Esercizi settimana 9

Esercizio 2. Sono date le applicazioni
F(x,y)= x+2y
G(x,y)= (x-y,x+y)
H(x)= (x,-x)

F: $\mathbb{R}^2$-> $\mathbb{R}$
G: $\mathbb{R}^2$-> $\mathbb{R}^2$
H: $\mathbb{R}$ -> $\mathbb{R}^2$

2a. Si determinino le coppie di applicazioni componibili

Le applicazioni componibili sono quindi
HoF
FoG
GoG
FoH
GoH

2b. Si calcolino due composizioni, sia con la definizione che con le matrici;
(HoF)(x) = H(F(x)) = H(x + 2y) = (x + 2y, -x -2y)

F $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

H $(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (x)$

(HoF) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y & -x - 2y \end{pmatrix}$

(FoG)(x) = F(G(x)) = F(x – y, x + y) = (3x + y)

F $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

G $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(FoG) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + y \end{pmatrix}$

2c. Si calcoli l'inversa di G, sia usando la definizione che le matrici;

Risoluzione con il metodo delle matrici:
$[G] = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2 \neq 0$ -> il determinante della matrice è diverso da 0 dunque la matrice è invertibile

Data una matrice [M] = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $[M]^{-1} = \frac{1}{\det[M]} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

quindi

$$[G]^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Risoluzione usando la definizione di applicazione inversa

$$G\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-y \\ x+y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x-y \\ x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x-y = p_1 \\ x+y = p_2 \end{cases}$$

$\det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2 \neq 0$ -> tutti i sistemi hanno una soluzione -> G è invertibile

$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} p_1 & -1 \\ p_2 & 1 \end{bmatrix}}{2} = \frac{p_1 + p_2}{2}$$

$$y = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & p_1 \\ 1 & p_2 \end{bmatrix}}{2} = \frac{-p_1 + p_2}{2}$$

$$G^{-1}\left(\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1/2\, p_1 + 1/2\, p_2 \\ -1/2 p_1 + 1/2\, p_2 \end{pmatrix}$$

2d. Si risolvano se possibile le equazioni

GoL= H, LoG= H

("o" è il simbolo di composizione, L è un'applicazione incognita).

GoL = H

[L] = $[G]^{-1} o\, [H]$ = $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} (x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} (x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -x \end{bmatrix}$

$$L([x]) = \begin{bmatrix} 0 \\ -x \end{bmatrix}$$

LoG = H

[L] = [H]o$[G]^{-1}$ non è definita