Soluzione del Compito di Controlli Automatici del 16/01/24

Con riferimento al sistema descritto dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{200(s+2)}{s(s^2 - 10s + 100)}$$

si chiede

a. di tracciare i diagrammi asintotici delle ampiezze e delle fasi di $G(j\omega)$. Per ogni segmento delle spezzate che costituiscono tali diagrammi si determinino esattamente il valore degli estremi (ascissa ed ordinata dell'estremo). Calcolare anche l'intersezione con l'asse delle ascisse (ordinata 0 db)
b. di tracciare in modo <u>qualitativo</u> i diagrammi <u>reali</u> delle ampiezze e delle fasi.

[Soluzione]

Punto a.

Anche se non necessario, per alcuni studenti risulta più facile calcolare i parametri relativi a zeri e poli dalla $G(s)$ e non dalla $G(j\omega)$. Per questo motivo vengono calcolati ora, anche se più avanti li ri-calcoleremo utilizzando $G(j\omega)$.

[ZERI]: vi è uno zero in $z_1 = -2$
[POLO NELL'ORIGINE]: la FdT ha un polo nell'origine

[POLI]:

$$(s^2 + 10s + 100) \triangleq (s^2 + 2\delta\omega_n + \omega_n^2) \Rightarrow \begin{cases} \omega_n^2 = 10 \\ 2\delta\omega_n = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_n = 10 \\ \delta = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Si noti che $|\delta| < 1$, quindi i poli sono complessi coniugati. Inoltre $\delta < 0$, quindi i poli hanno parte reale negativa, quindi la fase asintotica del termine elementare ad essi relativo è $+180^0$

Infine, essendo $|\delta| = 0.5 \Rightarrow$ esiste il picco di risonanza ed il diagramma delle ampiezze passa esattamente per il punto di rottura $\omega = \omega_n = 10$. Tale aspetto verrà riconsiderato più avanti.

Calcoliamo ora la $G(j\omega)$ e mettiamola nella forma (con le costanti di tempo) utilizzata per il tracciamento dei diagrammi di Bode, ossia

$$G(j\omega) = K\frac{(1+j\omega\tau_1')(1+j\omega\tau_2')\cdots\left(1+j\omega\frac{2\delta_1'}{\omega_{n1}'} - \frac{\omega^2}{\omega_{n1}'^2}\right)\left(1+j\omega\frac{2\delta_2'}{\omega_{n2}'} - \frac{\omega^2}{\omega_{n2}'^2}\right)\cdots}{(j\omega)^h(1+j\omega\tau_1)(1+j\omega\tau_2)\cdots\left(1+j\omega\frac{2\delta_1}{\omega_{n1}} - \frac{\omega^2}{\omega_{n1}^2}\right)\left(1+j\omega\frac{2\delta_1}{\omega_{n2}} - \frac{\omega^2}{\omega_{n2}^2}\right)\cdots}$$

che nel nostro caso si riduce all'espressione $G(j\omega) = G(j\omega) = K\dfrac{(1+j\omega\tau_1')}{j\omega\left(1+j\omega\frac{2\delta_1}{\omega_{n1}} - \frac{\omega^2}{\omega_{n1}^2}\right)}$

Si ha quindi

$$G(s)=\frac{200(s+2)}{s\left(s^2-10s+100\right)}\ \Rightarrow \boxed{G(j\omega)=\underbrace{\frac{200\bullet 2}{100}}_{\mathrm{K}}\frac{\left(1+\frac{1}{2}s\right)}{j\omega\left(1-\underbrace{\frac{1}{10}}_{\frac{2\delta_1}{\omega_{n1}}}j\omega-\underbrace{\frac{1}{100}}_{\frac{1}{\omega_{n1}^2}}\omega^2\right)}}$$

da cui $\begin{cases}K=4\\ \tau_1^{'}=\frac{1}{2}\end{cases}$ e $\begin{cases}\omega_n=10\\ \delta=\frac{1}{2}\end{cases}$

[Termini elementari]

I termini elementari, ordinati secondo le pulsazioni di taglio, sono tre

$$G_{e1}(j\omega)=4;\ ;G_{e2}(j\omega)=\frac{1}{j\omega};G_{e3}(j\omega)=\left(1+\frac{1}{2}j\omega\right);G_{e4}(j\omega)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{10}j\omega-\frac{1}{100}\omega^2\right)}$$

[Tracciamento del diagramma asintotico delle ampiezze]

Contributi dei termini elementari al diagramma delle ampiezze asintotico

- $G_{e1}(j\omega)=4$ da luogo ad una retta di pendenza nulla (ossia orizzontale) di ordinata $20\log(4)=12.04db$ $\forall\omega$.
- Il termine $G_{e2}(j\omega)=\frac{1}{j\omega}$ da luogo ad una retta di pendenza $-20db/decade$ passante per l'origine
- A partire dalla pulsazione $\omega_z=\left|-\frac{1}{\tau_1^{'}}\right|=\left|-2\right|=2$, al contributo di $G_{e1}(j\omega)$e $G_{e2}(j\omega)$ si aggiunge quello di $G_{e3}(j\omega)$. Tale contributo asintotico è così riassumibile

$$G_{e3}(j\omega)=\left(1+\frac{1}{2}j\omega\right)\ \Rightarrow\begin{cases}\omega\le\omega_z=2\text{: da contributo nullo}\\ \omega\ge\omega_z=2\text{:da contributo coincidente con una retta di pendenza }+20db/decade\\ \qquad\text{(pendenza positiva in quanto tale termine corrisponde ad uno zero)}\\ \qquad\text{ed intersecante l'asse delle ascisse nel punto}\\ \qquad\text{corrispondente a }\omega_z=2\text{ (ossia il punto }\left(\log(2),0db\right))\end{cases}$$

- A partire dalla pulsazione $\omega_{np}=10$ ai contributi precedenti si aggiunge anche quello $G_{e4}(j\omega)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{10}j\omega-\frac{1}{100}\omega^2\right)}$. Tale contributo asintotico è così riassumibile

$$G_{e2}(j\omega)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{10}j\omega-\frac{1}{100}\omega^2\right)}\ \Rightarrow\begin{cases}\omega\le\omega_{np}=10\text{: da contributo nullo}\\ \omega\ge\omega_{np}=10\text{:da contributo coincidente con una retta di pendenza }-40db/decade\\ \qquad\text{(pendenza negativa e "doppia" in quanto due poli c.c.)}\\ \qquad\text{ed intersecante l'asse delle ascisse nel punto corrispondente a }\omega_{np}=10\end{cases}$$

[Tracciamento diagramma asintotico]

Tenendo quindi presenti i contributi dei termini elementari e la loro successione si ha

$\omega \in [0,2]$ vi è solo il contributo di $G_{e1}(j\omega) = \dfrac{4}{j\omega} \Rightarrow$ semiretta retta di pendenza -20$db/decade$

ed intersecante le ordinate in $20\log(2) = 12.04db$. Il primo segmento ha quindi

come estremo sinistro il punto all'infinito corrispondente alla coppia $(\omega, |G(j\omega)|) = (0,\infty)$.

Il punto corrispondente sul diagramma logaritmico sarà ovviamente

$$\left(\log(\omega), \underbrace{20\log(|G(j\omega)|)}_{|G(j\omega)|_{db}} \right) = (-\infty, \infty db).$$

> Nota
> Nel seguito per brevità di notazione si indicherà la coppia che si legge direttamente sull'ascissa e l'ordinata : cioè la coppia (pulsazione, modulo in decibel) $= \left(\omega, |G(j\omega)|_{db}\right)$.
> Quindi ad esempio invece di dire " il punto corrispondente a $(0,1)$" si dirà il punto corrispondente a $(0, 0db)$ (si noti che $|1|_{db} = 0db$) :
> per entrambe le locuzioni il punto corrispondente sul diagramma logaritmico è $(\log(0), 0db) = (-\infty, 0db)$

Questo primo segmento passa per il punto $(1, 12.04db)$ e termina dove comincia il successivo (ossia termina per $\omega = 2$),

quindi l'estremo destro di questo primo segmento sarà il punto corrispondente a

$$20\log(4) + (-20)(\log(2) - \log(1)) = 6.03db$$

$\omega \in [2,10]$ si aggiunge al contributo di $G_{e3}(j\omega) \Rightarrow$

la pendenza risultante del secondo segmento sarà quindi

$-20db/decade + 20db/decade = 0db/decade$

Questo secondo segmento ha come estremo sinistro, ovviamente, il punto corrispondente a $(2, 6.03db)$.

L'estremo destro del secondo segmento, essendo nulla la sua pendenza, sarà quindi il punto corrispondente a $(10, 6.03db)$

$\omega \in [2, \infty]$

la pendenza risultante del terzo ed ultimo segmento sarà quindi

$0db/decade + (-40db/decade) = -40db/decade$

Questo terzo segmento ha come estremo sinistro, ovviamente, il punto corrispondente a $(10, 6.03db)$.

Tale segmento interseca l'asse delle ascisse in corrispondenza della pulsazione ω_{int} che soddisfa la relazione

$$\overbrace{\underbrace{+6.03}_{20\log(10)}}^{\text{ordinata di partenza}} + \overbrace{\underbrace{(-40)}_{\text{pendenza}} \underbrace{(\log(\omega_{\text{int}}) - \log(2))}_{\text{variazione di ascissa}}}^{\text{variazione di ordinata}} \text{ da cui } \omega_{\text{int}} = 14.1 \, rad/\sec$$

tale ordinata serve per posizionae il segmento, il cui

estremo destro d sarà ovviamente il punto corrispondente a $(+\infty, -\infty db)$

[Tracciamento del diagramma delle ampiezze reale]

Contributi dei termini elementari al diagramma delle ampiezze reale

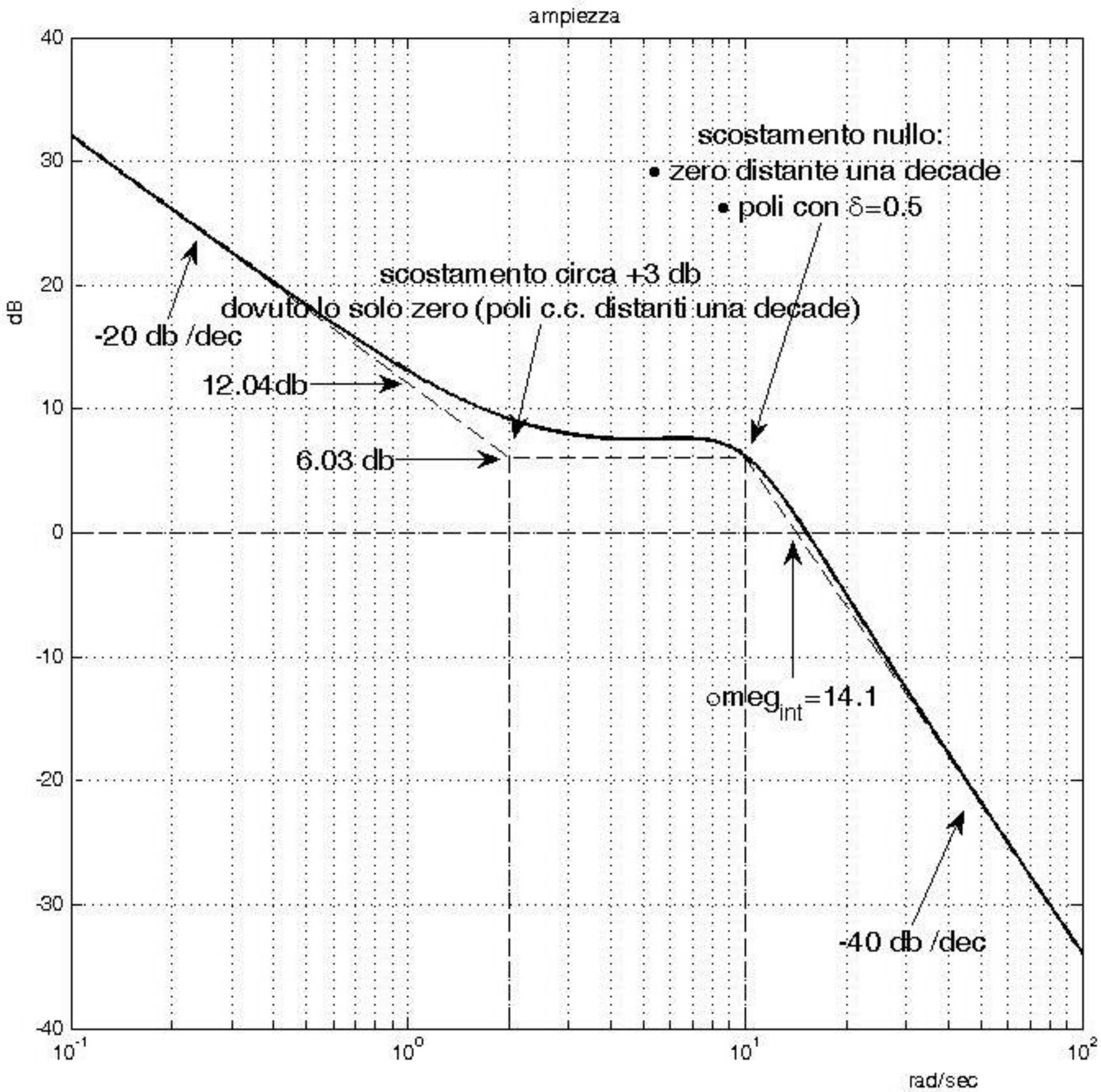
- Il diagramma reale di $G_{e1}(j\omega) \bullet G_2(j\omega) = \frac{4}{j\omega}$ coincide rispettivo diagramma asintotico
- Il diagramma reale di $G_{e3}(j\omega) = \left(1 + \frac{1}{2}j\omega\right)$ sta sempre sopra il corrispondente asintotico: lo scostamento massimo si ha in corrispondenza della pulsazione di rottura $\omega = 2$ ed è di circa $+3db$

  Inoltre, nell'ambito di una decade sinistra o destra lo scostamento praticamente si annula
- Il diagramma reale di $G_{e4}(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{10}j\omega - \frac{1}{100}\omega^2\right)}$ sta
  - per $\omega < \omega_{np} = 10$ sempre sopra i corrispondente diagramma asintotico di $G_{e4}(j\omega)$
  - per $\omega > \omega_{np} = 10$ sempre sopra il corrispondente diagramma asintotico di $G_{e4}(j\omega)$
  - per $\omega = \omega_n = 10$ interseca il corrispondente diagramma asintotico di $G_{e2}(j\omega)$, lo scostamento è nullo
- Inoltre
  - essendo $\delta = 0.5$ il picco di risonanza è
    - $M_r = \frac{1}{2|\delta|\sqrt{1-\delta^2}} = \frac{1}{2\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3} = 1.1547 = 1.2494db$

    in corrispondenza della pulsazione di risonanza $\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\delta^2} = 10\sqrt{1-2\frac{1}{4}} = 10\frac{\sqrt{2}}{2} = 7.071$.

    Si noti che tale pulsazione è inferiore alla pulsazione di rottura $\omega_n = 10$, quindi il picco di risonanza sta alla sinistra della intersezione del diagramma asintotico (ed anche reale per quanto detto sopra) con le ascisse.

Sulla base di quanto esposto e dei commenti in figura tenendo presente che lo scostamento dei diagrammi reali di $G_{e3}(j\omega)$ dai corrispettivi asintotici si annulla nell'ambito di una decade (e questo sia per una decade sotto che sopra, cioè sia a sinistra che a destra del punto di rottura), e che tutti i termini elementari stanno sopra il corrispettivo asintotico (o hanno scostamento nullo) si ha il seguente diagramma delle ampiezze (asintotico e reale)



[Tracciamento del diagramma asintotico delle fasi]

Contributi dei termini elementari al diagramma delle fasi asintotico

- $G_{e1}(j\omega)=4$ da luogo ad una fase pari a 0^0 per ogni pulsazione, mentre $G_{e2}(j\omega)=\dfrac{1}{j\omega}$ da luogo a -90^0 per ogni pulsazione
- Il contributo di $G_{e3}(j\omega)=\left(1+\dfrac{1}{2}j\omega\right)$è costituito da una spezzata il cui segmento centrale è posizionabile conoscendo le pulsazioni

$$\omega_{za}=\frac{\omega_z}{4.81}=\frac{2}{4.81}=0.4158$$
$$\omega_{zb}=\omega_z\cdot 4.81=2\cdot 4.81=9.62$$

Tale segmento centrale ha estremo sinistro corrispondente a $\left(\omega_{za}, 0^0\right)$ e destro corrispondente a $\left(\omega_{zb}, +90^0\right)$. Per $\omega \le \omega_{za}$ il contributo asintotico di $G_{e3}\left(j\omega\right)$ è nullo, mentre per $\omega \ge \omega_{zb}$ il contributo rimane costante a $+90^0$

- Il contributo di $G_{e4}\left(j\omega\right) = \dfrac{1}{\left(1 - \frac{1}{10} j\omega - \frac{1}{100}\omega^2\right)}$ è costituito da una spezzata il cui segmento centrale è posizionabile conoscendo le pulsazioni

$$\omega_{apoli} = \frac{\omega_n}{4.81^{|\delta|}} = \frac{10}{4.81^{(1/2)}} = 4.56; \qquad \omega_{bpoli} = \omega_n \cdot 4.81^{|\delta|} = 10 \cdot 4.81^{(1/2)} = 21.932$$

Tale segmento centrale ha estremo sinistro corrispondente a $\left(\omega_{pa}, 0^0\right)$ e destro corrispondente a $\left(\omega_{pb}, +180^0\right)$. Per $\omega \le \omega_{pa}$ il contributo asintotico di $G_{e4}\left(j\omega\right)$ è nullo, mentre per $\omega \ge \omega_{pb}$ il contributo rimane costante a -180^0

Tenendo quindi presenti i contributi dei termini elementari e la loro successione si ha che le varie pulsazioni seguono il seguente ordine

$\left(\omega_{az} = 0.4158\right) < \left(\omega_{apoli} = 4.56\right) < \left(\omega_{bz} = 9.62\right) < \left(\omega_{bpoli} = 21.93\right)$ da cui

$\omega \in [0, \omega_{az} = 0.4158]$ vi è solo il contributo di $G_{e1}(j\omega)$ che è di 0^0 e di $G_{e2}(j\omega)$ che è di -90^0 .Quindi il primo segmento ha come estremo sinistro il punto corrispondente a $(0,\text{-}90^0)$e come estremo destro il punto corrispondente a $(\omega_{az} = 0.4158, 0^0)$

$\omega \in [\omega_{az} = 0.4158, \omega_{apoli} = 4.56]$ si ha pendenza dovuta a $G_{e3}(j\omega)$ che è di $\dfrac{+90^0}{2\log(4.81)}$

Per calcolare l'estremo destro del secondo segmento si ha quindi

$$\arg\left(G\left(j\omega_{apoli}\right)\right) = \arg\left(G\left(j4.56\right)\right) = -90^0 + \left(\frac{+90^0}{2\log(4.81)}\right)\left(\log\left(\omega_{apoli}\right) - \log\left(\omega_{az}\right)\right) = -21.39^0$$

Quindi l'estremo destro è il punto corrispondente a $(\omega_{apoli} = 4.56, -21.39^0)$

(L'estremo sinistro è ovviamente corrispondente a $(\omega_{az} = 0.4158, -90^0)$)

$\omega \in [\omega_{apoli} = 4.56, \omega_{bz} = 9.62]$ si ha la pendenza dovuta a $G_{e3}(j\omega)$ e $G_{e4}(j\omega)$ che è

$$\frac{90^0}{2\log(4.81)} + \frac{+180^0}{2|\delta|\log(4.81)}$$

Per calcolare l'estremo destro del secondo segmento si ha quindi

$$\arg\left(G\left(j\omega_{bz}\right)\right) = \arg\left(G\left(j9.62\right)\right) = -21.39^0 + \left(\frac{90^0}{2\log(4.81)} + \frac{+180^0}{2|\delta|\log(4.81)}\right)\left(\log\left(\omega_{bz}\right) - \log\left(\omega_{apoli}\right)\right) = +85.56^0$$

Quindi l'estremo destro è il punto corrispondente a $(\omega_{bz} = 9.62, +85.56^0)$

(L'estremo sinistro è ovviamente corrispondente a $(\omega_{apoli} = 4.56, -21.39^0)$)

$\omega \in [\omega_{zb} = 9.62, \omega_{bpoli} = 21.93]$ rimane soltanto la pendenza dovuta a $G_{e4}(j\omega)$

che consiste in un segmento di pendenza $\dfrac{+180^0}{2|\delta|\log(4.81)}$

Quindi la fase corrispondente all'estremo destro del segmento è

$$\arg\left(G\left(j\omega_{pa}\right)\right) = \arg\left(G\left(j21.93\right)\right) = \underbrace{+85.56^0}_{\substack{\text{fase}\\ \text{estremo}\\ \text{sinistro}}} + \left(\frac{+180^0}{2|\delta|\log(4.81)}\right)\left(\log\left(\omega_{bpoli}\right) - \log\left(\omega_{bz}\right)\right) = +180^0$$

Quindi l'estremo destro è il punto corrispondente a $(\omega_{bpoli} = 21.93, +180^0)$

(l'estremo sinistro è ovviamente corrispondente a $(\omega_{bz} = 9.62, +85.56^0)$)

che dovesse venire $+180^0$è ovvio perchè i poli c.c. sfasano di +180, il polo nell'origine di $\text{-}90^0$ e lo zero di +90 $\Rightarrow +180^0 - 90^0 + 90^0 =$

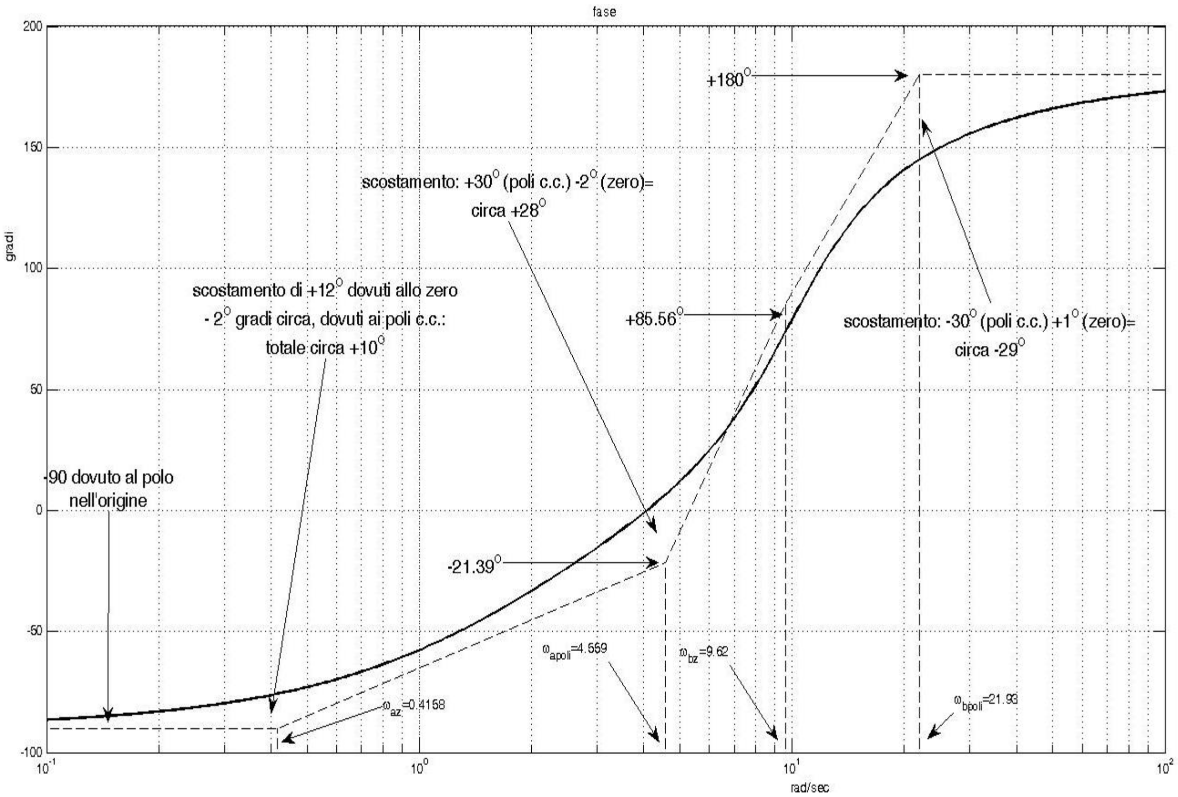
$\omega \in [\omega_{zb} = 21.93, +\infty]$il diagramma asintotico delle fasi rimane a$+180^0$

[Tracciamento del diagramma delle fasi reali]

Si vedano commenti sul grafico

Da cui si immediatamente il grafico che segue.

Diagramma delle fasi reale ed asintotico di $G(j\omega)$



Esercizio 2

Con riferimento al sistema rappresentato dalla funzione di trasferimento $G(s)=\dfrac{100}{s(s-10)^2}$ si chiede

a. di tracciare, in modo qualitativo, il diagramma di polare di $G(j\omega)$ (*bisogna anche determinare la intersezioni con l'asse reale, serve per la domanda b)*

b. con riferimento al sistema ottenuto ponendo $KG(s)$ in retroazione unitaria negativa si chiede:

   i. di valutare sulla base del criterio di Nyquist se esistono valori di $K>0$ per cui è asintoticamente stabile il sistema. Nel caso indicare il l'intervallo di $K>0$ che assicura la stabilità.

   ii. Tracciare il luogo delle radici per $K>0$: sono confermati i risultati di cui al punto i?

[Soluzione]

Si ricorda che $\begin{cases} K=1 \\ \tau_1=\tau_2=-\dfrac{1}{10} \end{cases}$ quindi

Il sistema ha un polo nell'origine infatti dal

- *Comportamento per* $\omega \to 0^+$: $G(j\omega)\big|_{\omega\to0^+} = G(s) = \dfrac{100}{j\omega(j\omega-10)^2}\Bigg|_{\omega\to0^+} = \dfrac{100}{100}\dfrac{1}{j\omega\left(1-\frac{1}{10}j\omega\right)^2}\Bigg|_{\omega\to0^+} = \infty$

  Si vede che il modulo va all'infinito, vi è un asintoto verticale, con la formula si vede che è in +0.2

- *Comportamento per piccole* ω: $\Delta\arg\left[G(j\omega)\right] = \left(-\left(\underset{\tau_1}{-0.1}\underset{\tau_1}{-0.1}\right)\right)\omega > 0 \rightarrow$ la variazione iniziale di argomento è positiva. Quindi il raggio vettore ruota inizialmente in senso antiorario

- *Comportamento per* $\omega \to +\infty$: $\lim\limits_{\omega\to+\infty}\left[\left|G(j\omega)\right|\right] = \lim\limits_{\omega\to+\infty}\left[\left|\dfrac{100}{100}\dfrac{1}{j\omega\left(1-\frac{1}{10}j\omega\right)^2}\right|\right]_{\omega\to+\infty} = 0$

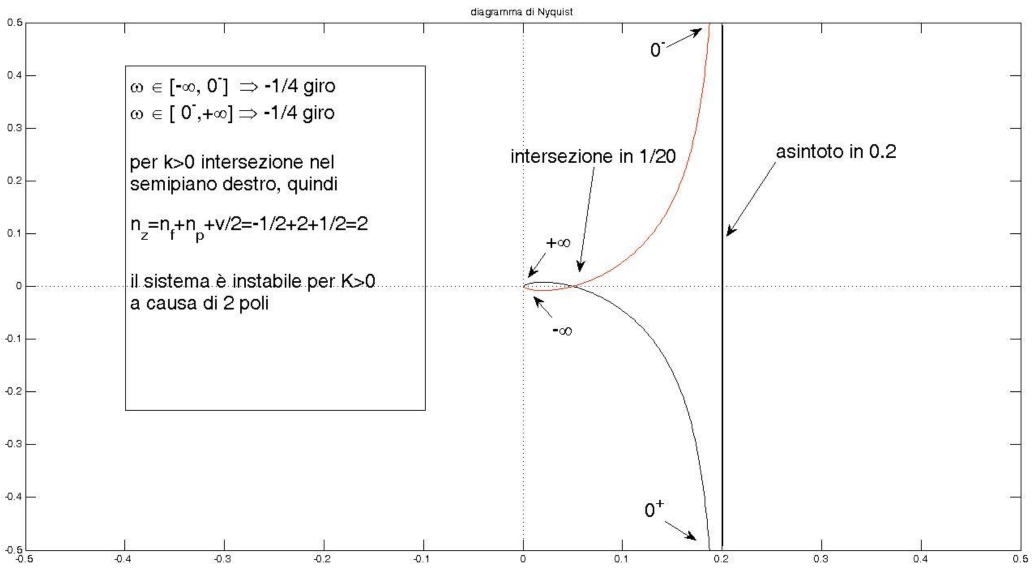
  - $\lim\limits_{\omega\to+\infty}\left[\arg\left(G(j\omega)\right)\right] = -\dfrac{\pi}{2}\underbrace{+\pi}_{\text{poli reale onstabilestabile di molteplicità 2}} = +\dfrac{\pi}{2}$

Quindi il diagramma finisce nell'origine tangente all'asse reale immaginario positivo.

Tracciamento del diagramma

- Per $\omega \to 0^+$ parte dall'asintoto in 0.2 (vedi formula asintoto)
- Per piccole pulsazioni il raggio vettore ruota positivamente (senso antiorario) ed intanto, il modulo diminuisce
- Il valore finale della fase è $+\dfrac{\pi}{2}$ e il modulo è nullo
- il diagramma interseca l'asse reale in $+\dfrac{1}{20}$

Da cui il seguente grafico



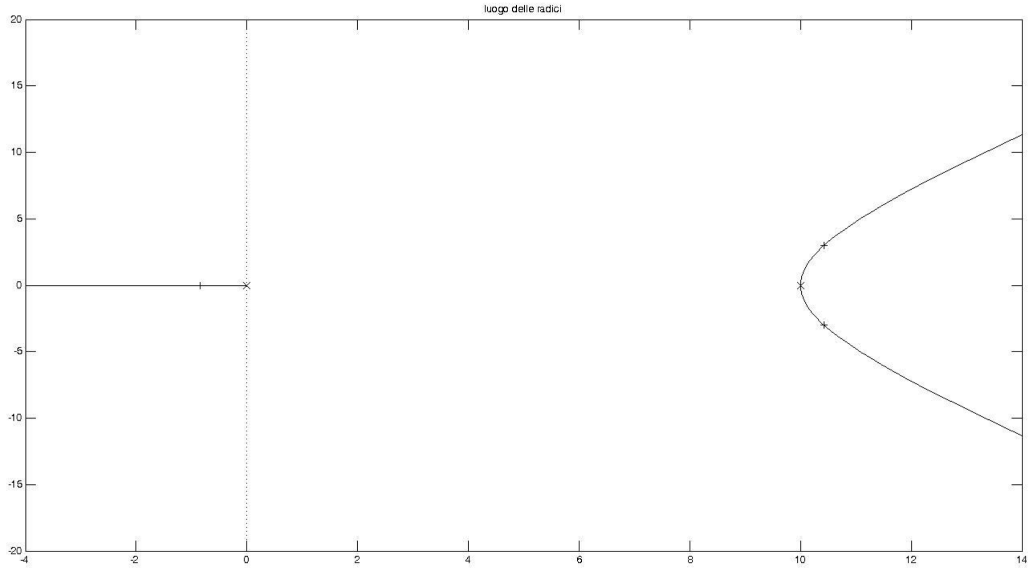
[b.i]

Il diagramma per K>0 è sempre nel semipiano destro. Quindi il sistema è instabile per K>0 in quanto per tali valori di K il raggio vettore punto critico-diagramma porta alla seguente relazione (vedi commenti in figura)

$$n_z = n_f + n_p + \frac{v}{2} = \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) + 2 + \frac{1}{2} = 2$$ le radici a parte reale positiva del sistema in retroazione sono 2.

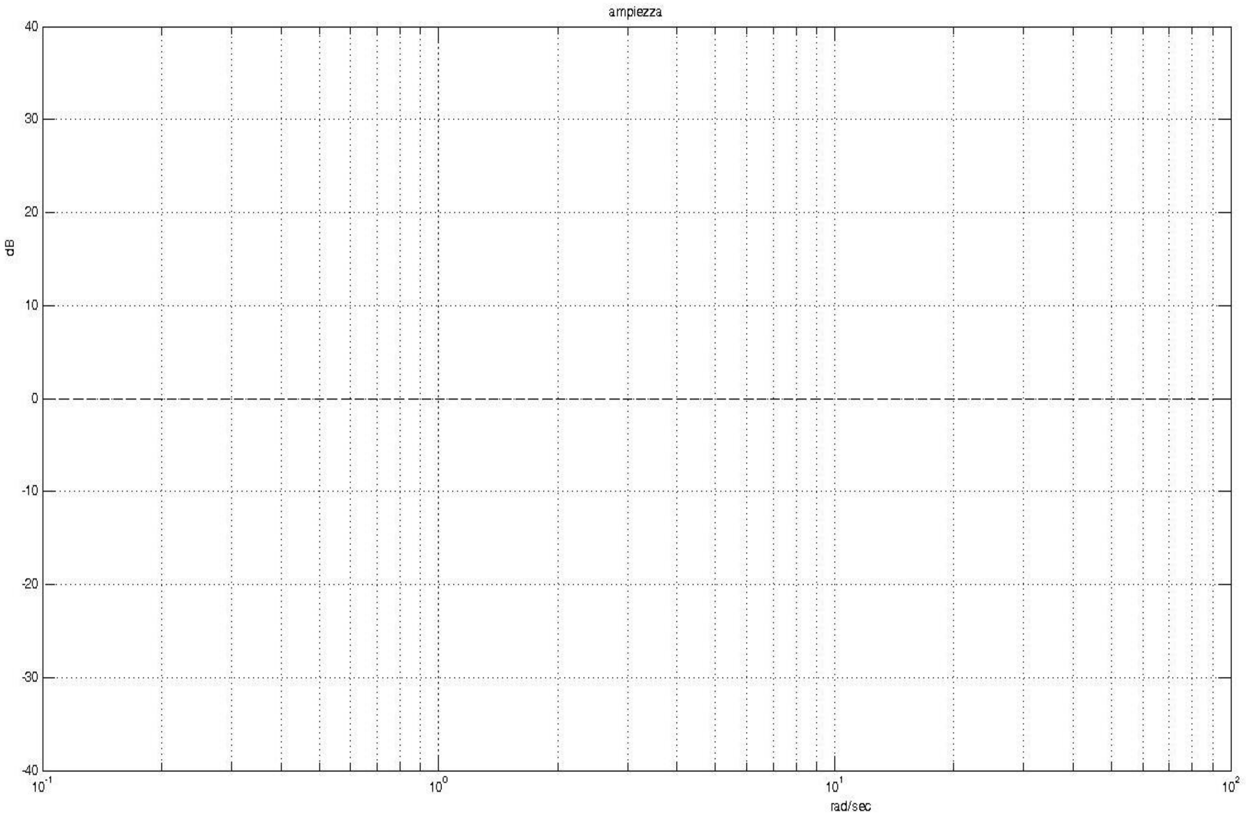
Il sistema è instabile a causa di due radici

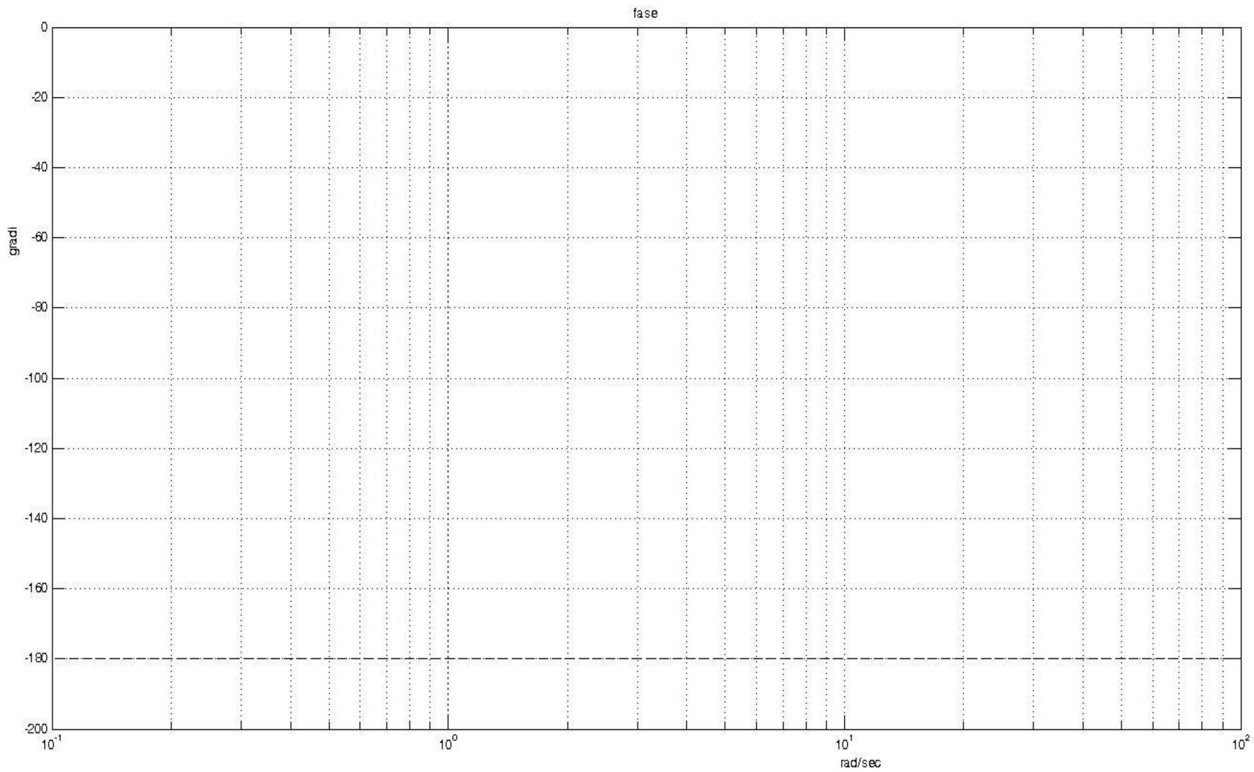
[b.ii]
Il punto [b.i] è confermato dal luogo delle radici, da cui si vede che è instabile per 2 radici



Esercizio 5

1. Descrivere il Teorema del Valore finale
   Vedi dispense


ampiezza
dB
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
rad/sec


fase
0
-20
-40
-60
-80
-100
-120
-140
-160
-180
-200
gradi
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
rad/sec