac{5}{8}x^{-3}. \end{aligned}$$

Perciò la funzione di cui stiamo calcolando il limite, per $x \rightarrow +\infty$, è equivalente a

$$\frac{2 \log 2 x^{-3}}{-\frac{5}{8}x^{-3}} = -\frac{16}{5} \log 2;$$

quindi il limite cercato è uguale a $-\frac{16}{5} \log 2$.

(35) Il limite è nella forma indeterminata $0/0$. Poiché $\log(1+y) \sim y$, per $y \rightarrow 0$, il denominatore è equivalente a $x \cdot 3x^4 = 3x^5$.

Studiamo il primo addendo a numeratore. Per il calcolo del limite possiamo supporre $x > 0$, quindi si ha

$$\sqrt{e^2x^2 - 2x^4 + 2x^6} = e|x|\sqrt{1 - \frac{2}{e^2}x^2 + \frac{2}{e^2}x^4} = ex\sqrt{1 - \frac{2}{e^2}x^2 + \frac{2}{e^2}x^4}.$$

Poiché $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{2}{e^2} x^2 + \frac{2}{e^2} x^4\right) = 0$, abbiamo

$$\begin{aligned} & \sqrt{e^2 x^2 - 2x^4 + 2x^6} = \\ & = ex \left(1 + \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{e^2} x^2 + \frac{2}{e^2} x^4\right) - \frac{1}{8} \left(-\frac{2}{e^2} x^2 + \frac{2}{e^2} x^4\right)^2 + o\left(\left(-\frac{2}{e^2} x^2 + \frac{2}{e^2} x^4\right)^2\right)\right) = \\ & = ex \left(1 - \frac{1}{e^2} x^2 + \frac{1}{e^2} x^4 - \frac{1}{2e^4} x^4 + o(x^4)\right) = ex - \frac{1}{e} x^3 + \frac{2e^2 - 1}{2e^3} x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

Inoltre si ha

$$\begin{aligned} \log\left(e - \frac{1}{e} x^2\right) &= \log\left(e \left(1 - \frac{1}{e^2} x^2\right)\right) = \log e + \log\left(1 - \frac{1}{e^2} x^2\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{e^2} x^2 - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{e^2} x^2\right)^2 + o\left(\left(-\frac{1}{e^2} x^2\right)^2\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{e^2} x^2 - \frac{1}{2e^4} x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Quindi risulta

$$\begin{aligned} & \sqrt{e^2 x^2 - 2x^4 + 2x^6} - ex \log\left(e - \frac{1}{e} x^2\right) = \\ & = ex - \frac{1}{e} x^3 + \frac{2e^2 - 1}{2e^3} x^5 + o(x^5) - ex + \frac{1}{e} x^3 + \frac{1}{2e^3} x^5 + o(x^5) = \\ & = \frac{1}{e} x^5 + o(x^5) \sim \frac{1}{e} x^5. \end{aligned}$$

Perciò la funzione di cui stiamo calcolando il limite è equivalente, per $x \rightarrow 0^+$, a

$$\frac{\frac{1}{e} x^5}{3x^5} = \frac{1}{3e};$$

quindi il limite cercato è uguale a $\frac{1}{3e}$.

(36) Il limite è nella forma indeterminata $0/0$.

Studiamo il denominatore. Si ha

$$\begin{aligned} & \cos(2x) - \exp(-2x^2) = \\ & = 1 - \frac{1}{2} (2x)^2 + \frac{1}{24} (2x)^4 + o((2x)^5) - \left(1 - 2x^2 + \frac{1}{2} (-2x^2)^2 + o((-2x^2)^2)\right) = \\ & = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3} x^4 + o(x^5) - (1 - 2x^2 + 2x^4 + o(x^4)) = -\frac{4}{3} x^4 + o(x^4) \sim -\frac{4}{3} x^4. \end{aligned}$$

Studiamo ora il numeratore. Si ha

$$2 \cos x - x^2 = 2 \left(1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 + o(x^5)\right) - x^2 = 2 - 2x^2 + \frac{1}{12} x^4 + o(x^5);$$

perciò

$$\exp(2 \cos x - x^2) = \exp\left(2 - 2x^2 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^5)\right).$$

L'esponente tende a 2 per $x \rightarrow 0$, quindi è utile scomporre l'esponenziale nel prodotto di due esponenziali, il primo con esponente 2, il secondo con esponente che tende a 0, cioè

$$\exp(2 \cos x - x^2) = e^2 \exp\left(-2x^2 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^5)\right).$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \exp\left(-2x^2 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^5)\right) &= \\ &= 1 + \left(-2x^2 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^5)\right) + \frac{1}{2}\left(-2x^2 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^5)\right)^2 + \\ &\quad + o\left(\left(-2x^2 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^5)\right)^2\right) = \\ &= 1 - 2x^2 + \frac{1}{12}x^4 + 2x^4 + o(x^4) = 1 - 2x^2 + \frac{25}{12}x^4 + o(x^4), \end{aligned}$$

perciò

$$\exp(2 \cos x - x^2) - e^2 + 2e^2x^2 = e^2\left(1 - 2x^2 + \frac{25}{12}x^4 + o(x^4)\right) - e^2 + 2e^2x^2 \sim \frac{25e^2}{12}x^4.$$

Quindi per $x \rightarrow 0$ si ha

$$\frac{\exp(2 \cos x - x^2) - e^2 + 2e^2x^2}{\cos(2x) - \exp(-2x^2)} \sim \frac{\frac{25e^2}{12}x^4}{-\frac{4}{3}x^4} = -\frac{25e^2}{16};$$

pertanto il limite cercato è uguale a $-\frac{25e^2}{16}$.

(37) Il numeratore si presenta in forma indeterminata $+\infty - \infty$, il denominatore in forma indeterminata $+\infty \cdot 0$. Studiamo numeratore e denominatore per determinare il limite.

Per $x \rightarrow +\infty$ si ha

$$\sqrt[3]{x^3 + 9x^2} = x \sqrt[3]{1 + \frac{9}{x}} = x \left(1 + \frac{1}{3} \frac{9}{x} - \frac{1}{9} \left(\frac{9}{x}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x + 3 - 9x^{-1} + o(x^{-1}),$$

pertanto

$$\sqrt[3]{x^3 + 9x^2} - x - 3 = x + 3 - 9x^{-1} + o(x^{-1}) - x - 3 \sim -9x^{-1}.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \log(3 \cosh(5x)) &= \log\left(\frac{3}{2}(e^{5x} + e^{-5x})\right) = \log\left(\frac{3}{2}e^{5x}(1 + e^{-10x})\right) = \\ &= \log\frac{3}{2} + 5x + \log(1 + e^{-10x}) \sim 5x. \end{aligned}$$

Infine

$$\log\left(\frac{3+x}{x}\right) = \log\left(1 + \frac{3}{x}\right) = \frac{3}{x} - \frac{1}{2} \frac{9}{x^2} + o(x^{-2}),$$

da cui segue

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{3+x}{x}\right) - \frac{3}{x+5} &= \frac{3}{x} - \frac{1}{2} \frac{9}{x^2} + o(x^{-2}) - \frac{3}{x+5} = \\ &= \frac{3(x+5) - 3x}{x(x+5)} - \frac{1}{2} \frac{9}{x^2} + o(x^{-2}) = \frac{15}{x^2 + 5x} - \frac{1}{2} \frac{9}{x^2} + o(x^{-2}) = \\ &= \frac{15}{x^2(1+o(1))} - \frac{1}{2} \frac{9}{x^2} + o(x^{-2}) = \frac{15}{x^2}(1+o(1)) - \frac{1}{2} \frac{9}{x^2} + o(x^{-2}) = \\ &= \frac{30-9}{2x^2} + o(x^{-2}) \sim \frac{21}{2} x^{-2}. \end{aligned}$$

Perciò

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 9x^2} - x - 3}{\log(3 \cosh(5x)) \left(\log\left(\frac{3+x}{x}\right) - \frac{3}{x+5} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-9x^{-1}}{5x \frac{21}{2} x^{-2}} = -\frac{18}{105} = -\frac{6}{35}.$$

(38) Studiamo il comportamento dei fattori a numeratore per $x \rightarrow +\infty$.

Poiché, per $x \rightarrow +\infty$, $e^{4x} \rightarrow +\infty$ mentre $e^{-4x} \rightarrow 0$, si ha

$$\sinh(4x) = \frac{e^{4x} - e^{-4x}}{2} \sim \frac{1}{2} e^{4x}.$$

Analogamente $e^{2x} \rightarrow +\infty$ e $e^{-2x} \rightarrow 0$, quindi

$$\begin{aligned} \log(\sinh(2x)) + \log 2 - 2x &= \log\left(\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}\right) + \log 2 - 2x = \\ &= \log(e^{2x}(1 - e^{-4x})) - \log 2 + \log 2 - 2x = \log(e^{2x}) + \log(1 - e^{-4x}) - 2x = \\ &= \log(1 - e^{-4x}) \sim -e^{-4x}. \end{aligned}$$

Raccogliendo il termine dominante in ciascuna radice e utilizzando la formula di Taylor si ha

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 + 3x} &= \sqrt[3]{x^3(1 + 3x^{-1})} - \sqrt{x^2(1 + 3x^{-1})} = \\ &= x \sqrt[3]{1 + 3x^{-1}} - x \sqrt{1 + 3x^{-1}} = \\ &= x \left(1 + \frac{1}{3} 3x^{-1} + o(x^{-1}) - \left(1 + \frac{1}{2} 3x^{-1} + o(x^{-1}) \right) \right) = \\ &= x \left(-\frac{1}{2} x^{-1} + o(x^{-1}) \right) = -\frac{1}{2} + o(1) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Perciò

$$\begin{aligned} \sinh(4x) \left(\log(\sinh(2x)) + \log 2 - 2x \right) \left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 + 3x} \right) &\sim \\ &\sim \frac{1}{2} e^{4x} (-e^{-4x}) \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Studiamo il comportamento del denominatore. Si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(2x) = \pi/2$.

Per $x \rightarrow +\infty$ si ha $1/x \rightarrow 0$, quindi

$$\log\left(\cos\frac{1}{x}\right) = \log\left(1 - \frac{1}{2x^2} + o(x^{-3})\right) \sim -\frac{1}{2x^2} + o(x^{-3}) \sim -\frac{1}{2x^2}.$$

Infine

$$\sqrt{x^4 + x^2} - \sqrt{x^2 + 4} = x^2 \sqrt{1 + x^{-2}} - x \sqrt{1 + 4x^{-2}} = x^2(1 + o(1)) + o(x^2) \sim x^2.$$

Quindi si ha

$$\arctan(2x) \log\left(\cos\frac{1}{x}\right) (\sqrt{x^4 + x^2} - \sqrt{x^2 + 4}) \sim \frac{\pi}{2} \left(-\frac{1}{2x^2}\right) x^2 = -\frac{\pi}{4}.$$

Numeratore e denominatore hanno limite reale, pertanto il limite è uguale al quoziente tra limite del numeratore e limite del denominatore, cioè è uguale a

$$\frac{\frac{1}{4}}{-\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{\pi}.$$

$$(39) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(e^{2x} - 1) - \sin(e^{2x} - 1)}{\cos(6x) \log(1 + 2x)(\sqrt{1 - x^2} - 1)} = -\frac{8}{3}.$$

$$(40) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + 2x^3} - \sqrt[3]{x^3 + 3x^4}}{\sqrt{x^2 - 4x^4} - \cos(3x^2)} = \frac{1}{5}.$$

$$(41) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^6 + 4x^4} - \sqrt[3]{x^9 + 6x^7}) = 2.$$

$$(42) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \log(e^{x^2} + e^{3x}) \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x}}\right) = -2.$$

$$(43) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^6 + 4x^5 + 6x^4} - x^3 - 2x^2) \left(\sin\frac{x+4}{x^4+1} - \frac{1}{x^3}\right) \exp(6+3\log x) = 4e^6.$$

$$(44) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(\sqrt{1+4x^2}) - e \cosh(2x)}{(\sqrt{x^4 + 2x^5 - 2x^6} - x^2 - x^3)(\cosh(e^x) - \cosh x)} = \frac{4e}{9(\cosh 1 - 1)}.$$

$$(45) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\log\left(\frac{x+1}{x+2}\right) + \frac{1}{x}\right) \left(\exp\left(\frac{x+1}{x+2}\right) - \exp\left(\frac{x}{x+2}\right)\right) \log(1+xe^{x^3}) = \frac{3e}{2}.$$

$$(46) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\exp(2\cos(2x)) - e^2)(1 + \sqrt{x^2 + 4x^3} - e^x)}{(\sqrt{\cos(2x)} - 1 + x^2)(\sqrt{1 + \cos(2x)} - 1 + x^2)} = \frac{36e^2}{\sqrt{2} - 1}.$$

$$(47) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+x^{16}} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+6}} - \frac{\sqrt{x^2-6}}{x}\right) \left(\cos\left(\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)\right) - \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)\right) = 12.$$

$$(48) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x^2} \sin x - x}{e^{-3x} \sin(\sqrt{x^2 + 6x^3}) - x} = \frac{7}{55}.$$

(49) Scomponiamo la funzione integranda nella somma di frazioni più semplici. La scomposizione può essere fatta con un semplice trucco

$$\frac{x+3}{x(4x+3)} = \frac{4x+3-3x}{x(4x+3)} = \frac{4x+3}{x(4x+3)} + \frac{-3x}{x(4x+3)} = \frac{1}{x} - \frac{3}{4x+3}.$$

Quindi una primitiva della funzione integranda è

$$x \mapsto \log|x| - \frac{3}{4} \log|4x+3|;$$

Pertanto l'integrale è uguale a

$$\begin{aligned} \left[\log|x| - \frac{3}{4} \log|4x+3| \right]_1^4 &= \log|4| - \frac{3}{4} \log|4 \cdot 4 + 3| - \log|1| + \frac{3}{4} \log|1 \cdot 4 + 3| = \\ &= \log 4 - \frac{3}{4} \log 19 + \frac{3}{4} \log 7. \end{aligned}$$

(50) La funzione integranda è il prodotto tra una funzione in cui la variabile x compare solo come argomento del logaritmo e la derivata della funzione logaritmo, cioè, posto $\phi(x) = \log x$, si ha

$$\frac{\log x}{3x(\log^2 x + 4)} = \frac{\phi(x)}{3((\phi(x))^2 + 4)} \phi'(x).$$

Pertanto, effettuando la sostituzione $t = \phi(x) = \log x$; si ottiene

$$\int_1^2 \frac{\log x}{3x(\log^2 x + 4)} dx = \int_0^{\log 2} \frac{t}{3(t^2 + 4)} dt.$$

A meno di costanti moltiplicative, il numeratore della funzione integranda è la derivata del denominatore, quindi è facile scrivere una primitiva, utilizzando la funzione logaritmo. Si ha

$$\begin{aligned} \int_0^{\log 2} \frac{t}{3(t^2 + 4)} dt &= \int_0^{\log 2} \frac{1}{6} \frac{2t}{t^2 + 4} dt = \left[\frac{1}{6} \log(t^2 + 4) \right]_0^{\log 2} = \\ &= \frac{1}{6} \log(\log^2 2 + 4) - \frac{1}{6} \log 4. \end{aligned}$$

(51) La derivata della funzione coseno è la funzione $x \mapsto -\sin x$, quindi la funzione integranda è il prodotto tra una funzione in cui la variabile compare solo come argomento del coseno e la derivata di tale funzione. È quindi evidente che la sostituzione $t = \cos x$ trasforma l'integrale in uno più semplice. Abbiamo

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos x}{\cos x + 2} dx &= - \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\cos x + 2} (-\sin x) dx = - \int_{\cos 0}^{\cos(\pi/2)} \frac{t}{t+2} dt = \\ &= - \int_1^0 \frac{t+2-2}{t+2} dt = \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{t+2} \right) dt = \\ &= [t - 2 \log|t+2|]_0^1 = 1 - 2 \log 3 + 2 \log 2. \end{aligned}$$

(52) La funzione integranda è il prodotto di due funzioni di ciascuna delle quali si trova facilmente una primitiva: il primo fattore ammette la primitiva x^2 , mentre il secondo fattore si presenta nella forma $\phi'(x)(\phi(x))^{-3}$ (con $\phi(x) = 5 \sin x + 2 \cos x$), pertanto una sua primitiva è la funzione $-(\phi(x))^{-2}/2$. Possiamo quindi applicare il teorema di integrazione per parti in due modi diversi; evidentemente è opportuno derivare il fattore $2x$, perché con tale scelta rimane da integrare una funzione in cui la variabile x compare esclusivamente come argomento delle funzioni seno e coseno, cosa che non accade nell'altro caso.

Si ottiene dunque:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} 2x \frac{-2 \sin x + 5 \cos x}{(5 \sin x + 2 \cos x)^3} dx &= \\ &= \left[2x \frac{-1}{2(5 \sin x + 2 \cos x)^2} \right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} 2 \frac{-1}{2(5 \sin x + 2 \cos x)^2} dx = \\ &= \left[\frac{-x}{(5 \sin x + 2 \cos x)^2} \right]_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4} \frac{1}{(5 \sin x + 2 \cos x)^2} dx. \end{aligned}$$

Il primo addendo è uguale a:

$$\frac{-\pi/4}{(5 \sin(\pi/4) + 2 \cos(\pi/4))^2} - 0 = \frac{-\pi/4}{\left(5 \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = -\frac{\pi}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{7}\right)^2 = -\frac{\pi}{98}.$$

Consideriamo ora l'integrale ancora da calcolare. La funzione integranda è quoziente tra una costante e una funzione omogenea di grado 2 in seno e coseno. È quindi possibile esprimerla tramite la funzione tangente, visto che l'intervallo di integrazione è incluso nel dominio di tale funzione. Si ha

$$\frac{1}{(5 \sin x + 2 \cos x)^2} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{(5 \sin x + 2 \cos x)^2} = \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1}{\left(5 \frac{\sin x}{\cos x} + 2\right)^2} = \frac{\tan^2 x + 1}{(5 \tan x + 2)^2};$$

è quindi opportuno effettuare la sostituzione $\tan x = t$. Visto che x varia tra 0 e $\pi/4$, quindi appartiene all'immagine della funzione arcotangente, si ha $x = \arctan t$ e quindi la derivata del cambiamento di variabile è $1/(1+t^2)$. Perciò

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \frac{1}{(5 \sin x + 2 \cos x)^2} dx &= \int_0^{\pi/4} \frac{\tan^2 x + 1}{(5 \tan x + 2)^2} dx = \\ &= \int_{\tan 0}^{\tan(\pi/4)} \frac{t^2 + 1}{(5t + 2)^2} \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^1 \frac{1}{(5t + 2)^2} dt = \left[\frac{-1}{5(5t + 2)} \right]_0^1 = -\frac{1}{35} + \frac{1}{10} = \frac{1}{14}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} 2x \frac{-2 \sin x + 5 \cos x}{(5 \sin x + 2 \cos x)^3} dx &= \left[\frac{-x}{(5 \sin x + 2 \cos x)^2} \right]_0^{\pi/4} - \left[\frac{1}{5(5t + 2)} \right]_0^1 = \\ &= -\frac{\pi}{98} + \frac{1}{14}. \end{aligned}$$

(53) Nella funzione integranda compare la radice quadrata del polinomio $-x^2 + 4$; occorre innanzitutto effettuare una sostituzione che elimini tale radice. Per questo effettuiamo la sostituzione $x = \phi(t) = 2 \sin t$; poiché $x/2 \in [1/2, 1] \subseteq \text{dom arcsin}$, si ottiene $t = \phi^{-1}(t) = \arcsin(x/2)$. Poiché $t \in [\pi/6, \pi/2]$ si ha $\cos t \geq 0$, quindi

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{\sqrt{-x^2 + 4}}{x} dx &= \int_{\arcsin(1/2)}^{\arcsin 1} \frac{\sqrt{4 - (2 \sin t)^2}}{2 \sin t} 2 \cos t dt = \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{2 \cos t}{2 \sin t} 2 \cos t dt = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{2 \cos^2 t}{\sin t} dt. \end{aligned}$$

La funzione integranda può essere facilmente scritta come prodotto tra una funzione razionale di $\cos t$ e $\sin t$; quindi la sostituzione $\cos t = s$ trasforma l'integrale in quello di una funzione razionale. Si ha infatti

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{2 \cos^2 t}{\sin t} dt = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{2 \cos^2 t}{\sin^2 t} \sin t dt = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{2 \cos^2 t}{1 - \cos^2 t} \sin t dt$$

e con la sostituzione $\cos t = s$, tenuto conto che la derivata della funzione coseno è l'opposto della funzione seno, si ottiene

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{2 \cos^2 t}{1 - \cos^2 t} \sin t dt = - \int_{\cos(\pi/6)}^{\cos(\pi/2)} \frac{2s^2}{1 - s^2} ds = \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{2s^2}{1 - s^2} ds.$$

Il polinomio a numeratore ha lo stesso grado di quello a denominatore, quindi bisogna anzitutto scrivere la frazione come somma di un polinomio e di una frazione il cui numeratore abbia grado minore di quello del denominatore. Si ha:

$$\frac{2s^2}{1 - s^2} = \frac{2s^2 - 2 + 2}{1 - s^2} = -2 + \frac{2}{1 - s^2}.$$

Inoltre

$$\frac{2}{1 - s^2} = \frac{(1 + s) + (1 - s)}{1 - s^2} = \frac{1 + s}{1 - s^2} + \frac{1 - s}{1 - s^2} = \frac{1}{1 - s} + \frac{1}{1 + s}.$$

Pertanto si ha

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{\sqrt{-x^2 + 4}}{x} dx &= \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{2s^2}{1 - s^2} ds = \int_0^{\sqrt{3}/2} \left(-2 + \frac{1}{1 + s} + \frac{1}{1 - s} \right) ds = \\ &= [-2s + \log |1 + s| - \log |1 - s|]_0^{\sqrt{3}/2} = \\ &= -\sqrt{3} + \log \frac{\sqrt{3} + 2}{2} - \log \frac{2 - \sqrt{3}}{2} = \\ &= -\sqrt{3} + \log \frac{\sqrt{3} + 2}{2 - \sqrt{3}} = -\sqrt{3} + \log(7 + 4\sqrt{3}). \end{aligned}$$

(54) Nella funzione integranda compare la radice quadrata del quoziente di due polinomi di primo grado; per eliminare la radice è opportuno effettuare una sostituzione

in modo che la nuova variabile di integrazione sia tale radice quadrata. Perciò poniamo $t = \sqrt{(x+1)/(3x-1)}$, quindi $(3x-1)t^2 = x+1$, da cui si ricava $(3t^2-1)x = t^2+1$. Pertanto effettuiamo la sostituzione $x = \phi(t) = (t^2+1)/(3t^2-1)$. Si ha

$$\phi'(t) = \frac{2t(3t^2-1) - 6t(t^2+1)}{(3t^2-1)^2} = \frac{6t^3 - 2t - 6t^3 - 6t}{(3t^2-1)^2} = \frac{-8t}{(3t^2-1)^2};$$

per $x = 1/2$ risulta $t = \sqrt{3}$, per $x = 1$ risulta $t = 1$, per cui si ha

$$\int_{1/2}^1 \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{3x-1}} dx = \int_{\sqrt{3}}^1 \frac{1}{\frac{t^2+1}{3t^2-1}} t \frac{-8t}{(3t^2-1)^2} dt = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{8t^2}{(t^2+1)(3t^2-1)} dt.$$

Dobbiamo integrare una funzione razionale. Anzitutto è necessario fattorizzare il denominatore. Il polinomio t^2+1 è irriducibile, mentre il polinomio $3t^2-1$ si scompone in $(\sqrt{3}t+1)(\sqrt{3}t-1)$, perciò la funzione integranda si scompone in fratti semplici nella forma

$$\frac{8t^2}{(t^2+1)(3t^2-1)} = \frac{a}{\sqrt{3}t+1} + \frac{b}{\sqrt{3}t-1} + \frac{ct+d}{t^2+1},$$

con a , b , c e d opportuni numeri reali. Riducendo a denominatore comune l'espressione a destra, il numeratore diventa

$$\begin{aligned} & a(\sqrt{3}t-1)(t^2+1) + b(\sqrt{3}t+1)(t^2+1) + (ct+d)(3t^2-1) = \\ & = \sqrt{3}at^3 + \sqrt{3}at - at^2 - a + \sqrt{3}bt^3 + \sqrt{3}bt + bt^2 + b + 3ct^3 - ct + 3dt^2 - d = \\ & = (\sqrt{3}a + \sqrt{3}b + 3c)t^3 + (-a + b + 3d)t^2 + (\sqrt{3}a + \sqrt{3}b - c)t + (-a + b - d). \end{aligned}$$

Questo numeratore deve essere uguale a $8t^2$, quindi a , b , c e d debbono soddisfare il seguente sistema

$$\begin{cases} \sqrt{3}a + \sqrt{3}b + 3c = 0, \\ -a + b + 3d = 8, \\ \sqrt{3}a + \sqrt{3}b - c = 0, \\ -a + b - d = 0. \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro la terza equazione dalla prima e la quarta dalla seconda si ottiene $4c = 0$ e $4d = 8$, da cui $c = 0$ e $d = 2$. La prima equazione diventa $\sqrt{3}a + \sqrt{3}b = 0$, quindi $a = -b$, sostituendo nell'ultima si ha $2b - 2 = 0$, quindi $b = 1$ e $a = -1$.

Abbiamo perciò

$$\begin{aligned} \int_{1/2}^1 \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{3x-1}} dx &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{8t^2}{(t^2+1)(3t^2-1)} dt = \\ &= \int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{-1}{\sqrt{3}t+1} + \frac{1}{\sqrt{3}t-1} + \frac{2}{t^2+1} \right) dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} \log|\sqrt{3}t+1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \log|\sqrt{3}t-1| + 2 \arctan t \right]_1^{\sqrt{3}} = \\
&= -\frac{1}{\sqrt{3}} \log 4 + \frac{1}{\sqrt{3}} \log 2 + 2 \arctan \sqrt{3} + \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{3}} \log(\sqrt{3}+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \log(\sqrt{3}-1) - 2 \arctan 1 = \\
&= -\frac{1}{\sqrt{3}} \log 2 + 2 \frac{\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \log \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{3-1} - 2 \frac{\pi}{4} = \\
&= -\frac{2}{\sqrt{3}} \log 2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \log(\sqrt{3}+1) + \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(55) \quad &\int_1^2 (x+1) \frac{e^x - 3e^{-x}}{(e^x + 4 + 3e^{-x})^2} dx = \\
&= \left[-(x+1) \frac{1}{e^x + 4 + 3e^{-x}} + \frac{1}{2} \log(e^x + 1) - \frac{1}{2} \log(e^x + 3) \right]_1^2 = \\
&= -3 \frac{1}{e^2 + 4 + 3e^{-2}} + 2 \frac{1}{e + 4 + 3e^{-1}} + \frac{1}{2} \log \frac{(e^2 + 1)(e + 3)}{(e^2 + 3)(e + 1)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(56) \quad &\int_2^5 \frac{x+3}{x^2+9} dx = \left[\frac{1}{2} \log(x^2+9) + \arctan \frac{x}{3} \right]_2^5 = \\
&= \frac{1}{2} \log \frac{34}{13} + \arctan \frac{5}{3} - \arctan \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(57) \quad &\int_0^{1/2} (6x^2+2) \arcsin x dx = \\
&= \left[(2x^3+2x) \arcsin x + \frac{2}{3} x^2 \sqrt{1-x^2} + \frac{10}{3} \sqrt{1-x^2} \right]_0^{1/2} = \frac{5}{24} \pi + \frac{7\sqrt{3}}{4} - \frac{10}{3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(58) \quad &\int_0^1 \frac{x\sqrt{1+8x^2}}{1+4x^2} dx = \left[\frac{1}{4} \sqrt{1+8x^2} - \frac{1}{4} \arctan(\sqrt{1+8x^2}) \right]_0^1 = \\
&= 1 - \frac{1}{4} \arctan 5 + \frac{\pi}{16}.
\end{aligned}$$

$$(59) \quad \int_0^1 \frac{\cosh x + 4 \sinh x}{\cosh x - \sinh x} dx = \left[\frac{5}{4} e^{2x} - \frac{3}{2} x \right]_0^1 = \frac{5}{4} e^2 - \frac{11}{4}.$$

$$\begin{aligned}
(60) \quad &\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+2x^2+2}} dx = \\
&= \left[\frac{1}{2} \sqrt{x^4+2x^2+2} - \frac{1}{2} \log(\sqrt{x^4+2x^2+2} + x^2 + 1) \right]_0^1 = \\
&= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \log\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{5}+2}\right).
\end{aligned}$$

$$(61) \quad \int_0^1 \frac{\cosh x + 4 \sinh x}{\cosh x - \sinh x} dx = \left[\frac{5}{4} e^{2x} - \frac{3}{2} x \right]_0^1 = \frac{5}{4} e^2 - \frac{11}{4}.$$

$$(62) \quad \int_{\sqrt{2}}^2 \arctan(\sqrt{x^2-1}) dx = \left[x \arctan(\sqrt{x^2-1}) - \operatorname{settcosh} x \right]_{\sqrt{2}}^2 = \\ = \frac{2}{3} \pi - \log(2 + \sqrt{3}) - \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \log(\sqrt{2} + 1).$$

$$(63) \quad \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x + \sin x \cos x}{-2 \cos x + \cos x \sin^2 x} dx = \\ = \left[\log(\cos x) - \frac{1}{2} \log(\cos^2 x + 1) + \arctan(\cos x) \right]_0^{\pi/4} = \\ = \frac{1}{2} \log 2 - \frac{1}{2} \log 3 - \frac{\pi}{4} + \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$(64) \quad \int_0^{\pi/3} \frac{\sin x - 2 \cos x}{2 \sin x + \cos x} dx = \left[-\log(2 \sin x + \cos x) \right]_0^{\pi/3} = -\log\left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right).$$

(65) L'equazione è di secondo grado, per risolverla occorre innanzitutto calcolare le radici quadrate del discriminante (che indichiamo con Δ), o meglio, visto che nel coefficiente del termine di primo grado si può facilmente raccogliere il fattore 2, le radici quadrate di $\Delta/4$.

Abbiamo

$$\frac{\Delta}{4} = (\sqrt{3} + 3i)^2 - 2(1 - \sqrt{3}i) = 3 + 6\sqrt{3}i - 9 - 2 + 2\sqrt{3}i = -8 + 8\sqrt{3}i.$$

Per calcolare le radici quadrate di $\Delta/4$ dobbiamo trovarne il modulo e un argomento.

$$\left| \frac{\Delta}{4} \right| = \sqrt{(-8)^2 + (8\sqrt{3})^2} = 8\sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 16.$$

Visto che $\Delta/4$ ha parte reale negativa, un argomento è

$$\arctan \frac{\operatorname{Im}(\Delta/4)}{\operatorname{Re}(\Delta/4)} + \pi = \arctan \frac{8\sqrt{3}}{-8} + \pi = -\arctan \sqrt{3} + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2}{3}\pi.$$

Perciò le radici quadrate di $\Delta/4$ sono:

$$\pm \sqrt{16} \left(\cos \frac{2\pi/3}{2} + i \sin \frac{2\pi/3}{2} \right) = \pm 4 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \pm (2 + 2\sqrt{3}i).$$

Le soluzioni dell'equazione sono quindi

$$\frac{-\sqrt{3} - 3i \pm (2 + 2\sqrt{3}i)}{2} = \begin{cases} \frac{-\sqrt{3} - 3i - 2 - 2\sqrt{3}i}{2} = -\frac{2 + \sqrt{3}}{2} - \frac{2\sqrt{3} + 3}{2}i, \\ \frac{-\sqrt{3} - 3i + 2 + 2\sqrt{3}i}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} + \frac{2\sqrt{3} - 3}{2}i. \end{cases}$$

(66) Per risolvere l'equazione è utile evitare di sviluppare il quadrato a primo membro. Per questo osserviamo che la sesta potenza è il quadrato di un cubo, quindi l'equazione si può riscrivere come uguaglianza tra potenze con esponenti uguali.

Otteniamo l'equazione

$$\left(\frac{(-1+i)z - 1 - i}{z^2 + 2iz - 1}\right)^2 = ((1+i)^3)^2.$$

Poiché

$$(1+i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i,$$

l'equazione equivale a

$$\left(\frac{(-1+i)z - 1 - i}{z^2 + 2iz - 1}\right)^2 = (-2 + 2i)^2.$$

Due numeri complessi hanno quadrato uguale se e solo se sono uno l'opposto dell'altro, quindi z è soluzione di questa equazione se e solo se è soluzione di una delle seguenti equazioni

$$\begin{aligned}\frac{(-1+i)z - 1 - i}{z^2 + 2iz - 1} &= -2 + 2i, \\ \frac{(-1+i)z - 1 - i}{z^2 + 2iz - 1} &= 2 - 2i.\end{aligned}$$

La prima equazione equivale, successivamente, a

$$\begin{aligned}\frac{(-1+i)z - 1 - i - (z^2 + 2iz - 1)(-2 + 2i)}{z^2 + 2iz - 1} &= 0, \\ \frac{(-1+i)z - 1 - i + (2 - 2i)z^2 + (4i + 4)z - 2 + 2i}{z^2 + 2iz - 1} &= 0, \\ \frac{(2 - 2i)z^2 + (3 + 5i)z - 3 + i}{z^2 + 2iz - 1} &= 0.\end{aligned}$$

Il denominatore è il quadrato di $z + i$, perciò si annulla se e solo se $z = -i$. Quindi z è soluzione se e solo se annulla il numeratore ed è diverso da $-i$. Risolviamo l'equazione

$$(2 - 2i)z^2 + (3 + 5i)z - 3 + i = 0.$$

Il discriminante del polinomio di secondo grado di cui cerchiamo gli zeri è

$$\Delta = (3 + 5i)^2 - 4(2 - 2i)(-3 + i) = 9 + 30i - 25 + 24 - 8i - 24i - 8 = -2i.$$

Poiché $-2i$ ha modulo 2 e un suo argomento è $(3/2)\pi$, le sue radici quadrate sono

$$\pm \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) \right) = \pm \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \pm(-1 + i).$$

Pertanto si ha

$$z = \frac{-(3 + 5i) \pm (-1 + i)}{2(2 - 2i)},$$

perciò vi sono le due soluzioni

$$\begin{aligned}\frac{-4 - 4i}{4 - 4i} &= \frac{-1 - i}{1 - 1i} = \frac{(-2 - 2i)(2 + 2i)}{|2 - 2i|^2} = \frac{-4 - 4i - 4i + 4}{2^2 + (-2)^2} = \frac{-8i}{8} = -i, \\ \frac{-2 - 6i}{4 - 4i} &= \frac{-1 - 3i}{2 - 2i} = \frac{(-1 - 3i)(2 + 2i)}{|2 - 2i|^2} = \frac{-2 - 2i - 6i + 6}{2^2 + (-2)^2} = \frac{4 - 8i}{8} = \frac{1}{2} - i.\end{aligned}$$

La soluzione $z = -i$ va scartata perché, come visto sopra, annulla il denominatore.

In modo analogo si procede per risolvere la seconda equazione, cioè

$$\frac{(-1+i)z - 1 - i}{z^2 + 2iz - 1} = 2 - 2i,$$

che è equivalente a

$$\begin{aligned} \frac{(-1+i)z - 1 - i - (z^2 + 2iz - 1)(2 - 2i)}{z^2 + 2iz - 1} &= 0, \\ \frac{(-1+i)z - 1 - i - (2 - 2i)z^2 - (4i + 4)z + 2 - 2i}{z^2 + 2iz - 1} &= 0, \\ \frac{(-2 + 2i)z^2 - (5 + 3i)z + 1 - 3i}{z^2 + 2iz - 1} &= 0. \end{aligned}$$

Risolviamo l'equazione

$$(-2 + 2i)z^2 - (5 + 3i)z + 1 - 3i = 0.$$

Il discriminante del trinomio è

$$\Delta = (5 + 3i)^2 - 4(-2 + 2i)(1 - 3i) = 25 + 30i - 9 + 8 - 24i - 8i - 24 = -2i;$$

sappiamo che le radici quadrate di $-2i$ sono $\pm(-1 + i)$ e quindi l'equazione ha le soluzioni

$$\frac{5 + 3i \pm (-1 + i)}{2(-2 + 2i)},$$

cioè

$$\begin{aligned} \frac{4 + 4i}{-4 + 4i} &= \frac{1 + i}{-1 + i} = \frac{(2 + 2i)(-2 - 2i)}{|-2 + 2i|^2} = \frac{-4 - 4i - 4i + 4}{2^2 + (-2)^2} = \frac{-8i}{8} = -i, \\ \frac{6 + 2i}{-4 + 4i} &= \frac{3 + i}{-2 + 2i} = \frac{(3 + i)(-2 - 2i)}{|-2 + 2i|^2} = \frac{-6 - 6i - 2i + 2}{(-2)^2 + 2^2} = -\frac{4 + 8i}{8} = -\frac{1}{2} - i. \end{aligned}$$

La prima è da scartare, mentre la seconda è accettabile.

Quindi l'equazione ha le due soluzioni

$$z = \frac{1}{2} - i, \quad z = -\frac{1}{2} - i.$$

(67) Se due numeri complessi elevati al cubo sono uguali allora ognuno di essi è uguale all'altro moltiplicato per una delle radici cubiche di 1. Le radici cubiche di 1 sono

$$r_k = \cos\left(\frac{2k}{3}\pi\right) + \sin\left(\frac{2k}{3}\pi\right)i,$$

per $k = 0, 1, 2$ e quindi

$$\begin{aligned} r_0 &= \cos 0 + \sin 0 i = 1, \\ r_1 &= \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)i = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \\ r_2 &= \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)i = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i. \end{aligned}$$

Perciò le soluzioni dell'equazione si ottengono risolvendo le tre equazioni

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2} - 4\sqrt{3}i &= 1 - 3\sqrt{3}, \\ \frac{1}{z^2} - 4\sqrt{3}i &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1 - 3\sqrt{3}i), \\ \frac{1}{z^2} - 4\sqrt{3}i &= \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1 - 3\sqrt{3}i).\end{aligned}$$

Dalla prima equazione si ottiene

$$\frac{1}{z^2} = 4\sqrt{3}i + 1 - 3\sqrt{3}i = 1 + \sqrt{3}i,$$

cioè $z^2 = 1/(1 + \sqrt{3}i)$. Determiniamo le radici quadrate di $1/(1 + i\sqrt{3})$. Si ha

$$\left| \frac{1}{1 + \sqrt{3}i} \right| = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2}$$

e un argomento di $1/(1 + \sqrt{3}i)$ è l'opposto di un argomento di $1 + \sqrt{3}i$, cioè l'opposto di $\arctan \sqrt{3}$ e quindi è $-\pi/3$. Perciò si ha

$$z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)i \right) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = \pm \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}i \right).$$

Dalla seconda equazione si ottiene

$$\frac{1}{z^2} = 4\sqrt{3}i + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1 - 3\sqrt{3}i) = 4\sqrt{3}i - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3\sqrt{3}}{2}i + \frac{9}{2} = 4 + 6\sqrt{3}i,$$

cioè $z^2 = 1/(4 + 6\sqrt{3}i)$. Determiniamo le radici quadrate di $1/(4 + 6\sqrt{3}i)$. Si ha

$$\left| \frac{1}{4 + 6\sqrt{3}i} \right| = \frac{1}{\sqrt{4^2 + (6\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{\sqrt{124}}$$

e un argomento di $1/(4 + 6\sqrt{3}i)$ è l'opposto di un argomento di $4 + 6\sqrt{3}i$, cioè l'opposto di $\arctan(6\sqrt{3}/4)$, quindi $-\arctan(3\sqrt{3}/2)$; perciò si ha

$$z = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{124}} \left(\cos\left(\frac{1}{2} \arctan \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) - \sin\left(\frac{1}{2} \arctan \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)i \right).$$

Infine dalla terza equazione si ottiene

$$\frac{1}{z^2} = 4\sqrt{3}i + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1 - 3\sqrt{3}i) = 4\sqrt{3}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3\sqrt{3}}{2}i - \frac{9}{2} = -5 + 5\sqrt{3}i,$$

cioè $z^2 = 1/(-5 + 5\sqrt{3}i)$. Determiniamo le radici quadrate di $1/(-5 + 5\sqrt{3}i)$.
Si ha

$$\left| \frac{1}{-5 + 5\sqrt{3}i} \right| = \frac{1}{\sqrt{(-5)^2 + (5\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{10}$$

mentre un argomento di $1/(-5 + 5\sqrt{3}i)$ è l'opposto di un argomento di $-5 + 5\sqrt{3}i$,
cioè l'opposto di $\arctan(-5\sqrt{3}/5) - \pi$, quindi $(4/3)\pi$; perciò si ha

$$z = \pm \frac{1}{\sqrt{10}} \left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)i \right) = \pm \frac{1}{\sqrt{10}} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \pm \left(-\frac{1}{2\sqrt{10}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{10}}i \right).$$

Perciò l'equazione ha le sei soluzioni

$$z = \pm \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}i \right),$$

$$z = \pm \left(\frac{1}{\sqrt[4]{124}} \cos\left(\frac{1}{2} \arctan \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt[4]{124}} \sin\left(\frac{1}{2} \arctan \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)i \right),$$

$$z = \pm \left(\frac{1}{2\sqrt{10}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{10}}i \right).$$

(68) Per le proprietà dell'esponenziale complesso, se $e^{1/z} = -2 - i$, allora $1/z$ ha parte reale uguale a $\log|-2 - i|$ e coefficiente dell'immaginario uguale a uno degli argomenti di $-2 - i$. Si ha $|-2 - i| = \sqrt{5}$ e un argomento di $-2 - i$ è $\arctan 2 + \pi$, quindi gli argomenti di tale numero sono i numeri reali della forma $\arctan 2 + (2k+1)\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Perciò

$$\frac{1}{z} = \log \sqrt{5} + (\arctan 2 + (2k+1)\pi)i,$$

quindi si hanno le soluzioni

$$z = \frac{1}{\log \sqrt{5} + (\arctan 2 + (2k+1)\pi)i} = \frac{\log \sqrt{5} - (\arctan 2 + (2k+1)\pi)i}{(\log \sqrt{5})^2 + (\arctan 2 + (2k+1)\pi)^2},$$

qualunque sia $k \in \mathbb{Z}$.

(69) Se z è soluzione dell'equazione, allora $e^z + (i/2)$ è una delle radici cubiche di i . Poiché i ha modulo 1 e un suo argomento è $\pi/2$, le radici cubiche di i sono

$$r_k = \cos\left(\frac{(\pi/2) + 2k\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{(\pi/2) + 2k\pi}{3}\right)i,$$

con $k = 0, 1, 2$, e si ha

$$r_0 = \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} i = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i,$$

$$r_1 = \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)i = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i,$$

$$r_2 = \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)i = -i.$$

Quindi abbiamo le seguenti equazioni:

$$e^z + i \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad e^z + i \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad e^z + i \frac{1}{2} = -i,$$

cioè:

$$e^z = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad e^z = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad e^z = -\frac{3}{2}i.$$

Le soluzioni sono

$$z = \log \frac{\sqrt{3}}{2} + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$z = \log \frac{\sqrt{3}}{2} + (2k+1)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$z = \log \frac{3}{2} + \left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(70) Moltiplicando entrambi i membri per e^{iz} , l'equazione diventa

$$e^{2iz} - 2i = (-\sqrt{2} + \sqrt{2}i)e^{iz},$$

cioè

$$e^{2iz} + (\sqrt{2} - \sqrt{2}i)e^{iz} - 2i = 0.$$

Ponendo $w = e^{iz}$ si ottiene l'equazione di secondo grado

$$w^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{2}i)w - 2i = 0.$$

Il discriminante del trinomio a primo membro è

$$\Delta = (\sqrt{2} - \sqrt{2}i)^2 - 4 \cdot (-2i) = 2 - 4i - 2 + 8i = 4i.$$

Poiché $|4i| = 4$ e un argomento di $4i$ è $\pi/2$, le radici quadrate del discriminante sono

$$\pm \sqrt{4} \left(\cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} i \right) = \pm 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) = \pm (\sqrt{2} + \sqrt{2}i),$$

quindi si ha

$$w = \frac{-(\sqrt{2} - \sqrt{2}i) \pm (\sqrt{2} + \sqrt{2}i)}{2} = \begin{cases} \frac{2\sqrt{2}}{2}i = \sqrt{2}i, \\ \frac{-2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}. \end{cases}$$

Quindi deve essere $e^{iz} = \sqrt{2}i$ o $e^{iz} = -\sqrt{2}$. Poiché $\sqrt{2}i$ ha modulo $\sqrt{2}$ e un suo argomento è $\pi/2$, la prima equazione è verificata se

$$iz = \log(\sqrt{2}) + \frac{\pi}{2}i + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z},$$

cioè

$$z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - \frac{1}{2} \log 2 i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Poiché $-\sqrt{2}$ ha modulo $\sqrt{2}$ e un suo argomento è π , la seconda equazione è verificata se.

$$iz = \log(\sqrt{2}) + \pi i + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z},$$

cioè

$$z = \pi + 2k\pi - \frac{1}{2} \log 2 i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$(71) \quad z = 0, \quad z = \pm \frac{4}{\sqrt{3}} i, \quad z = \pm 4\sqrt{3} i.$$

$$(72) \quad z = \frac{\log 2}{4} + \left(k + \frac{1}{8}\right) \pi + \left(-\frac{\log 2}{4} + \left(k + \frac{1}{8}\right) \pi\right) i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$(73) \quad z = -4^{1/3} 3^{1/6}, \quad z = 2^{-1/3} 3^{1/6} \pm 2^{-1/3} 3^{2/3} i, \quad z = 4^{1/3} \exp\left(\frac{7 + 12k}{18} \pi\right),$$

$k = 0, 1, 2.$

$$(74) \quad \pm \sqrt[4]{17} \exp\left(\frac{1}{2} \left(\pi - \arctan \frac{1}{4}\right) i\right), \quad \pm \sqrt[4]{29} \exp\left(-\frac{1}{2} \arctan \frac{5}{2} i\right)$$

$$(75) \quad \log \sqrt{\frac{25}{2}} + \left(-\arctan \frac{1}{7} + (2k+1)\pi\right) i, \quad \log \sqrt{\frac{41}{2}} + \left(-\arctan 9 + (2k+1)\pi\right) i,$$

$k \in \mathbb{Z}.$

$$(76) \quad \sqrt[3]{3} \exp\left(\frac{1+2k}{3} \pi i\right), \quad \sqrt[6]{13} \exp\left(\frac{\arctan(2/3) + (1+2k)\pi}{3} i\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

$$(77) \quad z = \frac{1}{2} \log(17 - 4\sqrt{3}) + \left(\arctan\left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right) + (1+2k)\pi\right) i,$$

$$z = \frac{1}{2} \log(17 + 4\sqrt{3}) + \left(-\arctan\left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right) + 2k\pi\right) i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$(78) \quad z = \pm \sqrt[4]{5} \exp\left(\frac{\arctan 2 + \pi}{2} i\right), \quad z = \pm \sqrt[4]{\frac{5}{3}} \exp\left(\frac{\pi - \arctan(1/2)}{2} i\right),$$

$$z = \pm \sqrt[4]{5} \exp\left(\frac{\arctan 2}{2} i\right).$$

$$(79) \quad z = \frac{1}{2} \log 2 + \left(\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right) i, \quad z = \frac{1}{2} \log 5 + \left(-\arctan 2 + (2k+1)\pi\right) i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$(80) \quad z = \log \sqrt{21} + \left(-\arctan \frac{2}{\sqrt{3}} + (2k+1)\pi\right) i, \quad z = \log(3\sqrt{3}) + \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) i,$$

$$z = \log(\sqrt{3}) + \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$