Esercizi settimana 8

Esercizio 1. Si risolva il seguente sistema nelle incognite x, y, per sostituzione e con la regola di Cramer {5x+6y=1, 7x+9y=1}

Metodo di sostituzione

$$\begin{cases} x = 1/5 - 6/5\,y \\ 7\,(1/5 - 6/5\,y) + 9\,y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1/5 - 6/5\,y \\ 3/5\,y = -2/5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1/5 - 6/5\,y \\ y = -2/3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2/3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Metodo di Cramer
La matrice del sistema è

$$\begin{matrix} 5 & 6|1 \\ 7 & 9|1 \end{matrix}$$

$det \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = 3 \neq 0$ → essendo il determinante diverso da 0, il metodo può essere applicato. Le soluzioni del sistema saranno:

$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}}{3} = \frac{9 - 6}{3} = 1$$

$$y = \frac{\det \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}}{3} = \frac{5 - 7}{3} = -2/3$$

Esercizio 3. Si considerino i sistemi lineari con matrice dei coefficienti
1 0 1
0 1 1
2 3 5

e colonna dei termini noti qualsiasi. E' vero che tutti i sistemi hanno una ed una sola soluzione?
In caso negativo, se ne mostri uno che non ha soluzione.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} = 0$$

La matrice ha sia le righe che le colonne linearmente dipendenti (la terza riga è uguale a due volte la prima più tre volte la seconda, e la terza colonna è la somma delle prime due) → non è vero che tutti i sistemi hanno una e una sola soluzione.

I sistemi associati con matrice dei coefficienti

1 0 1
0 1 1
2 3 5

sono del tipo

x+y=a
y+z=b

2x+3y+5z=c

si ha 2x+3y+5z = 2(x+y) + 3(y+z);
se c diverso_da 2a + 3b, allora il sistema non ha alcuna soluzione.

Es. di un sistema che non ha soluzione

$$\begin{cases} x+z=1 \\ y+z=1 \\ 2x+3y+5z=1 \end{cases}$$

Esercizio 5. Sono date le matrici
A=
1 1 1
0 1 1

B=
1 2
3 4

C=
1 1
0 1
0 0

Per ciascuna delle espressioni ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA si dica se è definita o meno e nel caso la si calcoli.

A è una matrice 2x3
B è una matrice 2x2
C è una matrice 3x2

Due matrici sono moltiplicabili tra loro se il numero di colonne della prima è uguale al numero di righe della seconda. Quindi

ABC non è definito
ACB è definito
BAC è definito
BCA non è definito
CAB non è definito
CBA è definito

$$ACB = \left(\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7&10\\3&4\end{pmatrix}$$

$$BAC = \left(\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&3&3\\3&7&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&4\\3&10\end{pmatrix}$$

$$CBA = \left(\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4&6\\3&4\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4&10&10\\3&7&7\\0&0&0\end{pmatrix}$$

N.B. Nel calcolo dei prodotti effettuato sopra è stata applicata sempre la proprietà associativa a sinistra. Lo stesso risultato si sarebbe raggiunto applicandola a destra.