Prova scritta di ANALISI MATEMATICA T-1 8/1/24
(Ingegneria dell'automazione)

COGNOME E NOME ....

1. Sia f la funzione definita da

$$f(x) = (x^2+3)^{\arctan(x^3)}\,.$$

Calcolare $f'(1)$.

SOLUZIONE

Si ha

$$f(x) = \exp\bigl(\arctan(x^3)\log(x^2+3)\bigr)\,.$$

Pertanto

$$f'(x) = \exp\bigl(\arctan(x^3)\log(x^2+3)\bigr)\left(\frac{3x^2}{x^6+1}\log(x^2+3) + \arctan(x^3)\,\frac{2x}{x^2+3}\right)$$

e

$$f'(1) = 4^{\pi/4}\left(\frac{3}{2}\log 4 + \frac{\pi}{8}\right)\,.$$

2. Studiare, nel suo dominio naturale, la funzione definita da:

$$f(x) = e^{2/x}\sqrt{|3x^2-2x|}\,.$$

SOLUZIONE

Il dominio naturale di f è $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Si ha $f(x) = 0$ se e solo se $3x-2=0$, cioè $x = 2/3$. La funzione è prodotto di un esponenziale per una radice, quindi è sempre non negativa.

Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0\,,$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,.$$

Quindi la retta di equazione $x=0$ è asintoto verticale. Cerchiamo eventuali asintoti obliqui. Per $x\to+\infty$ si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{3}\,|x|\exp\left(\frac{2}{x}\right)\sqrt{1-\frac{2}{3x}} = \sqrt{3}\,x\left(1+\frac{2}{x}+o(x^{-1})\right)\left(1-\frac{1}{3x}+o(x^{-1})\right) = \\ &= \sqrt{3}\,x\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{3x}+o(x^{-1})\right) = \sqrt{3}\,x\left(1+\frac{5}{3x}+o(x^{-1})\right) = \\ &= \sqrt{3}\,x + \frac{5\sqrt{3}}{3} + o(1). \end{aligned}$$

Quindi la retta di equazione $y = \sqrt{3}\,x + 5\sqrt{3}/3$ è asintoto obliquo per f. Per $x \to -\infty$ si procede in modo analogo, l'unica differenza è che $|x| = -x$, quindi si ha l'asintoto obliquo di equazione $y = -\sqrt{3}\,x - 5\sqrt{3}/3$

f è derivabile in ogni punto in cui non si annulla l'argomento del valore assoluto, quindi è derivabile in $\mathrm{dom} f \setminus \{a/3\}$ e per x in tale insieme si ha

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{2}{x^2} e^{2/x} \sqrt{|3x^2 - 2x|} + e^{2/x} \frac{(6x-2)\operatorname{sgn}(3x^2-2x)}{2\sqrt{|3x^2-2x|}} = \\
&= e^{2/x} \frac{-2|3x^2-2x| + x^2(3x-1)\operatorname{sgn}(3x^2-2x)}{x^2\sqrt{|3x^2-2x|}} = \\
&= e^{2/x} \frac{\operatorname{sgn}(3x^2-2x)\big(-6x^2+4x+3x^3-x^2\big)}{x^2\sqrt{|3x^2-2x|}} = \\
&= e^{2/x} \frac{\operatorname{sgn}(3x-2)\operatorname{sgn}(x)\big(3x^3-7x^2+4x\big)}{x^2\sqrt{|3x^2-2x|}} = \\
&= e^{2/x} \frac{\operatorname{sgn}(3x-2)\big(3x^2-7x+4\big)}{|x|\sqrt{|3x^2-2x|}}.
\end{aligned}
$$

Studiamo il segno di $f'(x)$. L'esponenziale e il denominatore sono positivi in tutto il dominio di f'. Si ha $\operatorname{sgn}(3x-2) > 0$ se e solo se $x \in]2/3, +\infty[$. Inoltre $3x^2 - 7x + 4$ si annulla per

$$
x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4\cdot 3\cdot 4}}{6} = \frac{7 \pm 1}{6} = \begin{cases} \dfrac{4}{3} \\ 1 \end{cases}
$$

Pertanto $3x^2 - 7x + 4 > 0$ per $x \in]-\infty, 1[\cup]4/3, +\infty[$. Quindi $f'(x) > 0$ per

$$
x \in \left]\frac{2}{3}, 1\right[\cup \left]\frac{4}{3}, +\infty\right[
$$

e $f'(x) < 0$ per

$$
x \in]-\infty, 0[\cup \left]0, \frac{2}{3}\right[\cup \left]1, \frac{4}{3}\right[.
$$

Quindi f è crescente negli intervalli $[2/3, 1]$ e $[4/3, +\infty[$, è decrescente negli intervalli $]-\infty, 0[$, $]0, 2/3]$ e $[1, 2/3]$. 1 è punto di massimo locale, $2/3$ e $4/3$ sono punti di minimo locale.

Il valore di f negli estremanti locali è

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{2}{3}\right) &= 0 \\
f(1) &= e^2 \sqrt{|3-2|} = e^2 \\
f\left(\frac{4}{3}\right) &= e^{3/2} \sqrt{3\,\frac{16}{9} - 2\,\frac{4}{3}} = e^{3/2}\, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} .
\end{aligned}
$$

Osserviamo che

$$\lim_{x\to 2/3^-} f'(x) = \lim_{x\to 2/3^-} e^{2/x} \frac{-\big(3x^2-7x+4\big)}{|x|\,\sqrt{|3x^2-2x|}} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 2/3^+} f'(x) = \lim_{x\to 2/3^+} e^{2/x} \frac{3x^2-7x+4}{|x|\,\sqrt{|3x^2-2x|}} = +\infty\,,$$

quindi f non è derivabile in $2/3$.

3. Sapendo che

$$\log(1+y) = y - \frac{1}{2}\,y^2 + o(y^2)\,, \qquad \text{per } y\to 0\,,$$
$$\cos y = 1 - \frac{1}{2}\,y^2 + \frac{1}{24}\,y^4 + o(y^5)\,, \qquad \text{per } y\to 0\,,$$

calcolare

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2\log\left(\cos\frac{\sqrt{2}}{x}\right) + \log(2+x^2) - 2\log x\right)\sqrt{3x^8+4x^6}\,\sinh x\big(\log(1+e^x)-x\big)\,.$$

SOLUZIONE

Per $x\to+\infty$ si ha

$$\log\left(\cos\frac{\sqrt{2}}{x}\right) = \log\left(1 - x^{-2} + \frac{1}{6}x^{-4} + o(x^{-4})\right) =$$
$$= -x^{-2} + \frac{1}{6}x^{-4} + o(x^{-4}) - \frac{1}{2}\left(-x^{-2} + \frac{1}{6}x^{-4} + o(x^{-4})\right)^2 + o(x^{-4}) =$$
$$= -x^{-2} + \frac{1}{6}x^{-4} - \frac{1}{2}x^{-4} + o(x^{-4}) = -x^{-2} - \frac{1}{3}x^{-4} + o(x^{-4})\,,$$
$$\log(2+x^2) = \log(x^2) + \log(1+2x^{-2}) = 2\log x + 2x^{-2} - 2x^{-4} + o(x^{-4})\,,$$

quindi

$$2\log\left(\cos\frac{\sqrt{2}}{x}\right) + \log(2+x^2) - 2\log x =$$
$$= -2x^{-2} - \frac{2}{3}x^{-4} + o(x^{-4}) + 2\log x + 2x^{-2} - 2x^{-4} - 2\log x =$$
$$= -\frac{8}{3}x^{-4} + o(x^{-4}) \sim -\frac{8}{3}x^{-4}\,.$$

$$\sqrt{3x^8+4x^6} \sim \sqrt{3}\,x^4\,.$$
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \sim \frac{1}{2}e^x\,.$$
$$\log(1+e^x) - x = \log(e^x) + \log(1+e^{-x}) - x \sim e^{-x}\,.$$

Pertanto, per $x \to +\infty$, si ha

$$\left(2\log\left(\cos\frac{\sqrt{2}}{x}\right) + \log(2+x^2) - 2\log x\right)\sqrt{3x^8+4x^6}\,\sinh x\big(\log(1+e^x) - x\big) \sim$$
$$\sim -\frac{8}{3}x^{-4}\sqrt{3}\,x^4\frac{1}{2}e^x e^{-x} = -\frac{4\sqrt{3}}{3}\,.$$

Questo è il limite cercato.

4. Calcolare

$$\int_0^{\log 2} e^x\,\log\big(e^x + 2\sqrt{e^x+3} + 13\big)\,dx\,.$$

SOLUZIONE

Poniamo $t = e^x$, cioè $x = \log t$. La derivata della funzione che definisce la sostituzione è $1/t$. Per $x = 0$ si ha $t = 1$, per $t = \log 2$ si ha $t = 2$. Quindi si ha

$$\begin{aligned}\int_0^{\log 2} & e^x\,\log\big(e^x + 2\sqrt{e^x+3} + 13\big)\,dx = \\ &= \int_1^2 t\log\big(t + 2\sqrt{t+3} + 13\big)\,\frac{1}{t}\,dt = \\ &= \int_1^2 \log\big(t + 2\sqrt{t+3} + 13\big)\,dt\,.\end{aligned}$$

Eliminiamo la radice con la sostituzione $s = \sqrt{t+3}$, cioè $t = s^2 - 3$. La derivata della funzione che definisce la sostituzione è $2s$. Per $t = 1$ si ha $s = 2$, per $t = 2$ si ha $s = \sqrt{5}$. Quindi risulta

$$\begin{aligned}\int_1^2 \log\big(t + 2\sqrt{t+3} + 13\big)\,dt &= \int_2^{\sqrt{5}} \log\big(s^2 - 3 + 2s + 13\big)\,2s\,dt = \\ &= \int_2^{\sqrt{5}} 2s\log\big(s^2 + 2s + 10\big)\,dt\,.\end{aligned}$$

Integrando per parti si ottiene

$$\big[s^2\log(s^2+2s+10)\big]_2^{\sqrt{5}} - \int_2^{\sqrt{5}} s^2\,\frac{2s+2}{s^2+2s+10}\,dt\,.$$

Scomponiamo la funzione integranda nella somma di un polinomio e una frazione con numeratore di grado minore del denominatore. Si ha

$$\begin{aligned}\frac{2s^3+2s^2}{s^2+2s+10} &= \frac{2s^3+4s^2+20s-2s^2-20s}{s^2+2s+10} = \\ &= 2s + \frac{-2s^2-4s-20-16s+20}{s^2+2s+10} = 2s - 2 + \frac{-16s+20}{s^2+2s+10}.\end{aligned}$$

Il trinomio $s^2+2s+10$ ha discriminante -36, quindi è irriducibile. Si ha

$$s^2+2s+10 = (s+1)^2 + 9 = 9\left(\left(\frac{s+1}{3}\right)^2 + 1\right).$$

Quindi

$$\int_2^{\sqrt{5}} s^2 \frac{2s+2}{s^2+2s+10} = \int_2^{\sqrt{5}} \left(2s - 2 - 8\frac{2s+2}{s^2+2s+10} + \frac{4}{\big((s+1)/3\big)^2+1} \right) =$$

$$= \left[s^2 - 2s - 8\log(s^2+2s+10) + 12\arctan\left(\frac{s+1}{3}\right) \right]_2^{\sqrt{5}} .$$

Quindi l'integrale è uguale a

$$\left[s^2\log(s^2+2s+10) - s^2 + 2s + 8\log(s^2+2s+10) - 12\arctan\left(\frac{s+1}{3}\right) \right]_2^{\sqrt{5}} .$$

5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$\left(\frac{3+2e^z}{ie^z}\right)^3 = 8i .$$

SOLUZIONE

Poniamo $w = e^z$. z è soluzione dell'equazione se e solo se $(3+2w)/(iw)$ è una radice cubica di $8i$. $8i$ ha modulo 8 e un argomento è $\pi/2$, quindi le radici cubiche sono

$$\sqrt[3]{8}\left(\cos\left(\frac{\pi/2+2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi/2+2k\pi}{3}\right)\right), \qquad k = 0, 1, 2.$$

Pertanto abbiamo le radici

$$2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\Big) = \sqrt{3} + i$$

$$2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 2\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\Big) = -\sqrt{3} + i$$

$$2\left(\cos\left(\frac{9\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{6}\right)\right) = -2i .$$

Da cui si ottengono le tre equazioni

$$3 + 2e^z = (-1 + i\sqrt{3})e^z$$
$$3 + 2e^z = (-1 - i\sqrt{3})e^z$$
$$3 + 2e^z = 2e^z .$$

Dalla prima equazione segue $(3 + i\sqrt{3})e^z = -3$, quindi

$$e^z = -\frac{3}{3+i\sqrt{3}}.$$

$3+i\sqrt{3}$ ha modulo $\sqrt{12}$ e un argomento è $\pi/6$, quindi e^z deve avere modulo $3/\sqrt{12} = \sqrt{3}/2$ e un argomento è $\pi - \pi/6 = 5\pi/6$. Pertanto

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Dalla seconda equazione segue $(3 - i\sqrt{3})e^z = -a$, quindi

$$e^z = -\frac{3}{3 - i\sqrt{3}}.$$

$3 - i\sqrt{3}$ ha modulo $\sqrt{12}$ e un argomento è $-\pi/6$, quindi e^z deve avere modulo $3/\sqrt{12} = \sqrt{3}/2$ e un argomento è $\pi + \pi/6 = 7\pi/6$. Pertanto

$$z = \log\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

La terza equazione non ha soluzione.