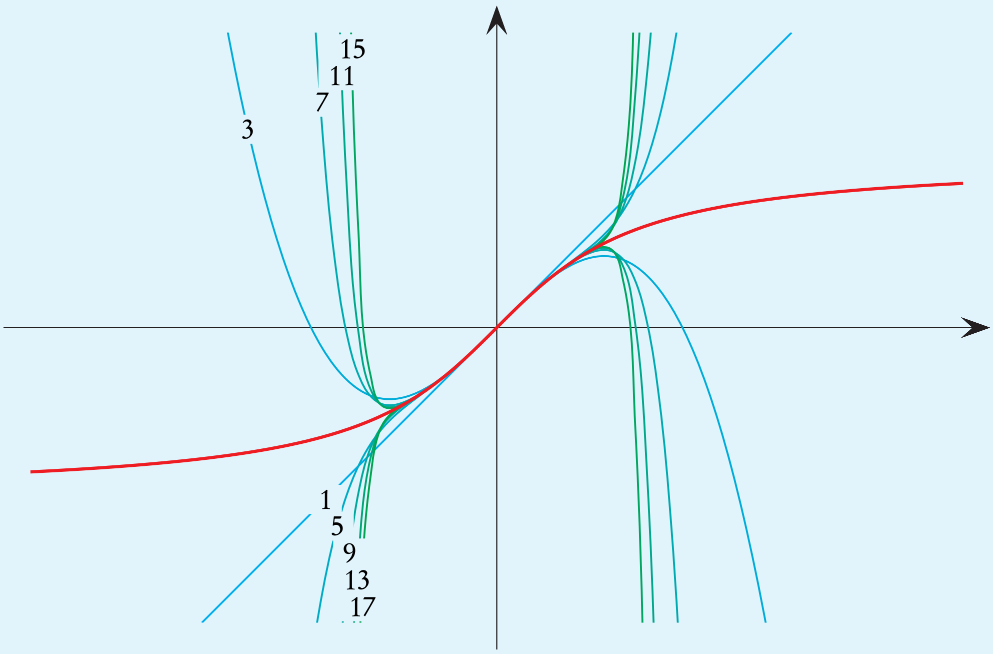
Giovanni Dore

Appunti del corso di

Analisi Matematica 2

Modulo 2



Alma Mater Studiorum - Università di Bologna
Corso di Laurea in Matematica
Anno Accademico 2023/2024

In copertina:
somme parziali della serie di Taylor di punto iniziale 0 della funzione arcotangente.
Il numero riportato su ciascun grafico è l'indice della somma parziale.

Indice

1
Misura e integrale secondo Lebesgue

In questo capitolo utilizziamo le abituali convenzioni sulle operazioni di addizione e moltiplicazione in $\overline{\mathbb{R}}$. Quindi poniamo

$$\begin{aligned} \forall\lambda\in\mathbb{R}, \quad & (\pm\infty)+\lambda=\lambda+(\pm\infty)=\pm\infty\,, \\ & (\pm\infty)+(\pm\infty)=\pm\infty\,, \\ \forall\lambda\in\mathbb{R}^+, \quad & (\pm\infty)\cdot\lambda=\lambda\cdot(\pm\infty)=\pm\infty\,, \\ \forall\lambda\in\mathbb{R}^-, \quad & (\pm\infty)\cdot\lambda=\lambda\cdot(\pm\infty)=\mp\infty\,, \\ & (\pm\infty)\cdot(\pm\infty)=+\infty\,, \\ & (\pm\infty)\cdot(\mp\infty)=-\infty\,. \end{aligned}$$

Oltre a queste convenzioni, usate correntemente, poniamo $(\pm\infty)\cdot 0=0\cdot(\pm\infty)=0$. Non definiamo invece l'espressione $+\infty+(-\infty)$.

Inoltre in questo capitolo consideriamo l'estremo superiore di sottoinsiemi non vuoti di $\overline{\mathbb{R}}$. Formalmente la definizione è la stessa data nel caso dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$; si considera l'insieme dei maggioranti, che in $\overline{\mathbb{R}}$ è sempre non vuoto, perché ogni insieme ha come maggiorante $+\infty$, tale insieme ha sempre minimo e questo è l'estremo superiore. Pertanto, dato $A\subseteq\overline{\mathbb{R}}$, se $+\infty\in A$, allora $\sup A=+\infty$; se invece $+\infty\notin A$, e A non è $\{-\infty\}$, allora $\sup A$ è l'estremo superiore (in senso reale) di $A\setminus\{-\infty\}$, che è incluso in $\mathbb{R}$.

Analogamente si definisce l'estremo inferiore di sottoinsiemi non vuoti di $\overline{\mathbb{R}}$.

1.1 Somme infinite

Nel seguito considereremo somme di una infinità numerabile di elementi di $\overline{\mathbb{R}}$ non negativi. Se gli addendi sono reali e dipendono da un indice in $\mathbb{N}$, cioè sono i termini di una successione, risulta naturale vedere la somma come somma di una serie. In generale ci si può ricondurre a una serie “numerando” gli addendi, cioè mettendoli in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$. Tale corrispondenza non è unica, quindi, per essere certi che questo modo di definire la somma sia corretto, bisogna verificare che, cambiando la corrispondenza, cioè ordinando in modo diverso gli addendi, la somma della serie che si ottiene non cambia. Questo fatto è vero se gli addendi sono non negativi ed è una semplice conseguenza del teorema seguente.

1.1.1 Teorema

Sia $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione in $[0,+\infty[$. Allora

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sup\left\{\sum_{k\in S} a_k \,\middle|\, S\subseteq\mathbb{N},\ S \text{ finito}\right\}.$$

Dimostrazione. Qualunque sia S sottoinsieme finito di $\mathbb{N}$, si ha $S\subseteq\{k\in\mathbb{N}\,|\,k\leq\max S\}$. Poiché ogni a_k è non negativo, risulta

$$\sum_{k\in S} a_k \leq \sum_{k=0}^{\max S} a_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\,,$$

pertanto

$$\sup\left\{\sum_{k\in S} a_k \,\middle|\, S\subseteq\mathbb{N},\ S \text{ finito}\right\} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\,.$$

Viceversa, $\forall n\in\mathbb{N}$, si ha

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k\in\{0,1,\dots,n\}} a_k \leq \sup\left\{\sum_{k\in S} a_k \,\middle|\, S\subseteq\mathbb{N},\ S \text{ finito}\right\},$$

Pertanto

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} a_k \leq \sup\left\{\sum_{k\in S} a_k \,\middle|\, S\subseteq\mathbb{N},\ S \text{ finito}\right\}.$$

Quindi

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sup\left\{\sum_{k\in S} a_k \,\middle|\, S\subseteq\mathbb{N},\ S \text{ finito}\right\}.$$

■

1.1.2 Osservazione. Da questo teorema segue facilmente che la somma d una serie a termini non negativi non cambia riordinando i termini della serie; cioè se $p:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ è biunivoca, allora $\sum_{k=0}^{+\infty} a_{p(k)} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$. Infatti p trasforma insiemi finiti in insiemi finiti, quindi

$$\left\{\sum_{k\in S} a_{p(k)} \,\middle|\, S\subseteq\mathbb{N},\ S \text{ finito}\right\} = \left\{\sum_{k\in S} a_k \,\middle|\, S\subseteq\mathbb{N},\ S \text{ finito}\right\}.$$

Si può dimostrare che la somma di una serie a termini di segno arbitrario è invariante per riordinamento dei termini se e solo se la serie è assolutamente convergente, ma in generale tale proprietà non vale. ◀

Questo teorema suggerisce un modo di definire la somma di una qualunque famiglia infinita di elementi di $\overline{\mathbb{R}}$ non negativi, generalizzando il concetto di somma di una serie. Anche se nel seguito utilizzeremo solo somme numerabili, la definizione può essere data per somme di un numero qualunque di termini.

Definizione di somma di un insieme di numeri non negativi

Sia $\mathscr{A}$ un insieme e, $\forall k \in \mathscr{A}$, sia $a_k \in [0, +\infty]$. Poniamo

$$\sum_{k \in \mathscr{A}} a_k = \sup \left\{ \sum_{k \in S} a_k \,\middle|\, S \subseteq \mathscr{A}\,,\ S \text{ finito} \right\}.$$

Ovviamente se $\mathscr{A}$ è finito, l'estremo superiore che compare in questa definizione è il massimo ed è la somma per $k \in \mathscr{A}$ secondo il consueto significato di somma finita.

1.1.3 Osservazione. Se la somma definita sopra è reale, allora $\{k \in \mathscr{A} \,|\, a_k > 0\}$ è al più numerabile.

Infatti, posto, per $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{A}_n = \{k \in \mathscr{A} \,|\, a_k \geq 1/n\}$, risulta

$$\{k \in \mathscr{A} \,|\, a_k > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathscr{A}_n\,.$$

Si ha

$$+\infty < \sum_{k \in \mathscr{A}} a_k \geq \sum_{k \in \mathscr{A}_n} a_k \geq \sum_{k \in \mathscr{A}_n} \frac{1}{n}\,;$$

quindi il prodotto di $1/n$ per la cardinalità di $\mathscr{A}_n$ non è $+\infty$, pertanto $\mathscr{A}_n$ è finito. Perciò $\{k \in \mathscr{A} \,|\, a_k > 0\}$ è unione numerabile di insiemi finiti, quindi è al più numerabile. ◀

Vale il seguente teorema relativo alla somma di due somme.

1.1.4 Teorema

Sia $\mathscr{A}$ un insieme e, $\forall k \in \mathscr{A}$, siano $a_k, b_k \in [0, +\infty]$. Allora

$$\sum_{k \in \mathscr{A}} (a_k + b_k) = \sum_{k \in \mathscr{A}} a_k + \sum_{k \in \mathscr{A}} b_k\,.$$

Dimostrazione. Sia $S \subseteq \mathscr{A}$ finito. Allora

$$\sum_{k \in S} (a_k + b_k) = \sum_{k \in S} a_k + \sum_{k \in S} b_k \leq \sum_{k \in \mathscr{A}} a_k + \sum_{k \in \mathscr{A}} b_k\,.$$

Pertanto

$$\sum_{k \in \mathscr{A}} (a_k + b_k) = \sup \left\{ \sum_{k \in S} (a_k + b_k) \,\middle|\, S \subseteq \mathscr{A}\,,\ S \text{ finito} \right\} \leq \sum_{k \in \mathscr{A}} a_k + \sum_{k \in \mathscr{A}} b_k\,.$$

Dimostriamo la disuguaglianza inversa.

Se $\sum_{k \in \mathscr{A}} (a_k + b_k) = +\infty$ essa è verificata.

Supponiamo $\sum_{k \in \mathscr{A}} (a_k + b_k) < +\infty$. Qualunque siano $S, T \subseteq \mathscr{A}$ finiti, risulta

$$\sum_{k \in S} a_k + \sum_{k \in T} b_k \leq \sum_{k \in S \cup T} a_k + \sum_{k \in S \cup T} b_k = \sum_{k \in S \cup T} (a_k + b_k) \leq \sum_{k \in \mathscr{A}} (a_k + b_k)\,.$$

Quindi

$$\sum_{k\in T} b_k \leq \sum_{k\in\mathscr{A}}(a_k+b_k)-\sum_{k\in S} a_k\,,$$

pertanto

$$\sum_{k\in\mathscr{A}} b_k = \sup\left\{\sum_{k\in T} b_k \,\middle|\, T\subseteq\mathscr{A}\,,\ T \text{ finito}\right\} \leq \sum_{k\in\mathscr{A}}(a_k+b_k)-\sum_{k\in S} a_k\,,$$

quindi $\sum_{k\in\mathscr{A}} b_k < +\infty$ e si ha

$$\sum_{k\in S} a_k \leq \sum_{k\in\mathscr{A}}(a_k+b_k)-\sum_{k\in\mathscr{A}} b_k\,,$$

Da ciò segue

$$\sum_{k\in\mathscr{A}} a_k = \sup\left\{\sum_{k\in S} a_k \,\middle|\, S\subseteq\mathscr{A}\,,\ S \text{ finito}\right\} \leq \sum_{k\in\mathscr{A}}(a_k+b_k)-\sum_{k\in\mathscr{A}} b_k\,,$$

pertanto $\sum_{k\in\mathscr{A}} a_k < +\infty$ e si ha

$$\sum_{k\in\mathscr{A}} a_k + \sum_{k\in\mathscr{A}} b_k \leq \sum_{k\in\mathscr{A}}(a_k+b_k)\,.$$ ■

Ovviamente un teorema analogo vale per somme di un numero finito di somme. Relativamente alle somme infinite di somme vale il seguente teorema.

1.1.5 Teorema

Siano $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ insiemi e, $\forall k\in\mathscr{A}$, $\forall j\in\mathscr{B}$, sia $a_{k,j}\in[0,+\infty]$. Allora.

$$\sum_{k\in\mathscr{A}}\sum_{j\in\mathscr{B}} a_{k,j} = \sum_{(k,j)\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}} a_{k,j}\,.$$

Dimostrazione. Sia $S\subseteq\mathscr{A}\times\mathscr{B}$, finito. Indichiamo con $S_{\mathscr{A}}$ e $S_{\mathscr{B}}$ l'insieme delle prime coordinate e delle seconde coordinate di elementi di S rispettivamente, cioè

$$S_{\mathscr{A}} = \left\{k\in\mathscr{A} \,\middle|\, \exists j\in\mathscr{B} : (k,j)\in S\right\},$$
$$S_{\mathscr{B}} = \left\{j\in\mathscr{B} \,\middle|\, \exists k\in\mathscr{A} : (k,j)\in S\right\}.$$

Evidentemente $S_{\mathscr{A}}$ e $S_{\mathscr{B}}$ sono insiemi finiti e $S\subseteq S_{\mathscr{A}}\times S_{\mathscr{B}}$, quindi

$$\sum_{(k,j)\in S} a_{k,j} \leq \sum_{(k,j)\in S_{\mathscr{A}}\times S_{\mathscr{B}}} a_{k,j} = \sum_{k\in S_{\mathscr{A}}}\sum_{j\in S_{\mathscr{B}}} a_{k,j} \leq \sum_{k\in S_{\mathscr{A}}}\sum_{j\in\mathscr{B}} a_{k,j} \leq \sum_{k\in\mathscr{A}}\sum_{j\in\mathscr{B}} a_{k,j}\,.$$

Pertanto

$$\sum_{(k,j)\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}} a_{k,j} = \sup\left\{\sum_{(k,j)\in S} a_{k,j} \,\middle|\, S\subseteq\mathscr{A}\times\mathscr{B}\,,\ S \text{ finito}\right\} \leq \sum_{k\in\mathscr{A}}\sum_{j\in\mathscr{B}} a_{k,j}\,.$$

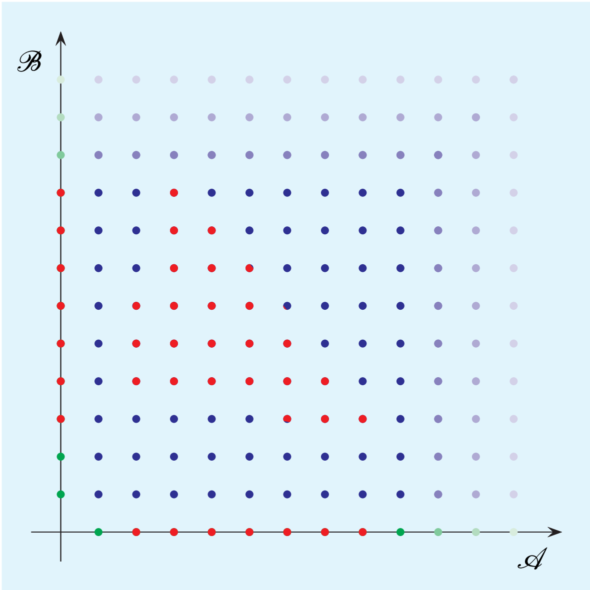


Figura 1.1.1
Gli insiemi considerati nella dimostrazione del teorema 1.1.5. In rosso gli insiemi S (nel piano), $S_{\mathscr{A}}$ (in ascisse) e $S_{\mathscr{B}}$ (in ordinate).

Viceversa, siano $S_{\mathscr{A}} \subseteq \mathscr{A}$ e $S_{\mathscr{B}} \subseteq \mathscr{B}$ finiti. Si ha

$$\sum_{j\in S_{\mathscr{B}}} \sum_{k\in S_{\mathscr{A}}} a_{k,j} = \sum_{(k,j)\in S_{\mathscr{A}}\times S_{\mathscr{B}}} a_{k,j} \le \sum_{(k,j)\in \mathscr{A}\times\mathscr{B}} a_{k,j} ,$$

pertanto

$$\sum_{j\in \mathscr{B}} \sum_{k\in S_{\mathscr{A}}} a_{k,j} = \sup\left\{ \sum_{j\in S_{\mathscr{B}}} \sum_{k\in S_{\mathscr{A}}} a_{k,j} \,\middle|\, S_{\mathscr{B}} \subseteq \mathscr{B}\,,\ S_{\mathscr{B}} \text{ finito} \right\} \le \sum_{(k,j)\in \mathscr{A}\times\mathscr{B}} a_{k,j} .$$

Per il teorema 1.1.4, si ha

$$\sum_{k\in S_{\mathscr{A}}} \sum_{j\in \mathscr{B}} a_{k,j} = \sum_{j\in \mathscr{B}} \sum_{k\in S_{\mathscr{A}}} a_{k,j} ,$$

quindi

$$\begin{aligned}\sum_{k\in \mathscr{A}} \sum_{j\in \mathscr{B}} a_{k,j} &= \sup\left\{ \sum_{k\in S_{\mathscr{A}}} \sum_{j\in \mathscr{B}} a_{k,j} \,\middle|\, S_{\mathscr{A}} \subseteq \mathscr{A}\,,\ S_{\mathscr{A}} \text{ finito} \right\} = \\ &= \sup\left\{ \sum_{j\in \mathscr{B}} \sum_{k\in S_{\mathscr{A}}} a_{k,j} \,\middle|\, S_{\mathscr{A}} \subseteq \mathscr{A}\,,\ S_{\mathscr{A}} \text{ finito} \right\} \le \sum_{(k,j)\in \mathscr{A}\times\mathscr{B}} a_{k,j} .\end{aligned}$$

■

1.2 Misura secondo Lebesgue

Esponiamo la teoria dell'integrazione per funzioni definite in sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ secondo Lebesgue[1].

Questa teoria, anche nel caso $n = 1$, è più generale di quella che conduce alla definizione di integrale secondo Riemann. L'insieme delle funzioni integrabili è più ampio e l'integrale ha migliori proprietà, ad esempio rispetto allo scambio tra limiti e integrali.

[1]Questa teoria dell'integrazione e la teoria della misura che ne costituisce il fondamento prendono il nome da Henri Léon Lebesgue (Beauvais, Francia, 1875 - Parigi, 1941), che illustrò le idee principali in un articolo del 1901 e sviluppò completamente la teoria nella tesi di dottorato del 1902. Lebesgue diede contributi in vari campi dell'analisi matematica

Lo sviluppo della teoria dell'integrazione richiede anzitutto la definizione di una misura per sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$. Con questa misura si formalizza il concetto di area per sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ e di volume per sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$.

Prima di fare un'esposizione precisa, illustriamo le motivazioni che stanno alla base delle definizioni che daremo.

La misura di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ sarà un numero reale esteso non negativo (cioè un elemento di $[0,+\infty]$). Le proprietà minime che è ragionevole chiedere che siano soddisfatte da una misura sono:

monotonia: se $A \subseteq B$, allora la misura di A è minore o uguale alla misura di B;

additività: se $A \cap B = \varnothing$, allora la misura di $A \cup B$ è la somma delle misure di A e di B.

Consideriamo anzitutto gli insiemi per cui si può definire in modo naturale la misura: i rettangoli di $\mathbb{R}^2$, i parallelepipedi di $\mathbb{R}^3$ e gli insiemi che ne costituiscono la naturale generalizzazione in dimensione n, cioè il prodotto cartesiano di n intervalli limitati; nel corso di questa discussione informale chiamiamo rettangoli tali insiemi in qualunque dimensione. Per tali insiemi è naturale definire la misura come prodotto delle lunghezze dei lati, cioè

$$\operatorname{mis}\left(\bigtimes_{j=1}^{n}[a_j, b_j]\right) = \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j).$$

La definizione può essere estesa all'unione di rettangoli che non si "sovrappongono", cioè che non hanno punti interni in comune. Nel caso del piano ciò significa che consideriamo l'unione di più rettangoli che possono avere un lato o parte di un lato in comune, ma non punti interni in comune. Per questi insiemi la misura è la somma delle misure dei rettangoli di cui sono unione. Per avere una definizione più generale consideriamo sia unioni finite che unioni di una infinità numerabile di rettangoli. Come vedremo nel seguito, la scelta di considerare anche unioni numerabili consente di migliorare le proprietà della misura. Chiamiamo plurirettangolo l'unione di una famiglia finita o numerabile di rettangoli che a due a due non si sovrappongono. Poiché consideriamo anche unioni numerabili, la misura di un plurirettangolo può essere $+\infty$.

Poiché supponiamo che la misura sia monotona, evidentemente ogni $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ha misura minore o uguale alla misura di ogni plurirettangolo contenente A; quindi tale misura è minore o uguale all'estremo inferiore della misura dei plurirettangoli che contengono A. In questo modo individuiamo una quantità basata sulla approssimazione di A "dall'esterno" che chiamiamo "misura esterna" e indichiamo con μ^*. La misura che vogliamo definire è certamente minore o uguale a questa.

Si verifica facilmente che la misura esterna così definita è subadditiva, cioè la misura esterna dell'unione di due insiemi è minore o uguale alla somma delle misure esterne. In formula: $\mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B)$. Infatti è evidente che l'unione di due plurirettangoli P e Q che non si sovrappongono è un plurirettangolo, la cui misura è uguale a $\operatorname{mis}(P) + \operatorname{mis}(Q)$. Se invece P e Q si sovrappongono allora, eliminando i rettangoli comuni ai due plurirettangoli, si può ancora vedere $P \cup Q$ come unione di rettangoli che non si sovrappongono. In questo caso però si ha $\operatorname{mis}(P \cup Q) < \operatorname{mis}(P) + \operatorname{mis}(Q)$, perché nella somma delle misure i rettangoli dell'intersezione vengono contati due volte. Quindi se P e Q sono plurirettangoli tali che $A \subseteq P$ e $B \subseteq Q$, allora $P \cup Q$ è un plurirettangolo contenente $A \cup B$, quindi

$$\mu^*(A \cup B) \leq \operatorname{mis}(P \cup Q) \leq \operatorname{mis}(P) + \operatorname{mis}(Q).$$

Se nell'ultimo membro si passa all'estremo inferiore rispetto a P contenente A e Q contenente B si ottiene $\mu^*(A\cup B)\le \mu^*(A)+\mu^*(B)$.

Tuttavia la misura esterna non è additiva, cioè non necessariamente la misura dell'unione di due insiemi disgiunti è la somma delle misure. Per provare la disuguaglianza inversa della subadditività sarebbe necessario procedere in modo contrario a quanto fatto sopra, dove siamo passati da due plurirettangoli contenenti A e B alla loro unione che contiene $A\cup B$. In questo caso, dati due insiemi A e B disgiunti, bisogna scomporre un plurirettangolo P che contiene $A\cup B$ nell'unione di due plurirettangoli che non si sovrappongono, P_A e P_B, tali che $A\subseteq P_A$ e $B\subseteq P_B$. Questo non è sempre possibile.

Abbiamo stabilito che, se una misura soddisfa la proprietà di monotonia, allora è minore o uguale alla misura esterna. Possiamo in modo analogo cercare una quantità che sia minore o uguale alla misura. Si può pensare di ripetere il ragionamento precedente, utilizzando plurirettangoli inclusi nell'insieme, ma ciò non è opportuno, perché un insieme con interno non vuoto non contiene alcun plurirettangolo.

Nel caso che A sia limitato non è difficile individuare un numero minore o uguale alla misura. Fissato E rettangolo contenente A, la misura di $E\backslash A$ è minore uguale a $\mu^*(E\setminus A)$, quindi la misura di A, uguale alla misura di E meno la misura di $E\backslash A$, è maggiore o uguale a $\mathrm{mis}(E)-\mu^*(E\setminus A)$. Nel corso di questa discussione chiamiamo misura interna questa quantità.

Verifichiamo che la misura interna è superadditiva, cioè se A e B hanno intersezione vuota allora la misura interna dell'unione è maggiore o uguale alla somma delle misure interne. Ciò significa verificare che

$$\mathrm{mis}(E)-\mu^*\big(E\setminus(A\cup B)\big)\ge\big(\mathrm{mis}(E)-\mu^*(E\setminus A)\big)+\big(\mathrm{mis}(E)-\mu^*(E\setminus B)\big),$$

cioè

$$\mu^*(E\setminus A)+\mu^*(E\setminus B)\ge \mathrm{mis}(E)+\mu^*\big(E\setminus(A\cup B)\big).$$

Posto $C=E\setminus A$ e $D=E\setminus B$, da $A\cap B=\varnothing$ segue $C\cup D=E$; inoltre

$$E\setminus(A\cup B)=E\cap\complement(A\cup B)=E\cap\complement A\cap\complement B=(E\cap\complement A)\cap(E\cap\complement B)=C\cap D.$$

Quindi la disuguaglianza da provare è

$$\mu^*(C)+\mu^*(D)\ge \mathrm{mis}(C\cup D)+\mu^*(C\cap D).$$

Se P e Q sono due plurirettangoli contenenti rispettivamente C e D allora $P\cap Q$ è un plurirettangolo contenente $C\cap D$ e $P\cup Q$ è un plurirettangolo contenente $C\cup D$. Inoltre $\mathrm{mis}(P)+\mathrm{mis}(Q)=\mathrm{mis}(P\cup Q)+\mathrm{mis}(P\cap Q)$, perché nella somma delle misure i rettangoli che costituiscono l'intersezione vengono contati due volte. Pertanto

$$\mathrm{mis}(C\cup D)+\mu^*(C\cap D)\le \mathrm{mis}(P\cup Q)+\mathrm{mis}(P\cap Q)=\mathrm{mis}(P)+\mathrm{mis}(Q).$$

Se nell'ultimo membro si passa all'estremo inferiore rispetto a P contenente C e Q contenente D si ottiene $\mathrm{mis}(C\cup D)+\mu^*(C\cap D)\le\mu^*(C)+\mu^*(D)$.

Se consideriamo insiemi per cui la misura interna coincide con la misura esterna, e quindi con la misura che vogliamo definire, si ha sia la subadditività che la superadditività, quindi si ha additività. Pertanto una scelta naturale è quella di definire la misura solo per gli insiemi per cui vale questa uguaglianza; tali insiemi saranno detti misurabili. L'uguaglianza tra misura interna e misura esterna significa che $\mu^*(A)=\mathrm{mis}(E)-\mu^*(E\setminus A)$, cioè $\mu^*(A)+\mu^*(E\setminus A)=\mathrm{mis}(E)$, con E rettangolo contenente A.

Nella discussione sulla misura interna abbiamo considerato solo insiemi limitati; è opportuno costruire una teoria che consideri anche gli insiemi illimitati. Per questo risulta conveniente evitare di trattare la misura interna e chiamare misurabili gli insiemi per cui vale una condizione del tipo $\mu^*(A) + \mu^*(E \setminus A) = \operatorname{mis}(E)$ anche quando E non è un rettangolo o non contiene A. Ovviamente se E non è un rettangolo o un plurirettangolo al posto di $\operatorname{mis}(E)$ va considerata $\mu^*(E)$, mentre, per tenere conto che può non essere $A \subseteq E$, si considera $\mu^*(E \cap A)$ invece che $\mu^*(A)$.

Nel definire la misura esterna di un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^n$ possiamo introdurre una semplificazione. Abbiamo finora considerato plurirettangoli, cioè unioni di famiglie finite o numerabili di rettangoli che non si sovrappongono, e abbiamo associato a un plurirettangolo la somma delle misure dei rettangoli che lo compongono. L'unione di una famiglia finita o numerabile di rettangoli, anche se alcuni di loro si sovrappongono, è ancora un plurirettangolo, perché si possono "buttare via" le parti di plurirettangoli che si sovrappongono, ottenendo una famiglia di rettangoli che non si sovrappongono con la stessa unione. La misura del plurirettangolo così ottenuto è ovviamente minore della somma delle misure dei rettangoli della famiglia. Quindi, se consideriamo tutte le famiglie di rettangoli la cui unione contiene A e a ogni famiglia associamo la somma delle misure dei rettangoli che la costituiscono, otteniamo un insieme che ha lo stesso estremo inferiore dell'insieme delle misure dei plurirettangoli contenenti A. Quindi possiamo definire:

$$\mu^*(A) =$$
$$= \inf\left\{ \sum_{k \in \mathscr{A}} \operatorname{mis}(P_k) \,\middle|\, \mathscr{A} \text{ è finito o numerabile, } \forall k \in \mathscr{A},\ P_k \text{ è un rettangolo, } A \subseteq \bigcup_{k \in \mathscr{A}} P_k \right\}.$$

In questo modo non è necessario premettere alla definizione di misura esterna la definizione di misura dei plurirettangoli, definizione che è piuttosto complessa.

1.2.1 Misura esterna

Formalizziamo quanto illustrato nella discussione precedente, definendo anzitutto la misura esterna di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ e studiandone le proprietà.

Definizione di intervallo compatto di $\mathbb{R}^n$

Chiamiamo **intervallo compatto** di $\mathbb{R}^n$ ogni insieme del tipo

$$I = \bigtimes_{j=1}^{n} [a_j, b_j]$$

con $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, tali che $a_j \leq b_j$, per $j = 1, 2, \ldots, n$.

In questa definizione si richiede che sia $a_j \leq b_j$; se per un j risulta $a_j = b_j$, allora l'intervallo compatto ha interno vuoto. Ad esempio un segmento parallelo a uno degli assi cartesiani è un intervallo compatto. Anche un insieme costituito da un punto è un intervallo compatto. Questa scelta consente di semplificare alcuni discorsi successivi. In particolare l'intersezione di due intervalli compatti, se non è vuota, è sempre un intervallo compatto.

Se un intervallo compatto ha interno vuoto diciamo che è **degenere**.

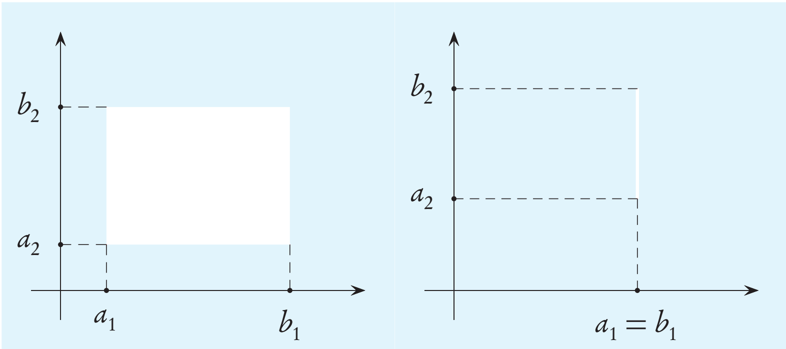


Figura 1.2.1
Un intervallo compatto (a sinistra), un intervallo compatto degenere (a destra).

Definizione di misura di un intervallo compatto

Sia $I = \times_{j=1}^{n}[a_j, b_j]$ un intervallo compatto di $\mathbb{R}^n$. Chiamiamo **misura** di I il numero

$$\mathrm{mis}(I) = \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j).$$

Evidentemente la misura di un intervallo compatto è un numero reale non negativo. Essa è nulla se e solo se l'intervallo è degenere.

Nel piano un intervallo compatto è un rettangolo e la misura è la sua area. Nello spazio tridimensionale un intervallo compatto è un parallelepipedo e la misura è il suo volume.

Definizione di ricoprimento lebesguiano

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Chiamiamo **ricoprimento lebesguiano** (r. l.) di A ogni famiglia finita o numerabile di intervalli compatti di $\mathbb{R}^n$ $\{I_k \mid k \in \mathscr{A}\}$, tale che

$$A \subseteq \bigcup_{k \in \mathscr{A}} I_k.$$

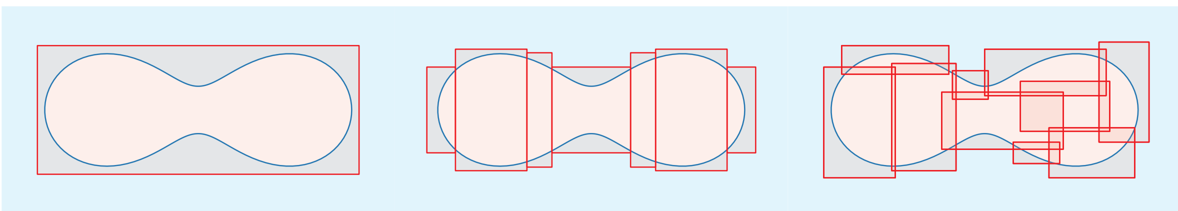


Figura 1.2.2
Esempi di ricoprimenti lebesguiani.

1.2.1 Osservazione. L'insieme $\mathscr{A}$ degli indici che compare nella definizione di r. l. è finito o numerabile; se è finito può essere messo in corrispondenza biunivoca con $\{0, 1, \dots, n\}$, per un $n \in \mathbb{N}$ opportuno, se è numerabile può essere messo in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$. Quindi, cambiando gli indici, si può sempre supporre che sia $\mathscr{A} \subseteq \mathbb{N}$. Tuttavia non chiediamo che l'insieme degli indici sia un insieme di numeri naturali, perché in alcune dimostrazioni si considerano contemporaneamente più insiemi di indici diversi tra loro. ◀

1.2.2 Osservazione. Ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ ha un r. l. Infatti $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}[-k,k]^n=\mathbb{R}^n$, pertanto, qualunque sia $A\subseteq\mathbb{R}^n$, $\big\{[-k,k]^n \,\big|\, k\in\mathbb{N}\big\}$ è un r. l. di A. ◀

Definizione di misura esterna

Sia $A\subseteq\mathbb{R}^n$. Chiamiamo **misura esterna** di A il numero reale esteso

$$\mu^*(A)=\inf\bigg\{\sum_{k\in\mathscr{A}}\operatorname{mis}(I_k)\,\bigg|\,\{I_k \mid k\in\mathscr{A}\}\text{ è r. l. di }A\bigg\}.$$

Poiché A ha almeno un r. l., l'insieme che compare in questa definizione è non vuoto, inoltre è incluso in $[0,+\infty]$. Quindi la definizione di misura esterna è ben posta e $\mu^*(A)\in[0,+\infty]$.

Definizione di insieme di misura nulla

Sia $A\subseteq\mathbb{R}^n$. Diciamo che A ha **misura nulla** quando $\mu^*(A)=0$.

1.2.3 Osservazione. Se $A\subseteq\mathbb{R}^n$ è finito o numerabile, allora $\mu^*(A)=0$; infatti in questo caso $\big\{\{x\}\,\big|\,x\in A\big\}$ è un r. l. di A costituito da intervalli compatti degeneri, quindi la somma delle misure è 0. ◀

1.2.4 Esempio. Nel piano $\mathbb{R}^2$ consideriamo la retta $\mathbb{R}\times\{c\}$, con $c\in\mathbb{R}$; tale insieme ha misura nulla.

Per provarlo consideriamo $\big\{[-k,k]\times\{c\}\,\big|\,k\in\mathbb{N}\big\}$. Questo è un r. l. della retta e si ha

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\operatorname{mis}\big([-k,k]\times\{c\}\big)=\sum_{k=0}^{+\infty}0=0.$$ ◀

1.2.5 Esempio. Nel piano $\mathbb{R}^2$ consideriamo la retta $A=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\big|\,x=y\big\}$; l'insieme A ha misura nulla.

Sia $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$; poniamo $s_0=0$ e, per $k\in\mathbb{N}^*$, $s_k=\sum_{j=1}^k 1/j$. Poniamo inoltre

$$I_k=[\varepsilon s_{k-1},\varepsilon s_k]^2,\qquad J_k=[-\varepsilon s_k,-\varepsilon s_{k-1}]^2.$$

Poiché la serie armonica è divergente, $\lim_{k\to+\infty}s_k=+\infty$, quindi, se $x\in\mathbb{R}^+$, allora $\exists k\in\mathbb{N}^*$ tale che $s_{k-1}\le x\le s_k$, quindi $x\in I_k$. Analogamente, se $x\in\mathbb{R}^-$, allora $\exists k\in\mathbb{N}^*$ tale che $x\in J_k$. Pertanto $\{I_k \mid k\in\mathbb{N}^*\}\cup\{J_k \mid k\in\mathbb{N}^*\}$ è un r. l. di A. Si ha

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\operatorname{mis}(I_k)+\sum_{k=1}^{+\infty}\operatorname{mis}(J_k)=2\sum_{k=1}^{+\infty}\varepsilon^2(s_k-s_{k-1})^2=2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\varepsilon^2.$$

Poiché la serie armonica generalizzata di esponente 2 è convergente, $\sum_{k=1}^{+\infty}(1/k^2)\in\mathbb{R}^+$, quindi $\inf\big\{2\sum_{k=1}^{+\infty}(1/k^2)\varepsilon^2\,\big|\,\varepsilon\in\mathbb{R}^+\big\}=0$. Perciò $\mu^*(A)=0$. ◀

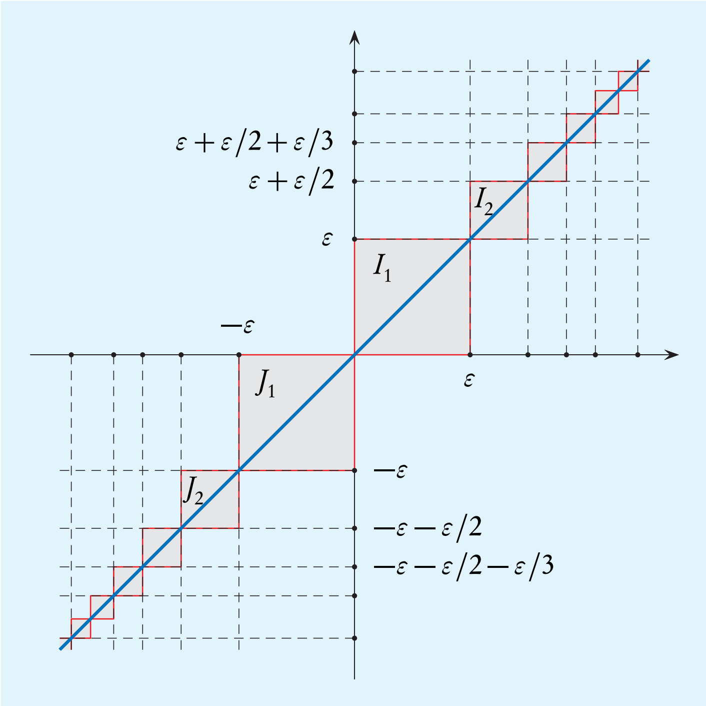


Figura 1.2.3
Il ricoprimento lebesguiano della retta di equazione $y = x$ introdotto nell'esempio 1.2.5.

1.2.6 Esempio. In $\mathbb{R}^n$ consideriamo un iperpiano parallelo agli assi cartesiani, cioè, per $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ e $c \in \mathbb{R}$, consideriamo $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_j = c\}$; l'iperpiano ha misura nulla.

Per semplificare la notazione supponiamo $j = n$. L'insieme $\{[-k,k]^{n-1} \times \{c\} \,|\, k \in \mathbb{N}\}$ è un r. l. di A e

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \operatorname{mis}\big([-k,k]^{n-1} \times \{c\}\big) = \sum_{k=0}^{+\infty} 0 = 0 .$$

Quindi $\mu^*(A) = 0$. ◀

1.2.7 Esempio. L'insieme $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$ ha misura nulla.

Per $q \in \mathbb{Q}$ e $k \in \mathbb{N}$ poniamo $I_{q,k} = \{q\} \times [-k,k]$. Poiché $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{N}$ sono numerabili anche $\mathbb{Q} \times \mathbb{N}$ è numerabile, quindi $\{I_{q,k} \,|\, q \in \mathbb{Q},\ k \in \mathbb{N}\}$ è una famiglia numerabile di intervalli compatti. Si ha

$$\bigcup_{q\in\mathbb{Q},\, k\in\mathbb{N}} I_{q,k} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (\{q\} \times [-k,k]) \Big) = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} (\{q\} \times \mathbb{R}) = \mathbb{Q} \times \mathbb{R} ;$$

pertanto $\{I_{q,k} \,|\, q \in \mathbb{Q}, k \in \mathbb{N}\}$ è un r. l. di $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$. Poiché ciascuno degli intervalli della famiglia ha misura 0, risulta $\sum_{q\in\mathbb{Q},k\in\mathbb{N}} \operatorname{mis}(I_{q,k}) = 0$, quindi $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$ ha misura nulla. ◀

Per gli intervalli compatti la misura esterna coincide con la misura definita come prodotto della lunghezza dei lati; abbiamo cioè il seguente teorema.

1.2.8 Teorema

Sia I un intervallo compatto di $\mathbb{R}^n$. Allora $\mu^*(I) = \operatorname{mis}(I)$.

Questo teorema è del tutto intuitivo, ma non è semplice provarlo. Alla dimostrazione premettiamo alcuni lemmi.

Se E è un insieme finito, indichiamo con $\#E$ il numero di elementi di E.

Se $N \in \mathbb{N}^*$, poniamo $\mathbb{Z}/N = \{m/N \mid m \in \mathbb{Z}\}$; questo è l'insieme dei numeri razionali che possono essere scritti come frazione con denominatore N. Evidentemente $\mathbb{Z}/1 = \mathbb{Z}$.

1.2.9 Lemma

Sia I un intervallo compatto di $\mathbb{R}^n$. Si ha

$$\operatorname{mis}(I) = \lim_{N\to+\infty} \frac{\#\big(I \cap (\mathbb{Z}/N)^n\big)}{N^n}.$$

Dimostrazione. Consideriamo anzitutto il caso $n = 1$.

Sia $I = [a, b]$. Se $[a, b] \cap (\mathbb{Z}/N) \neq \varnothing$, siano $q, r \in \mathbb{Z}$ tali che

$$\frac{q}{N} = \min\big([a, b] \cap (\mathbb{Z}/N)\big), \qquad \frac{r}{N} = \max\big([a, b] \cap (\mathbb{Z}/N)\big).$$

Evidentemente si ha $\#\big([a, b] \cap (\mathbb{Z}/N)\big) = r - q + 1$. Inoltre risulta

$$\frac{q-1}{N} < a \le \frac{q}{N}, \qquad \frac{r}{N} \le b < \frac{r+1}{N},$$

da cui, sottraendo membro a membro, segue

$$\frac{r-q}{N} \le b - a < \frac{r-q+2}{N},$$

cioè

$$b - a - \frac{1}{N} < \frac{r-q+1}{N} \le b - a + \frac{1}{N}.$$

Pertanto

$$b - a - \frac{1}{N} < \frac{\#\big([a, b] \cap (\mathbb{Z}/N)\big)}{N} \le b - a + \frac{1}{N}.$$

Se $[a, b] \cap (\mathbb{Z}/N) = \varnothing$, allora $b - a < 1/N$, quindi $b - a - 1/N < 0 < b - a + 1/N$ e anche in questo caso vale la disuguaglianza scritta sopra.

Pertanto $\lim_{N\to+\infty} \#\big([a, b] \cap (\mathbb{Z}/N)\big)/N = b - a = \operatorname{mis}(I)$.

Consideriamo ora n arbitrario.

Sia $I = \bigtimes_{j=1}^n [a_j, b_j]$. Evidentemente si ha $I \cap (\mathbb{Z}/N)^n = \bigtimes_{j=1}^n \big([a_j, b_j] \cap (\mathbb{Z}/N)\big)$, quindi

$$\#\big(I \cap (\mathbb{Z}/N)^n\big) = \prod_{j=1}^n \#\big([a_j, b_j] \cap (\mathbb{Z}/N)\big).$$

Allora, per quanto dimostrato nel caso $n = 1$, si ha

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\#\big(I \cap (\mathbb{Z}/N)^n\big)}{N^n} = \prod_{j=1}^n \lim_{N\to+\infty} \frac{\#\big([a_j, b_j] \cap (\mathbb{Z}/N)\big)}{N} = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j) = \operatorname{mis}(I). \qquad \blacksquare$$

1.2.10 Lemma

Siano $I, I_1, I_2, \dots, I_p$ intervalli compatti di $\mathbb{R}^n$. Se $I \subseteq \bigcup_{k=1}^p I_k$, allora risulta

$$\operatorname{mis}(I) \leq \sum_{k=1}^{p} \operatorname{mis}(I_k).$$

Dimostrazione. Poiché $I \subseteq \bigcup_{k=1}^p I_k$, si ha anche

$$I \cap (\mathbb{Z}/N)^n \subseteq \left(\bigcup_{k=1}^{p} I_k\right) \cap (\mathbb{Z}/N)^n = \bigcup_{k=1}^{p} \big(I_k \cap (\mathbb{Z}/N)^n\big),$$

quindi $\#\big(I \cap (\mathbb{Z}/N)^n\big) \leq \sum_{k=1}^p \#\big(I_k \cap (\mathbb{Z}/N)^n\big)$, da cui, per il lemma 1.2.9, segue

$$\operatorname{mis}(I) = \lim_{N \to +\infty} \frac{\#\big(I \cap (\mathbb{Z}/N)^n\big)}{N^n} \leq \sum_{k=1}^{p} \lim_{N \to +\infty} \frac{\#\big(I_k \cap (\mathbb{Z}/N)^n\big)}{N^n} = \sum_{k=1}^{p} \operatorname{mis}(I_k).$$ ■

1.2.11 Lemma

Siano I un intervallo compatto di $\mathbb{R}^n$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Allora esiste J intervallo compatto di $\mathbb{R}^n$ tale che $I \subseteq \operatorname{int} J$ e $\operatorname{mis}(J) < \operatorname{mis}(I) + \varepsilon$.

Dimostrazione. Sia $I = \bigtimes_{j=1}^n [a_j, b_j]$; per $\delta \in \mathbb{R}^+$ indichiamo con J_δ l'intervallo compatto $\bigtimes_{j=1}^n [a_j - \delta, b_j + \delta]$. Risulta $I \subseteq \operatorname{int} J_\delta$. Inoltre.

$$\operatorname{mis}(J_\delta) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j + 2\delta) \xrightarrow[\delta \to 0]{} \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j) = \operatorname{mis}(I).$$

Pertanto, scegliendo δ opportunamente, risulta $\operatorname{mis}(J_\delta) < \operatorname{mis}(I) + \varepsilon$. ■

Dimostrazione del teorema 1.2.8. Poiché $\{I\}$ è un r. l. di I, $\operatorname{mis}(I)$ è uno degli elementi dell'insieme il cui estremo inferiore è $\mu^*(I)$. Quindi $\mu^*(I) \leq \operatorname{mis}(I)$.

Dimostriamo che $\mu^*(I) \geq \operatorname{mis}(I)$; per questo è sufficiente provare che se $\{I_k \mid k \in \mathscr{A}\}$ è un r. l. di I allora $\operatorname{mis}(I) \leq \sum_{k \in \mathscr{A}} \operatorname{mis}(I_k)$.

Se $\mathscr{A}$ è finito la disuguaglianza è conseguenza immediata del lemma 1.2.10.

Se $\mathscr{A}$ è infinito, per semplificare la notazione possiamo supporre $\mathscr{A} = \mathbb{N}$. Per il lemma 1.2.11, fissato $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste un intervallo compatto J_k tale che $I_k \subseteq \operatorname{int} J_k$ e $\operatorname{mis}(J_k) < \operatorname{mis}(I_k) + \varepsilon/2^k$. Allora $I \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \operatorname{int} J_k$, quindi $\{\operatorname{int} J_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ è un ricoprimento aperto del compatto I; pertanto esiste un sottoricoprimento finito $\{\operatorname{int} J_{k_1}, \operatorname{int} J_{k_2}, \dots, \operatorname{int} J_{k_p}\}$. Per il lemma 1.2.10, si ha

$$\operatorname{mis}(I) \leq \sum_{\ell=1}^{p} \operatorname{mis}(J_{k_\ell}) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \operatorname{mis}(J_k) < \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\operatorname{mis}(I_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \operatorname{mis}(I_k) + 2\varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ε si ha quindi $\operatorname{mis}(I) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \operatorname{mis}(I_k)$. ■

Studiamo ora le proprietà elementari della misura esterna.

1.2.12 Teorema (proprietà della misura esterna)

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora:

I) $\mu^*(A) \in [0, +\infty]$;

II) se $A \subseteq B$, allora $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;

III) $\mu^*(\varnothing) = 0$, $\mu^*(\mathbb{R}^n) = +\infty$;

IV) se A è finito o numerabile, allora $\mu^*(A) = 0$;

V) se A è limitato, allora $\mu^*(A) < +\infty$.

Dimostrazione. I) Segue immediatamente dalla definizione.

II) Se $A \subseteq B$ allora ogni r. l. di B è anche r. l. di A, quindi l'insieme il cui estremo inferiore è $\mu^*(A)$ contiene l'insieme il cui estremo inferiore è $\mu^*(B)$. Pertanto $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

III) Qualunque famiglia di intervalli compatti di $\mathbb{R}^n$ è un r. l. di $\varnothing$, in particolare una famiglia che contiene solo un intervallo degenere. Poiché la misura di un intervallo degenere è 0, $\mu^*(\varnothing) = 0$.

Qualunque sia $k \in \mathbb{N}$, si ha $[-k, k]^n \subseteq \mathbb{R}^n$, pertanto, per l'affermazione II e per il teorema 1.2.8 si ha

$$\mu^*(\mathbb{R}^n) \geq \mu^*\big([-k, k]^n\big) = \operatorname{mis}\big([-k, k]^n\big) = (2k)^n;$$

quindi $\mu^*(\mathbb{R}^n) = +\infty$.

IV) Se A è finito o numerabile, allora è unione di una famiglia finita o numerabile di insiemi con un elemento, ciascuno dei quali è un intervallo compatto degenere, quindi tale famiglia è un r. l. di A e la somma delle misure dei suoi elementi è 0.

V) Se A è limitato, allora $\exists k \in \mathbb{N}$ tale che $A \subseteq [-k, k]^n$. Pertanto $\big\{[-k, k]^n\big\}$ è un r. l. di A, quindi $\mu^*(A) \leq \operatorname{mis}\big([-k, k]^n\big)$, perciò $\mu^*(A) < +\infty$. ■

1.2.13 Teorema (subadditività numerabile della misura esterna)

Sia $\{A_k \mid k \in \mathscr{A}\}$ una famiglia finita o numerabile di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$. Allora

$$\mu^*\left(\bigcup_{k \in \mathscr{A}} A_k\right) \leq \sum_{k \in \mathscr{A}} \mu^*(A_k).$$

Dimostrazione. Se $\sum_{k \in \mathscr{A}} \mu^*(A_k) = +\infty$, allora la disuguaglianza è verificata.

Consideriamo il caso $\sum_{k \in \mathscr{A}} \mu^*(A_k) < +\infty$ e, per semplificare la notazione, supponiamo $\mathscr{A} \subseteq \mathbb{N}$.

Fissiamo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Per definizione di misura esterna, $\forall k \in \mathscr{A}$, esiste un r. l. di A_k, $\{I_{k,j} \mid j \in \mathscr{B}_k\}$, tale che

$$\sum_{j \in \mathscr{B}_k} \operatorname{mis}(I_{k,j}) \leq \mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Aggiungendo eventualmente infiniti intervalli compatti di misura uguale a 0, possiamo supporre che, per ogni k, il ricoprimento $\{I_{k,j} \mid j \in \mathscr{B}_k\}$ sia numerabile e, rinominando gli indici, che sia $\mathscr{B}_k = \mathbb{N}$. Si ha

$$\bigcup_{k\in\mathscr{A}} A_k \subseteq \bigcup_{k\in\mathscr{A}} \bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_{k,j} = \bigcup_{(k,j)\in\mathscr{A}\times\mathbb{N}} I_{k,j}\,;$$

$\mathscr{A} \times \mathbb{N}$ è prodotto cartesiano di un insieme finito o $\{I_{k,j} \mid (k,j) \in \mathscr{A} \times \mathbb{N}\}$ è un r. l. di $\bigcup_{k\in\mathscr{A}} A_k$. Quindi, per il teorema 1.1.5, si ha

$$\mu^*\Big(\bigcup_{k\in\mathscr{A}} A_k\Big) \le \sum_{(k,j)\in\mathscr{A}\times\mathbb{N}} \operatorname{mis}(I_{k,j}) = \sum_{k\in\mathscr{A}} \sum_{j\in\mathbb{N}} \operatorname{mis}(I_{k,j}) \le \sum_{k\in\mathscr{A}} \Big(\mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\Big) \le$$
$$\le \sum_{k\in\mathscr{A}} \mu^*(A_k) + \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^k} = \sum_{k\in\mathscr{A}} \mu^*(A_k) + 2\varepsilon\,.$$

Vista l'arbitrarietà di ε il teorema è provato. ■

Poiché la misura di un intervallo compatto dipende solo dalla lunghezza dei suo lati, se si trasla un intervallo compatto si ottiene un intervallo compatto che ha la stessa misura. Da qui segue immediatamente che questo vale anche per la misura esterna di un qualunque insieme. Abbiamo quindi il seguente teorema.

1.2.14 Teorema (invarianza della misura esterna per traslazioni)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$. Posto $B = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c} \mid \boldsymbol{x} \in A\}$, si ha $\mu^*(B) = \mu^*(A)$.

Dimostrazione. Poniamo

$$\boldsymbol{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}\,.$$

Evidentemente $B = \boldsymbol{T}(A)$. Se $I = \bigtimes_{j=1}^n [a_j, b_j]$ è un intervallo compatto di $\mathbb{R}^n$, allora

$$\boldsymbol{T}(I) = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c} \mid \boldsymbol{x} \in I\} = \bigtimes_{j=1}^n [a_j + c_j, b_j + c_j]$$

è un intervallo compatto di $\mathbb{R}^n$ e

$$\operatorname{mis}\big(\boldsymbol{T}(I)\big) = \prod_{j=1}^n \big((b_j + c_j) - (a_j + c_j)\big) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j) = \operatorname{mis}(I)\,.$$

La famiglia $\{I_k \mid k \in \mathscr{A}\}$ è un r. l. di A se e solo se $\{\boldsymbol{T}(I_k) \mid k \in \mathscr{A}\}$ è un r. l. di $\boldsymbol{T}(A)$ e si ha

$$\sum_{k\in\mathscr{A}} \operatorname{mis}\big(\boldsymbol{T}(I_k)\big) = \sum_{k\in\mathscr{A}} \operatorname{mis}(I_k)\,.$$

Pertanto $\mu^*\big(\boldsymbol{T}(A)\big) = \mu^*(A)$. ■

1.2.2 Misura

La misura esterna è definita per ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$, ma, come osservato sopra, non gode di buone proprietà, quindi si utilizza la misura esterna solo di insiemi di una classe particolare. Introduciamo quindi il concetto di insieme misurabile, dando una definizione suggerita dalla discussione preliminare.

Definizione di insieme misurabile secondo Lebesgue e di misura

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Diciamo che A è **misurabile secondo Lebesgue** quando, $\forall E \subseteq \mathbb{R}^n$, si ha

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap \complement A).$$

Indichiamo con $\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ l'insieme dei sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^n$.

Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è misurabile chiamiamo **misura** di A, e indichiamo con $\mu(A)$, il numero reale esteso $\mu^*(A)$.

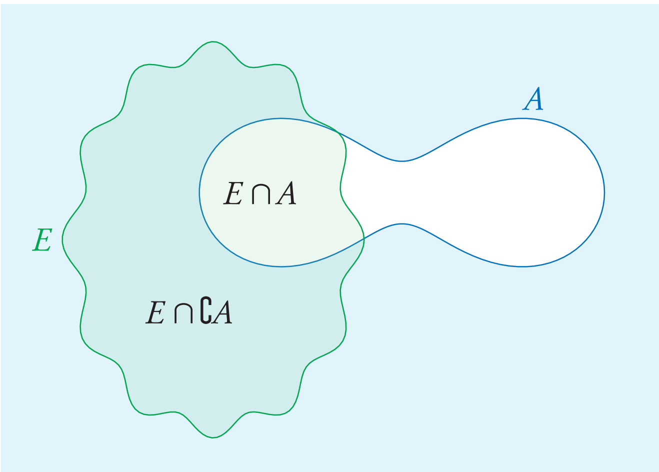


Figura 1.2.4
Per stabilire se un insieme A è misurabile si confronta la misura esterna di un qualunque insieme E con quelle degli insiemi $E \cap A$ e $E \cap \complement A$.

1.2.15 Osservazione. Poiché $\complement\complement A = A$, dalla definizione segue che $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ se e solo se $\complement A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$. ◀

1.2.16 Osservazione. Per la subadditività della misura esterna si ha sempre

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap \complement A);$$

quindi per dimostrare che A è misurabile è sufficiente dimostrare che, $\forall E \subseteq \mathbb{R}^n$, si ha

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap \complement A).$$

Evidentemente questa condizione è certamente verificata se $\mu^*(E) = +\infty$. ◀

Studiamo le proprietà elementari della misurabilità.

1.2.17 Teorema

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Se $\mu^*(A) = 0$, allora $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Per il teorema 1.2.12, affermazione II, si ha

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap \complement A) \le \mu^*(A) + \mu^*(E) = \mu^*(E),$$

pertanto A è misurabile. ■

1.2.18 Osservazione. Se A è finito o numerabile, allora $\mu^*(A) = 0$ (v. osservazione 1.2.3), quindi questo teorema assicura che ogni insieme finito o numerabile è misurabile. ◀

1.2.19 Osservazione. Ovviamente se A è contenuto in un insieme di misura nulla, allora ha a sua volta misura nulla, quindi questo teorema assicura che è misurabile. ◀

1.2.20 Teorema

Siano $A, B \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$. Allora:

I) $A \cup B \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, $A \cap B \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, $A \setminus B \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$;

II) se $A \subseteq B$, allora $\mu(A) \le \mu(B)$;

III) se $A \cap B = \varnothing$, allora $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$;

IV) se $B \subseteq A$ e $\mu(B) < +\infty$, allora $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$.

Dimostrazione. I) Dimostriamo anzitutto che $A \cup B \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$.

Poiché $A, B \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, qualunque sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$, si ha

$$\begin{aligned}
&\mu^*\big(E \cap (A \cup B)\big) + \mu^*\big(E \cap \complement(A \cup B)\big) = \\
&= \mu^*\Big(\big(E \cap (A \cup B)\big) \cap A\Big) + \mu^*\Big(\big(E \cap (A \cup B)\big) \cap \complement A\Big) + \mu^*(E \cap \complement A \cap \complement B) = \\
&= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap B \cap \complement A) + \mu^*(E \cap \complement A \cap \complement B) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap \complement A) = \mu^*(E).
\end{aligned}$$

Perciò $A \cup B \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$.

Pertanto anche $A \cap B = \complement(\complement A \cup \complement B)$ e $A \setminus B = A \cap \complement B$ sono misurabili.

II) Se $A \subseteq B$, allora, per le proprietà della misura esterna 1.2.12, affermazione II, si ha $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$, quindi la disuguaglianza vale anche per le misure.

III) Supponiamo $A \cap B = \varnothing$. Si ha $(A \cup B) \cap \complement A = (A \cap \complement A) \cup (B \cap \complement A) = B$; poiché A è misurabile risulta

$$\mu(A \cup B) = \mu^*(A \cup B) = \mu^*\big((A \cup B) \cap A\big) + \mu^*\big((A \cup B) \cap \complement A\big) = \mu^*(A) + \mu^*(B) = \mu(A) + \mu(B).$$

IV) Supponiamo $B \subseteq A$, allora $A = (A \setminus B) \cup B$ e $(A \setminus B) \cap B = \varnothing$, pertanto, per l'affermazione III, si ha $\mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(B)$, quindi $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$. ■

1.2.21 Osservazione. Applicando più volte questo teorema, si prova che l'unione e l'intersezione di un numero finito di insiemi misurabili è misurabile e che la misura dell'unione finita di insiemi misurabili a due a due disgiunti è la somma delle misure dei singoli insiemi. ◀

Abbiamo finora studiato unioni e intersezioni finite di insiemi misurabili; vediamo ora le proprietà di unioni e intersezioni numerabili. Premettiamo un lemma utile allo studio di queste proprietà.

1.2.22 Lemma

Siano $A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Se A e B sono disgiunti, allora

$$\mu^*\big(E \cap (A \cup B)\big) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap B).$$

Dimostrazione. Poiché A e B sono disgiunti si ha $(A \cup B) \cap \complement B = A$, quindi

$$\mu^*\big(E \cap (A \cup B)\big) = \mu^*\big(\big(E \cap (A \cup B)\big) \cap B\big) + \mu^*\big(\big(E \cap (A \cup B)\big) \cap \complement B\big) = \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap A). \blacksquare$$

Evidentemente questo lemma vale anche per l'unione finita di insiemi misurabili a due a due disgiunti.

1.2.23 Teorema (additività numerabile della misura)

Sia $\{A_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Allora:

I) $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$;

II) se gli A_k sono a due a due disgiunti, allora $\mu\big(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\big) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(A_k)$.

Dimostrazione. I) Dimostriamo anzitutto che, se gli A_k sono a due a due disgiunti, allora $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

Per l'osservazione 1.2.21, $\forall p \in \mathbb{N}$ risulta $\bigcup_{k=0}^{p} A_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, quindi, per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^n$, si ha

$$\mu^*(E) = \mu^*\left(E \cap \bigcup_{k=0}^{p} A_k\right) + \mu^*\left(E \cap \complement \bigcup_{k=0}^{p} A_k\right). \tag{1.2.1}$$

Per il lemma 1.2.22 si ha

$$\mu^*\left(E \cap \bigcup_{k=0}^{p} A_k\right) = \sum_{k=0}^{p} \mu^*(E \cap A_k);$$

inoltre $\complement \bigcup_{k=0}^{p} A_k \supseteq \complement \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$, quindi $\mu^*\big(\complement \bigcup_{k=0}^{p} A_k\big) \geq \mu^*\big(\complement \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\big)$, pertanto dall'uguaglianza (1.2.1) segue che, $\forall p \in \mathbb{N}$, si ha

$$\mu^*(E) \geq \sum_{k=0}^{p} \mu^*(E \cap A_k) + \mu^*\left(E \cap \complement \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right).$$

La serie $\sum_{k=0}^{+\infty} \mu^*(E \cap A_k)$ è a termini non negativi, quindi regolare, pertanto risulta

$$\mu^*(E) \geq \sum_{k=0}^{+\infty} \mu^*(E \cap A_k) + \mu^*\left(E \cap \complement \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right),$$

da cui, per la subadditività della misura esterna 1.2.13, si ottiene

$$\mu^*(E) \geq \sum_{k=0}^{+\infty} \mu^*(E \cap A_k) + \mu^*\left(E \cap \complement \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) \geq \mu^*\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (E \cap A_k)\right) + \mu^*\left(E \cap \complement \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) =$$

$$= \mu^*\left(E \cap \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) + \mu^*\left(E \cap \complement \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) \geq \mu^*(E).$$

Perciò tutti i membri della precedente catena di disuguaglianze sono uguali, quindi $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ è misurabile e si ha

$$\mu^*(E) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu^*(E \cap A_k) + \mu^*\left(E \cap \complement \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right). \tag{1.2.2}$$

Consideriamo ora il caso generale, senza l'ipotesi che gli A_k siano a due a due disgiunti. Per dimostrare che $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ è misurabile dimostriamo che è uguale all'unione di una famiglia numerabile di insiemi misurabili a due a due disgiunti.

Poniamo $C_0 = A_0$ e, per $p \in \mathbb{N}^*$, $C_p = A_p \setminus \bigcup_{k=0}^{p-1} A_k$. Gli insiemi C_k sono a due a due disgiunti e, per l'osservazione 1.2.21, sono misurabili. Si ha $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Infatti, $\forall k \in \mathbb{N}$, si ha $C_k \subseteq A_k$, quindi $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Viceversa, sia $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Indichiamo con p il minimo indice tale che $x \in A_p$, evidentemente $x \in C_p$, quindi $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k$. Questo prova che $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k$ e quindi vale anche l'uguaglianza.

Per quanto dimostrato sopra $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, quindi $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

Poiché l'intersezione è il complementare dell'unione dei complementari, l'affermazione relativa all'intersezione segue subito da quella relativa all'unione.

II) Se gli A_k sono a due a due disgiunti, allora dall'uguaglianza (1.2.2) con $E = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} A_p$ risulta

$$\mu^*\left(\bigcup_{p\in\mathbb{N}} A_p\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu^*\left(\bigcup_{p\in\mathbb{N}} A_p \cap A_k\right) + \mu^*\left(\bigcup_{p\in\mathbb{N}} A_p \cap \complement \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu^*(A_k).$$ ■

Se una successione di insiemi è crescente o decrescente, dal teorema di additività della misura si ricavano teoremi relativi al limite della misura.

1.2.24 Teorema

Sia $\{A_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

I) Se $\forall k \in \mathbb{N}$, si ha $A_k \subseteq A_{k+1}$, allora

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \lim_{k\to+\infty} \mu(A_k).$$

II) Se $\forall k \in \mathbb{N}$, si ha $A_{k+1} \subseteq A_k$ e $\mu(A_0) < +\infty$, allora

$$\mu\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \lim_{k\to+\infty} \mu(A_k).$$

Dimostrazione. I) Se esiste $\ell \in \mathbb{N}$ tale che $\mu(A_\ell) = +\infty$, allora, per $k \geq \ell$, risulta $\mu(A_k) = +\infty$, quindi $\lim_{k\to+\infty} \mu(A_k) = +\infty$; inoltre $\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = +\infty$, perciò la tesi è verificata.

Se invece $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mu(A_k) < +\infty$, poniamo $B_0 = A_0$ e, per $k \in \mathbb{N}^*$, $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$. Per il teorema 1.2.20, affermazione I, ciascun B_k è misurabile, si ha $\mu(B_0) = \mu(A_0)$ e, per il teorema 1.2.20, affermazione IV, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, risulta $\mu(B_k) = \mu(A_k) - \mu(A_{k-1})$. Inoltre i B_k sono a due a due disgiunti e $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Pertanto, per il teorema 1.2.23, affermazione II,

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(B_k) = \mu(A_0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \big(\mu(A_k) - \mu(A_{k-1})\big) =$$

$$= \lim_{p\to+\infty} \left(\mu(A_0) + \sum_{k=1}^{p} \big(\mu(A_k) - \mu(A_{k-1})\big)\right) = \lim_{p\to+\infty} \mu(A_p).$$

II) Poniamo, $\forall k \in \mathbb{N}$, $C_k = A_0 \setminus A_k$. Per $k \in \mathbb{N}$ si ha $C_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e $C_k \subseteq C_{k+1}$; pertanto, per l'affermazione I,

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k\right) = \lim_{k\to+\infty} \mu(C_k). \tag{1.2.3}$$

Si ha

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (A_0 \setminus A_k) = A_0 \setminus \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k.$$

Quindi, poiché $\mu(A_0) < +\infty$, per il teorema 1.2.20, affermazione IV, si ha

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k\right) = \mu(A_0) - \mu\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k\right),$$

analogamente, per ogni k, si ha $\mu(C_k) = \mu(A_0) - \mu(A_k)$. Pertanto dall'uguaglianza (1.2.3) segue

$$\mu(A_0) - \mu\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \lim_{k\to+\infty} \mu(C_k) = \lim_{k\to+\infty} \big(\mu(A_0) - \mu(A_k)\big) = \mu(A_0) - \lim_{k\to+\infty} \mu(A_k),$$

da cui segue la tesi. ■

Dal teorema 1.2.14 si ottiene immediatamente il seguente teorema.

1.2.25 Teorema (invarianza della misura per traslazioni)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$. Posto $B = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c} \mid \boldsymbol{x} \in A\}$, si ha $B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ se e solo se $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e in tal caso si ha $\mu(B) = \mu(A)$.

1.2.3 Tipologie di insiemi misurabili

Finora gli unici insiemi misurabili che abbiamo visto sono gli insiemi di misura nulla. Stabiliamo la misurabilità di altri insiemi. Verifichiamo anzitutto che gli intervalli compatti sono misurabili. Poiché ogni intervallo compatto è intersezione di semispazi chiusi, dimostriamo anzitutto che i semispazi chiusi sono misurabili.

1.2.26 Teorema

Siano $c \in \mathbb{R}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Allora $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, x_j \le c\}$ e $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, x_j \ge c\}$ sono misurabili.

Dimostrazione. Dimostriamo che $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, x_j \le c\} \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$; in modo analogo si dimostra che $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, x_j \ge c\} \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$. Poniamo $A = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, x_j \le c\}$.

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Se $\{I_k \,|\, k \in \mathscr{A}\}$ è un r. l. di E, per $k \in \mathscr{A}$ poniamo

$$I_k^- = \{\boldsymbol{x} \in I_k \,|\, x_j \le c\}, \qquad I_k^+ = \{\boldsymbol{x} \in I_k \,|\, x_j \ge c\}.$$

Ciascuno degli I_k^- e I_k^+, se non è vuoto, è un intervallo compatto; inoltre si verifica facilmente che $\operatorname{mis}(I_k) = \operatorname{mis}(I_k^-) + \operatorname{mis}(I_k^+)$, (dove la misura è 0 se l'insieme è vuoto). Poniamo

$$\mathscr{A}_- = \{k \in \mathscr{A} \,|\, I_k^- \ne \varnothing\}, \qquad \mathscr{A}_+ = \{k \in \mathscr{A} \,|\, I_k^+ \ne \varnothing\}.$$

Si ha

$$\bigcup_{k \in \mathscr{A}_-} I_k^- = \bigcup_{k \in \mathscr{A}_-} (I_k \cap A) = \left(\bigcup_{k \in \mathscr{A}_-} I_k \right) \cap A \supseteq E \cap A,$$

quindi $\{I_k^- \,|\, k \in \mathscr{A}_-\}$ è un r. l. di $E \cap A$. Analogamente $\{I_k^+ \,|\, k \in \mathscr{A}_+\}$ è un r. l. di $E \cap \complement A$. Perciò

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap \complement A) \le \sum_{k \in \mathscr{A}_-} \operatorname{mis}(I_k^-) + \sum_{k \in \mathscr{A}_+} \operatorname{mis}(I_k^+) = \sum_{k \in \mathscr{A}} \operatorname{mis}(I_k^-) + \sum_{k \in \mathscr{A}} \operatorname{mis}(I_k^+) =$$
$$= \sum_{k \in \mathscr{A}} \left(\operatorname{mis}(I_k^-) + \operatorname{mis}(I_k^+) \right) = \sum_{k \in \mathscr{A}} \operatorname{mis}(I_k).$$

Pertanto

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap \complement A) \le \inf \left\{ \sum_{k \in \mathscr{A}} \operatorname{mis}(I_k) \,\middle|\, \{I_k \,|\, k \in \mathscr{A}\} \text{ r. l. di } E \right\} = \mu^*(E).$$

Quindi A è misurabile. ■

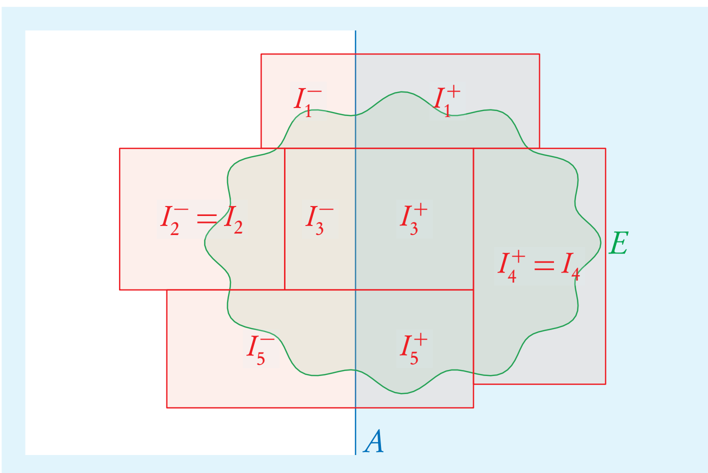


Figura 1.2.5
Illustrazione della dimostrazione del teorema 1.2.26

1.2.27 Teorema

Sia I un intervallo compatto di $\mathbb{R}^n$. Allora:

I) $I \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ e $\mu(I) = \text{mis}(I)$;

II) $\text{int}\, I \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ e $\mu(\text{int}\, I) = \text{mis}(I)$.

Dimostrazione. I) L'intervallo compatto I è intersezione di $2n$ semispazi chiusi, che sono misurabili per il teorema 1.2.26. Pertanto, per l'osservazione 1.2.21, I è misurabile. Inoltre, per il teorema 1.2.8, $\mu^*(I) = \text{mis}(I)$, quindi $\mu(I) = \text{mis}(I)$.

II) L'insieme $\text{int}\, I$ è intersezione di $2n$ semispazi aperti, che sono complementari di semispazi chiusi, quindi sono misurabili. Pertanto, per l'osservazione 1.2.21, $\text{int}\, I$ è misurabile.

Poiché $\text{int}\, I \subseteq I$ si ha $\mu(\text{int}\, I) \leq \mu(I) = \text{mis}(I)$. Proviamo la disuguaglianza inversa. Se $\text{mis}(I) = 0$, ovviamente $\text{mis}(I) \leq \mu(\text{int}\, I)$ Se $\text{mis}(I) > 0$, allora $I = \bigtimes_{j=1}^n [a_j, b_j]$, con $a_j < b_j$ per ogni j. Se $\delta \in \mathbb{R}^+$ è sufficientemente piccolo si ha $a_j + \delta < b_j - \delta$ e l'insieme $J_\delta = \bigtimes_{j=1}^n [a_j + \delta, b_j - \delta]$ è un intervallo compatto contenuto in $\text{int}\, I$. Pertanto si ha

$$\mu(\text{int}\, I) \geq \text{mis}(J_\delta) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j - 2\delta) \xrightarrow[\delta \to 0]{} \prod_{j=1}^n (b_j - a_j) = \text{mis}(I).$$

Pertanto $\mu(\text{int}\, I) \geq \text{mis}(I)$ e si ha l'uguaglianza. ∎

Da questo teorema e dal teorema 1.2.23, affermazione I segue che l'unione numerabile di intervalli compatti è misurabile. Perciò il seguente teorema assicura la misurabilità degli insiemi aperti.

1.2.28 Teorema

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Allora A è unione di una famiglia numerabile di intervalli compatti a due a due con interni disgiunti. Tali intervalli possono essere scelti in modo che ognuno di essi abbia tutti i lati di uguale lunghezza.

Dimostrazione. Per $k \in \mathbb{N}$ indichiamo con $\mathscr{C}_k$ l'insieme degli intervalli compatti prodotto di n intervalli di lunghezza 2^{-k} del tipo $[q/2^k, (q+1)/2^k]$, con $q \in \mathbb{Z}$. Poniamo cioè

$$\mathscr{C}_k = \left\{ \bigtimes_{j=1}^n \left[\frac{q_j}{2^k}, \frac{q_j + 1}{2^k} \right] \,\middle|\, q_1, q_2, \ldots, q_n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Poiché $\mathbb{Z}^n$ è numerabile, ciascuna delle famiglie $\mathscr{C}_k$ è numerabile. Se $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in I \in \mathscr{C}_k$ allora

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \left(\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{j=1}^n 2^{-2k} \right)^{1/2} = \sqrt{n}\, 2^{-k}.$$

Si verifica facilmente che due elementi distinti della stessa famiglia $\mathscr{C}_k$ hanno interni disgiunti; se invece $I \in \mathscr{C}_k$ e $J \in \mathscr{C}_\ell$, con $k < \ell$, cioè il lato di J è minore del lato di I, allora o $J \subseteq I$, oppure I e J hanno interni disgiunti. Pertanto se $I, J \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathscr{C}_k$, allora o I e J hanno interni disgiunti, oppure uno dei due è incluso nell'altro.

Consideriamo l'insieme $\mathscr{D}$ dei cubi appartenenti a una delle famiglie $\mathscr{C}_k$ che sono inclusi in A, e il sottoinsieme $\mathscr{E}$ di $\mathscr{D}$ costituito dai cubi che non sono inclusi in un altro cubo incluso in A. Poniamo cioè

$$\mathscr{D} = \left\{ I \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathscr{C}_k \,\middle|\, I \subseteq A \right\},$$
$$\mathscr{E} = \{ I \in \mathscr{D} \,|\, \forall J \in \mathscr{D},\, I \subseteq J \implies I = J \}.$$

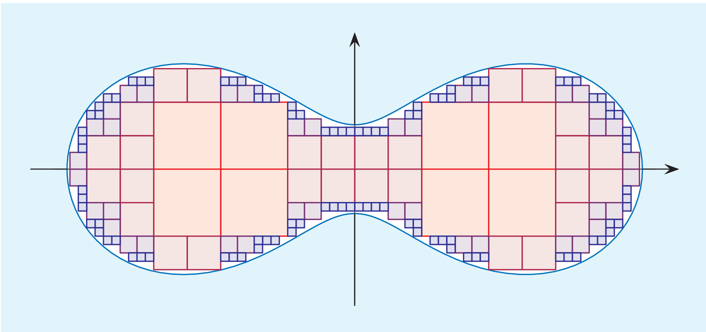


Figura 1.2.6
Illustrazione della dimostrazione del teorema 1.2.28. Sono riportati, con diversi colori, i quadrati delle famiglie $\mathscr{C}_0 \cap \mathscr{E}$, $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{E}$, $\mathscr{C}_2 \cap \mathscr{E}$ e $\mathscr{C}_3 \cap \mathscr{E}$.

La famiglia $\mathscr{E}$ è finita o numerabile, perché inclusa nell'unione dei $\mathscr{C}_k$ che è numerabile. Gli elementi di $\mathscr{E}$ hanno a due a due interni disgiunti. Infatti se due elementi di $\mathscr{E}$ non hanno interno disgiunto, poiché appartengono a $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathscr{C}_k$, uno dei due è incluso nell'altro. Ma per le definizione di $\mathscr{E}$ questo implica che i due elementi sono uguali.

Dimostriamo che $\bigcup_{J\in\mathscr{E}} J = A$. Se $I \in \mathscr{E}$, allora $I \subseteq A$, pertanto $\bigcup_{J\in\mathscr{E}} J \subseteq A$. Se $\boldsymbol{x} \in A$, allora, poiché A è aperto, $\exists r \in \mathbb{R}^+$ tale che $S(\boldsymbol{x}, r) \subseteq A$. Sia $k \in \mathbb{N}$ tale che $\sqrt{n}\, 2^{-k} < r$ e $I \in \mathscr{C}_k$ tale che $\boldsymbol{x} \in I$; come osservato sopra ogni elemento di I ha distanza da $\boldsymbol{x}$ minore o uguale a $\sqrt{n}\, 2^{-k}$, quindi minore di r. Pertanto $I \subset S(\boldsymbol{x}, r)$ da cui segue $I \subset A$. Quindi o $I \in \mathscr{E}$ oppure $\exists I_1 \in \mathscr{E}$ tale che $I \subseteq I_1$. In ciascuno dei due casi $I \subseteq \bigcup_{J\in\mathscr{E}} J$, quindi $\boldsymbol{x} \in \bigcup_{J\in\mathscr{E}} J$. Pertanto $A \subseteq \bigcup_{J\in\mathscr{E}} J$. ■

1.2.29 Teorema

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

I) Se A è aperto, allora $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$.

II) Se A è chiuso, allora $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione. I) Per il teorema 1.2.28 ogni insieme aperto è unione di una famiglia numerabile di intervalli compatti che, per il teorema 1.2.27, affermazione I, sono misurabili. Pertanto, per il teorema 1.2.23, affermazione I, ogni aperto è misurabile.

II) Se A è chiuso, allora è il complementare di un aperto, che è misurabile per quanto appena dimostrato. Pertanto A è misurabile (v. osservazione 1.2.15). ■

Poiché aperti e chiusi sono misurabili, anche intersezioni e unioni numerabili di aperti e chiusi sono misurabili. Introduciamo una terminologia per indicare tali insiemi.

Definizione di insieme di tipo G_δ e insieme di tipo F_σ [2]

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Diciamo che A è un **insieme di tipo G_δ** quando A è intersezione di una famiglia numerabile di insiemi aperti.

Diciamo che A è un **insieme di tipo F_σ** quando A è unione di una famiglia numerabile di insiemi chiusi.

Poiché passando al complementare si scambiano aperti con chiusi e unioni con intersezioni, è immediato dimostrare il seguente teorema.

1.2.30 Teorema

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora:

I) A è di tipo G_δ se e solo se $\complement A$ è di tipo F_σ;

II) A è di tipo F_σ se e solo se $\complement A$ è di tipo G_δ.

1.2.31 Osservazione. Ogni insieme di tipo G_δ può essere ottenuto come intersezione di una successione decrescente di insiemi aperti.

Infatti sia A di tipo G_δ. Possiamo supporre che A sia intersezione di una famiglia di aperti che dipende da un indice in $\mathbb{N}$, cioè $A = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} G_k$, con i G_k aperti. Posto, per $k \in \mathbb{N}$, $H_k = \bigcap_{j=0}^{k} G_j$, allora, $\forall k \in \mathbb{N}$, gli H_k sono aperti e $H_{k+1} \subseteq H_k$. Inoltre è evidente che $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} H_k = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} G_k = A$.

Se A è limitato, allora gli aperti della successione possono essere scelti limitati. Infatti in tal caso $\exists r \in \mathbb{R}^+$ tale che $A \subseteq S(0,r)$. Allora $\forall k \in \mathbb{N}$ l'insieme $S(0,r)\cap H_k$ è aperto e limitato e

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \big(S(0,r)\cap H_k\big) = S(0,r)\cap \bigcap_{k\in\mathbb{N}} H_k = S(0,r)\cap A = A.$$

Se A è contenuto in un aperto B, allora gli aperti della successione possono essere scelti contenuti in B. Infatti in tal caso $\forall k \in \mathbb{N}$ l'insieme $B\cap H_k$ è aperto e contenuto in B e

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} (B\cap H_k) = B\cap \bigcap_{k\in\mathbb{N}} H_k = B\cap A = A.$$

Passando al complementare si dimostra che ogni insieme di tipo F_σ può essere ottenuto come unione di una successione crescente di insiemi chiusi. ◀

1.2.32 Esempio. Ogni insieme numerabile è di tipo F_σ, perché unione numerabile di insiemi che hanno un solo elemento, che sono chiusi. ◀

[2] La terminologia è stata introdotta da Felix Hausdorff (Breslau, Prussia, 1868 - Bonn, Germania, 1942) in un trattato del 1914. In tale trattato gli insiemi aperti sono spesso indicati con G e gli insiemi chiusi con F; la lettera greca δ è l'iniziale del termine tedesco *Durchschnitt*, intersezione, la lettera greca σ è l'iniziale del termine tedesco *Summe*, somma, nome con cui veniva indicata l'unione agli inizi della teoria degli insiemi.

1.2.33 Esempio. Un intervallo semiaperto $[a,b[$ di $\mathbb{R}$ è sia di tipo G_δ che di tipo F_σ. Infatti $[a,b[=\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*}]a-1/k,b[$ e $[a,b[=\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}[a,b-1/k]$. ◀

1.2.34 Esempio. Se $A\subseteq\mathbb{R}^n$ è chiuso, allora è di tipo G_δ. Infatti per $k\in\mathbb{N}^*$ poniamo

$$B_k=\bigcup_{y\in A}S\left(y,\frac{1}{k}\right).$$

Ciascun B_k è aperto, perché unione di insiemi aperti.

Dimostriamo che $A=\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*}B_k$. Evidentemente, $\forall k\in\mathbb{N}^*$, si ha $A\subseteq B_k$, pertanto $A\subseteq\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*}B_k$. Inoltre se $x\in\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*}B_k$, allora, $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\exists x_k\in A$ tale che $x\in S(x,1/k)$, quindi $\|x_k-x\|\to 0$, perciò $x\in\overline{A}=A$; quindi $\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*}B_k\subseteq A$.

Ovviamente da ciò segue che ogni insieme aperto è di tipo F_σ. ◀

È una immediata conseguenza della definizione di insieme di tipo G_δ e F_σ e della misurabilità degli insiemi aperti e chiusi (v. teorema 1.2.29) il seguente teorema.

1.2.35 Teorema

Sia $A\subseteq\mathbb{R}^n$.

I) Se A è di tipo G_δ, allora $A\in\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$.

II) Se A è di tipo F_σ, allora $A\in\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$.

Vediamo ora che ogni insieme misurabile può essere approssimato in un senso opportuno da insiemi di tipo particolare.

1.2.36 Teorema

Sia $A\subseteq\mathbb{R}^n$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

I) $A\in\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$;

II) $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+$, esiste G aperto tale che $A\subseteq G$ e $\mu^*(G\setminus A)<\varepsilon$;

III) esiste $M\subseteq\mathbb{R}^n$ di tipo G_δ tale che $A\subseteq M$ e $\mu^*(M\setminus A)=0$.

Dimostrazione. I $\Longrightarrow$ II) Consideriamo anzitutto il caso $\mu(A)<+\infty$.

Fissato $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$, esiste $\{I_k\,|\,k\in\mathscr{A}\}$ r. l. di A tale che $\sum_{k\in\mathscr{A}}\operatorname{mis}(I_k)<\mu(A)+\varepsilon$. Aggiungendo infiniti intervalli compatti di misura uguale a 0, possiamo supporre che il r. l. sia numerabile e quindi che sia $\mathscr{A}=\mathbb{N}$. Per il lemma 1.2.11, $\forall k\in\mathbb{N}$, esiste un intervallo compatto J_k tale che $I_k\subseteq\operatorname{int}J_k$ e $\operatorname{mis}(J_k)<\operatorname{mis}(I_k)+(\varepsilon/2^k)$. Posto $G=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\operatorname{int}J_k$, G è aperto, perché unione di aperti, inoltre si ha

$$A\subseteq\bigcup_{k\in\mathbb{N}}I_k\subseteq\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\operatorname{int}J_k=G$$

e

$$\mu(G)\le\sum_{k=0}^{+\infty}\operatorname{mis}(J_k)\le\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\operatorname{mis}(I_k)+\frac{\varepsilon}{2^k}\right)<\sum_{k=0}^{+\infty}\operatorname{mis}(I_k)+\varepsilon\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}<\mu(A)+3\varepsilon.$$

Poiché $\mu(A) < +\infty$, per il teorema 1.2.20, affermazione IV, risulta

$$\mu(G \setminus A) = \mu(G) \setminus \mu(A) < 3\varepsilon .$$

Consideriamo il caso $\mu(A) = +\infty$. Poniamo, $\forall k \in \mathbb{N}$, $A_k = A \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| \leq k\}$. L'insieme A_k è misurabile, perché intersezione di un misurabile con un chiuso, e ha misura finita, perché è limitato. Fissato $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, per quanto già dimostrato esiste $G_k \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, tale che $A_k \subseteq G_k$ e $\mu(G_k \setminus A_k) < \varepsilon/2^k$. Poniamo $G = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} G_k$; G è aperto, perché unione di aperti,

$$A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} G_k = G .$$

Inoltre, se $x \in G \setminus A$, allora $\exists k \in \mathbb{N}$ tale che $x \in G_k$; poiché $x \notin A \supseteq A_k$ si ha $x \notin A_k$, quindi $x \in G_k \setminus A_k$. Pertanto $G \setminus A \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}}(G_k \setminus A_k)$ e risulta

$$\mu(G \setminus A) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(G_k \setminus A_k) < \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = 2\varepsilon .$$

II $\Longrightarrow$ III) Per ogni $k \in \mathbb{N}^*$ sia G_k un aperto di $\mathbb{R}^n$ tale che $A \subseteq G_k$ e $\mu^*(G_k \setminus A) < 1/k$. Poniamo

$$M = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} G_k .$$

Allora M è un insieme di tipo G_δ, $A \subseteq M$ e, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ si ha $M \setminus A \subseteq G_k \setminus A$, quindi $\mu^*(M \setminus A) \leq \mu^*(G_k \setminus A) < 1/k$, pertanto $\mu^*(M \setminus A) = 0$.

III $\Longrightarrow$ I) Si ha $M \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, perché M è di tipo G_δ, e $M \setminus A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, perché di misura nulla; inoltre $A = M \setminus (M \setminus A)$, pertanto $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. ■

Poiché un insieme è misurabile se e solo se il suo complementare è misurabile, dal teorema precedente si ottiene facilmente il seguente.

1.2.37 Teorema

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

I) $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$;

II) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, esiste F chiuso tale che $F \subseteq A$ e $\mu^*(A \setminus F) < \varepsilon$;

III) esiste $P \subseteq \mathbb{R}^n$ di tipo F_σ tale che $P \subseteq A$ e $\mu^*(A \setminus P) = 0$.

Concludiamo questa sottosezione con un esempio di insieme non misurabile.

1.2.38 Esempio. Sia $\sim$ la relazione in $[0,1]$ definita da

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q} .$$

Si prova facilmente che questa è una relazione di equivalenza.

Per l'assioma della scelta, esiste $V \subseteq [0,1]$ a cui appartiene uno e un solo rappresentante di ogni classe di equivalenza per la relazione $\sim$. L'insieme V è detto **insieme di Vitali**[3]. Dimostriamo che non è misurabile.

Per $q \in \mathbb{Q}$ poniamo $q + V = \{q + y \mid y \in V\}$. Si ha

$$[0,1] \subseteq \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (q+V) \subseteq [-1,2]. \tag{1.2.4}$$

Infatti, se $x \in [0,1]$ allora x appartiene a una delle classi di equivalenza di $\sim$, sia y il rappresentante della classe appartenente a V. Si ha $x - y \in \mathbb{Q}$ e, poiché $x, y \in [0,1]$, risulta $x - y \in [-1,1]$. Pertanto $x - y \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$ e $x \in (x-y) + V$. Quindi si ha $[0,1] \subseteq \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (q+V)$.

Inoltre, se $q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$ e $y \in V \subseteq [0,1]$, allora $q + y \in [-1,2]$, quindi si ha $q + V \subseteq [-1,2]$.

Gli insiemi $q + V$, con $q \in \mathbb{Q}$, sono a due disgiunti. Infatti, se $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ sono tali che $(q_1 + V) \cap (q_2 + V) \neq \varnothing$, allora esistono $y_1, y_2 \in V$ tali che $q_1 + y_1 = q_2 + y_2$, cioè $y_1 - y_2 = q_2 - q_1$; pertanto $y_1 \sim y_2$. Poiché in V non esistono due elementi equivalenti distinti, si ha $y_1 = y_2$, quindi $q_1 = q_2$.

Supponiamo, per assurdo, che V sia misurabile. Per il teorema 1.2.25, $\forall q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$ l'insieme $q + V$, traslato di V, è misurabile con $\mu(q+V) = \mu(V)$. Inoltre, poiché gli insiemi $q + V$ sono due a due disgiunti, risulta

$$\mu\Bigg(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (q+V)\Bigg) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \mu(q+V) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \mu(V).$$

Abbiamo quindi la somma di infiniti termini uguali a $\mu(V)$. Se fosse $\mu(V) = 0$, allora la somma sarebbe 0, mentre se fosse $\mu(V) > 0$ la somma sarebbe $+\infty$. Entrambi tali casi sono impossibili, perché da (1.2.4) segue

$$\mu([0,1]) \leq \mu\Bigg(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (q+V)\Bigg) \leq \mu([-1,2]),$$

quindi

$$1 \leq \mu\Bigg(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (q+V)\Bigg) \leq 3.$$

Pertanto V non può essere misurabile. ◀

1.3 Funzioni misurabili secondo Lebesgue

Per definire l'integrale secondo Riemann di una funzione definita in un intervallo compatto di $\mathbb{R}$ si approssima l'integrale con delle somme. Per definire tali somme si scompone l'intervallo in un numero finito di sottointervalli, a ciascuno dei quali corrisponde un addendo. Tale addendo è il prodotto tra la lunghezza del sottointervallo e un valore assunto dalla

[3] L'esempio è dovuto a Giuseppe Vitali (Ravenna, 1875 - Bologna, 1932), che ottenne risultati in vari settori dell'analisi e in particolare in teoria della misura. L'esempio è contenuto in un articolo pubblicato nel 1905.

funzione (se si considerano le somme di Riemann) oppure l'estremo inferiore o superiore della funzione (se si considerano somme inferiori e somme superiori). La funzione è integrabile se, scegliendo opportunamente la scomposizione, la differenza tra somma superiore e somma inferiore si può rendere arbitrariamente piccola.

Anche l'integrale secondo Lebesgue si basa su un principio simile, ma con una fondamentale differenza, che consente di ampliare l'insieme delle funzioni integrabili. L'idea è di scomporre il dominio della funzione in sottoinsiemi (che non necessariamente sono intervalli) in ciascuno dei quali la funzione ha una oscillazione piccola, in modo che sia piccola la differenza tra estremo superiore e estremo inferiore.

Vediamo come si realizza questa idea nel caso che f sia una funzione limitata in $[a,b]$. Siano $m=\inf f$ e $M>\sup f$; fissato $n\in\mathbb{N}^*$ scomponiamo $[m,M[$, che contiene l'immagine di f, in n intervalli di uguale lunghezza a due a due disgiunti. Indicata con $r=(M-m)/n$ la lunghezza di ciascuno degli intervalli, poniamo $J_k=[m+(k-1)r, m+kr[$ per $k=1,2,\ldots,n$. Fissata questa scomposizione dell'insieme che contiene l'immagine di f si può scomporre il dominio in n insiemi a due a due disgiunti, ponendo $I_k=f^{-1}(J_k)$. Se ciascuno degli I_k è misurabile si possono definire somma inferiore e somma superiore di f relativa a questa scomposizione. La differenza tra somma superiore e somma inferiore è $\sum_{k=1}^n(\sup_{I_k} f-\inf_{I_k} f)\mu(I_k)$. Poiché $f(I_k)\subseteq J_k$, si ha $\sup_{I_k} f\le \sup J_k$ e $\inf_{I_k} f\ge \inf J_k$, quindi

$$\sup_{I_k} f-\inf_{I_k} f\le \sup J_k-\inf J_k=\frac{r}{n},$$

pertanto

$$\sum_{k=1}^n\Big(\sup_{I_k} f-\inf_{I_k} f\Big)\mu(I_k)\le\sum_{k=1}^n\frac{r}{n}\,\mu(I_k)=\frac{r}{n}\mu\Big(\bigcup_{k=1}^n I_k\Big)=\frac{r}{n}\mu([a,b]).$$

Quindi, scegliendo n opportunamente, la differenza tra somma inferiore e somma superiore può essere resa arbitrariamente piccola. Perciò la condizione di uguaglianza tra integrale inferiore e integrale superiore è automaticamente soddisfatta.

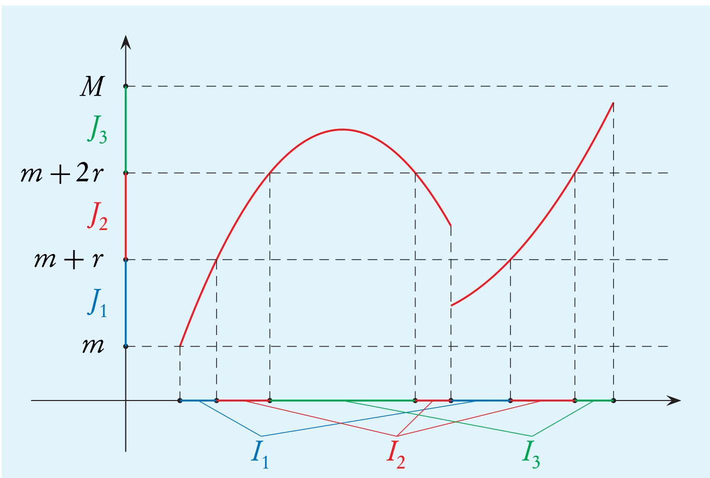


Figura 1.3.1
Scomposizione del dominio di una funzione in sottoinsiemi in ciascuno dei quali l'oscillazione della funzione è piccola.

Quindi possiamo evitare di definire sia le somme inferiori che le somme superiori e costruire una teoria dell'integrazione per funzioni per cui l'estremo superiore dell'insieme delle somme inferiori coincide con l'estremo inferiore dell'insieme delle somme superiori.

Per una funzione con la proprietà che la controimmagine di un intervallo limitato è misurabile possiamo definire l'integrale come l'estremo superiore delle somme inferiori, senza prendere in considerazione le somme superiori.

Osserviamo che un intervallo limitato è intersezione di due semirette e ogni semiretta è unione numerabili di intervalli limitati, quindi la richiesta della misurabilità delle controimmagini di intervalli limitati equivale alla richiesta che della misurabilità delle controimmagini di semirette.

Ogni somma inferiore è l'integrale della funzione da $[a,b]$ a $\mathbb{R}$ che in ciascun I_k vale costantemente $\inf_{I_k} f$; ciascuna di queste funzioni assume un numero finito di valori ed è maggiorata da f. Quindi l'integrale può essere definito come estremo superiore dell'insieme degli integrali di certe funzioni che assumono un numero finito di valori e sono maggiorate da f. Questa definizione ha il difetto che bisogna stabilire quali sono le scomposizioni del dominio (e corrispondentemente le funzioni) che si considerano. Tuttavia se ampliamo l'insieme, considerando l'integrale delle funzioni che assumono un numero finito di valori e sono maggiorate da f, l'estremo superiore non cambia. Questo suggerisce di definire l'integrale come l'estremo superiore dell'insieme degli integrali delle funzioni che assumono un numero finito di valori e sono maggiorate da f. Questa definizione ha senso per funzioni più generali delle funzioni limitate in un intervallo compatto di $\mathbb{R}$ e consente di definire l'integrale anche per funzioni di più variabili.

Nelle considerazioni fatte sopra abbiamo supposto che gli insiemi $\mu(I_k)$ fossero misurabili. Poiché $I_k = f^{-1}(J_k) = f^{-1}\big([m+(k-1)r, m+kr[\big)$ ciò significa supporre la misurabilità di

$$\big\{x\in[a,b]\,\big|\,m+(k-1)r\le f(x)<m+kr\big\}=$$
$$=\big\{x\in[a,b]\,\big|\,f(x)<m+kr\big\}\setminus\big\{x\in[a,b]\,\big|\,f(x)<m+(k-1)r\big\}.$$

Questa è assicurata se, $\forall c\in\mathbb{R}$, è misurabile $\big\{x\in[a,b]\,\big|\,f(x)<c\big\}$. Questa ipotesi risulta essere quella corretta per sviluppare una buona teoria dell'integrazione, pertanto studiamo le funzioni che la verificano.

1.3.1 Definizione e proprietà fondamentali

La teoria che sviluppiamo riguarda le funzioni a valori in $\overline{\mathbb{R}}$ anziché in $\mathbb{R}$. Questo è utile perché risulta possibile considerare le funzioni estremo superiore o estremo inferiore di una famiglia di funzioni misurabili senza uscire dalla classe di funzioni studiata.

Date $f,g\colon A\to\overline{\mathbb{R}}$, usiamo la notazione $f\le g$ per indicare che, $\forall x\in A$, risulta $f(x)\le g(x)$; data $\{f_k\,|\,k\in\mathscr{A}\}$, famiglia di funzioni da A a $\overline{\mathbb{R}}$, indichiamo con $\sup_{k\in\mathscr{A}} f_k$ la funzione da A a $\overline{\mathbb{R}}$ che a x fa corrispondere $\sup_{k\in\mathscr{A}} f_k(x)$; analogamente per $\inf$, $\lim$ ecc.

Nel seguito, quando si fa riferimento al limite di una successione di funzioni $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ si intende sempre che per ogni x nel dominio delle f_k si considera $\lim_{k\to+\infty} f_k(x)$. Nello studio delle successioni di funzioni questa viene chiamata convergenza puntuale.

Definizione di funzione misurabile secondo Lebesgue

Siano $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Diciamo che f è **misurabile secondo Lebesgue** quando, $\forall c \in \mathbb{R}$, $\{x \in A \,|\, f(x) < c\}$ è misurabile.

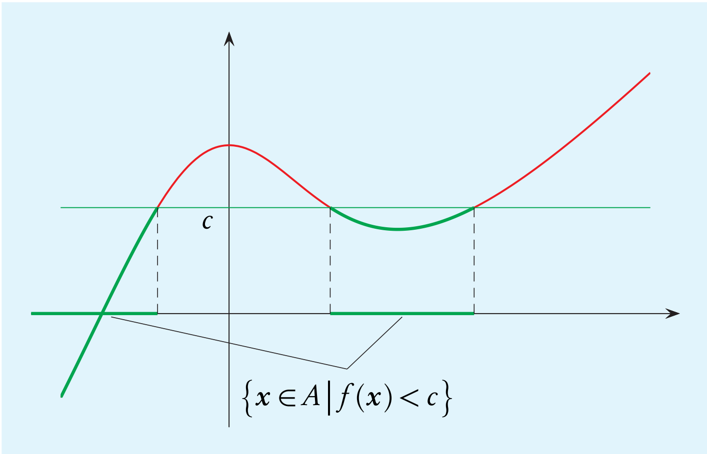


Figura 1.3.2
L'insieme $\{x \in A \,|\, f(x) < c\}$ è misurabile, qualunque sia $c \in \mathbb{R}$, quando f è misurabile.

1.3.1 Esempio. La funzione norma in $\mathbb{R}^n$ è misurabile.

Infatti, sia $c \in \mathbb{R}$. Se $c \leq 0$, allora $\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \|x\| < c\} = \varnothing$, quindi è misurabile. Se $c > 0$, allora $\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \|x\| < c\}$ è aperto, quindi, per il teorema 1.2.29, è misurabile. ◀

1.3.2 Esempio. Sia

$$g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Sia $c \in \mathbb{R}$. Se $c \leq 0$, allora $\{x \in \mathbb{R} \,|\, g_1(x) < c\} = \varnothing$, quindi è misurabile. Se $0 < c \leq 1$, allora $\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, g_1(x) < c\} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, che è misurabile perché $\mathbb{Q}$ è numerabile e quindi misurabile (v. osservazione 1.2.18). Se $c > 1$, allora $\{x \in \mathbb{R} \,|\, g_1(x) < c\} = \mathbb{R}$, quindi è misurabile.

Pertanto g_1 è misurabile. ◀

1.3.3 Esempio. Sia

$$g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g_2(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in V, \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus V, \end{cases}$$

dove V è l'insieme di Vitali, definito nell'esempio 1.2.38, che non è misurabile..

Sia $c \in]0, 1]$; allora $\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, g_2(x) < c\} = \complement V$, che non è misurabile, perché il suo complementare non è misurabile. Pertanto g_2 non è misurabile. ◀

1.3.4 Osservazione. Se $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ è misurabile e $B \subseteq A$ è misurabile, allora, $\forall c \in \mathbb{R}$, si ha

$$\{x \in B \,|\, f(x) < c\} = B \cap \{x \in A \,|\, f(x) < c\},$$

che è misurabile. Pertanto $f|_B$ è misurabile. ◀

La definizione di funzione misurabile richiede di stabilire la misurabilità delle controimmagini mediante la funzione di intervalli inferiormente illimitati aperti. Possiamo equivalentemente studiare le controimmagini di intervalli superiormente illimitati aperti, oppure dei corrispondenti intervalli chiusi, come assicurato dal seguente teorema.

1.3.5 Teorema

Siano $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ e $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

I) $\forall c \in \mathbb{R}$, $\{x \in A \,|\, f(x) < c\}$ è misurabile;

II) $\forall c \in \mathbb{R}$, $\{x \in A \,|\, f(x) \leq c\}$ è misurabile;

III) $\forall c \in \mathbb{R}$, $\{x \in A \,|\, f(x) > c\}$ è misurabile;

IV) $\forall c \in \mathbb{R}$, $\{x \in A \,|\, f(x) \geq c\}$ è misurabile.

Dimostrazione. I $\Longrightarrow$ II) Sia $c \in \mathbb{R}$. Allora, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\{x \in A \,|\, f(x) < c + 1/k\}$ è misurabile, pertanto, per il teorema 1.2.23, affermazione I,

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \left\{ x \in A \,\middle|\, f(x) < c + \frac{1}{k} \right\} = \{x \in A \,|\, f(x) \leq c\}$$

è misurabile.

II $\Longrightarrow$ III) L'implicazione segue immediatamente dal fatto che

$$\{x \in A \,|\, f(x) > c\} = A \setminus \{x \in A \,|\, f(x) \leq c\}.$$

III $\Longrightarrow$ IV) La dimostrazione è analoga a quella di I $\Longrightarrow$ II.

IV $\Longrightarrow$ I) L'implicazione segue immediatamente dal fatto che

$$\{x \in A \,|\, f(x) < c\} = A \setminus \{x \in A \,|\, f(x) \geq c\}.$$

■

Il teorema seguente assicura la misurabilità delle controimmagini mediante una funzione misurabile di altri tipi di insiemi.

1.3.6 Teorema

Siano $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ e $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Se f è misurabile, allora sono misurabili gli insiemi $\{x \in A \,|\, f(x) = -\infty\}$, $\{x \in A \,|\, f(x) = +\infty\}$ e $\{x \in A \,|\, f(x) \in \mathbb{R}\}$ e, $\forall c \in \mathbb{R}$, $\{x \in A \,|\, f(x) = c\}$.

Dimostrazione. Si ha

$$\{x \in A \,|\, f(x) = -\infty\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{x \in A \,|\, f(x) < -k\},$$
$$\{x \in A \,|\, f(x) = +\infty\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{x \in A \,|\, f(x) \geq k\}.$$

Questi insiemi sono intersezione di famiglie numerabili di insiemi misurabili (v. teorema 1.3.5), quindi, per il teorema 1.2.23, affermazione I, sono misurabili. Inoltre

$$\{x \in A \mid f(x) \in \mathbb{R}\} = A \setminus \Big(\{x \in A \mid f(x) = -\infty\} \cup \{x \in A \mid f(x) = +\infty\}\Big),$$

quindi anche tale insieme è misurabile.

Se $c \in \mathbb{R}$, allora

$$\{x \in A \mid f(x) = c\} = \{x \in A \mid f(x) \geq c\} \cap \{x \in A \mid f(x) \leq c\};$$

per il teorema 1.3.5 se f è misurabile ciascuno dei due insiemi che si intersecano è misurabile, quindi $\{x \in A \mid f(x) = c\}$ è misurabile. ■

Diamo una ulteriore caratterizzazione della misurabilità di una funzione.

1.3.7 Teorema

Siano $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. La funzione f è misurabile se e solo se sono misurabili gli insiemi $f^{-1}(G)$, per ogni G aperto di $\mathbb{R}$, $\{x \in A \mid f(x) = -\infty\}$ e $\{x \in A \mid f(x) = +\infty\}$.

Per la dimostrazione di questo teorema è necessario un lemma sulla topologia di $\mathbb{R}$. Lo enunciamo più in generale in $\mathbb{R}^n$, perché questa forma sarà utile nel seguito.

1.3.8 Lemma

Sia $G \subseteq \mathbb{R}^n$. Se G è aperto allora è unione di una famiglia di prodotti cartesiani di intervalli aperti di $\mathbb{R}$ con estremi appartenenti a $\mathbb{Q}$. In particolare è unione di una famiglia finita o numerabile di prodotti cartesiani di intervalli aperti.

Dimostrazione. Consideriamo anzitutto il caso $n = 1$.

Poiché G è aperto, se $x \in G$, allora $\exists r \in \mathbb{R}^+$ tale che $]x - r, x + r[\subseteq G$. Poiché $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$, esistono $a \in]x - r, x[\cap \mathbb{Q}$ e $b \in]x, x + r[\cap \mathbb{Q}$, quindi si ha

$$x \in]a, b[\subseteq]x - r, x + r[\subseteq G.$$

Pertanto ogni elemento di G appartiene a un intervallo aperto con estremi in $\mathbb{Q}$ incluso in G, quindi

$$G = \bigcup \{]a, b[\mid a, b \in \mathbb{Q}, a < b,]a, b[\subseteq G\}.$$

Sia ora $n > 1$. Poiché G è aperto, se $x \in G$, allora $\exists r \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$x \in \bigtimes_{j=1}^{n}]x_j - r, x_j + r[\subseteq G.$$

Come visto sopra, per $j = 1, 2, \ldots, n$, esistono $a_j, b_j \in \mathbb{Q}$ tali che

$$x_j \in]a_j, b_j[\subseteq]x_j - r, x_j + r[,$$

pertanto

$$x \in \bigtimes_{j=1}^{n}]a_j, b_j[\subseteq G\,.$$

Quindi G è unione dei prodotti cartesiani di intervalli aperti con estremi in $\mathbb{Q}$ che sono contenuti in G.

L'ultima affermazione segue dalla precedente, perché i prodotti cartesiani di intervalli aperti con estremi in $\mathbb{Q}$ sono in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{Q}^{2n}$ che è numerabile. ■

Dimostrazione del teorema 1.3.7. Se f è misurabile, allora, per il teorema 1.3.6, gli insiemi $\{x \in A \,|\, f(x) = -\infty\}$ e $\{x \in A \,|\, f(x) = +\infty\}$ sono misurabili. Inoltre se G è un aperto di $\mathbb{R}$, allora, per il lemma 1.3.8, esiste una famiglia finita o numerabile di intervalli aperti $\{]a_k, b_k[\,|\, k \in \mathscr{A}\}$ tale che $G = \bigcup_{k \in \mathscr{A}}]a_k, b_k[$. Pertanto

$$\begin{aligned} f^{-1}(G) &= f^{-1}\Big(\bigcup_{k\in\mathscr{A}}]a_k, b_k[\Big) = \bigcup_{k\in\mathscr{A}} f^{-1}(]a_k, b_k[) = \\ &= \bigcup_{k\in\mathscr{A}} \Big(\{x \in A \,|\, f(x) > a_k\} \cap \{x \in A \,|\, f(x) < b_k\}\Big), \end{aligned}$$

che è misurabile perché unione numerabile di insiemi misurabili.

Viceversa, supponiamo che siano misurabili gli insiemi $f^{-1}(G)$, se G è un aperto di $\mathbb{R}$, $\{x \in A \,|\, f(x) = -\infty\}$ e $\{x \in A \,|\, f(x) = +\infty\}$. Poiché, $\forall c \in \mathbb{R}$, si ha

$$\{x \in A \,|\, f(x) < c\} = \{x \in A \,|\, f(x) = -\infty\} \cup f^{-1}(]-\infty, c[),$$

tale insieme è misurabile. Quindi f è misurabile. ■

Vediamo alcune semplici condizioni che assicurano la misurabilità di una funzione.

I sottoinsiemi di un insieme di misura nulla sono misurabili, pertanto vale il seguente teorema.

1.3.9 Teorema

Siano $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ e $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Se $\mu(A) = 0$, allora f è misurabile.

1.3.10 Teorema

Siano $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ e $f : A \to \mathbb{R}$. Se f è continua, allora f è misurabile.

Dimostrazione. Per ogni $c \in \mathbb{R}$, $\{x \in A \,|\, f(x) < c\} = f^{-1}(]-\infty, c[)$; poiché f è continua tale insieme è relativamente aperto in A, quindi esiste G, aperto di $\mathbb{R}^n$, tale che $\{x \in A \,|\, f(x) < c\} = A \cap G$. Poiché ogni aperto di $\mathbb{R}^n$ è misurabile (v. teorema 1.2.29, affermazione I) e l'intersezione di misurabili è misurabile, $\{x \in A \,|\, f(x) < c\}$ è misurabile. ■

1.3.11 Teorema

Siano $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, $f : A \to \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$ tale che $f(A) \subseteq B$ e $\varphi : B \to \mathbb{R}$. Se f è misurabile e φ è continua, allora $\varphi \circ f$ è misurabile.

Dimostrazione. Per ogni $c \in \mathbb{R}$ si ha $\varphi\big(f(x)\big) < c$ se e solo se

$$f(x) \in \big\{y \in B \,\big|\, \varphi(y) < c\big\} = \varphi^{-1}\big(]-\infty, c[\big).$$

Poiché $]-\infty, c[$ è aperto e φ è continua, $\varphi^{-1}\big(]-\infty, c[\big)$ è relativamente aperto in B, pertanto esiste un aperto G_c di $\mathbb{R}$ tale che $\varphi^{-1}\big(]-\infty, c[\big) = B \cap G_c$. Quindi $\varphi\big(f(x)\big) < c$ se e solo se $f(x) \in G_c$, cioè $\big\{x \in A \,\big|\, (\varphi \circ f)(x) < c\big\} = f^{-1}(G_c)$. Questo è la controimmagine di un aperto mediante una funzione misurabile, quindi, per il teorema 1.3.7, è misurabile.

Quindi, $\forall c \in \mathbb{R}$, $\big\{x \in A \,\big|\, \varphi\big(f(x)\big) < c\big\}$ è misurabile, pertanto $\varphi \circ f$ è misurabile. ■

E utile la seguente generalizzazione di questo teorema.

1.3.12 Teorema

Siano $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, $f, g : A \to \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}^2$ tale che $(f, g)(A) \subseteq B$ e $\varphi : B \to \mathbb{R}$. Se f e g sono misurabili e φ è continua, allora $\varphi \circ (f, g)$ è misurabile.

Precisiamo che con (f, g) indichiamo le funzione $x \mapsto \big(f(x), g(x)\big)$ da A a $\mathbb{R}^2$; quindi $\big(\varphi \circ (f, g)\big)(x) = \varphi\big(f(x), g(x)\big)$.

Dimostrazione. Per ogni $c \in \mathbb{R}$ si ha $\varphi\big(f(x), g(x)\big) < c$ se e solo se

$$\big(f(x), g(x)\big) \in \varphi^{-1}\big(]-\infty, c[\big).$$

Poiché $]-\infty, c[$ è aperto e φ è continua, $\varphi^{-1}\big(]-\infty, c[\big)$ è relativamente aperto in B, pertanto esiste un aperto G di $\mathbb{R}^2$ tale che $\varphi^{-1}\big(]-\infty, c[\big) = B \cap G$. Per il lemma 1.3.8, esiste una famiglia finita o numerabile di rettangoli aperti $\big\{]a_k, b_k[\times]c_k, d_k[\,\big|\, k \in \mathscr{A}\big\}$ tali che $G = \bigcup_{k \in \mathscr{A}}]a_k, b_k[\times]c_k, d_k[$. Pertanto

$$\varphi^{-1}\big(]-\infty, c[\big) = \bigcup_{k \in \mathscr{A}} B \cap \big(]a_k, b_k[\times]c_k, d_k[\big).$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\varphi\big(f(x), g(x)\big) < c &\iff \big(f(x), g(x)\big) \in \varphi^{-1}\big(]-\infty, c[\big) \\
&\iff \big(f(x), g(x)\big) \in \bigcup_{k \in \mathscr{A}} B \cap \big(]a_k, b_k[\times]c_k, d_k[\big) \\
&\iff \exists k \in \mathscr{A} : \quad \big(f(x), g(x)\big) \in B \cap \big(]a_k, b_k[\times]c_k, d_k[\big) \\
&\iff \exists k \in \mathscr{A} : \quad \big(f(x) \in]a_k, b_k[\wedge g(x) \in]c_k, d_k[\big)
\end{aligned}$$

$$\iff \exists k \in \mathscr{A}: \quad x \in f^{-1}\big(]a_k, b_k[\big) \cap g^{-1}\big(]c_k, d_k[\big)$$
$$\iff x \in \bigcup_{k \in \mathscr{A}} \Big(f^{-1}\big(]a_k, b_k[\big) \cap g^{-1}\big(]c_k, d_k[\big)\Big).$$

Quest'ultimo insieme è unione numerabile di insiemi misurabili, quindi è misurabile.

Quindi, $\forall c \in \mathbb{R}$, $\{x \in A \,|\, \varphi(f(x), g(x)) < c\}$ è misurabile, pertanto $\varphi \circ (f, g)$ è misurabile. ■

Le operazioni tra funzioni conservano la misurabilità, come enunciato dal teorema seguente.

1.3.13 Teorema

Siano $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, $f, g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabili e $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora, se sono definite, $f + g$, λf, $f g$ e $1/f$ sono misurabili.

La precisazione "se sono definite", significa che nel caso dell'addizione non vi sono punti in cui uno dei due addendi vale $+\infty$ e l'altro $-\infty$ e si considera $1/f$ solo se f non si annulla.

Dimostrazione. Dimostriamo che $f + g$ è misurabile.

Poniamo $B = \{x \in A \,|\, f(x) \in \mathbb{R},\ g(x) \in \mathbb{R}\}$ e sia $c \in \mathbb{R}$. Si ha

$$\begin{aligned}\{x \in A \,|\, f(x) + g(x) < c\} &= \\ &= \{x \in A \,|\, f(x) = -\infty\} \cup \{x \in A \,|\, g(x) = -\infty\} \cup \{x \in B \,|\, f(x) + g(x) < c\}.\end{aligned}$$

Per il teorema 1.3.6 i primi due insiemi sono misurabili. Poiché la funzione addizione da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$ è continua, per il teorema 1.3.12, la funzione $(f + g)|_B$ è misurabile, quindi anche $\{x \in B \,|\, f(x) + g(x) < c\}$ è misurabile. Questo prova che $f + g$ è misurabile.

Dimostriamo che λf è misurabile.

Se $\lambda = 0$ la funzione λf vale costantemente 0, quindi è misurabile.

Se $\lambda > 0$, allora, $\forall c \in \mathbb{R}$, si ha

$$\{x \in A \,|\, \lambda f(x) < c\} = \left\{x \in A \,\middle|\, f(x) < \frac{c}{\lambda}\right\}$$

e questo insieme è misurabile.

Analogamente se $\lambda > 0$, allora, $\forall c \in \mathbb{R}$, si ha

$$\{x \in A \,|\, \lambda f(x) < c\} = \left\{x \in A \,\middle|\, f(x) > \frac{c}{\lambda}\right\}$$

e questo insieme è misurabile.

Dimostriamo che $f g$ è misurabile.

Poniamo $B=\{x\in A \,|\, f(x)\in\mathbb{R},\ g(x)\in\mathbb{R}\}$. Se $c\in\mathbb{R}^-\cup\{0\}$ si ha

$$\begin{aligned}\{x\in A\,|\,f(x)g(x)<c\}=&\Big(\{x\in A\,|\,f(x)=-\infty\}\cap\{x\in A\,|\,g(x)>0\}\Big)\cup\\ &\cup\Big(\{x\in A\,|\,f(x)=+\infty\}\cap\{x\in A\,|\,g(x)<0\}\Big)\cup\\ &\cup\Big(\{x\in A\,|\,f(x)>0\}\cap\{x\in A\,|\,g(x)=-\infty\}\Big)\cup\\ &\cup\Big(\{x\in A\,|\,f(x)<0\}\cap\{x\in A\,|\,g(x)=+\infty\}\Big)\cup\\ &\cup\{x\in B\,|\,f(x)g(x)<c\};\end{aligned}$$

se $c\in\mathbb{R}^+$ si ha

$$\begin{aligned}\{x\in A\,|\,f(x)g(x)<c\}=&\Big(\{x\in A\,|\,f(x)=-\infty\}\cap\{x\in A\,|\,g(x)\geq 0\}\Big)\cup\\ &\cup\Big(\{x\in A\,|\,f(x)=+\infty\}\cap\{x\in A\,|\,g(x)\leq 0\}\Big)\cup\\ &\cup\Big(\{x\in A\,|\,f(x)\geq 0\}\cap\{x\in A\,|\,g(x)=-\infty\}\Big)\cup\\ &\cup\Big(\{x\in A\,|\,f(x)\leq 0\}\cap\{x\in A\,|\,g(x)=+\infty\}\Big)\cup\\ &\cup\{x\in B\,|\,f(x)g(x)<c\}.\end{aligned}$$

Poiché f e g sono misurabili, i teoremi 1.3.5 e 1.3.6 assicurano che tutti gli insiemi di cui si fa l'unione, a eccezione di $\{x\in B\,|\,f(x)g(x)<c\}$, sono misurabili. La funzione moltiplicazione da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$ è continua, quindi, per il teorema 1.3.12, $(fg)|_B$ è misurabile, perciò anche $\{x\in B\,|\,f(x)g(x)<c\}$ è misurabile. Pertanto fg è misurabile.

Dimostriamo che $1/f$ è misurabile. Sia $c\in\mathbb{R}$. Si ha

$$\left\{x\in A\,\middle|\,\left(\frac{1}{f}\right)(x)<c\right\}=\begin{cases}\left\{x\in A\,\middle|\,f(x)>\left(\frac{1}{c}\right)\right\}\cap\{x\in A\,|\,f(x)<0\}, & \text{se } c<0,\\ \{x\in A\,|\,f(x)<0\}, & \text{se } c=0,\\ \left\{x\in A\,\middle|\,f(x)>\left(\frac{1}{c}\right)\right\}\cup\{x\in A\,|\,f(x)<0\}, & \text{se } c>0.\end{cases}$$

Quindi in ogni caso $\{x\in A\,|\,(1/f)(x)<c\}$ è misurabile, pertanto $1/f$ è misurabile. ■

La misurabilità si conserva passando all'estremo superiore o inferiore di famiglie numerabili di funzioni; quindi si conserva per passaggio al limite in una successione di funzioni.

1.3.14 Teorema

Siano $A\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e $\{f_k\,|\,k\in\mathcal{A}\}$ una famiglia finita o numerabile di funzioni da A a $\overline{\mathbb{R}}$. Se, $\forall k\in\mathcal{A}$, f_k è misurabile, allora le funzioni $\inf_{k\in\mathcal{A}} f_k$ e $\sup_{k\in\mathcal{A}} f_k$ sono misurabili.

Dimostrazione. Sia $c \in \mathbb{R}$. Per $x \in A$ si ha $\inf_{k\in\mathscr{A}} f_k(x) < c$ se e solo se $\exists k \in \mathscr{A}$ tale che $f_k(x) < c$, pertanto

$$\left\{x \in A \,\middle|\, \inf_{k\in\mathscr{A}} f_k(x) < c\right\} = \bigcup_{k\in\mathscr{A}} \{x \in A \mid f_k(x) < c\}.$$

Quindi $\left\{x \in A \,\middle|\, \inf_{k\in\mathscr{A}} f_k(x) < c\right\}$ è unione numerabile di insiemi misurabili, perciò è misurabile. Pertanto $\inf_{k\in\mathscr{A}} f_k$ è misurabile.

La dimostrazione per l'estremo superiore è analoga, utilizzando la condizione III del teorema 1.3.5. ■

1.3.15 Teorema

Siano $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ e $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni da A a $\overline{\mathbb{R}}$. Se, $\forall k \in \mathbb{N}$, f_k è misurabile, allora le funzioni $\max\lim_{k\to+\infty} f_k$ e $\min\lim_{k\to+\infty} f_k$ sono misurabili.

Dimostrazione. Poiché, $\forall x \in A$, si ha

$$\max\lim_{k\to+\infty} f_k(x) = \inf_{k\in\mathbb{N}}\Bigl(\sup_{j\geq k} f_j(x)\Bigr), \qquad \min\lim_{k\to+\infty} f_k(x) = \sup_{k\in\mathbb{N}}\Bigl(\inf_{j\geq k} f_j(x)\Bigr),$$

il teorema segue immediatamente dal teorema 1.3.14. ■

Poiché il limite di una successione, se esiste, coincide sia con il massimo limite che con il minimo limite, dal teorema precedente si deduce immediatamente il seguente.

1.3.16 Teorema

Siano $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ e $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni da A a $\overline{\mathbb{R}}$. Se, $\forall k \in \mathbb{N}$, f_k è misurabile e $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ha limite, allora la funzione $\lim_{k\to+\infty} f_k$ è misurabile.

Sappiamo che ogni restrizione a un insieme misurabile di una funzione misurabile è ancora misurabile (v. osservazione 1.3.4). Vediamo ora un teorema che è in qualche senso il viceversa di questa affermazione.

1.3.17 Teorema

Siano $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, $\{A_k \mid k \in \mathscr{A}\}$ una famiglia finita o numerabile di sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^n$ tali che $\bigcup_{k\in\mathscr{A}} A_k = A$ e $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Se, $\forall k \in \mathscr{A}$, $f|_{A_k}$ è misurabile, allora f è misurabile.

Dimostrazione. Poiché, $\forall c \in \mathbb{R}$, si ha

$$\{x \in A \mid f(x) < c\} = \bigcup_{k\in\mathscr{A}} \Bigl(A_k \cap \{x \in A \mid f(x) < c\}\Bigr) = \bigcup_{k\in\mathscr{A}} \{x \in A_k \mid f|_{A_k}(x) < c\},$$

se ciascuna delle $f|_{A_k}$ è misurabile, allora f è misurabile. ■

Nel seguito incontreremo spesso affermazioni che sono vere per tutti gli elementi di un certo insieme, con l'esclusione di quelli appartenenti a un insieme di misura nulla. Introduciamo una terminologia per indicare questa situazione.

Definizione di proprietà verificata quasi dappertutto

Siano $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ e $P(\boldsymbol{x})$ una proposizione significativa per $\boldsymbol{x} \in A$. Diciamo che P è vera **quasi dappertutto** in A quando $\mu\big(\{\boldsymbol{x} \in A \,|\, P(\boldsymbol{x}) \text{ è falsa}\}\big) = 0$.

Talvolta anziché dire che una proprietà vale quasi dappertutto in A diciamo che vale per quasi ogni $\boldsymbol{x} \in A$.

Se è chiaro dal contesto qual è l'insieme A in cui si considera la proprietà, possiamo evitare di precisarlo.

In particolare se la proprietà riguarda i valori assunti da una funzione, diciamo che è vera quasi dappertutto senza ulteriori precisazioni per dire che è vera per quasi ogni elemento del dominio della funzione. Ad esempio diciamo che una funzione f è nulla quasi dappertutto per indicare che $f(\boldsymbol{x}) = 0$ per tutti gli $\boldsymbol{x}$ del dominio escluso al più un insieme di misura nulla.

1.3.18 Esempio. Consideriamo la funzione

$$g_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,, \end{cases}$$

già studiata nell'esempio 1.3.2.

L'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ tali che $g_1(x) \neq 0$ è $\mathbb{Q}$, che ha misura nulla perché numerabile (v. osservazione 1.2.3), quindi l'affermazione $g_1(x) = 0$ è vera quasi dappertutto per $x \in \mathbb{R}$. ◀

1.3.19 Teorema

Siano $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ e $f, g \colon A \to \overline{\mathbb{R}}$. Se f è misurabile e $f = g$ quasi dappertutto in A, allora g è misurabile.

Dimostrazione. Sia $B = \{\boldsymbol{x} \in A \,|\, f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})\}$. Per ipotesi $A \setminus B$ ha misura nulla, quindi è misurabile, perciò $B = A \cap \complement(A \setminus B) \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$. Se $c \in \mathbb{R}$ allora

$$\begin{aligned}\{\boldsymbol{x} \in A \,|\, g(\boldsymbol{x}) < c\} &= \{\boldsymbol{x} \in B \,|\, g(\boldsymbol{x}) < c\} \cup \{\boldsymbol{x} \in A \setminus B \,|\, g(\boldsymbol{x}) < c\} = \\ &= \{\boldsymbol{x} \in B \,|\, f(\boldsymbol{x}) < c\} \cup \{\boldsymbol{x} \in A \setminus B \,|\, g(\boldsymbol{x}) < c\}.\end{aligned}$$

Il primo insieme è misurabile, perché $f|_B$ è misurabile (v. osservazione 1.3.4), il secondo è misurabile perché contenuto in $A \setminus B$ che ha misura nulla (v. osservazione 1.2.19). Pertanto g è misurabile. ■

Una funzione continua è misurabile, ma il viceversa è falso. Infatti la funzione che vale 1 in $\mathbb{Q}$ e 0 in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è discontinua in ogni punto del dominio, ma è misurabile (v. esempio 1.3.1). Tuttavia vale il seguente teorema che assicura che una funzione misurabile a valori reali in qualche senso non differisce molto da una funzione continua.

1.3.20 Teorema (di Luzin[4])

Siano $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ e $f : A \to \mathbb{R}$. Allora, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $\exists B \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, con $\mu(B) < \varepsilon$, tale che $f|_{A \setminus B}$ è continua.

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Poiché $\{(a,b) \in \mathbb{Q}^2 \,|\, a < b\}$ è numerabile, anche $\{]a,b[\,|\, a,b \in \mathbb{Q}, a < b\}$ è numerabile. Indichiamo i suoi elementi con I_k, con $k \in \mathbb{N}$.

Poiché f è misurabile e, $\forall k \in \mathbb{N}$, I_k è aperto, per il teorema 1.3.7 $f^{-1}(I_k)$ è misurabile, pertanto, per il teorema 1.2.36, esiste $G_k \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, tale che $f^{-1}(I_k) \subseteq G_k$ e $\mu\big(G_k \setminus f^{-1}(I_k)\big) < \varepsilon/2^{k+1}$. Poniamo

$$B = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \big(G_k \setminus f^{-1}(I_k)\big).$$

Allora B è misurabile, perché unione numerabile di insiemi misurabili, e

$$\mu(B) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu\big(G_k \setminus f^{-1}(I_k)\big) < \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon\,.$$

Dimostriamo che $g = f|_{A \setminus B}$ è continua. Sia $\boldsymbol{c} \in A \setminus B$. Se U è un intorno di $g(\boldsymbol{c})$, allora $\exists k \in \mathbb{N}$ tale che $\boldsymbol{c} \in I_k \subseteq U$. Si ha

$$G_k \cap (A \setminus B) \subseteq G_k \setminus B \subseteq G_k \setminus \big(G_k \setminus f^{-1}(I_k)\big) = f^{-1}(I_k).$$

Pertanto se $\boldsymbol{x} \in G_k \cap (A \setminus B)$, allora $g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \in I_k \subseteq U$. Poiché G_k è aperto, questo prova che g è continua in $\boldsymbol{c}$. ■

Per il teorema di Luzin, eliminando un opportuno insieme di misura arbitrariamente piccola dal dominio di una funzione misurabile, si ottiene una funzione continua. In modo analogo, se una successione di funzioni converge in ogni punto del dominio, eliminando un opportuno insieme di misura arbitrariamente piccola la convergenza è più forte.

1.3.21 Teorema (di Severini-Egorov[5])

Siano $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, tale che $\mu(A) < +\infty$, $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ successione di funzioni misurabili da A a $\mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$. Se $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge a f, allora, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $\exists B \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, con $\mu(B) < \varepsilon$, tale che

$$\sup_{A \setminus B} |f_k - f| \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0.$$

[4]Il teorema prende il nome da Nikolaj Nikolaevič Luzin (Irkutsk, Russia, 1883 - Mosca, 1950), diede importanti contributi alla teoria della misura e alla topologia. Luzin pubblicò il teorema in un articolo del 1912.

[5]Il teorema prende il nome da Carlo Severini (Arcevia, Ancona, 1872 - Pesaro, 1951) e Dmitrij Fëdorovič Egorov (Mosca, 1869 - Kazan, URSS, 1931). Il teorema fu dimostrato da Severini nel 1910 e da Egorov, che non conosceva il lavoro di Severini, nel 1911.

Severini studiò le funzioni analitiche e le serie di funzioni, Egorov la geometria differenziale e varie questioni di analisi matematica.

Dimostrazione. Per il teorema 1.3.16 f è misurabile. Per $\ell \in \mathbb{N}$ e $j \in \mathbb{N}^*$ poniamo

$$B_{\ell,j} = \bigcup_{k \geq \ell} \left\{ x \in A \,\middle|\, |f_k(x) - f(x)| \geq \frac{1}{j} \right\}.$$

Le funzioni f e f_k sono misurabili e la funzione valore assoluto è continua, pertanto, per il teorema 1.3.11, ciascuno dei $B_{\ell,j}$ è misurabile. Risulta $\mu(B_{\ell,j}) \leq \mu(A) < +\infty$, inoltre $B_{\ell+1,j} \subseteq B_{\ell,j}$, quindi, per il teorema 1.2.24, affermazione II, risulta

$$\lim_{\ell \to +\infty} \mu(B_{\ell,j}) = \mu\Big(\bigcap_{\ell \in \mathbb{N}} B_{\ell,j}\Big).$$

Proviamo che, $\forall j \in \mathbb{N}^*$, si ha $\bigcap_{\ell \in \mathbb{N}} B_{\ell,j} = \varnothing$. Se $x \in A$, si ha $|f_k(x) - f(x)| \to 0$, quindi $\exists \overline{k} \in \mathbb{N}$ tale che, se $k \geq \overline{k}$, allora $|f_k(x) - f(x)| < 1/j$, quindi $x \notin B_{\overline{k},j}$, pertanto $x \notin \bigcap_{\ell \in \mathbb{N}} B_{\ell,j}$. Perciò $\bigcap_{\ell \in \mathbb{N}} B_{\ell,j} = \varnothing$.

Risulta quindi $\lim_{\ell \to +\infty} \mu(B_{\ell,j}) = 0$, perciò $\exists \ell_j \in \mathbb{N}$ tale che $\mu(B_{\ell_j,j}) < \varepsilon/2^j$. Poniamo $B = \bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} B_{\ell_j,j}$. Si ha

$$\mu(B) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(B_{\ell_j,j}) < \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon.$$

Si ha $\sup_{A \setminus B} |f_k - f| \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$; infatti, se $x \in A \setminus B$, allora, $\forall j \in \mathbb{N}^*$, risulta $x \notin B_{\ell_j,j}$, quindi, $\forall k \geq \ell_j$, si ha $|f_k(x) - f(x)| < 1/j$; pertanto $\sup_{A \setminus B} |f_k - f| < 1/j$. ■

1.3.22 Esempio. Per $k \in \mathbb{N}$ sia

$$g_k : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad g_k(x) = x^k.$$

Evidentemente $\lim_{k \to +\infty} g_k = g$ con

$$g_k : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in [0,1[\,, \\ 1, & \text{se } x = 1\,. \end{cases}$$

Si ha

$$\sup_{x \in [0,1]} |g_k(x) - g(x)| = \sup_{x \in [0,1[} x^k = 1.$$

Qualunque sia $\delta \in \,]0,1[$ si ha

$$\sup_{x \in [0,\delta]} |g_k(x) - g(x)| = \sup_{x \in [0,\delta]} x^k = \delta^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0.$$

Pertanto, fissato $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, se $\delta \in \,]0,1[$ è tale che $1 - \delta < \varepsilon$, posto $B = \,]\delta, 1]$, risulta $\mu(B) = 1 - \delta < \varepsilon$ e

$$\sup_{[0,1] \setminus B} |g_k - g| = \sup_{[0,\delta]} |g_k - g| \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0.$$ ◀

1.3.23 Esempio. Mostriamo che l'ipotesi $\mu(A) < +\infty$ è essenziale nel teorema di Severini-Egorov.

Per $k \in \mathbb{N}$ sia

$$h_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad h_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [k, k+1[\ , \\ 0, & \text{se } x \notin [k, k+1[\ . \end{cases}$$

Per ogni $x \in \mathbb{R}$, se $k > x$ si ha $h_k(x) = 0$, quindi $h_k \to 0$. Se $B \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ è tale che $\mu(B) < 1$, allora, $\forall k \in \mathbb{N}$, non può essere $[k, k+1[\ \subseteq B$, quindi $\exists x \in \mathbb{R} \setminus B$ tale che $h_k(x) = 1$. Pertanto $\sup_{\mathbb{R}\setminus B}|h_k| = 1$. Quindi non esiste $B \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, con $\mu(B) < 1$, tale che $\sup_{\mathbb{R}\setminus B}|h_k| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$. ◀

1.3.2 Approssimazione di funzioni misurabili

Come osservato sopra, definiamo l'integrale di una funzione misurabile a partire dall'integrale di funzioni che assumono un numero finito di valori. In questa sottosezione studiamo tali funzioni e come esse possano approssimare una funzione misurabile.

Definizione di funzione caratteristica di un insieme

Sia $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Chiamiamo **funzione caratteristica** di B la funzione

$$\chi_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad \chi_B(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{se } \boldsymbol{x} \in B, \\ 0, & \text{se } \boldsymbol{x} \notin B. \end{cases}$$

Nel seguito chiameremo funzione caratteristica anche la restrizione di una funzione caratteristica a un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$, continuando a indicarla con la notazione χ_B.

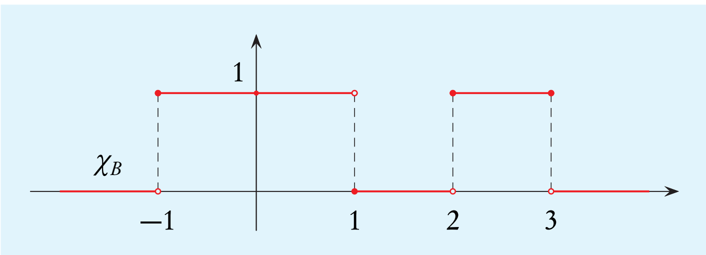


Figura 1.3.3
La funzione caratteristica dell'insieme $B = [-1, 1[\ \cup [2, 3]$.

1.3.24 Teorema

Sia $B \subseteq \mathbb{R}^n$. La funzione χ_B è misurabile se e solo se $B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione. Poiché, $\forall c \in \mathbb{R}$, si ha

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \chi_B(\boldsymbol{x}) < c\} = \begin{cases} \varnothing, & \text{se } c \le 0, \\ \complement B, & \text{se } 0 < c \le 1, \\ \mathbb{R}^n, & \text{se } c > 0, \end{cases}$$

χ_B è misurabile se e solo se $\complement B$ è misurabile, cioè se e solo se B è misurabile. ■

Definizione di funzione semplice

Siano $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ e $f : A \to \mathbb{R}$. Diciamo che f è una **funzione semplice** quando f è misurabile e la sua immagine ha un numero finito di elementi.

1.3.25 Esempio. Se $B \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, allora χ_B è misurabile (v. teorema 1.3.24) e l'immagine è contenuta in $\{0,1\}$, quindi è finita. Pertanto χ_B è una funzione semplice.

In particolare se $n = 1$ e $B = \mathbb{Q}$ abbiamo la funzione g_1 studiata nell'esempio 1.3.2. ◀

1.3.26 Esempio. Sia

$$g_3 : [0,3] \to \mathbb{R}, \qquad g_3(x) = [x].$$

La funzione g_3 è semplice. Infatti si verifica facilmente che g_3 è misurabile e risulta $g_3\big([0,3]\big) = \{0,1,2,3\}$ che è finito. ◀

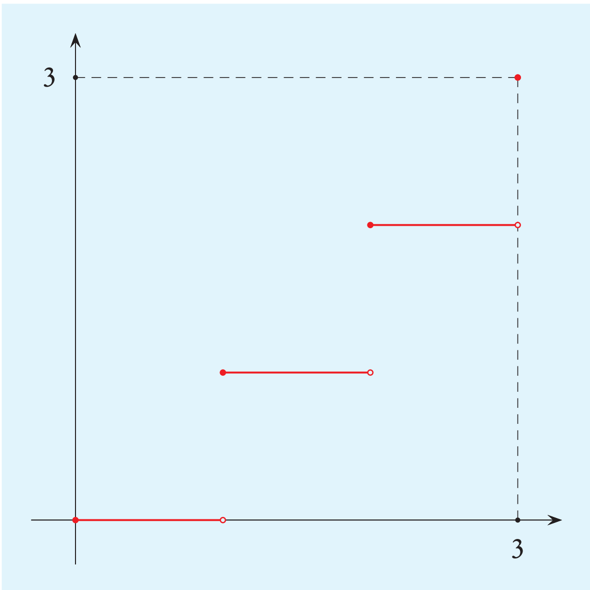


Figura 1.3.4
La funzione semplice g_3 studiata nell'esempio 1.3.26

1.3.27 Osservazione. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ semplice. Poniamo $f(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$, con i $\lambda_j \in \mathbb{R}$ distinti tra loro, e, per $j = 1, 2, \ldots, p$, $B_j = f^{-1}\big(\{\lambda_j\}\big)$. Per il teorema 1.3.6 ciascun B_j è misurabile e risulta $f = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \chi_{B_j}$. Pertanto ogni funzione semplice può essere scritta come combinazione lineare di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili a due a due disgiunti.

Viceversa, se una funzione è combinazione lineare di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili (anche non disgiunti tra loro), allora, per il teorema 1.3.13, tale funzione è misurabile; inoltre ogni valore assunto dalla funzione è somma di coefficienti della combinazione lineare, quindi l'immagine è finita, pertanto la funzione è semplice. ◀

1.3.28 Teorema

Siano $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ semplici e $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora $f + g$, λf e $f g$ sono funzioni semplici.

Dimostrazione. Per il teorema 1.3.13 somma, prodotto per scalare e prodotto di funzioni misurabili sono misurabili; inoltre somma, prodotto e prodotto per scalare di funzioni a immagine finita hanno immagine finita. Da questi due fatti segue il teorema. ■

Il seguente teorema assicura che ogni funzione misurabile non negativa è limite di una successione crescente di funzioni semplici non negative. Questo giustifica la definizione di integrale per funzioni non negative verrà data.

1.3.29 Teorema

Siano $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ e $f : A \to [0,+\infty]$ misurabile. Allora esiste $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ successione di funzioni da A a $[0,+\infty[$ tali che

I) $\forall k \in \mathbb{N}$, f_k è una funzione semplice;

II) $\forall k \in \mathbb{N}$, $f_k \le f_{k+1}$;

III) $\lim_{k\to+\infty} f_k = f$.

Dimostrazione. Poniamo, $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$f_k : A \to \mathbb{R}, \qquad f_k(x) = \frac{1}{2^k} \max\left\{\ell \in \{0,1,\ldots,k2^k\} \,\middle|\, \frac{\ell}{2^k} \le f(x)\right\}.$$

La definizione è ben posta, perché un insieme di numeri naturali superiormente limitato ha massimo.

Si ha $f_k(x) = \ell/2^k$ se ℓ è il più grande naturale minore o uguale di $k2^k$ tale che $\ell/2^k \le f(x)$. In particolare $f_k(x) \le f(x)$.

Proviamo che $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è la successione di funzioni cercata.

Evidentemente $f_k(A) \subseteq \left\{\ell/2^k \,\middle|\, \ell \in \{0,1,\ldots,k2^k\}\right\}$, quindi f_k è a valori non negativi e la sua immagine è finita. Se $\ell \in \{0,1,\ldots,k2^k - 1\}$ risulta $f_k(x) = \ell/2^k$ se e solo se $\ell/2^k \le f(x) < (\ell+1)/2^k$, quindi

$$\left\{x \in A \,\middle|\, f_k(x) = \frac{\ell}{2^k}\right\} = \left\{x \in A \,\middle|\, f(x) \ge \frac{\ell}{2^k}\right\} \cap \left\{x \in A \,\middle|\, f(x) < \frac{\ell+1}{2^k}\right\},$$

che è misurabile; se $\ell = k2^k$, allora

$$\left\{x \in A \,\middle|\, f_k(x) = \frac{\ell}{2^k}\right\} = \left\{x \in A \,\middle|\, f_k(x) = k\right\} = \left\{x \in A \,\middle|\, f(x) \ge k\right\},$$

che è misurabile. Pertanto f_k è semplice ed è verificata l'affermazione I.

Siano $k \in \mathbb{N}^*$ e $x \in A$. Se $f_k(x) = \ell/2^k$ allora

$$(2\ell)/2^{k+1} = \ell/2^k = f_k(x) \le f(x)$$

e $2\ell \le 2k2^k \le (k+1)2^{k+1}$. Quindi, per la definizione di f_{k+1}, si ha $(2\ell)/2^{k+1} \le f_{k+1}(x)$, perciò $f_k(x) \le f_{k+1}(x)$. Perciò è verificata l'affermazione II.

Sia $x \in A$. Se $f(x) < +\infty$, allora, per $k > f(x)$, si ha $f_k(x) \le f(x) < f_k(x) + 1/2^k$, quindi $\lim_{k\to+\infty} f_k(x) = f(x)$. Se $f(x) = +\infty$, allora, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, si ha $f_k(x) = k$, quindi $\lim_{k\to+\infty} f_k(x) = +\infty = f(x)$. Perciò è verificata l'affermazione III. ■

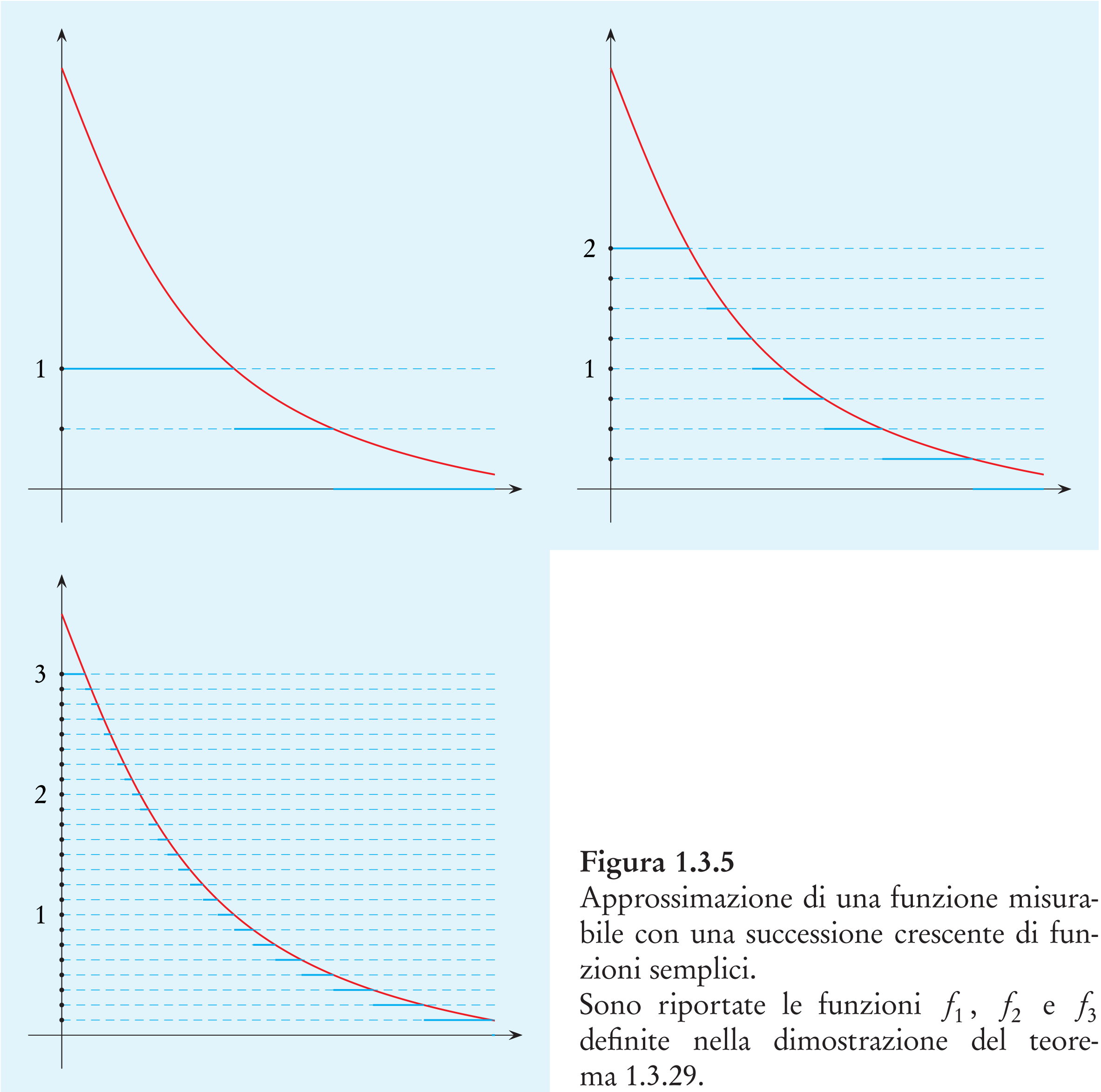


Figura 1.3.5
Approssimazione di una funzione misurabile con una successione crescente di funzioni semplici.
Sono riportate le funzioni f_1, f_2 e f_3 definite nella dimostrazione del teorema 1.3.29.

1.4 Integrale secondo Lebesgue

In questa sezione definiamo l'integrale secondo Lebesgue di funzioni da un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ a $\overline{\mathbb{R}}$. La definizione è data anzitutto per funzioni semplici non negative, successivamente per funzioni misurabili non negative e infine per funzioni misurabili di segno arbitrario.

1.4.1 Integrale di funzioni a valori non negativi

Risulta naturale definire l'integrale della funzione caratteristica di un insieme misurabile come la misura dell'insieme. Una funzione semplice è combinazione lineare di funzioni caratteristiche, quindi risulta naturale la definizione che segue.

Per essere certi che la somma è definita, cioè che non ci sono contemporaneamente addendi uguali a $+\infty$ e addendi uguali a $-\infty$, diamo la definizione solo per funzioni non negative.

Definizione di integrale di una funzione semplice non negativa

Siano $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ e $f : A \to [0, +\infty[$ semplice. Chiamiamo **integrale** di f il numero reale esteso

$$\int_A f(x)\,dx = \sum_{\lambda \in f(A)} \lambda \mu\big(f^{-1}(\{\lambda\})\big).$$

Poiché f è semplice, $f(A)$ è finito, quindi la somma che compare nella definizione è somma di un numero finito di addendi non negativi. Tali addendi possono essere uguali a $+\infty$, se $\lambda > 0$ e $\mu\big(f^{-1}(\{\lambda\})\big) = +\infty$. Quindi l'integrale di una funzione semplice non negativa appartiene a $[0, +\infty]$.

Una funzione costante è semplice ed evidentemente si ha $\int_A \lambda\,dx = \lambda\mu(A)$.

1.4.1 Osservazione. Sia $f : A \to [0, +\infty[$ semplice. Poniamo $f(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$, con i $\lambda_j \in [0, +\infty[$ distinti tra loro, e, per $j = 1, 2, \ldots, p$, $B_j = f^{-1}\big(\{\lambda_j\}\big)$. Evidentemente risulta

$$\int_A f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \mu(B_j).$$

Questa osservazione sarà utilizzata nel seguito per semplificare la notazione. ◀

Nel seguito se $A, B \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, con $B \subseteq A$, e $f : A \to [0, +\infty[$ semplice, scriviamo $\int_B f(x)\,dx$ per indicare $\int_A f\big|_B(x)\,dx$.

1.4.2 Esempio. Consideriamo la funzione

$$g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

introdotta nell'esempio 1.3.2.

La funzione g_1 è semplice e non negativa, si ha

$$\int_{\mathbb{R}} g_1(x) = \sum_{\lambda \in \{0,1\}} \lambda \mu\big(g_1^{-1}(\{\lambda\})\big) = 0\mu(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) + 1\mu(\mathbb{Q}) = 0,$$

perché $\mathbb{Q}$ è numerabile e quindi ha misura nulla (v. osservazione 1.2.3). ◀

1.4.3 Esempio. Consideriamo la funzione

$$g_3 : [0, 3] \to \mathbb{R}, \qquad g_3(x) = [x],$$

introdotta nell'esempio 1.3.26.

La funzione g_3 è semplice e non negativa, la sua immagine è $\{0, 1, 2, 3\}$, quindi si ha

$$\int_{[0,3]} g_3(x) = \sum_{\lambda \in \{0,1,2,3\}} \lambda \mu\big(g_3^{-1}(\{\lambda\})\big) = 0\mu\big([0,1[\big) + 1\mu\big([1,2[\big) + 2\mu\big([2,3[\big) + 3\mu\big(\{3\}\big) =$$
$$= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 3.$$
◀

Per dimostrare le proprietà dell'integrale di funzioni semplici è utile il seguente teorema.

1.4.4 Teorema

Siano $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, $A_1, A_2, \dots, A_q$ sottoinsiemi misurabili di A a due a due disgiunti e tali che $\bigcup_{k=1}^q A_k = A$ e $f : A \to [0, +\infty[$ semplice. Allora

$$\int_A f(x)\,dx = \sum_{k=1}^q \int_{A_k} f(x)\,dx .$$

Dimostrazione. Sia $f(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$, con i $\lambda_j \in [0, +\infty[$ distinti tra loro, e, per $j = 1, 2, \dots, p$, poniamo $B_j = f^{-1}(\{\lambda_j\})$. Si ha (v. osservazione 1.4.1)

$$\int_A f(x)\,dx = \sum_{j=1}^p \lambda_j \mu(B_j) = \sum_{j=1}^p \lambda_j \sum_{k=1}^q \mu(B_j \cap A_k) = \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^p \lambda_j \mu(B_j \cap A_k).$$

Risulta

$$B_j \cap A_k = \{x \in A_k \mid f(x) = \lambda_j\} = (f|_{A_k})^{-1}(\{\lambda_j\})$$

e, se $\lambda_j \notin f(A_k)$, tale insieme è vuoto, quindi ha misura nulla.

Pertanto

$$\sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^p \lambda_j \mu(B_j \cap A_k) = \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^p \lambda_j \mu\Big((f|_{A_k})^{-1}(\{\lambda_j\})\Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^q \sum_{\substack{j=1 \\ \lambda_j \in f(A_k)}}^p \lambda_j \mu\Big((f|_{A_k})^{-1}(\{\lambda_j\})\Big) = \sum_{k=1}^q \int_{A_k} f(x)\,dx . \qquad \blacksquare$$

1.4.5 Teorema

Siano $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ e $f : A \to [0, +\infty[$ semplice. Se $\mu(A) = 0$, allora

$$\int_A f(x)\,dx = 0.$$

Dimostrazione. Per ogni $\lambda \in f(A)$ si ha $f^{-1}(\{\lambda\}) \subseteq A$, quindi $\mu\big(f^{-1}(\{\lambda\})\big) = 0$, pertanto risulta

$$\int_A f(x)\,dx = \sum_{\lambda \in f(A)} \lambda \mu\big(f^{-1}(\{\lambda\})\big) = \sum_{\lambda \in f(A)} \lambda \cdot 0 = 0. \qquad \blacksquare$$

1.4.6 Teorema

Siano $A, B \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, con $B \subseteq A$, e $f : A \to [0, +\infty[$ semplice. Allora

$$\int_B f(x)\,dx = \int_A f(x) \chi_B(x)\,dx .$$

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema 1.4.4 si ha

$$\int_A f(x)\chi_B(x)\,dx = \int_B f(x)\chi_B(x)\,dx + \int_{A\setminus B} f(x)\chi_B(x)\,dx =$$
$$= \int_B f(x)\cdot 1\,dx + \int_{A\setminus B} f(x)\cdot 0\,dx = \int_B f(x)\,dx\,.$$

■

1.4.7 Teorema

Siano $A\in\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, $f,g: A\to[0,+\infty[$ semplici e $c\in[0,+\infty[$. Allora:

I) $\int_A cf(x)\,dx = c\int_A f(x)\,dx$;

II) $\int_A\big(f(x)+g(x)\big)dx = \int_A f(x)\,dx + \int_A g(x)\,dx$.

DIMOSTRAZIONE. I) Se $c=0$ l'affermazione è ovvia. Se $c\neq 0$ allora

$$\int_A cf(x)\,dx = \sum_{\lambda\in(cf)(A)} \lambda\mu\Big(\big\{x\in A\,|\,cf(x)=\lambda\big\}\Big) = \sum_{\nu\in f(A)} c\nu\mu\Big(\big\{x\in A\,|\,cf(x)=c\nu\big\}\Big) =$$
$$= c\sum_{\nu\in f(A)} \nu\mu\Big(\big\{x\in A\,|\,f(x)=\nu\big\}\Big) = c\int_A f(x)\,dx\,.$$

II) Sia $f(A)=\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p\}$, con i λ_j distinti tra loro, e, per $j=1,2,\dots,p$, poniamo $B_j = f^{-1}\big(\{\lambda_j\}\big)$. Analogamente sia $g(A)=\{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_q\}$, con i ν_h distinti tra loro, e, per $h=1,2,\dots,q$, poniamo $C_h = g^{-1}\big(\{\nu_h\}\big)$. Allora gli insiemi $B_j\cap C_h$ sono misurabili, a due a due disgiunti, e $\bigcup_{j=1}^p\bigcup_{h=1}^q B_j\cap C_h = A$, pertanto, per il teorema 1.4.4, risulta

$$\int_A\big(f(x)+g(x)\big)dx = \sum_{j=1}^p\sum_{h=1}^q\int_{B_j\cap C_h}\big(f(x)+g(x)\big)dx\,.$$

Se $x\in B_j\cap C_h$, allora $f(x)=\lambda_j$ e $g(x)=\nu_h$, pertanto si ha

$$\sum_{j=1}^p\sum_{h=1}^q\int_{B_j\cap C_h}\big(f(x)+g(x)\big)dx = \sum_{j=1}^p\sum_{h=1}^q\int_{B_j\cap C_h}(\lambda_j+\nu_h)\,dx =$$
$$= \sum_{j=1}^p\sum_{h=1}^q(\lambda_j+\nu_h)\mu(B_j\cap C_h) = \sum_{j=1}^p\lambda_j\sum_{h=1}^q\mu(B_j\cap C_h) + \sum_{h=1}^q\nu_h\sum_{j=1}^p\mu(B_j\cap C_h) =$$
$$= \sum_{j=1}^p\lambda_j\mu\left(\bigcup_{h=1}^q(B_j\cap C_h)\right) + \sum_{h=1}^q\nu_h\mu\left(\bigcup_{j=p}^q(B_j\cap C_h)\right) =$$
$$= \sum_{j=1}^p\lambda_j\mu(B_j) + \sum_{h=1}^q\nu_h\mu(C_h) = \int_A f(x)\,dx + \int_A g(x)\,dx\,.$$

■

1.4.8 Teorema

Siano $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ e $f, g : A \to [0, +\infty[$ semplici. Se $f \le g$, allora

$$\int_A f(x)\,dx \le \int_A g(x)\,dx\,.$$

Dimostrazione. Per il teorema 1.3.28, la funzione $g - f$ è semplice, inoltre essa è non negativa. Per il teorema 1.4.7, affermazione II si ha

$$\int_A g(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx + \int_A \bigl(g(x) - f(x)\bigr)\,dx \ge \int_A f(x)\,dx\,. \qquad \blacksquare$$

Poiché ogni funzione misurabile non negativa è limite di una successione crescente di funzioni non negative semplici (v. teorema 1.3.29), si può pensare di definire l'integrale di una funzione misurabile non negativa f come limite dell'integrale di una successione crescente di funzioni semplici che tendono a f. Se si definisce l'integrale in questo modo, è necessario verificare che esso dipende dalla funzione f e non dalla successione crescente di funzioni semplici scelta. Risulta quindi più semplice la seguente definizione.

Definizione di integrale di una funzione misurabile non negativa

Siano $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ e $f : A \to [0, +\infty]$ misurabile. Chiamiamo **integrale** di f il numero reale esteso

$$\int_A f(x)\,dx = \sup\left\{ \int_A \varphi(x)\,dx \,\middle|\, \varphi : A \to [0, +\infty[\text{ semplice, } \varphi \le f \right\}.$$

L'integrale di una funzione misurabile non negativa è non negativo, perché estremo superiore di un insieme di numeri non negativi.

1.4.9 Osservazione. Se f è semplice, questa definizione di integrale coincide con quella di integrale come funzione semplice.

Infatti, data $\varphi : A \to [0, +\infty[$ semplice e tale che $\varphi \le f$, per il teorema 1.4.8 si ha $\int_A \varphi(x)\,dx \le \int_A f(x)\,dx$ (dove gli integrali sono nel senso delle funzioni semplici); quindi

$$\int_A f(x)\,dx = \max\left\{ \int_A \varphi(x)\,dx \,\middle|\, \varphi : A \to [0, +\infty[\text{ semplice, } \varphi \le f \right\},$$

pertanto coincide con l'integrale nel senso delle funzioni misurabili. ◀

Studiamo prime le proprietà dell'integrale di funzioni misurabili non negative.

1.4.10 Teorema

Siano $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ e $f, g : A \to [0, +\infty]$ misurabili. Se $f \le g$, allora

$$\int_A f(x)\,dx \le \int_A g(x)\,dx\,.$$

Dimostrazione. Il teorema segue subito dalla definizione di integrale, perché

$$\left\{\int_A \varphi(x)\,dx \,\middle|\, \varphi : A \to [0,+\infty[\text{ semplice, } \varphi \le f\right\} \subseteq$$
$$\subseteq \left\{\int_A \varphi(x)\,dx \,\middle|\, \varphi : A \to [0,+\infty[\text{ semplice, } \varphi \le g\right\},$$

quindi

$$\sup\left\{\int_A \varphi(x)\,dx \,\middle|\, \varphi : A \to [0,+\infty[\text{ semplice, } \varphi \le f\right\} \le$$
$$\le \sup\left\{\int_A \varphi(x)\,dx \,\middle|\, \varphi : A \to [0,+\infty[\text{ semplice, } \varphi \le g\right\},$$ ■

1.4.11 Teorema

Siano $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e $f : A \to [0,+\infty]$ misurabile. Se $\mu(A) = 0$, allora

$$\int_A f(x)\,dx = 0.$$

Dimostrazione. Ogni funzione semplice non negativa ha integrale nullo in A, per il teorema 1.4.5; dalla definizione di integrale segue subito che anche l'integrale di f è nullo. ■

1.4.12 Teorema

Siano $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e $f : A \to [0,+\infty]$ misurabile.

I) Se $\int_A f(x)\,dx < +\infty$, allora $f(x) < +\infty$ per quasi ogni $x \in A$.

II) Se $\int_A f(x)\,dx = 0$, allora $f(x) = 0$ per quasi ogni $x \in A$.

Dimostrazione. I) Poniamo $B = \{x \in A \,|\, f(x) = +\infty\}$. Per $k \in \mathbb{N}^*$, la funzione $k\chi_B$ è semplice e $k\chi_B \le f$, quindi

$$\int_A f(x)\,dx \ge \int_A k\chi_B(x)\,dx = k\mu(B).$$

Pertanto

$$\mu(B) \le \frac{1}{k}\int_A f(x)\,dx \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Quindi $\mu(B) = 0$.

II) Poniamo $B = \{x \in A \,|\, f(x) > 0\}$ e, per $k \in \mathbb{N}^*$, $B_k = \{x \in A \,|\, f(x) \ge 1/k\}$. Si ha $B = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k$ e la successione dei B_k è crescente, quindi, per il teorema 1.2.24, affermazione I, risulta $\mu(B) = \lim_{k\to+\infty} \mu(B_k)$. Poiché $(1/k)\chi_{B_k} \le f$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, si ha

$$0 = \int_A f(x)\,dx \ge \int_A \frac{1}{k}\chi_{B_k}(x)\,dx = \frac{1}{k}\mu(B_k),$$

pertanto $\mu(B_k) = 0$. Pertanto si ha anche $\mu(B) = 0$. ■

Il teorema seguente è un primo risultato sulla possibilità di scambiare limite e integrale per una successione di funzioni. Fornisce anche uno strumento per provare le proprietà dell'integrale di funzioni misurabili non negative a partire dalle corrispondenti proprietà dell'integrale di funzioni semplici.

1.4.13 Teorema (della convergenza monotona di Beppo Levi[6])

Siano $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ successione di funzioni misurabili da A a $[0,+\infty]$, tale che, $\forall k \in \mathbb{N}$, si ha $f_k \leq f_{k+1}$. Allora

$$\lim_{k\to+\infty} \int_A f_k(x)\,dx = \int_A \lim_{k\to+\infty} f_k(x)\,dx\,.$$

Dimostrazione. Poiché, $\forall x \in A$, la successione $\big(f_k(x)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ è crescente, essa ha limite, che indichiamo con $f(x)$. La funzione $f: A \to [0,+\infty]$ così definita è misurabile, perché limite di funzioni misurabili (v. teorema 1.3.16). La successione $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è crescente, pertanto, per il teorema 1.4.10, anche la successione $\big(\int_A f_k(x)\,dx\big)_{k\in\mathbb{N}}$ è crescente, perciò ha limite. Si ha, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_A f_k(x)\,dx \leq \int_A f(x)\,dx$, pertanto risulta

$$\lim_{k\to+\infty} \int_A f_k(x)\,dx \leq \int_A f(x)\,dx\,.$$

Per terminare la dimostrazione proviamo che

$$\int_A f(x)\,dx \leq \lim_{k\to+\infty} \int_A f_k(x)\,dx\,.$$

Per la definizione di integrale è sufficiente provare che qualunque sia $\varphi: A \to [0,+\infty[$ semplice e tale che $\varphi \leq f$, risulta

$$\int_A \varphi(x)\,dx \leq \lim_{k\to+\infty} \int_A f_k(x)\,dx\,.$$

Sia φ una tale funzione e sia $\delta \in]0,1[$.

Per $k \in \mathbb{N}$ poniamo

$$B_k = \{x \in A \mid \delta\varphi(x) \leq f_k(x)\}\,.$$

Poiché $\delta\varphi$ e f_k sono misurabili, $B_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Proviamo che la successione dei B_k è crescente e ha unione A. Per $k \in \mathbb{N}$, se $x \in B_k$, allora $\delta\varphi(x) \leq f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$, quindi $x \in B_{k+1}$; perciò $B_k \subseteq B_{k+1}$. Sia $x \in A$. Se $\varphi(x) = 0$, allora, $\forall k \in \mathbb{N}$, si ha $\delta\varphi(x) = 0 \leq f_k(x)$; se $\varphi(x) > 0$, allora $\delta\varphi(x) < \varphi(x) \leq f(x)$, quindi, definitivamente, $\delta\varphi(x) \leq f_k(x)$. In ogni caso $\exists k \in \mathbb{N}$ tale che $x \in B_k$, perciò $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k = A$.

[6]Il teorema prende il nome da Beppo Levi (Torino, 1875 - Rosario, Argentina, 1961), ottenne importanti risultati sulle equazioni differenziali, le funzioni di variabile complessa, la geometria algebrica. Levi pubblicò il teorema in un articolo del 1906.

Posto, per $k \in \mathbb{N}$, $\psi_k = \delta\varphi\chi_{B_k}$, risulta $\psi_k \le f_k$. Infatti se $x \in B_k$, allora si ha $\psi_k(x) = \delta\varphi(x) \le f_k(x)$, mentre se $x \in A \setminus B_k$, allora si ha $\psi_k(x) = 0 \le f_k(x)$. Pertanto, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\int_A \psi_k(x)\,dx \le \int_A f_k(x)\,dx. \tag{1.4.1}$$

Determiniamo il limite di $\int_A \psi_k(x)\,dx$.

Sia $\varphi(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$, con i $\lambda_j \in [0, +\infty[$ distinti tra loro, e, per $j = 1, 2, \dots, p$, poniamo $A_j = f^{-1}(\{\lambda_j\})$. Allora si ha, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\psi_k = \sum_{\ell=1}^{p} \delta\lambda_\ell \chi_{A_\ell}\chi_{B_k} = \sum_{\ell=1}^{p} \delta\lambda_\ell \chi_{A_\ell \cap B_k}.$$

Risulta $A_\ell \cap B_k \subseteq A_\ell \cap B_{k+1}$ e $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}(A_\ell \cap B_k) = A_\ell \cap A = A_\ell$, quindi, per il teorema 1.2.24, affermazione I, si ha $\lim_{k\to+\infty} \mu(A_\ell \cap B_k) = \mu(A_\ell)$. Pertanto

$$\int_A \psi_k(x)\,dx = \sum_{\ell=1}^{p} \delta\lambda_\ell \mu(A_\ell \cap B_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \sum_{\ell=1}^{p} \delta\lambda_\ell \mu(A_\ell) = \delta \int_A \varphi(x)\,dx.$$

Quindi, per uguaglianza (1.4.1), si ha

$$\delta \int_A \varphi(x)\,dx \le \lim_{k\to+\infty} \int_A f_k(x)\,dx.$$

Questa disuguaglianza vale $\forall\delta \in\,]0,1[$, quindi vale anche per $\delta = 1$, pertanto risulta $\int_A \varphi(x)\,dx \le \lim_{k\to+\infty} \int_A f_k(x)\,dx$. ■

Il teorema di Beppo Levi può essere utilizzato per il calcolo degli integrali. La definizione di integrale di una funzione f richiede di considerare tutte le funzioni semplici maggiorate da f e di determinare l'estremo superiore degli integrali di tali funzioni. Per il teorema di Beppo Levi è sufficiente costruire una successione crescente di funzioni semplici convergente a f (che esiste per il teorema 1.3.29) e determinare il limite della successione degli integrali di tali funzioni.

1.4.14 Esempio. Sia

$$g_4 : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad g_4(x) = \sqrt{x}.$$

La funzione g_4 è non negativa; inoltre è continua, quindi misurabile. Procedendo come nella dimostrazione del teorema 1.3.29, costruiamo una successione crescente di funzioni semplici convergente a g_4 ponendo $f_k(x) = \ell/2^k$ se $\ell/2^k \le g_4(x) < (\ell+1)/2^k$, con $\ell = 0, 1, \dots, 2^k$. Poiché g_4 è sempre minore o uguale a 1 non è necessario considerare valori di ℓ maggiori di 2^k.

Se $\ell < 2^k$ si ha $\ell/2^k \leq g_4(x) < (\ell+1)/2^k$ se e solo se $\ell^2/2^{2k} \leq x < (\ell+1)^2/2^{2k}$, mentre se $\ell = 2^k$ si ha $\ell/2^k \leq g_4(x) < (\ell+1)/2^k$ se e solo se $x = 1$. Pertanto

$$\int_{[0,1]} f_k(x)\,dx = \sum_{\ell=1}^{2^k-1} \frac{\ell}{2^k}\left(\frac{(\ell+1)^2}{2^{2k}} - \frac{\ell^2}{2^{2k}}\right) = \frac{1}{2^{3k}} \sum_{\ell=1}^{2^k-1} \ell(2\ell+1) = \frac{2}{2^{3k}} \sum_{\ell=1}^{2^k-1} \ell^2 + \frac{1}{2^{3k}} \sum_{\ell=1}^{2^k-1} \ell =$$

$$= \frac{2}{2^{3k}} \frac{(2^k-1)2^k(2^{k+1}-1)}{6} + \frac{1}{2^{3k}} \frac{(2^k-1)2^k}{2} = \frac{1}{3} \frac{2^k-1}{2^k} \frac{2^{k+1}-1}{2^k} + \frac{1}{2} \frac{2^k-1}{2^{2k}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \frac{2}{3}.$$

Pertanto $\int_{[0,1]} \sqrt{x}\,dx = 2/3$. ◀

Utilizziamo il teorema di Beppo Levi 1.4.13 per provare che alcune proprietà dell'integrale di funzioni semplici valgono anche per l'integrale di funzioni misurabili.

1.4.15 Teorema

Siano $A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, con $B \subseteq A$, e $f : A \to [0,+\infty]$ misurabile. Allora

$$\int_B f|_B(x)\,dx = \int_A f(x)\chi_B(x)\,dx.$$

Dimostrazione. Per il teorema 1.3.29 esiste $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ successione crescente di funzioni semplici che tende a f. Per il corrispondente teorema per funzioni semplici (teorema 1.4.6) si ha, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\int_B \varphi_k|_B(x)\,dx = \int_A \varphi_k(x)\chi_B(x)\,dx;$$

per il teorema di Beppo Levi 1.4.13 l'uguaglianza vale anche passando al limite. ■

1.4.16 Teorema

Siano $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, $f, g : A \to [0,+\infty]$ misurabili e $c \in [0,+\infty[$. Allora:

I) $\int_A c f(x)\,dx = c \int_A f(x)\,dx$;

II) $\int_A \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int_A f(x)\,dx + \int_A g(x)\,dx$.

Dimostrazione. Per il teorema 1.3.29 esistono $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ successioni crescenti di funzioni semplici che tendono a f e a g, rispettivamente. Per il corrispondente teorema per funzioni semplici (teorema 1.4.7) si ha, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\int_A c\varphi_k(x)\,dx = c\int_A \varphi_k(x)\,dx,$$

$$\int_A \big(\varphi_k(x) + \psi_k(x)\big)\,dx = \int_A \varphi_k(x)\,dx + \int_A \psi_k(x)\,dx;$$

per il teorema di Beppo Levi 1.4.13 l'uguaglianza vale anche passando al limite. ■

1.4.17 Teorema

Siano $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ una serie di funzioni misurabili da A a $[0,+\infty]$. Allora

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_A f_k(x)\,dx = \int_A \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\,dx\,.$$

Dimostrazione. Indichiamo con s_k la somma parziale k-sima della serie $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$. Poiché le f_k sono non negative, la successione $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è crescente, quindi, per il teorema di Beppo Levi 1.4.13, si ha

$$\int_A \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\,dx = \int_A \lim_{k\to+\infty} s_k(x)\,dx = \lim_{k\to+\infty} \int_A s_k(x)\,dx\,.$$

Per il teorema 1.4.16, affermazione II, si ha $\int_A s_k(x)\,dx = \sum_{j=0}^{k} \int_A f_j(x)\,dx$, da ciò segue subito il teorema. ■

Possiamo utilizzare questo teorema per studiare l'integrale sull'unione di più insiemi.

1.4.18 Teorema (additività numerabile dell'integrale)

Siano $\{A_k \,|\, k \in \mathscr{A}\}$ una famiglia finita o numerabile di sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^n$ a due a due disgiunti, $A = \bigcup_{k\in\mathscr{A}} A_k$ e $f : A \to [0,+\infty]$ misurabile. Allora

$$\int_A f(x)\,dx = \sum_{k\in\mathscr{A}} \int_{A_k} f(x)\,dx\,.$$

Dimostrazione. Per i teoremi 1.4.15 e 1.4.17

$$\sum_{k\in\mathscr{A}} \int_{A_k} f(x)\,dx = \sum_{k\in\mathscr{A}} \int_A f(x)\chi_{A_k}(x)\,dx = \int_A f(x) \sum_{k\in\mathscr{A}} \chi_{A_k}(x)\,dx$$

Gli A_k sono a due a due disgiunti e la loro unione è A, pertanto, $\forall x \in A$ esiste uno e un solo $k \in \mathscr{A}$ tale che $x \in A_k$, quindi $\sum_{k\in\mathscr{A}} \chi_{A_k}(x) = 1$. Pertanto l'integrale a ultimo membro è uguale a $\int_A f(x)\,dx$. ■

Come conseguenza di questo teorema si ottiene immediatamente il seguente.

1.4.19 Teorema

Siano $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e $f, g : A \to [0,+\infty]$ misurabili. Se $f = g$ quasi dappertutto in A allora

$$\int_A f(x)\,dx = \int_A g(x)\,dx\,.$$

Dimostrazione. Sia $B = \{x \in A \mid f(x) \neq g(x)\}$. Per ipotesi $\mu(B) = 0$, quindi, per il teorema 1.4.11, ogni funzione ha integrale nullo in B. Pertanto, per il teorema di attività numerabile dell'integrale 1.4.18,

$$\int_A f(x)\,dx = \int_{A\setminus B} f(x)\,dx + \int_B f(x)\,dx = \int_{A\setminus B} f(x)\,dx =$$
$$= \int_{A\setminus B} g(x)\,dx = \int_{A\setminus B} g(x)\,dx + \int_B g(x)\,dx = \int_A g(x)\,dx. \qquad \blacksquare$$

Il teorema di Beppo Levi 1.4.13 riguarda l'integrale del limite di una successione crescente di funzioni non negative. Poiché il minimo limite di una successione è limite di una successione crescente, possiamo utilizzare tale teorema per avere informazioni sull'integrale del minimo limite di un'arbitraria successione di funzioni non negative. Si ottiene il teorema seguente.

1.4.20 Teorema (Lemma di Fatou[7])

Siano $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ successione di funzioni misurabili da A a $[0,+\infty]$. Allora

$$\int_A \min\lim_{k\to+\infty} f_k(x)\,dx \leq \min\lim_{k\to+\infty} \int_A f_k(x)\,dx.$$

Dimostrazione. Poniamo, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in A$, $g_k(x) = \inf\{f_j(x) \mid j \geq k\}$. Per il teorema 1.3.14 ciascuna funzione g_k è misurabile. Inoltre la successione $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è crescente. Perciò, per il teorema di Beppo Levi 1.4.13

$$\int_A \min\lim_{k\to+\infty} f_k(x)\,dx = \int_A \lim_{k\to+\infty} g_k(x)\,dx = \lim_{k\to+\infty} \int_A g_k(x)\,dx.$$

Per la definizione di g_k, se $j \geq k$, si ha $g_k \leq f_j$, quindi, $\forall k \in \mathbb{N}$, risulta

$$\int_A g_k(x)\,dx \leq \inf_{j\geq k} \int_A f_j(x)\,dx,$$

perciò

$$\lim_{k\to+\infty} \int_A g_k(x)\,dx \leq \lim_{k\to+\infty} \left(\inf_{j\geq k} \int_A f_h(x)\,dx \right) = \min\lim_{k\to+\infty} \int_A f_k(x)\,dx. \qquad \blacksquare$$

1.4.21 Esempio. Vediamo un esempio in cui nella tesi del lemma di Fatou non si ha uguaglianza.

Poniamo, $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$g_k \colon]0,1[\to \mathbb{R}, \qquad g_k(x) = k\,\chi_{]0,1/k[}(x).$$

[7] Il teorema prende il nome da Pierre Joseph Louis Fatou (Lorient, Francia, 1878 - Pornichet, Francia, 1929), che diede contributi allo studio dei sistemi dinamici e dell'analisi complessa. Questo teorema, anche se comunemente chiamato "lemma di Fatou", è fondamentale per lo studio dell'integrale; fu provato da Fatou nel 1906.

Per ogni $x \in]0,1[$, se $k \geq 1/x$ si ha $x \geq 1/k$, quindi $g_k(x) = 0$, pertanto $g_k(x) \to 0$, per $k \to +\infty$, qualunque sia $x \in]0,1[$. Quindi si ha

$$\int_{]0,1[} \lim_{k \to +\infty} g_k(x)\, dx = \int_{]0,1[} 0\, dx = 0 .$$

Invece, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, si ha

$$\int_{]0,1[} g_k(x)\, dx = k\mu\left(\left]0, \frac{1}{k}\right[\right) = 1 .$$

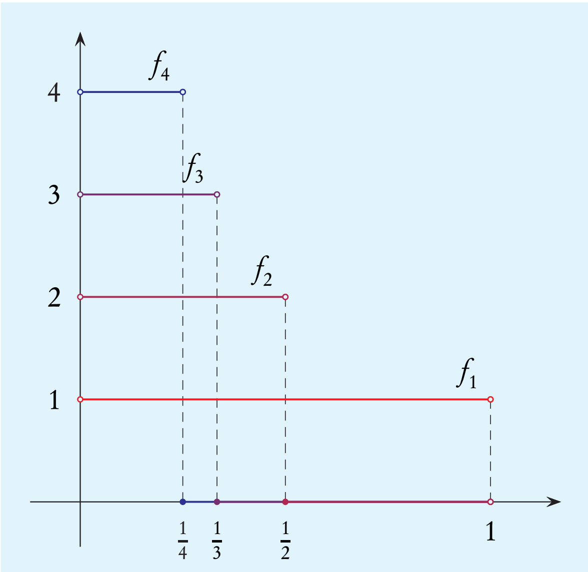


Figura 1.4.1
La successione di funzioni studiata nell'esempio 1.4.21

Il teorema seguente, valido per le funzioni con integrale finito, afferma che l'integrale è piccolo in insiemi di misura piccola.

1.4.22 Teorema (assoluta continuità dell'integrale)

Siano $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ e $f : A \to [0, +\infty]$ misurabile e tale che $\int_A f(x)\, dx < +\infty$. Allora, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $\exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tale che, per ogni $B \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ sottoinsieme di A con $\mu(B) < \delta_\varepsilon$, si ha $\int_B f(x)\, dx < \varepsilon$.

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Per la definizione di integrale esiste $\varphi : A \to [0, +\infty[$ semplice, tale che $\varphi \leq f$ e

$$\int_A \varphi(x)\, dx > \int_A f(x)\, dx - \frac{\varepsilon}{2} ,$$

cioè, per il teorema 1.4.16, affermazione II,

$$\int_A \big(f(x) - \varphi(x)\big)\, dx < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Poiché φ ha immagine finita, ha massimo; sia $K = \max \varphi$. Allora, qualunque sia $B \subseteq A$ misurabile, si ha

$$\int_B f(x)\,dx = \int_B \big(f(x) - \varphi(x)\big)\,dx + \int_B \varphi(x)\,dx \leq= \int_A \big(f(x) - \varphi(x)\big)\,dx + \int_B \varphi(x)\,dx <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \int_B K\,dx \leq \frac{\varepsilon}{2} + K\mu(B).$$

Posto $\delta_\varepsilon = \varepsilon/(2K)$, se $\mu(B) < \delta_\varepsilon$, allora si ha $\int_B f(x)\,dx < \varepsilon$. ■

1.4.23 Osservazione. Il nome di questo teorema ricorda che, in un senso opportuno, l'integrale dipende con continuità dal dominio di integrazione.

Infatti siano f, ε e δ_ε come nell'enunciato del teorema e $B_1, B_2 \subseteq A$ misurabili. Allora

$$\left|\int_{B_1} f(x)\,dx - \int_{B_2} f(x)\,dx\right| =$$
$$= \left|\int_{B_1 \cap B_2} f(x)\,dx + \int_{B_1 \setminus B_2} f(x)\,dx - \int_{B_2 \cap B_1} f(x)\,dx - \int_{B_2 \setminus B_1} f(x)\,dx\right| =$$
$$= \left|\int_{B_1 \setminus B_2} f(x)\,dx - \int_{B_2 \setminus B_1} f(x)\,dx\right| \leq \int_{B_1 \setminus B_2} f(x)\,dx + \int_{B_2 \setminus B_1} f(x)\,dx =$$
$$= \int_{(B_1 \setminus B_2) \cup (B_2 \setminus B_1)} f(x)\,dx.$$

Pertanto, se $\mu\big((B_1 \setminus B_2) \cup (B_2 \setminus B_1)\big) < \delta_\varepsilon$, allora $\left|\int_{B_1} f(x)\,dx - \int_{B_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$.

Osserviamo che $(B_1 \setminus B_2) \cup (B_2 \setminus B_1)$ è la differenza simmetrica tra B_1 e B_2. ◀

1.4.2 Integrale di funzioni misurabili

Abbiamo finora definito l'integrale di funzioni misurabili non negative. Estendiamo la definizione a funzioni di segno arbitrario. L'idea di base è di scomporre la funzione nella differenza di due funzioni non negative e di definire l'integrale come la differenza degli integrali di queste funzioni. Per procedere in questo modo è necessario che gli integrali di cui si fa la differenza non siano entrambi uguali a $+\infty$. Per evitare questa situazione definiamo l'integrale per una classe di funzioni più piccola di quella delle funzioni misurabili.

Sia $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, con $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Nel seguito indicheremo sempre con f^+ e f^- le funzioni da A a $[0, +\infty]$ tali che, $\forall x \in A$,

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \qquad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}.$$

Le funzioni f^+ e f^- sono dette, rispettivamente, **parte positiva** e **parte negativa** di f.

Si verifica facilmente che, $\forall x \in A$, si ha

$$f^+(x) - f^-(x) = f(x), \qquad f^+(x) + f^-(x) = |f(x)|.$$

Se f è misurabile, allora le funzioni f^+ e f^- sono misurabili, perché massimo di funzioni misurabili (v. teorema 1.3.14).

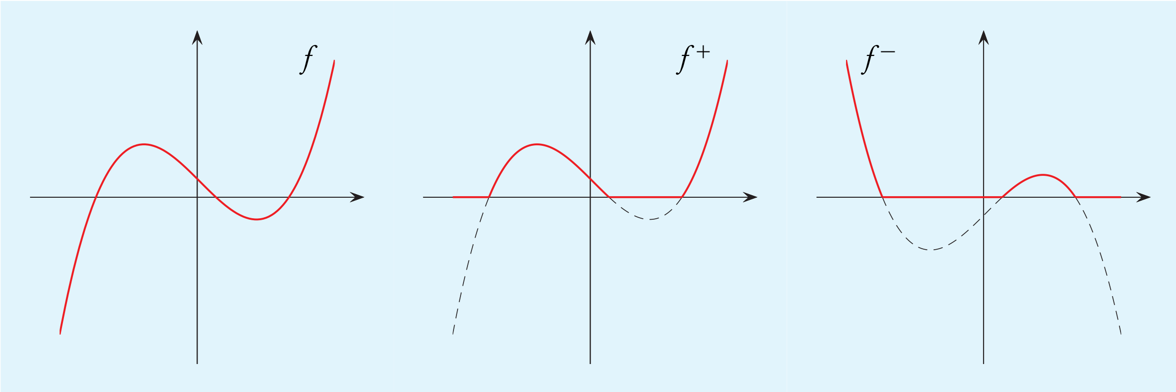


Figura 1.4.2
Parte positiva e parte negativa di una funzione.

Definizione di funzione sommabile e integrale di una funzione sommabile

Siano $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile. Diciamo che f è **sommabile** quando si ha $\int_A f^+(x)\,dx < +\infty$ e $\int_A f^-(x)\,dx < +\infty$. In tal caso chiamiamo **integrale** di f il numero reale

$$\int_A f(x)\,dx = \int_A f^+(x)\,dx - \int_A f^-(x)\,dx\,.$$

Se f è a valori non negativi, allora $f^+ = f$ e $f^- = 0$, quindi f è sommabile se e solo se $\int_A f(x)\,dx < +\infty$. In questo caso è evidente che la nuova definizione di integrale coincide con quella precedente.

Vediamo alcune condizioni che assicurano che una funzione è sommabile.

1.4.24 Teorema

Siano $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile. La funzione f è sommabile se e solo se $|f|$ è sommabile e in tal caso si ha

$$\left|\int_A f(x)\,dx\right| \le \int_A |f(x)|\,dx\,.$$

Dimostrazione. Se f è sommabile allora

$$\int_A |f(x)|\,dx = \int_A \big(f^+(x) + f^-(x)\big)\,dx = \int_A f^+(x)\,dx + \int_A f^-(x)\,dx < +\infty\,.$$

quindi $|f|$ è sommabile.

Viceversa, se $|f|$ è sommabile, allora

$$\int_A f^+(x)\,dx \le \int_A \big(f^+(x) + f^-(x)\big)\,dx = \int_A |f(x)|\,dx < +\infty\,;$$

in modo analogo si prova che $\int_A f^-(x)\,dx < +\infty$, quindi f è sommabile.

Inoltre se f è sommabile, allora

$$\left|\int_A f(x)\,dx\right| = \left|\int_A f^+(x)\,dx - \int_A f^-(x)\,dx\right| \leq \left|\int_A f^+(x)\,dx\right| + \left|\int_A f^-(x)\,dx\right| =$$
$$= \int_A f^+(x)\,dx + \int_A f^-(x)\,dx = \int_A |f(x)|\,dx\,.$$

1.4.25 Teorema

Siano $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ e $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile. Se esiste $g : A \to [0,+\infty]$ sommabile e tale che $|f| \leq g$, allora f è sommabile.

Dimostrazione. Per il teorema 1.4.10 si ha $\int_A |f(x)|\,dx \leq \int_A g(x)\,dx < +\infty$, quindi $|f|$ è sommabile, pertanto, per il teorema 1.4.24, f è sommabile.

1.4.26 Teorema

Siano $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ e $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile. Se $\mu(A) < +\infty$ e f è limitata, allora f è sommabile.

Dimostrazione. Posto $K = \sup\{|f(x)| \mid x \in A\}$, la funzione $|f|$ è maggiorata dalla funzione che vale costantemente K, che è sommabile perché il suo integrale è $K\mu(A) < +\infty$. Quindi, per il teorema 1.4.25, f è sommabile.

Estendiamo le proprietà dell'integrale di funzioni misurabili non negative all'integrale di funzioni sommabili.

1.4.27 Teorema (monotonia dell'integrale)

Siano $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ e $f, g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ sommabili. Se $f \leq g$, allora

$$\int_A f(x)\,dx \leq \int_A g(x)\,dx\,.$$

Dimostrazione. Si ha, $\forall x \in A$,

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \leq \max\{g(x), 0\} = g^+(x),$$
$$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\} \geq \max\{-g(x), 0\} = g^-(x).$$

Pertanto, per il teorema 1.4.10, $\int_A f^+(x)\,dx \leq \int_A g^+(x)\,dx$ e $\int_A f^-(x)\,dx \geq \int_A g^-(x)\,dx$, da cui segue la tesi.

1.4.28 Teorema

Siano $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ e $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile. Se $\mu(A) = 0$, allora f è sommabile e si ha $\int_A f(x)\,dx = 0$.

Dimostrazione. Segue dal fatto che, per il teorema 1.4.11, l'integrale di f^+ e di f^- è 0. ■

1.4.29 Teorema

Siano $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ e $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ sommabile. Allora, per quasi ogni $x \in A$, $f(x) \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Poiché f è sommabile $\int_A f^+(x)\,dx < +\infty$ e $\int_A f^-(x)\,dx < +\infty$, quindi, per il teorema 1.4.12, affermazione I, $\left\{x \in A \,\middle|\, f^+(x) = +\infty\right\}$ e $\left\{x \in A \,\middle|\, f^-(x) = +\infty\right\}$ hanno misura nulla. Allora $\left\{x \in A \,\middle|\, f(x) \in \{+\infty, -\infty\}\right\}$, che è l'unione dei due insiemi precedenti, ha misura nulla. ■

1.4.30 Teorema

Siano $A, B \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, con $B \subseteq A$, e $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ sommabile. Allora $f|_B$ è sommabile e

$$\int_B f|_B(x)\,dx = \int_A f(x)\chi_B(x)\,dx\,.$$

Dimostrazione. Poiché $|f\chi_B| \leq |f|$, per il teorema 1.4.25 $f\chi_B$ è sommabile. Per il teorema 1.4.15

$$\int_B f^+|_B(x)\,dx = \int_A f^+(x)\chi_B(x)\,dx < +\infty$$

e

$$\int_B f^-|_B(x)\,dx = \int_A f^-(x)\chi_B(x)\,dx < +\infty\,,$$

quindi $f|_B$ è sommabile.

Inoltre si ha

$$\begin{aligned}
\int_B f|_B(x)\,dx &= \int_B f^+|_B(x)\,dx - \int_B f^-|_B(x)\,dx = \\
&= \int_A f^+(x)\chi_B(x)\,dx - \int_A f^-(x)\chi_B(x)\,dx = \\
&= \int_A (f\chi_B)^+(x)\,dx - \int_A (f\chi_B)^-(x)\,dx = \int_A f(x)\chi_B(x)\,dx\,.
\end{aligned}$$ ■

1.4.31 Teorema (linearità dell'integrale)

Siano $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, $f, g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ sommabili e $c \in \mathbb{R}$. Allora:

I) cf è sommabile e si ha

$$\int_A cf(x)\,dx = c\int_A f(x)\,dx\,;$$

II) se $f+g$ è definita, allora è sommabile e si ha

$$\int_A \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_A f(x)\,dx + \int_A g(x)\,dx\,.$$

Dimostrazione. I) Poiché

$$\int_A |cf(x)|\,dx = \int_A |c||f(x)|\,dx = |c|\int_A |f(x)|\,dx < +\infty$$

per il teorema 1.4.24, cf è sommabile.

L'uguaglianza tra gli integrali segue dall'analoga uguaglianza per funzioni misurabili non negative (v. teorema 1.4.16, affermazione I) se $c \geq 0$. Quindi è sufficiente provarlo per $c=-1$ per concludere che vale anche per $c<0$.

Si ha $(-f)^+(x) = \max\{-f(x),0\} = f^-(x)$ e $(-f)^-(x) = \max\{f(x),0\} = f^+(x)$, quindi

$$\begin{aligned}\int_A \big(-f(x)\big)\,dx &= \int_A (-f)^+(x)\,dx - \int_A (-f)^-(x)\,dx = \\ &= \int_A f^-(x)\,dx - \int_A f^+(x)\,dx = -\int_A f(x)\,dx\,.\end{aligned}$$

II) Poiché

$$\int_A |f(x)+g(x)|\,dx \leq \int_A \big(|f(x)|+|g(x)|\big)\,dx = \int_A |f(x)|\,dx + \int_A |g(x)|\,dx < +\infty\,,$$

per il teorema 1.4.24, $f+g$ è sommabile. Inoltre si ha

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f+g = f^+ - f^- + g^+ - g^-\,,$$

quindi

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+\,.$$

Poiché la formula che stiamo dimostrando vale per le funzioni misurabili non negative (v. teorema 1.4.16, affermazione II), si ha

$$\begin{aligned}\int_A (f+g)^+(x)\,dx + \int_A f^-(x)\,dx + \int_A g^-(x)\,dx &= \\ = \int_A (f+g)^-(x)\,dx + \int_A f^+(x)\,dx + \int_A g^+(x)\,dx\,,\end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned}\int_A (f+g)^+(x)\,dx - \int_A (f+g)^-(x)\,dx &= \\ = \int_A f^+(x)\,dx - \int_A f^-(x)\,dx + \int_A g^+(x)\,dx - \int_A g^-(x)\,dx\,.\end{aligned}$$ ■

Dal lemma di Fatou 1.4.20 otteniamo il seguente teorema sull'integrale del limite di una successione di funzioni sommabili.

1.4.32 Teorema (della convergenza dominata di Lebesgue)

Siano $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ e $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ successione di funzioni misurabili da A a $\overline{\mathbb{R}}$ convergente. Se esiste $g : A \to [0,+\infty]$ sommabile, tale che, $\forall k \in \mathbb{N}$, si ha $|f_k| \leq g$, allora $\lim_{k\to+\infty} f_k$ è sommabile e

$$\lim_{k\to+\infty} \int_A f_k(x)\,dx = \int_A \lim_{k\to+\infty} f_k(x)\,dx\,.$$

Dimostrazione. Poniamo, $\forall x \in A$, $f(x) = \lim_{k\to+\infty} f_k(x)$. La funzione f è misurabile perché limite di funzioni misurabili (v. teorema 1.3.16). Poiché $|f_k(x)| \leq g(x)$, si ha anche $|f(x)| \leq g(x)$, quindi, per il teorema 1.4.25, f è sommabile.

Poiché, $\forall k \in \mathbb{N}$, si ha $|f_k| \leq g$ e $|f| \leq g$, risulta $|f_k - f| \leq |f_k| + |f| \leq 2g$; pertanto la funzione $2g - |f_k - f|$ è a valori non negativi. Per il lemma di Fatou,

$$\int_A \min\lim_{k\to+\infty}\bigl(2g(x) - |f_k(x) - f(x)|\bigr)\,dx \leq \min\lim_{k\to+\infty} \int_A \bigl(2g(x) - |f_k(x) - f(x)|\bigr)\,dx\,,$$

che equivale a

$$\int_A \Bigl(2g(x) - \max\lim_{k\to+\infty}|f_k(x) - f(x)|\Bigr)\,dx \leq \int_A 2g(x)\,dx - \max\lim_{k\to+\infty} \int_A |f_k(x) - f(x)|\,dx\,.$$

Poiché $|f_k(x) - f(x)| \to 0$, per $k \to +\infty$, da qui segue

$$\int_A 2g(x)\,dx \leq \int_A 2g(x)\,dx - \max\lim_{k\to+\infty} \int_A |f_k(x) - f(x)|\,dx\,,$$

quindi $\max\lim_{k\to+\infty} \int_A |f_k(x) - f(x)|\,dx \leq 0$. Poiché $\int_A |f_k(x) - f(x)|\,dx \geq 0$ si ha anche $\min\lim_{k\to+\infty} \int_A |f_k(x) - f(x)|\,dx \geq 0$, pertanto $\lim_{k\to+\infty} \int_A |f_k(x) - f(x)|\,dx = 0$. Poiché, $\forall k \in \mathbb{N}$, si ha

$$\left|\int_A f_k(x)\,dx - \int_A f(x)\,dx\right| \leq \int_A |f_k(x) - f(x)|\,dx\,,$$

risulta

$$\left|\int_A f_k(x)\,dx - \int_A f(x)\,dx\right| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

e il teorema è provato. ■

L'ipotesi che esista una funzione sommabile che maggiora tutti i termini della successione è essenziale per la validità di questo teorema, come mostra il seguente esempio.

1.4.33 Esempio. Consideriamo la successione di funzioni di termine k-simo (con $k \in \mathbb{N}^*$)

$$g_k :]0,1[\to \mathbb{R}\,, \qquad g_k(x) = k\,\chi_{]0,1/k[}(x)\,.$$

già studiata nell'esempio 1.4.21.

Abbiamo stabilito che tale successione converge a 0, ma risulta $\int_{]0,1[} g_k(x)\,dx = 1$, qualunque sia $k \in \mathbb{N}^*$, pertanto

$$\int_{]0,1[} \lim_{k\to+\infty} g_k(x)\,dx \neq \lim_{k\to+\infty} \int_{]0,1[} g_k(x)\,dx\,.$$

Non si può applicare il teorema della convergenza dominata di Lebesgue 1.4.32, perché non esiste una funzione sommabile che maggiora ciascuno dei termini della successione.

Per verificarlo determiniamo la più piccola funzione $g:]0,1[\to [0,+\infty]$ che maggiora g_k per ogni $k \in \mathbb{N}^*$; evidentemente $g(x) = \sup\{g_k(x) \,|\, k \in \mathbb{N}^*\}$.

Sia $j \in \mathbb{N}^*$; se $k \le j$ si ha $[1/(j+1), 1/j[\,\subseteq\,]0, 1/k[$, mentre se $k > j$ risulta $[1/(j+1), 1/j[\,\cap\,]0,1/k[= \varnothing$; quindi se $x \in [1/(j+1), 1/j[$ si ha $g_k(x) = k$ se $k \le j$, mentre $g_k(x) = 0$ se $k > j$. Pertanto risulta

$$g:]0,1[\to [0,+\infty], \qquad g(x) = j\,, \qquad \text{per } x \in [1/(j+1), 1/j[\,.$$

Si ha

$$\int_{]0,1[} g(x)\,dx = \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{[1/(j+1),1/j[} j\,dx = \sum_{j=1}^{+\infty} j\left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j+1} = +\infty\,,$$

perché la serie armonica è divergente. Quindi g non è sommabile. ◀

Dal teorema della convergenza dominata di Lebesgue 1.4.32 si ottengono facilmente i seguenti teoremi.

1.4.34 Teorema

Siano $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ e $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ una serie di funzioni sommabili da A a $\overline{\mathbb{R}}$ convergente. Se $\sum_{k=0}^{+\infty} \int_A |f_k(x)|\,dx < +\infty$, allora $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ è sommabile e si ha

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_A f_k(x)\,dx = \int_A \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\,dx\,.$$

1.4.35 Teorema (additività dell'integrale)

Siano $\{A_k \,|\, k \in \mathscr{A}\}$ una famiglia finita o numerabile di sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^n$ a due a due disgiunti, $A = \bigcup_{k\in\mathscr{A}} A_k$ e $f: A \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile. Se, $\forall k \in \mathscr{A}$, $f|_{A_k}$ è sommabile e $\sum_{k\in\mathscr{A}} \int_{A_k} |f(x)|\,dx < +\infty$, allora f è sommabile in A e si ha

$$\int_A f(x)\,dx = \sum_{k\in\mathscr{A}} \int_{A_k} f(x)\,dx\,.$$

I teoremi seguenti relativi alle funzioni sommabili sono una facile conseguenza degli analoghi teoremi per le funzioni misurabili non negative.

1.4.36 Teorema

Siano $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e $f, g : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Se f è sommabile e $f = g$ quasi dappertutto in A allora g è sommabile e

$$\int_A f(x)\,dx = \int_A g(x)\,dx\,.$$

Dimostrazione. Poiché si ha $f = g$ quasi dappertutto, risulta $f^+ = g^+$ e $f^- = g^-$ quasi dappertutto. Pertanto, per il teorema 1.4.19, si ha $\int_A f^+(x)\,dx = \int_A g^+(x)\,dx$ e $\int_A f^-(x)\,dx = \int_A g^-(x)\,dx$ da cui segue $\int_A f(x)\,dx = \int_A g(x)\,dx$. ■

1.4.37 Teorema (assoluta continuità dell'integrale)

Siano $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ sommabile. Allora, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $\exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tale che, per ogni $B \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ sottoinsieme di A con $\mu(B) < \delta_\varepsilon$, si ha $\int_B |f(x)|\,dx < \varepsilon$.

Dimostrazione. Segue immediatamente dall'analogo teorema per le funzioni a valori non negativi con integrale finito (teorema 1.4.22). ■

1.4.3 Relazione tra integrali secondo Riemann e secondo Lebesgue

In questa sottosezione studiamo, nel caso unidimensionale, la relazione tra integrale secondo Riemann e integrale secondo Lebesgue, sia per l'integrale in intervalli compatti che per l'integrale generalizzato.

Concluderemo che su intervalli compatti l'integrale secondo Lebesgue è più generale di quello secondo Riemann e che la sommabilità è più generale della assoluta convergenza di integrali generalizzati.

Per distinguere i due integrali utilizziamo la notazione $\int_a^b$ per l'integrale secondo Riemann e $\int_{[a,b]}$ per quello secondo Lebesgue.

1.4.38 Teorema

Siano $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata. Se f è integrabile secondo Riemann allora è sommabile secondo Lebesgue e si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f(x)\,dx\,.$$

Dimostrazione. Per la caratterizzazione della integrabilità secondo Riemann, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, esiste σ_k, scomposizione di $[a, b]$, tale che si ha $S(f, \sigma_k) - s(f, \sigma_k) < 1/k$. Poniamo, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\tau_k = \bigcup_{j=1}^k \sigma_j$. Poiché τ_k è un sottoinsieme finito di $[a, b]$, è una scomposizione ed evidentemente è più fine di σ_k, quindi si ha anche $S(f, \tau_k) - s(f, \tau_k) < 1/k$. Inoltre τ_{k+1} è più fine di τ_k.

Fissato $k \in \mathbb{N}^*$, sia $\tau_k = \{x_0, x_1, \dots, x_p\}$, con $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = b$. Poniamo $J_1 = [x_0, x_1]$ e, per $j = 2, 3, \dots, p$, $J_j =]x_{j-1}, x_j]$. Evidentemente gli intervalli J_j sono a due a due disgiunti e la loro unione è $[a, b]$. Poniamo

$$g_k : [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad g_k(x) = \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f, \quad \text{se } x \in J_j,$$
$$h_k : [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad h_k(x) = \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f, \quad \text{se } x \in J_j.$$

Poiché ciascuno degli intervalli J_j è misurabile, le funzioni g_k e h_k sono misurabili. Inoltre esse sono limitate in un insieme di misura finita, quindi, per il teorema 1.4.26, sono sommabili. Per il teorema di additività dell'integrale 1.4.35 si ha

$$\int_{[a,b]} g_k(x)\,dx = \sum_{j=1}^{p} \int_{J_j} g_k(x)\,dx = \sum_{j=1}^{p} \inf_{[x_{j-1},x_j]} f\, \mu(J_j) = \sum_{j=1}^{p} \inf_{[x_{j-1},x_j]} f\,(x_j - x_{j-1}) =$$
$$= s(f, \tau_k).$$

Analogamente $\int_{[a,b]} h_k(x)\,dx = S(f, \tau_k)$.

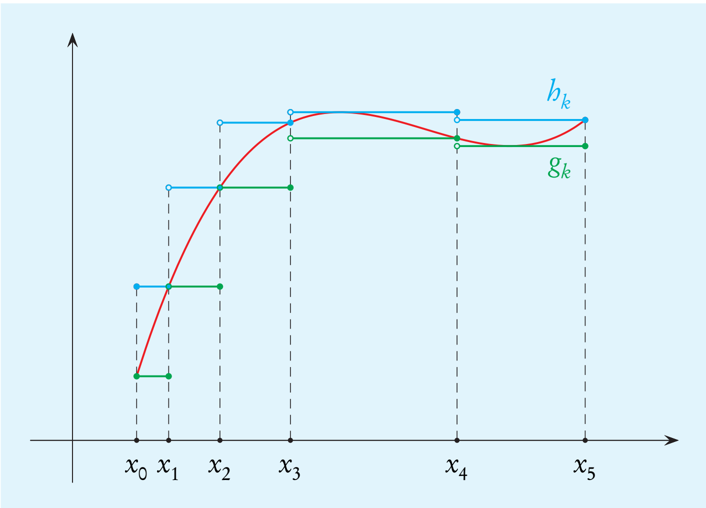


Figura 1.4.3
Le funzioni g_k e h_k definite nella dimostrazione del teorema 1.4.38

Poiché, per ogni j, $J_j \subseteq [x_{j-1}, x_j]$, se $x \in J_j$ risulta

$$g_k(x) = \inf_{[x_{j-1},x_j]} f \le \inf_{J_j} f \le f(x).$$

Pertanto si ha $g_k \le f$. In modo analogo si dimostra che $h_k \ge f$.

Poiché $\tau_k \subseteq \tau_{k+1}$, si ha $g_k \le g_{k+1}$ e $h_k \ge h_{k+1}$. Infatti, se $x \in [a,b]$, allora esiste un intervallo chiuso J, i cui estremi sono punti consecutivi di τ_k, tale che $x \in J$ e $g_k(x) = \inf_J f$, ed esiste un intervallo chiuso I, i cui estremi sono punti consecutivi di τ_{k+1}, tale che $x \in I$ e $g_{k+1}(x) = \inf_I f$. Poiché $\tau_k \subseteq \tau_{k+1}$, si ha $I \subseteq J$, quindi $\inf_J f \le \inf_I f$, pertanto $g_k(x) \le g_{k+1}(x)$. In modo analogo si dimostra che, $\forall x \in [a,b]$, si ha $h_k(x) \ge h_{k+1}(x)$.

Per quanto provato finora, $\forall x \in [a,b]$, la successione $\big(g_k(x)\big)_{k\in\mathbb{N}^*}$ è crescente e limitata superiormente da $f(x)$, pertanto ha limite reale che indichiamo con $g(x)$. Ovviamente, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, si ha $g_k(x) \leq g(x) \leq f(x)$. Analogamente esiste reale $\lim_{k\to+\infty} h_k(x)$. Lo indichiamo con $h(x)$ e risulta $h_k(x) \geq h(x) \geq f(x)$.

Le funzioni g e h così definite sono limite di successioni di funzioni misurabili, quindi, per il teorema 1.3.16, sono misurabili. Inoltre si ha $h_k - g_k \geq h - g$, pertanto, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ si ha

$$\int_{[a,b]} \big(h(x)-g(x)\big)\,dx \leq \int_{[a,b]} \big(h_k(x)-g_k(x)\big)\,dx = \int_{[a,b]} h_k(x)\,dx - \int_{[a,b]} g_k(x)\,dx =$$
$$= S(f,\tau_k)-s(f,\tau_k) < \frac{1}{k}.$$

Pertanto $\int_{[a,b]}\big(h(x)-g(x)\big)\,dx = 0$. Poiché $h-g$ è non negativa, per il teorema 1.4.12 è nulla quasi dappertutto, quindi per quasi ogni $x \in [a,b]$ si ha $g(x)=h(x)$. Poiché si ha $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, se $g(x)=h(x)$ si ha anche $g(x)=f(x)=h(x)$. Pertanto f è uguale quasi dappertutto a g e a h che sono misurabili, quindi, per il teorema 1.3.19, f è misurabile; poiché è limitata in un insieme di misura finita, per il teorema 1.4.26, è sommabile.

Per il teorema 1.4.36, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ risulta

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx = \int_{[a,b]} g(x)\,dx \geq \int_{[a,b]} g_k(x)\,dx = s(f,\tau_k) \geq \int_a^b f(x)\,dx - \frac{1}{k},$$

pertanto

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx.$$

In modo analogo si dimostra che

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx.$$ ■

Questo teorema assicura che ogni funzione integrabile secondo Riemann è anche integrabile secondo Lebesgue; non è vero il viceversa, come mostra il seguente esempio.

1.4.39 Esempio. Consideriamo la funzione

$$g_1\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad g_1(x)=\begin{cases} 1, & \text{se } x\in\mathbb{Q},\\ 0, & \text{se } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\end{cases}$$

già studiata nell'esempio 1.3.2, in cui abbiamo provato che g_1 è misurabile.

Scelto $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ poniamo $h = g_1|_{[a,b]}$. La funzione h è misurabile, perché restrizione di una funzione misurabile, e limitata, quindi è sommabile.

Proviamo che h non è integrabile secondo Riemann.

Ogni intervallo di $\mathbb{R}$ contiene sia punti di $\mathbb{Q}$, che punti non appartenenti a $\mathbb{Q}$. Perciò in qualunque intervallo h ha massimo 1 e minimo 0. Pertanto se $\sigma=\{x_0,x_1,\dots,x_k\}$ è una scomposizione di $[a,b]$ risulta

$$S(h,\sigma)=\sum_{j=1}^{k}\sup_{[x_{j-1},x_j]}h\,(x_j-x_{j-1})=\sum_{j=1}^{k}1\cdot(x_j-x_{j-1})=b-a\,,$$
$$s(h,\sigma)=\sum_{j=1}^{k}\inf_{[x_{j-1},x_j]}h\,(x_j-x_{j-1})=\sum_{j=1}^{k}0\cdot(x_j-x_{j-1})=0\,.$$

Quindi h ha integrale superiore $b-a$ e integrale inferiore 0, perciò non è integrabile secondo Riemann. ◀

1.4.40 Teorema

Sia $f:[a,b[\,\to\mathbb{R}$, con $-\infty<a<b\le+\infty$, tale che, $\forall\beta\in\,]a,b[$, f è integrabile secondo Riemann in $[a,\beta]$. La funzione f è assolutamente integrabile in senso generalizzato se e solo se è sommabile e in tal caso si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{[a,b[}f(x)\,dx\,.$$

Dimostrazione. Sia $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione in $[a,b[$ strettamente crescente, tale che $b_0=a$ e $b_k\to b$. Evidentemente $[a,b[\,=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}[a,b_k]$ e, per il teorema 1.4.38, $f|_{[a,b_k]}$ è misurabile, pertanto, per il teorema 1.3.17, f è misurabile.

Per definizione di integrale generalizzato

$$\int_a^b|f(x)|\,dx=\lim_{k\to+\infty}\int_a^{b_k}|f(x)|\,dx$$

e, per il teorema 1.4.38,

$$\lim_{k\to+\infty}\int_a^{b_k}|f(x)|\,dx=\lim_{k\to+\infty}\int_{[a,b_k]}|f(x)|\,dx\,.$$

Inoltre, poiché $[a,b_k[\,=\bigcup_{j=1}^{k}[b_{j-1},b_j[$ e $[a,b[\,=\bigcup_{j\in\mathbb{N}^*}[b_{j-1},b_j[$, per il teorema di additività dell'integrale 1.4.35, si ha

$$\int_{[a,b_k]}|f(x)|\,dx=\int_{[a,b_k[}|f(x)|\,dx=\sum_{j=1}^{k}\int_{[b_{j-1},b_j[}|f(x)|\,dx\xrightarrow[k\to+\infty]{}\sum_{j=1}^{+\infty}\int_{[b_{j-1},b_j[}|f(x)|\,dx=$$
$$=\int_{[a,b[}|f(x)|\,dx\,.$$

Pertanto risulta $\int_a^b|f(x)|\,dx=\int_{[a,b[}|f(x)|\,dx$. Quindi $\int_{[a,b[}|f(x)|\,dx<+\infty$ se e solo se $\int_a^b|f(x)|\,dx<+\infty$.

Infine, se f è assolutamente integrabile in senso generalizzato, allora si può ripetere per f quanto osservato sopra per $|f|$, quindi si ha $\int_a^b f(x)\,dx=\int_{[a,b[}f(x)\,dx$. ■

1.5 Calcolo degli integrali

In questa sezione studiamo alcuni teoremi che forniscono utili strumenti per il calcolo esplicito degli integrali.

1.5.1 Teoremi di riduzione

Il primo strumento che studiamo consente di ricondurre il calcolo di un integrale di una funzione dipendente da un certo numero di variabili al calcolo di integrali di funzioni che dipendono da un numero minore di variabili, con lo scopo finale di ricondursi al calcolo di integrali di funzioni di una sola variabile.

Per illustrare l'idea di base facciamo alcune considerazioni informali di tipo geometrico. Dalla teoria dell'integrale secondo Riemann, sappiamo che, mediante l'integrale di funzioni di una variabile, si possono calcolare aree. Infatti sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}^+$ integrabile secondo Riemann e poniamo

$$A=\big\{(x,y)\in[a,b]\times\mathbb{R}\,\big|\,0\le y\le f(x)\big\};$$

sappiamo che l'area di A è uguale a $\int_a^b f(x)\,dx$. Evidentemente $f(x)$ è la lunghezza del segmento $\big[0,f(x)\big]$; tale segmento è costituito dalle ordinate dei punti che si ottengono intersecando A con la retta verticale individuata dall'ascissa x. Quindi, indicando con A_x tale insieme, l'area di A si ottiene integrando la funzione che a x fa corrispondere la lunghezza di A_x. In formula:

$$\mu(A)=\int_a^b \mu(A_x)\,dx.$$

Questo consente di determinare una misura bidimensionale mediante l'integrale di una funzione di una variabile. Vedremo che un fatto analogo vale anche in dimensione superiore.

Possiamo anche interpretare in altro modo questa uguaglianza. L'area di A è l'integrale in $\mathbb{R}^2$ della funzione χ_A. Sappiamo che, se f è positiva, per $x\in[a,b]$, $f(x)$ è la lunghezza di A_x, che è l'integrale della funzione χ_{A_x}; se invece $x\notin[a,b]$, allora $A_x=\varnothing$ e la sua misura è 0. Evidentemente $y\in A_x$ se e solo se $(x,y)\in A$, quindi $\chi_{A_x}(y)=\chi_A(x,y)$, pertanto si ha

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}\chi_A(x,y)\,d(x,y)&=\mu(A)=\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b \mu(\chi_{A_x})\,dx=\int_{\mathbb{R}}\mu(\chi_{A_x})\,dx=\\&=\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}}\chi_{A_x}(y)\,dy\Big)dx=\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}}\chi_A(x,y)\,dy\Big)dx.\end{aligned}$$

Vedremo che l'uguaglianza

$$\int_{\mathbb{R}^2}\chi_A(x,y)\,d(x,y)=\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}}\chi_A(x,y)\,dy\Big)dx.$$

vale non solo per le funzioni caratteristiche e vale anche in dimensione superiore.

Osserviamo che la scrittura $d(x,y)$ sta a indicare che integriamo una funzione che dipende dalle variabili x e y. Spesso anziché $d(x,y)$ si scrive $dx\,dy$, perché ciò non dà luogo ad ambiguità.

I teoremi che otteniamo vanno sotto il nome di "teoremi di riduzione" perché riducono un integrale a integrali rispetto a un numero minore di variabili.

In questa sottosezione consideriamo lo spazio $\mathbb{R}^n$ come prodotto cartesiano $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r$. In generale indichiamo un elemento di tale spazio con $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, intendendo che $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^q$ e $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^r$.

Definizione di sezione di un insieme

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r$ e $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^q$. Chiamiamo **$\boldsymbol{x}$-sezione** di A l'insieme

$$A_{\boldsymbol{x}} = \left\{ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^r \,\middle|\, (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in A \right\}.$$

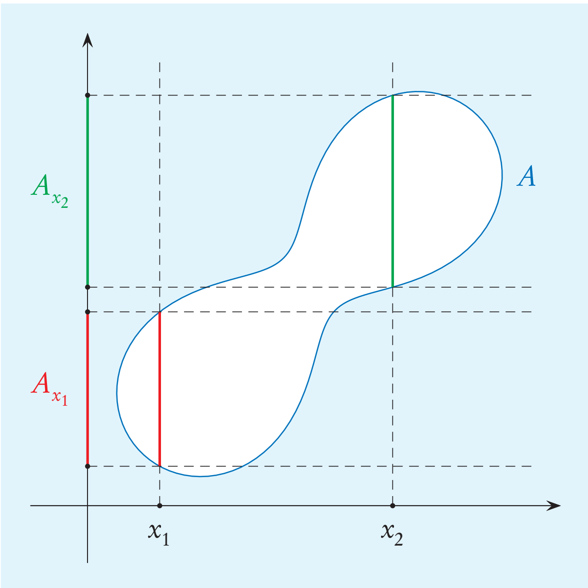


Figura 1.5.1
La sezione A_x è la proiezione sull'asse delle y dell'intersezione tra l'insieme A e la retta verticale dei punti di ascissa x.

1.5.1 Osservazione. Se poniamo

$$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{x}} : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r, \qquad \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{x}}(y) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),$$

risulta

$$A_{\boldsymbol{x}} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^r \,|\, \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{x}}(y) \in A\} = \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{x}}^{-1}(A).$$

Poiché $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{x}}$ è continua, se A è aperto, allora $A_{\boldsymbol{x}}$ è aperto, mentre, se A è chiuso, allora $A_{\boldsymbol{x}}$ è chiuso. Da ciò segue che, se A è di tipo G_δ, allora $A_{\boldsymbol{x}}$ è di tipo G_δ, se A è di tipo F_σ, allora $A_{\boldsymbol{x}}$ è di tipo F_σ. ◀

Vediamo anzitutto come calcolare la misura di un insieme mediante l'integrale della misura delle sue sezioni. Da ciò si ottiene facilmente che l'integrale di una funzione semplice può essere scritto come integrale di integrale. Approssimando funzioni misurabili con funzioni semplici questa proprietà viene trasportata all'integrale di funzioni misurabili.

1.5.2 Teorema

Sia $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r)$. Allora:

I) per quasi ogni $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^q$, $A_{\boldsymbol{x}} \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^r)$;

II) la funzione $\boldsymbol{x} \mapsto \mu^*(A_{\boldsymbol{x}})$ è misurabile;

III) $\mu(A) = \int_{\mathbb{R}^q} \mu^*(A_{\boldsymbol{x}})\, d\boldsymbol{x}$.

La dimostrazione di questo teorema è piuttosto complicata, quindi la spezziamo in una serie di lemmi. In ciascuno di essi proviamo che le affermazioni del teorema valgono per classi di insiemi sempre più ampie: intervalli compatti, unioni finite di intervalli compatti, aperti, insiemi di tipo G_δ e infine insiemi misurabili.

1.5.3 Lemma

Sia I un intervallo compatto di $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r$. Allora:

I) $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^q$, $I_{\boldsymbol{x}} \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^r)$, la funzione $\boldsymbol{x} \mapsto \mu(I_{\boldsymbol{x}})$ è misurabile e

$$\mu(I) = \int_{\mathbb{R}^q} \mu(I_{\boldsymbol{x}})\, d\boldsymbol{x};$$

II) $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^q$, $(\operatorname{int} I)_{\boldsymbol{x}} \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^r)$, la funzione $\boldsymbol{x} \mapsto \mu\big((\operatorname{int} I)_{\boldsymbol{x}}\big)$ è misurabile e

$$\mu(\operatorname{int} I) = \int_{\mathbb{R}^q} \mu\big((\operatorname{int} I)_{\boldsymbol{x}}\big)\, d\boldsymbol{x};$$

III) per quasi ogni $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^q$, $\mu(I_{\boldsymbol{x}}) = \mu\big((\operatorname{int} I)_{\boldsymbol{x}}\big)$.

Dimostrazione. I) Sia $I = I_1 \times I_2$, con I_1 intervallo compatto di $\mathbb{R}^q$ e I_2 intervallo compatto di $\mathbb{R}^r$. Allora

$$I_{\boldsymbol{x}} = \begin{cases} I_2, & \text{se } \boldsymbol{x} \in I_1, \\ \varnothing, & \text{se } \boldsymbol{x} \in \complement I_1; \end{cases}$$

quindi

$$\mu(I_{\boldsymbol{x}}) = \begin{cases} \mu(I_2), & \text{se } \boldsymbol{x} \in I_1, \\ 0, & \text{se } \boldsymbol{x} \in \complement I_1. \end{cases}$$

Poiché I_1 è misurabile (v. teorema 1.2.27) la funzione $\boldsymbol{x} \mapsto \mu(I_{\boldsymbol{x}})$ è misurabile e si ha

$$\int_{\mathbb{R}^q} \mu(I_{\boldsymbol{x}})\, d\boldsymbol{x} = \int_{I_1} \mu(I_2)\, d\boldsymbol{x} = \mu(I_1)\mu(I_2) = \mu(I).$$

II) La dimostrazione è analoga a quella dell'affermazione I, poiché, se $I = I_1 \times I_2$, allora $\operatorname{int} I = (\operatorname{int} I_1) \times (\operatorname{int} I_2)$.

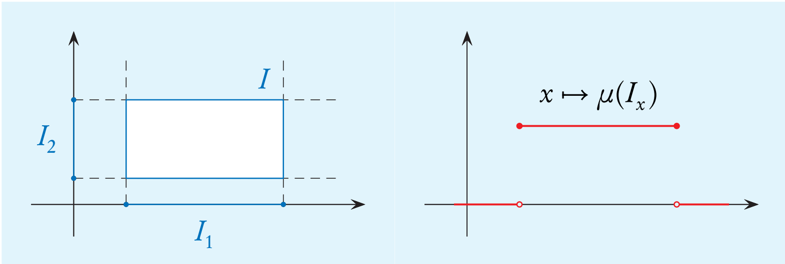


Figura 1.5.2
Illustrazione della dimostrazione del lemma 1.5.3.

III) Si ha, $\forall x \in \mathbb{R}^q$, $\mu(I_x) \geq \mu\big((\operatorname{int} I)_x\big)$ e

$$\int_{\mathbb{R}^q} \Big(\mu(I_x) - \mu\big((\operatorname{int} I)_x\big)\Big)\, dx = \int_{\mathbb{R}^q} \mu(I_x)\, dx - \int_{\mathbb{R}^q} \mu\big((\operatorname{int} I)_x\big)\, dx = \mu(I) - \mu(\operatorname{int} I) = 0,$$

per il teorema 1.2.27. Una funzione non negativa con integrale nullo è nulla quasi dappertutto (v. teorema 1.4.12), quindi $\mu(I_x) = \mu\big((\operatorname{int} I)_x\big)$ per quasi ogni x. ■

1.5.4 Lemma

Sia J l'unione di un numero finito di intervalli compatti di $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r$ con interni a due a due disgiunti. Allora, $\forall x \in \mathbb{R}^q$, $J_x \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^r)$, la funzione $x \mapsto \mu(J_x)$ è misurabile e

$$\mu(J) = \int_{\mathbb{R}^q} \mu(J_x)\, dx\,.$$

Dimostrazione. Sia $J = \bigcup_{k=1}^p I_k$, dove gli I_k sono intervalli compatti di $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r$ con interni a due a due disgiunti.

Poniamo $B = \bigcup_{k=1}^p \operatorname{int} I_k$.

Per $x \in \mathbb{R}^q$ si ha $J_x = \bigcup_{k=1}^p (I_k)_x$, per il lemma 1.5.3, affermazione I, gli $(I_k)_x$ sono misurabili, quindi $J_x \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^r)$.

Poiché gli interni degli I_k sono a due a due disgiunti, $\forall x \in \mathbb{R}^q$, si ha

$$\sum_{k=1}^p \mu\big((I_k)_x\big) \geq \mu\Big(\bigcup_{k=1}^p (I_k)_x\Big) = \mu(J_x) \geq \mu(B_x) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^p (\operatorname{int} I_k)_x\Big) = \sum_{k=1}^p \mu\big((\operatorname{int} I_k)_x\big).$$

Poiché, per ogni k e per quasi ogni x si ha $\mu\big((I_k)_x\big) = \mu\big((\operatorname{int} I_k)_x\big)$ (v. lemma1.5.3, affermazione III) la funzione $x \mapsto \mu(J_x)$ è compresa tra le due funzioni misurabili e uguali quasi dappertutto $x \mapsto \sum_{k=1}^p \mu\big((I_k)_x\big)$ e $x \mapsto \sum_{k=1}^p \mu\big((\operatorname{int} I_k)_x\big)$, quindi è uguale quasi dappertutto a funzioni misurabili, pertanto è misurabile. Inoltre si ha

$$\int_{\mathbb{R}^q} \sum_{k=1}^p \mu\big((I_k)_x\big)\, dx = \int_{\mathbb{R}^q} \mu(J_x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^q} \sum_{k=1}^p \mu\big((\operatorname{int} I_k)_x\big)\, dx\,. \tag{1.5.1}$$

Per il lemma 1.5.3 da qui segue

$$\int_{\mathbb{R}^q} \sum_{k=1}^p \mu\big((\operatorname{int} I_k)_x\big)\, dx = \sum_{k=1}^p \int_{\mathbb{R}^q} \mu\big((\operatorname{int} I_k)_x\big)\, dx = \sum_{k=1}^p \mu(\operatorname{int} I_k) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^p \operatorname{int} I_k\Big) = \mu(B) \leq$$

$$\leq \mu(J) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{p} I_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{p} \mu(I_k) = \sum_{k=1}^{p} \int_{\mathbb{R}^q} \mu\big((I_k)_x\big)\, dx = \int_{\mathbb{R}^q} \sum_{k=1}^{p} \mu\big((I_k)_x\big)\, dx\,.$$

Per l'equazione (1.5.1) il primo e l'ultimo membro di questa catena di disuguaglianze sono uguali, quindi tutti i membri sono uguali. In particolare, ancora per l'equazione (1.5.1), si ha

$$\int_{\mathbb{R}^q} \mu(J_x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^q} \sum_{k=1}^{p} \mu\big((I_k)_x\big)\, dx = \mu(J)\,. \qquad \blacksquare$$

1.5.5 Lemma

Sia $G \subseteq \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r$ aperto. Allora, $\forall x \in \mathbb{R}^q$, $G_x \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^r)$, la funzione $x \mapsto \mu(G_x)$ è misurabile e

$$\mu(G) = \int_{\mathbb{R}^q} \mu(G_x)\, dx\,.$$

Dimostrazione. Per l'osservazione 1.5.1, $\forall x \in \mathbb{R}^q$, G_x è aperto, quindi è misurabile (v. teorema 1.2.29, affermazione I).

Per il teorema 1.2.28, esiste una famiglia numerabile $\{I_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ di intervalli compatti a due a due con interno disgiunto tali che $G = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k$. Poniamo, per $k \in \mathbb{N}$, $J_k = \bigcup_{j=0}^{k} I_j$. Evidentemente, $\forall k \in \mathbb{N}$, si ha $J_k \subseteq J_{k+1}$ e $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} J_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k = J$. Pertanto, per il teorema 1.2.24, affermazione I, $\mu(G) = \lim_{k\to+\infty} \mu(J_k)$. Inoltre, $\forall x \in \mathbb{R}^q$ risulta $G_x = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (J_k)_x$; per il lemma 1.5.4 $(J_k)_x$ è misurabile per ogni k, quindi G_x è misurabile. Si ha anche, $\forall x \in \mathbb{R}^q$, $\lim_{k\to+\infty} \mu\big((J_k)_x\big) = \mu(G_x)$, per il lemma 1.5.4 la funzione $x \mapsto \mu\big((J_k)_x\big)$ è misurabile, quindi anche la funzione $x \mapsto \mu(G_x)$ è misurabile (v. teorema 1.3.16). Infine, poiché $J_k \subseteq J_{k+1}$, la successione di funzioni di termine k-simo $x \mapsto \mu\big((J_k)_x\big)$ è crescente, quindi, per il teorema di Beppo Levi 1.4.13, risulta.

$$\mu(G) = \lim_{k\to+\infty} \mu(J_k) = \lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^q} \mu\big((J_k)_x\big)\, dx = \int_{\mathbb{R}^q} \mu(G_x)\, dx\,. \qquad \blacksquare$$

1.5.6 Lemma

Sia $M \subseteq \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r$ di tipo G_δ. Allora, $\forall x \in \mathbb{R}^q$, $M_x \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^r)$, la funzione $x \mapsto \mu(M_x)$ è misurabile e

$$\mu(M) = \int_{\mathbb{R}^q} \mu(M_x)\, dx\,.$$

Dimostrazione. Consideriamo anzitutto il caso M limitato.

Poiché M è di tipo G_δ, esiste $\{G_k \mid k \in \mathbb{N}\}$, famiglia di aperti di $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r$, tale che $M = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} G_k$. Per l'osservazione 1.2.31 tali aperti possono essere scelti limitati e tali che sia $G_{k+1} \subseteq G_k$.

Per il lemma 1.5.5, qualunque sia $k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}^q$, $(G_k)_x \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^r)$ e $x \mapsto \mu\big((G_k)_x\big)$ è misurabile. Quindi l'insieme $M_x = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} (G_k)_x$ è misurabile (v. teorema 1.2.23, affermazione I). Inoltre, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^q$, $(G_{k+1})_{\boldsymbol{x}} \subseteq (G_k)_{\boldsymbol{x}}$ e $(G_0)_{\boldsymbol{x}}$ è limitato, quindi di misura finita; pertanto, per il teorema 1.2.24, affermazione II, si ha $\mu(M_{\boldsymbol{x}}) = \lim_{k\to+\infty} \mu\big((G_k)_{\boldsymbol{x}}\big)$. Perciò la funzione $\boldsymbol{x} \mapsto \mu(M_{\boldsymbol{x}})$ è limite di funzioni misurabili, quindi è misurabile (v. teorema 1.3.16). Inoltre, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mu(G_k) = \int_{\mathbb{R}^q} \mu\big((G_k)_{\boldsymbol{x}}\big)\, d\boldsymbol{x}$; in particolare la funzione $\boldsymbol{x} \mapsto \mu\big((G_0)_{\boldsymbol{x}}\big)$ ha integrale $\mu(G_0) \in \mathbb{R}$, perciò è sommabile. Poiché $\mu\big((G_k)_{\boldsymbol{x}}\big) \leq \mu\big((G_0)_{\boldsymbol{x}}\big)$, si può applicare il teorema della convergenza dominata 1.4.32, quindi

$$\mu(M) = \lim_{k\to+\infty} \mu(G_k) = \lim_{k\to+\infty} \int_{R^q} \mu\big((G_k)_{\boldsymbol{x}}\big)\, d\boldsymbol{x} = \int_{R^q} \lim_{k\to+\infty} \mu\big((G_k)_{\boldsymbol{x}}\big)\, d\boldsymbol{x} =$$
$$= \int_{R^q} \mu\big((M_k)_{\boldsymbol{x}}\big)\, d\boldsymbol{x}\,.$$

Consideriamo ora il caso M illimitato.

Poniamo, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $M_k = M \cap \,]-k, k[^{q+r}$. Evidentemente, $\forall k \in \mathbb{N}$, si ha $M_k \subseteq M_{k+1}$ e $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k = M$. Per il teorema 1.2.24, affermazione I si ha $\mu(M) = \lim_{k\to+\infty} \mu(M_k)$.

Per ogni $k \in \mathbb{N}^*$, l'insieme M_k è limitati e di tipo G_δ, quindi, per quanto già dimostrato, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^q$, si ha $(M_k)_{\boldsymbol{x}} \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^r)$, la funzione $\boldsymbol{x} \mapsto \mu\big((M_k)_{\boldsymbol{x}}\big)$ è misurabile e risulta $\mu(M_k) = \int_{R^q} \mu\big((M_k)_{\boldsymbol{x}}\big)\, d\boldsymbol{x}$. Quindi, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^q$, $M_{\boldsymbol{x}} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (M_k)_{\boldsymbol{x}}$ è unione di insiemi misurabili, pertanto, per il teorema 1.2.23, affermazione I, è misurabile. Poiché, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^q$, si ha $(M_k)_{\boldsymbol{x}} \subseteq (M_{k+1})_{\boldsymbol{x}}$, risulta $\mu\big((M_k)_{\boldsymbol{x}}\big) \leq \mu\big((M_{k+1})_{\boldsymbol{x}}\big)$, inoltre $\mu(M_{\boldsymbol{x}}) = \lim_{k\to+\infty} \mu\big((M_k)_{\boldsymbol{x}}\big)$ (v. teorema 1.2.24, affermazione I).

Quindi la funzione $\boldsymbol{x} \mapsto \mu(M_{\boldsymbol{x}})$ è limite di funzioni misurabili, pertanto è misurabile (v. teorema 1.3.16). Per il teorema di Beppo Levi 1.4.13, si ha

$$\mu(M) = \lim_{k\to+\infty} \mu(M_k) = \lim_{k\to+\infty} \int_{R^q} \mu\big((M_k)_{\boldsymbol{x}}\big)\, d\boldsymbol{x} = \int_{R^q} \lim_{k\to+\infty} \mu\big((M_k)_{\boldsymbol{x}}\big)\, d\boldsymbol{x} = \int_{R^q} \mu(M_{\boldsymbol{x}})\, d\boldsymbol{x}\,.$$

■

1.5.7 Lemma

Sia $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r)$. Se $\mu(A) = 0$, allora, per quasi ogni $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^q$, $\mu^*(A_{\boldsymbol{x}}) = 0$ e $A_{\boldsymbol{x}} \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^r)$.

Dimostrazione. Per il teorema 1.2.36 esiste $M \subseteq \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r$, di tipo G_δ, tale che $A \subseteq M$ e $\mu(M \setminus A) = 0$, quindi anche $\mu(M) = 0$. Per il lemma 1.5.6, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^q$, $M_{\boldsymbol{x}}$ è misurabile, la funzione $\boldsymbol{x} \mapsto \mu(M_{\boldsymbol{x}})$ è misurabile e $\int_{\mathbb{R}^q} \mu(M_{\boldsymbol{x}})\, d\boldsymbol{x} = \mu(M) = 0$. Pertanto, per il teorema 1.4.12, affermazione I, $\mu(M_{\boldsymbol{x}}) = 0$ per quasi ogni $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^q$; si ha $0 \leq \mu^*(A_{\boldsymbol{x}}) \leq \mu(M_{\boldsymbol{x}})$, quindi $\mu^*(A_{\boldsymbol{x}}) = 0$ per quasi ogni $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^q$. L'ultima affermazione segue dal fatto che ogni insieme di misura nulla è misurabile. ■

Dimostrazione del teorema 1.5.2. Per il teorema 1.2.36 esiste $M \subseteq \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r$, insieme di tipo G_δ, tale che $A \subseteq M$ e, posto $H = M \setminus A$, risulta $\mu(H) = 0$. Per il lemma 1.5.6, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^q$, $M_{\boldsymbol{x}}$ è misurabile e per il lemma 1.5.7, per quasi ogni $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^q$, $H_{\boldsymbol{x}}$ e $\mu(M_{\boldsymbol{x}}) = 0$. Quindi, per quasi ogni $\boldsymbol{x}$, $A_{\boldsymbol{x}} = M_{\boldsymbol{x}} \setminus H_{\boldsymbol{x}}$ è misurabile, perché differenza di insiemi misurabili. Pertanto è verificata l'affermazione I.

Se $\mu(H_x)=0$, allora risulta $\mu(M_x)=\mu(A_x)=\mu^*(A_x)$. Quindi a funzione $\boldsymbol{x}\mapsto\mu^*(A_{\boldsymbol{x}})$ è misurabile perché coincide quasi dappertutto con la funzione $\boldsymbol{x}\mapsto\mu(M_{\boldsymbol{x}})$, che è misurabile. Pertanto è verificata l'affermazione II.

Infine, per il lemma 1.5.6, si ha

$$\mu(A)=\mu(M)=\int_{\mathbb{R}^q}\mu(M_{\boldsymbol{x}})\,d\boldsymbol{x}=\int_{\mathbb{R}^q}\mu^*(A_{\boldsymbol{x}})\,d\boldsymbol{x}\,.$$

Pertanto è verificata l'affermazione III. ■

1.5.8 Osservazione. Il teorema 1.5.2 assicura che quasi ogni sezione di un insieme misurabile è misurabile. Gli insiemi che si incontrano più frequentemente hanno tutte le sezioni misurabili. Infatti dal lemma 1.5.6 sappiamo che tutte le sezioni di un insieme G_δ sono misurabili, quindi, passando al complementare, anche tutte le sezioni di un insieme di tipo F_σ sono misurabili.

In particolare gli aperti e i chiusi hanno tutte le sezioni misurabili. ◀

1.5.9 Esempio. Calcoliamo la misura di un cerchio.

Sia $R\in\mathbb{R}^+$ e poniamo

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,x^2+y^2\le R^2\right\}.$$

Poiché A è chiuso, è misurabile. Per il teorema 1.5.2, con $q=r=1$, si ha

$$\mu(A)=\int_{\mathbb{R}}\mu(A_x)\,dx\,.$$

Risulta

$$\begin{aligned}A_x&=\{y\in\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2\le R^2\}=\\&=\begin{cases}\left[-\sqrt{R^2-x^2},\sqrt{R^2-x^2}\right], & \text{se } x\in\,]-R,R[,\\ \{0\}, & \text{se } x\in\{-R,R\},\\ \varnothing, & \text{se } x\in\,]-\infty,-R[\,\cup\,]R,+\infty[\,;\end{cases}\end{aligned}$$

quindi

$$\mu(A_x)=\begin{cases}2\sqrt{R^2-x^2}, & \text{se } x\in[-R,R],\\ 0, & \text{se } x\in\,]-\infty,-R[\,\cup\,]R,+\infty[\,.\end{cases}$$

Pertanto, effettuando la sostituzione $x=\varphi(t)=R\sin t$, si ha

$$\begin{aligned}\mu(A)&=\int_{[-R,R]}2\sqrt{R^2-x^2}\,dx=\int_{-R}^{R}2\sqrt{R^2-x^2}\,dx=\\&=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{R^2-R^2\sin^2 t}\;R\cos t\,dt=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}2R^2\cos^2 t\,dt=\\&=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}R^2\big(1+\cos(2t)\big)\,dt=R^2\left[t+\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}=\pi R^2\,.\end{aligned}$$ ◀

1.5.10 Esempio. Calcoliamo la misura di una circonferenza.

Sia $R \in \mathbb{R}^+$ e poniamo

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = R^2\}.$$

Poiché A è chiuso, è misurabile. Per il teorema 1.5.2, con $q = r = 1$, si ha

$$\mu(A) = \int_{\mathbb{R}} \mu(A_x)\, dx.$$

Risulta

$$A_x = \{y \in \mathbb{R} \,|\, x^2 + y^2 = R^2\} = \\ = \begin{cases} \{-\sqrt{R^2 - x^2}, \sqrt{R^2 - x^2}\}, & \text{se } x \in]-R, R[, \\ \{0\}, & \text{se } x \in \{-R, R\}, \\ \varnothing, & \text{se } x \in]-\infty, -R[\cup]R, +\infty[\,; \end{cases}$$

quindi si ha $\mu(A_x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Pertanto, per il teorema 1.5.2, risulta

$$\mu(A) = \int_{\mathbb{R}} 0\, dx = 0,$$

◀

1.5.11 Esempio. Calcoliamo la misura di una sfera.

Sia $R \in \mathbb{R}^+$ e poniamo

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}.$$

Poiché A è chiuso, è misurabile. Per il teorema 1.5.2, con $q = 1$ e $r = 2$, si ha

$$\mu(A) = \int_{\mathbb{R}} \mu(A_x)\, dx.$$

Risulta

$$A_x = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\} = \\ = \begin{cases} \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y^2 + z^2 \leq R^2 - x^2\}, & \text{se } x \in]-R, R[, \\ \{(0,0)\}, & \text{se } x \in \{-R, R\}, \\ \varnothing, & \text{se } x \in]-\infty, -R[\cup]R, +\infty[\,. \end{cases}$$

Nell'esempio 1.5.9 abbiamo provato che la misura di un cerchio in $\mathbb{R}^2$ è uguale al quadrato del raggio per π, pertanto

$$\mu(A_x) = \begin{cases} \pi(R^2 - x^2), & \text{se } x \in [-R, R], \\ 0, & \text{se } x \in]-\infty, -R[\cup]R, +\infty[\,. \end{cases}$$

Pertanto

$$\mu(A) = \int_{[-R,R]} \pi(R^2 - x^2)\, dx = \pi\left[R^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-R}^{R} = \pi\left(R^3 - \frac{1}{3}R^3 + R^3 - \frac{1}{3}R^3\right)_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

◀

1.5.12 Esempio. Per $n \in \mathbb{N}^*$ e $R \in \mathbb{R}^+$ poniamo

$$S_{n,R} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| \leq R\};$$

cioè $S_{n,R}$ è la sfera chiusa di centro l'origine e raggio R in $\mathbb{R}^n$. Poiché $S_{n,R}$ è chiuso, è misurabile.

Proviamo, per induzione, che, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, si ha

$$\mu(S_{n,R}) = C_n R^n,$$

con

$$C_n = \begin{cases} \dfrac{2^{(n+1)/2}\pi^{(n-1)/2}}{\prod_{j=1}^{(n+1)/2}(2j-1)}, & \text{se } n \text{ è dispari,} \\ \dfrac{2^{n/2}\pi^{n/2}}{\prod_{j=1}^{n/2}(2j)}, & \text{se } n \text{ è pari.} \end{cases}$$

Se $n = 1$, si ha

$$\mu(S_{1,R}) = \mu([-R,R]) = 2R = C_1 R.$$

Supponiamo che l'affermazione valga per n. Osserviamo anzitutto che, per il teorema 1.5.2, con $q = 1$ e $r = n$, si ha

$$\mu(S_{n+1,R}) = \int_{\mathbb{R}} \mu((S_{n+1,R})_{x_1})\, dx_1.$$

Risulta

$$\begin{aligned}(S_{n+1,R})_{x_1} &= \left\{(x_2,\dots,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_1^2 + \|(x_2,\dots,x_{n+1})\|^2 \leq R^2\right\} = \\ &= \begin{cases} S_{n,\sqrt{R^2-x_1^2}}, & \text{se } x_1 \in \,]-R,R[, \\ \{0\}, & \text{se } x_1 \in \{-R,R\}, \\ \varnothing, & \text{se } x_1 \in \,]-\infty,-R[\,\cup\,]R,+\infty[\,; \end{cases}\end{aligned}$$

quindi, per ipotesi induttiva,

$$\mu((S_{n+1,R})_{x_1}) = \begin{cases} C_n (R^2 - x_1^2)^{n/2}, & \text{se } x_1 \in [-R,R], \\ 0, & \text{se } x_1 \in \,]-\infty,-R[\,\cup\,]R,+\infty[\,. \end{cases}$$

Pertanto, con la sostituzione $x_1 = \varphi(t) = Rt$, si ha

$$\begin{aligned}\mu(S_{n+1,R}) &= \int_{-R}^{R} C_n (R^2 - x_1^2)^{n/2}\, dx_1 = C_n \int_{-1}^{1} (R^2 - (Rt)^2)^{n/2} R\, dt = \\ &= C_n R^{n+1} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{n/2}\, dt.\end{aligned} \tag{1.5.2}$$

Poniamo $I_n = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n/2}\,dt$. Ovviamente $I_0 = 2$ e, rivedendo l'integrale calcolato al termine dell'esempio 1.5.9, sappiamo che $I_1 = \pi/2$. Se $n \geq 2$, integrando per parti si ha

$$I_n = \left[t(1-t^2)^{n/2}\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} nt^2(1-t^2)^{(n/2)-1}\,dt = \int_{-1}^{1} n(t^2-1+1)(1-t^2)^{(n/2)-1}\,dt =$$
$$= -n\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n/2}\,dt + n\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{(n/2)-1}\,dt = -nI_n + nI_{n-2}.$$

Pertanto $(n+1)I_n = nI_{n-2}$, cioè $I_n = \big(n/(n+1)\big)I_{n-2}$.

Quindi si ha

$$I_2 = \frac{2}{3}I_1 = \frac{2}{1\cdot 3}2, \qquad I_4 = \frac{4}{5}I_3 = \frac{2\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5}2,$$

si prova facilmente per induzione che se n è pari si ha

$$I_n = \frac{2\prod_{j=1}^{n/2}(2j)}{\prod_{j=1}^{(n/2)+1}(2j-1)}.$$

Inoltre

$$I_3 = \frac{3}{4}I_1 = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\pi, \qquad I_5 = \frac{5}{6}I_3 = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\pi,$$

si prova facilmente per induzione che se n è dispari si ha

$$I_n = \frac{\prod_{j=1}^{(n+1)/2}(2j-1)}{\prod_{j=1}^{(n+1)/2}(2j)}\pi.$$

Se n è dispari, allora dall'equazione (1.5.2) si ottiene

$$\mu(S_{n+1,R}) = C_nI_nR^{n+1} = \frac{2^{(n+1)/2}\pi^{(n-1)/2}}{\prod_{j=1}^{(n+1)/2}(2j-1)}\,\frac{\prod_{j=1}^{(n+1)/2}(2j-1)}{\prod_{j=1}^{(n+1)/2}(2j)}\pi R^{n+1} =$$
$$= \frac{2^{(n+1)/2}\pi^{(n+1)/2}}{\prod_{j=1}^{(n+1)/2}(2j)}R^{n+1} = C_{n+1}R^{n+1}.$$

Se n è pari, allora dall'equazione (1.5.2) si ottiene

$$\mu(S_{n+1,R}) = C_nI_nR^{n+1} = \frac{2^{n/2}\pi^{n/2}}{\prod_{j=1}^{n/2}(2j)}\,\frac{2\prod_{j=1}^{n/2}(2j)}{\prod_{j=1}^{(n/2)+1}(2j-1)}R^{n+1} =$$
$$= \frac{2^{(n+2)/2}\pi^{n/2}}{\prod_{j=1}^{(n/2)+1}(2j-1)}R^{n+1} = C_{n+1}R^{n+1}.$$

Pertanto l'affermazione vale per $n+1$.

Per il principio di induzione l'affermazione vale per ogni $n \in \mathbb{N}^*$. ◀

1.5.13 Esempio. Il teorema 1.5.2 assicura che un insieme misurabile ha quasi tutte le sezioni misurabili; non sempre tutte le sezioni sono misurabili, come mostra il seguente esempio.

Poniamo $A=\mathbb{Q}\times V$, dove V è l'insieme di Vitali definito nell'esempio 1.2.38. Ricordiamo che V non è misurabile e $V\subseteq[0,1]$. Si ha

$$A\subseteq\mathbb{Q}\times[0,1]=\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}\big(\{q\}\times[0,1]\big).$$

Poiché $\{q\}\times[0,1]$ è un intervallo compatto degenere, ha misura nulla, quindi $\mathbb{Q}\times[0,1]$ è unione numerabile di insiemi di misura nulla, pertanto ha misura nulla. Perciò anche A ha misura nulla, quindi è misurabile.

Risulta

$$A_x=\begin{cases}V, & \text{se } x\in\mathbb{Q},\\ \varnothing, & \text{se } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\end{cases}$$

quindi A_x non è misurabile se $x\in\mathbb{Q}$. ◀

Vediamo ora i teoremi di riduzione, cioè i teoremi che consentono di ridurre il calcolo di un integrale al calcolo di integrali in spazi di dimensione più bassa di quello originario.

Un'applicazione ripetuta di questi teoremi consente di ridurre il calcolo di un integrale in più variabili al calcolo di integrali in una variabile.

1.5.14 Teorema (di Tonelli[8] in $\mathbb{R}^n$)

Sia $f\colon\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^r\to[0,+\infty]$ misurabile. Allora:

I) per quasi ogni $x\in\mathbb{R}^q$ la funzione $y\mapsto f(x,y)$ è misurabile;

II) posto

$$H=\big\{x\in\mathbb{R}^q\,\big|\,y\mapsto f(x,y)\text{ non è misurabile}\big\},$$

la funzione $x\mapsto\int_{\mathbb{R}^r}f(x,y)\,dy$ è misurabile in $\mathbb{R}^q\setminus H$;

III) $\int_{\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^r}f(x,y)\,d(x,y)=\int_{\mathbb{R}^q\setminus H}\big(\int_{\mathbb{R}^r}f(x,y)\,dy\big)\,dx$.

Qualunque funzione $F\colon\mathbb{R}^q\to[0,+\infty]$ che coincide con $x\mapsto\int_{\mathbb{R}^r}f(x,y)\,dy$ nei punti di $\mathbb{R}^q\setminus H$ è misurabile, perché coincide con una funzione misurabile al di fuori di un insieme di misura nulla. Inoltre $\int_{\mathbb{R}^q}F(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}^q\setminus H}\big(\int_{\mathbb{R}^r}f(x,y)\,dy\big)\,dx$. Pertanto spesso si scrive $\int_{\mathbb{R}^q}\big(\int_{\mathbb{R}^r}f(x,y)\,dy\big)\,dx$ anziché $\int_{\mathbb{R}^q\setminus H}\big(\int_{\mathbb{R}^r}f(x,y)\,dy\big)\,dx$, intendendo che si integra la funzione $x\mapsto\int_{\mathbb{R}^r}f(x,y)\,dy$ prolungata in modo arbitrario ai punti di H.

Dimostrazione. Dimostriamo anzitutto il teorema se f è semplice, successivamente lo proviamo per f arbitraria, considerandola come limite di funzioni semplici.

Sia $f=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\chi_{B_j}$, con $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p\in[0,+\infty[$ e $B_1,B_2,\dots,B_p\in\mathscr{M}(\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^r)$. Osserviamo che, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^r$, si ha $\chi_{B_j}(x,y)=\chi_{(B_j)_x}(y)$, perché entrambe le funzioni valgono 1 se e solo se $(x,y)\in B_j$.

[8] Il teorema prende il nome da Leonida Tonelli (Gallipoli, Lecce, 1885 - Pisa, 1946) che lo dimostrò nel 1909. Tonelli diede grandi contributi alla teoria delle funzioni e al calcolo delle variazioni.

Per $j=1,2,\ldots,p$ poniamo

$$H_j=\left\{x\in\mathbb{R}^q \,\middle|\, (B_j)_x \text{ non è misurabile}\right\}.$$

Per il teorema 1.5.2, si ha $\mu(H_j)=0$, quindi, posto $H=\bigcup_{j=1}^p H_j$, si ha $\mu(H)=0$ e, $\forall x\in\mathbb{R}^q\setminus H$, ciascuno degli insiemi $(B_j)_x$ è misurabile. Allora, per $x\in\mathbb{R}^q\setminus H$, si ha

$$\int_{\mathbb{R}^r} f(x,y)\,dy=\int_{\mathbb{R}^r}\sum_{j=1}^p \lambda_j\chi_{B_j}(x,y)\,dy=\sum_{j=1}^p\lambda_j\int_{\mathbb{R}^r}\chi_{(B_j)_x}(y)\,dy=\sum_{j=1}^p\lambda_j\mu\big((B_j)_x\big).$$

La funzione $x\mapsto\mu\big((B_j)_x\big)$, per $j=1,2,\ldots,m$, è misurabile in $\mathbb{R}^q\setminus H$, per il teorema 1.5.2. Quindi la funzione $x\mapsto\int_{\mathbb{R}^r}f(x,y)\,dy$ è somma di funzioni misurabili, pertanto è misurabile e si ha

$$\int_{\mathbb{R}^q\setminus H}\left(\int_{\mathbb{R}^r}f(x,y)\,dy\right)dx=\int_{\mathbb{R}^q\setminus H}\sum_{j=1}^p\lambda_j\mu\big((B_j)_x\big)\,dx=\sum_{j=1}^p\lambda_j\int_{\mathbb{R}^q\setminus H}\mu\big((B_j)_x\big)\,dx=$$
$$=\sum_{j=1}^p\lambda_j\mu(B_j)=\int_{\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^r}f(x,y)\,d(x,y).$$

Sia ora $f:\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^r\to[0,+\infty]$ misurabile. Per il teorema 1.3.29 esiste una successione crescente di funzioni semplici $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergente a f. Poniamo, $\forall k\in\mathbb{N}$,

$$H_k=\left\{x\in\mathbb{R}^q \,\middle|\, y\mapsto f_k(x,y) \text{ non è misurabile}\right\}.$$

Per quanto già dimostrato $\mu(H_k)=0$, quindi, posto $H=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}H_k$ si ha anche $\mu(H)=0$. Sia $x\in\mathbb{R}^q\setminus H$; $\forall k\in\mathbb{N}$, si ha $x\in\mathbb{R}^q\setminus H_k$, quindi la funzione $y\mapsto f_k(x,y)$ è misurabile, pertanto, per il teorema 1.3.16, la funzione $y\mapsto\lim_{k\to+\infty}f_k(x,y)=f(x,y)$ è misurabile ed è verificata l'affermazione I.

Poniamo, $\forall k\in\mathbb{N}$, $\forall x\in\mathbb{R}^q\setminus H$, $F_k(x)=\int_{\mathbb{R}^r}f_k(x,y)\,dy$ e $F(x)=\int_{\mathbb{R}^r}f(x,y)\,dy$; poiché f_k è semplice, per quanto già dimostrato, F_k è misurabile. Inoltre, poiché la successione $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è crescente, per il teorema di Beppo Levi 1.4.13 si ha

$$\lim_{k\to+\infty}F_k(x)=\lim_{k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^r}f_k(x,y)\,dy=\int_{\mathbb{R}^r}\lim_{k\to+\infty}f_k(x,y)\,dy=\int_{\mathbb{R}^r}f(x,y)\,dy=F(x).$$

Pertanto F è limite di funzioni misurabili, quindi è misurabile ed è verificata l'affermazione II.

Infine, poiché la successione $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è crescente, anche $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è crescente, quindi, per il teorema di Beppo Levi,

$$\int_{\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^r}f(x,y)\,d(x,y)=\int_{\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^r}\lim_{k\to+\infty}f_k(x,y)\,d(x,y)=\lim_{k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^r}f_k(x,y)\,d(x,y)=$$
$$=\lim_{k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^q\setminus H}F_k(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}^q\setminus H}\lim_{k\to+\infty}F_k(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}^q\setminus H}F(x)\,dx.$$

Pertanto è verificata l'affermazione III. ■

1.5.15 Osservazione. Se f è continua, allora la funzione $y \mapsto f(x,y)$ è continua e quindi misurabile, $\forall x \in \mathbb{R}^q$, pertanto l'insieme H che compare nel teorema di Tonelli è vuoto. ◀

1.5.16 Osservazione. Il teorema di Tonelli può essere utilizzato per dimostrare che una funzione è sommabile. Infatti se sappiamo che $\int_{\mathbb{R}^q}\left(\int_{\mathbb{R}^r}|f(x,y)|\,dy\right)dx < +\infty$, allora si ha $\int_{\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^r}|f(x,y)|\,d(x,y) < +\infty$, quindi f è sommabile. ◀

Per integrali in sottoinsiemi di $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r$ il teorema di Tonelli prende la forma seguente.

1.5.17 Teorema (di Tonelli in sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$)

Siano $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r)$, $f : A \to [0,+\infty]$ misurabile. Poniamo

$$P_A = \left\{x \in \mathbb{R}^q \,\middle|\, A_x \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^r),\, \mu(A_x) > 0\right\}.$$

Allora:

I) $P_A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^q)$;

II) per quasi ogni $x \in P_A$ la funzione $y \mapsto f(x,y)$ è misurabile;

III) posto

$$H = \left\{x \in P_A \,\middle|\, y \mapsto f(x,y) \text{ non è misurabile}\right\},$$

la funzione $x \mapsto \int_{A_x} f(x,y)\,dy$ è misurabile in $P_A \setminus H$;

IV) $\int_A f(x,y)\,d(x,y) = \int_{P_A\setminus H}\left(\int_{A_x} f(x,y)\,dy\right)dx$.

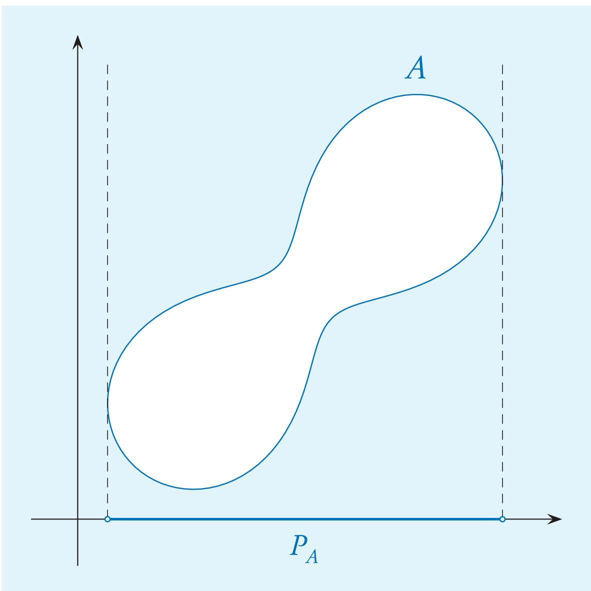


Figura 1.5.3
L'insieme P_A è, a meno di sezioni di misura nulla, la proiezione sull'asse delle x dell'insieme A.

Dimostrazione. Poniamo $Q_A = \left\{x \in \mathbb{R}^q \,\middle|\, A_x \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^r)\right\}$. Per il teorema 1.5.2 Q_A differisce da $\mathbb{R}^q$ per un insieme di misura nulla, quindi è misurabile, e la funzione $x \mapsto \mu^*(A_x)$ è misurabile; in Q_A tale funzione coincide con $x \mapsto \mu(A_x)$, che quindi è misurabile. Perciò $P_A = \left\{x \in Q_A \,\middle|\, \mu(A_x) > 0\right\}$ è misurabile. Pertanto è verificata l'affermazione I.

Poniamo

$$g:\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^r\to[0,+\infty],\qquad g(x,y)=\begin{cases}f(x,y), & \text{se } (x,y)\in A,\\ 0, & \text{se } (x,y)\notin A\,.\end{cases}$$

Poiché f è misurabile e $A\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^r)$, per il teorema 1.3.17, anche g è misurabile.

Se $x\in\mathbb{R}^q$ è tale che A_x è misurabile e non vuoto, allora la funzione $y\mapsto g(x,y)$ è misurabile se e solo se la funzione $y\mapsto f(x,y)$ è misurabile. Infatti se la prima funzione è misurabile lo è anche la seconda, perché è una sua restrizione a un insieme misurabile. Viceversa se è misurabile la seconda allora la prima è misurabile in A_x e nulla in $\mathbb{R}^r\setminus A_x$, quindi è misurabile. Pertanto, posto

$$H_g=\{x\in\mathbb{R}^q \mid y\mapsto g(x,y)\text{ non è misurabile}\},$$

risulta $H_g\cap P_A=H$.

Poiché, per il teorema di Tonelli in $\mathbb{R}^n$ 1.5.14, $\mu(H_g)=0$ si ha anche $\mu(H)=0$. Pertanto è verificata l'affermazione II.

Se $y\notin A_x$ allora $(x,y)\notin A$, quindi $g(x,y)=0$. Pertanto, $\forall x\in P_A\setminus H$, si ha

$$\int_{A_x} f(x,y)\,dy=\int_{A_x} g(x,y)\,dy=\int_{\mathbb{R}^r} g(x,y)\,dy\,. \tag{1.5.3}$$

Per il teorema di Tonelli in $\mathbb{R}^n$ 1.5.14 la funzione $x\mapsto\int_{\mathbb{R}^r} g(x,y)\,dy$ è misurabile, quindi la funzione $x\mapsto\int_{A_x} f(x,y)\,dy$ è misurabile. Pertanto è verificata l'affermazione III.

Poniamo

$$K=\{x\in\mathbb{R}^q \mid A_x\notin\mathcal{M}(\mathbb{R}^r)\}\,.$$

Per il teorema 1.5.2, $\mu(K)=0$. Per il teorema di Tonelli in $\mathbb{R}^n$ 1.5.14 si ha

$$\begin{aligned}\int_A f(x,y)\,d(x,y)&=\int_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q} g(x,y)\,d(x,y)=\int_{R^q\setminus H_g}\Big(\int_{\mathbb{R}^r} g(x,y)\,dy\Big)dx=\\ &=\int_{(Q_A\setminus P_A)\setminus H_g}\Big(\int_{\mathbb{R}^r} g(x,y)\,dy\Big)dx+\int_{P_A\setminus H_g}\Big(\int_{\mathbb{R}^r} g(x,y)\,dy\Big)dx+\\ &\quad+\int_{K\setminus H_g}\Big(\int_{\mathbb{R}^r} g(x,y)\,dy\Big)dx\,.\end{aligned}$$

Il primo integrale è nullo, perché se $x\in Q_A\setminus P_A$, allora A_x ha misura nulla, quindi la funzione $y\mapsto g(x,y)$ è nulla quasi dappertutto, perciò $\int_{\mathbb{R}^r} g(x,y)\,dy=0$. Il terzo integrale è nullo, perché K ha misura nulla. Sappiamo che $H_g\cap P_A=H$, quindi $P_A\setminus H_g=P_A\setminus H$, pertanto, utilizzando l'uguaglianza (1.5.3), si ha

$$\begin{aligned}\int_A f(x,y)\,d(x,y)&=\int_{P_A\setminus H_g}\Big(\int_{\mathbb{R}^r} g(x,y)\,dy\Big)dx=\int_{P_A\setminus H}\Big(\int_{A_x} g(x,y)\,dy\Big)dx=\\ &=\int_{P_A\setminus H}\Big(\int_{A_x} g(x,y)\,dy\Big)dx\,.\end{aligned}$$

Pertanto è verificata l'affermazione IV. ■

1.5.18 Osservazione. Nel caso che sia $A=B\times C$, con $B\in\mathscr{M}(\mathbb{R}^q)$ e $C\in\mathscr{M}(\mathbb{R}^r)$, è evidente che $A_x=C$ se $x\in B$, mentre $A_x=\varnothing$ in caso contrario. Pertanto, se $\mu(C)>0$, allora si ha $P_A=B$ e risulta

$$\int_A f(x,y)\,d(x,y)=\int_{B\setminus H}\left(\int_C f(x,y)\,dy\right)dx\,.$$

Se inoltre f è continua, allora, $\forall x\in B$, la funzione $y\mapsto f(x,y)$ è continua, quindi misurabile, pertanto $H=\varnothing$, perciò

$$\int_A f(x,y)\,d(x,y)=\int_B\left(\int_C f(x,y)\,dy\right)dx\,.$$ ◀

1.5.19 Osservazione. Consideriamo il caso in cui f è prodotto di una funzione di x per una funzione di y. Siano quindi $A=B\times C$, con $B\in\mathscr{M}(\mathbb{R}^q)$ e $C\in\mathscr{M}(\mathbb{R}^r)$, e $g\colon B\to[0,+\infty]$, $h\colon C\to[0,+\infty]$ misurabili.

Per il teorema di Tonelli 1.5.17

$$\int_{B\times C} g(x)h(y)\,d(x,y)=\int_B\left(\int_C g(x)h(y)\,dy\right)dx\,.$$

Se $g(x)<+\infty$, allora $\int_C g(x)h(y)\,dy=g(x)\int_C h(y)\,dy$. Se $g(x)=+\infty$ e h è nulla quasi dappertutto, allora $\int_C g(x)h(y)\,dy=0=g(x)\int_C h(y)\,dy$. Se $g(x)=+\infty$ e h non è nulla quasi dappertutto, allora, per il teorema 1.4.12, $\int_C h(y)\,dy>0$ e $\int_C g(x)h(y)\,dy=+\infty$, quindi $\int_C g(x)h(y)\,dy=+\infty=g(x)\int_C h(y)\,dy$. In ogni caso si ha

$$\int_{B\times C} g(x)h(y)\,d(x,y)=\int_B g(x)\left(\int_C h(y)\,dy\right)dx\,.$$

Sia nel caso $\int_C h(y)\,dy<+\infty$, che nel caso $\int_C h(y)\,dy=+\infty$, con ragionamenti analoghi si ottiene

$$\int_B g(x)\left(\int_C h(y)\,dy\right)dx=\int_B g(x)\,dx\int_C h(y)\,dy\,.$$

Pertanto

$$\int_{B\times C} g(x)h(y)\,d(x,y)=\int_B g(x)\,dx\int_C h(y)\,dy\,.$$ ◀

1.5.20 Esempio. Calcoliamo

$$\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{x^2+y^2+1}\,d(x,y)\,.$$

La funzione integranda è continua, quindi misurabile, ed è positiva.

Per il teorema di Tonelli 1.5.14 risulta

$$\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{x^2+y^2+1}\,d(x,y)=\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{x^2+y^2+1}\,dy\right)dx=$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} \frac{1}{\left(y/\sqrt{x^2+1}\right)^2+1} \, dy \right) dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \arctan\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+1}} \right) \right]_{y\to-\infty}^{y\to+\infty} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{\sqrt{x^2+1}} \, dx .$$

Poiché $\sqrt{x^2+1} \sim |x|$, per $x \to \pm\infty$, dalla teoria degli integrali generalizzati sappiamo che questo integrale è divergente. Pertanto

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{x^2+y^2+1} \, d(x,y) = +\infty .$$ ◀

1.5.21 Esempio. Calcoliamo

$$\int_A (xe^y + y) \, d(x,y),$$

con $A = [0,1] \times [0,2]$.

L'insieme A è chiuso, quindi è misurabile, la funzione integranda è continua, quindi è misurabile, ed è a valori non negativi.

Per l'osservazione 1.5.18 si ha

$$\int_{[0,1]\times[0,2]} (ye^x + x^2) \, d(x,y) = \int_0^1 \left(\int_0^2 (ye^x + x^2) \, dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} y^2 e^x + x^2 y \right]_{y=0}^{y=2} dx =$$
$$= \int_0^1 (2e^x + 2x^2) \, dx = \left[2e^x + \frac{2}{3} x^3 \right]_0^1 = 2e + \frac{2}{3} - 2 = 2e - \frac{4}{3} .$$ ◀

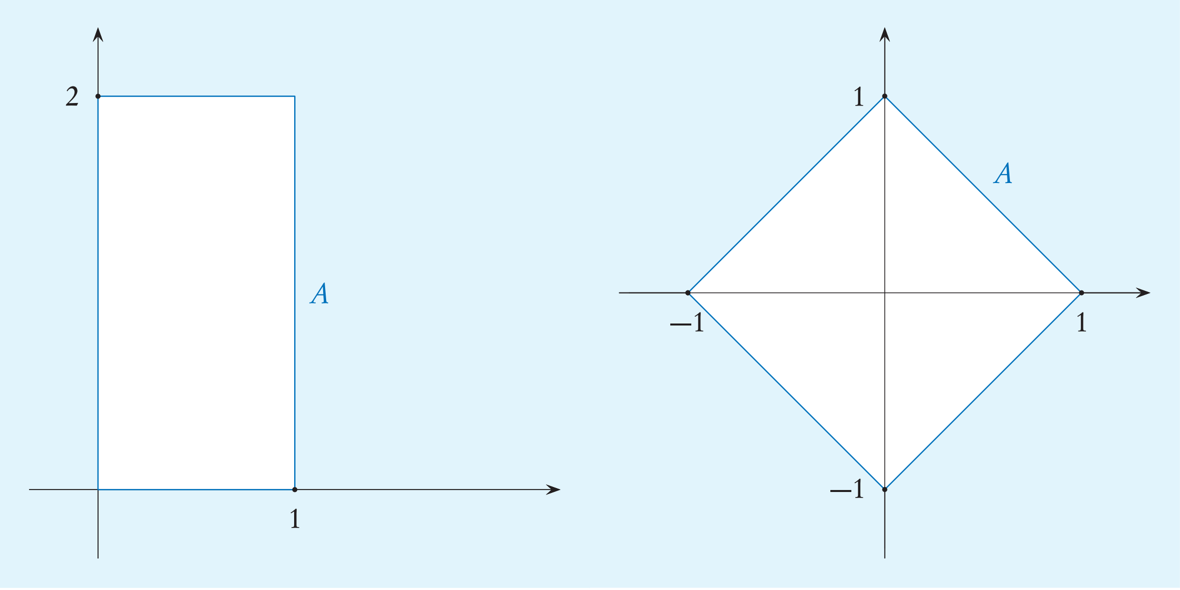


Figura 1.5.4
I domini di integrazione degli esempi 1.5.21 (a sinistra) e 1.5.22 (a destra).

1.5.22 Esempio. Calcoliamo
$$\int_A (x^2+y^2)\,d(x,y),$$
con $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, |x|+|y|\le 1\right\}$.

L'insieme A è chiuso, quindi è misurabile, la funzione integranda è continua, quindi è misurabile, ed è a valori non negativi.

Per applicare il teorema di Tonelli 1.5.17 determiniamo le sezioni di A. Per $x\in\mathbb{R}$ risulta
$$y\in A_x \iff |x|+|y|\le 1 \iff |y|\le 1-|x|.$$
Pertanto
$$A_x=\begin{cases}\big[|x|-1,1-|x|\big], & \text{se } x\in\,]-1,1[\,,\\ \{0\}, & \text{se } x\in\{-1,1\},\\ \varnothing, & \text{se } x\in\,]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[\,.\end{cases}$$
Quindi
$$\int_A (x^2+y^2)\,d(x,y)=\int_{-1}^{1}\left(\int_{|x|-1}^{1-|x|}(x^2+y^2)\,dy\right)dx=\int_{-1}^{1}\left[x^2y+\frac13 y^3\right]_{y=|x|-1}^{y=1-|x|}dx=$$
$$=\int_{-1}^{1}\left(2x^2\big(1-|x|\big)+\frac23\big(1-|x|\big)^3\right)dx.$$

Poiché il dominio di integrazione è simmetrico rispetto all'origine e la funzione integranda è pari, l'integrale è uguale a
$$2\int_0^1\left(2x^2(1-x)+\frac23(1-x)^3\right)dx=4\int_0^1\left(x^2-x^3+\frac13(1-3x+3x^2-x^3)\right)dx=$$
$$=4\int_0^1\left(-\frac43x^3+2x^2-x+\frac13\right)dx=4\left[-\frac13x^4+\frac23x^3-\frac12x^2+\frac13x\right]_0^1=$$
$$=4\left(-\frac13+\frac23-\frac12+\frac13\right)=\frac23.$$
◀

1.5.23 Esempio. Calcoliamo
$$\int_A \frac{1}{x+y}\,d(x,y),$$
con $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0,\ y>0,\ xy<1\}$.

L'insieme A è aperto, quindi è misurabile, la funzione integranda è continua, quindi è misurabile, ed è a valori positivi.

Per $x\in\mathbb{R}^+$ si ha $A_x=\,]0,1/x[$, mentre per $x\in\,]-\infty,0]$ si ha $A_x=\varnothing$. Pertanto $P_A=\mathbb{R}^+$. Per il teorema di Tonelli 1.5.17, si ha
$$\int_A\frac{1}{x+y}\,d(x,y)=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{1/x}\frac{1}{x+y}\,dy\right)dx=\int_0^{+\infty}\big[\log(x+y)\big]_{y=0}^{y=1/x}dx=$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\log\left(x + \frac{1}{x} \right) - \log x \right) dx = \int_0^{+\infty} \log\left(1 + \frac{1}{x^2} \right) dx =$$
$$= \left[x \log\left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x \frac{-2/x^3}{1 + 1/x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{2}{x^2+1} dx =$$
$$= \left[2 \arctan x \right]_0^{+\infty} = \pi .$$

◀

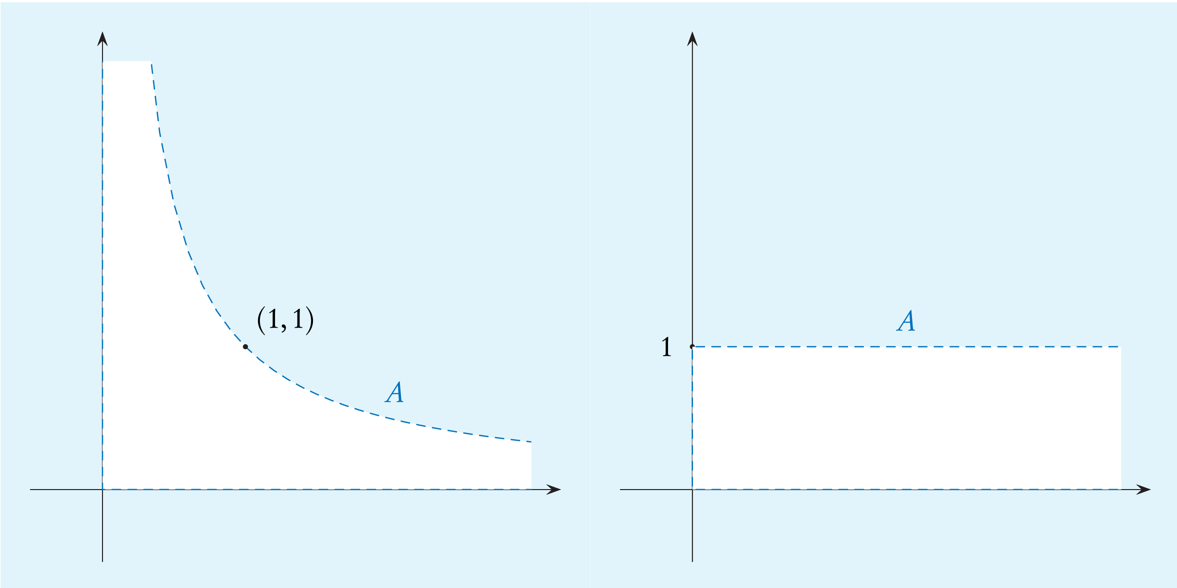


Figura 1.5.5
I domini di integrazione degli esempi 1.5.23 (a sinistra) e 1.5.24 (a destra).

1.5.24 Esempio. Calcoliamo

$$\int_A \frac{1}{x+y} d(x,y),$$

con $A =]0, +\infty[\times]0, 1[$.

L'insieme A è aperto, quindi è misurabile, la funzione integranda è continua, quindi è misurabile, ed è a valori positivi.

Per l'osservazione 1.5.18 si ha

$$\int_A \frac{1}{x+y} d(x,y) = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^1 \frac{1}{x+y} dy \right) dx = \int_0^{+\infty} \left[\log(x+y) \right]_{y=0}^{y=1} dx =$$
$$= \int_0^{+\infty} \left(\log\left(x+1 \right) - \log x \right) dx = \int_0^{+\infty} \log\left(1 + \frac{1}{x} \right) dx =$$
$$= \left[x \log\left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x \frac{-1/x^2}{1+1/x} dx = 1 + \int_0^{+\infty} \frac{1}{x+1} dx =$$
$$= 1 + \left[\log(x+1) \right]_0^{+\infty} = +\infty .$$

Pertanto la funzione $(x,y) \mapsto 1/(x+y)$ non è sommabile in $]0, +\infty[\times]0, 1[$. ◀

1.5.25 Esempio. Calcoliamo

$$\int_A \frac{y+z}{x^2+1}\,d(x,y,z),$$

con $A=[-1,1]\times[0,1]\times[0,1]$.

L'insieme A è chiuso, quindi è misurabile, la funzione integranda è continua, quindi è misurabile, ed è a valori non negativi.

Consideriamo $\mathbb{R}^3$ come prodotto cartesiano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$; per l'osservazione 1.5.18, dal teorema di Tonelli 1.5.17 segue

$$\int_A \frac{y+z}{x^2+1}\,d(x,y,z)=\int_{-1}^{1}\left(\int_{[0,1]\times[0,1]}\frac{y+z}{x^2+1}\,d(y,z)\right)dx$$

e analogamente

$$\int_{[0,1]\times[0,1]}\frac{y+z}{x^2+1}\,d(y,z)=\int_0^1\left(\int_0^1\frac{y+z}{x^2+1}\,dz\right)dy\,.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
&\int_A \frac{y+z}{x^2+1}\,d(x,y,z)=\int_{-1}^{1}\left(\int_0^1\left(\int_0^1\frac{y+z}{x^2+1}\,dz\right)dy\right)dx=\\
&=\int_{-1}^{1}\left(\int_0^1\left[\frac{(y+z)^2}{2(x^2+1)}\right]_{z=0}^{z=1}dy\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(\int_0^1\frac{(y+1)^2-y^2}{2(x^2+1)}\,dy\right)dx=\\
&=\int_{-1}^{1}\left(\int_0^1\frac{2y+1}{2(x^2+1)}\,dy\right)dx=\int_{-1}^{1}\left[\frac{y^2+y}{2(x^2+1)}\right]_{y=0}^{y=1}dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2+1}\,dx=\\
&=\big[\arctan x\big]_{-1}^{1}=\pi\,.
\end{aligned}$$

◀

1.5.26 Esempio. Calcoliamo

$$\int_A (x+y+z)\,d(x,y,z),$$

con $A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\le 0,\ x+y+z\le 1\right\}$.

L'insieme A è chiuso, quindi è misurabile, la funzione integranda è continua, quindi è misurabile, ed è a valori non negativi.

Per applicare il teorema di Tonelli 1.5.17 possiamo considerare $\mathbb{R}^3=\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}$, oppure $\mathbb{R}^3=\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$. Non vi sono particolari differenze nelle difficoltà che si incontrano nell'uno o nell'altro caso; procediamo considerando $\mathbb{R}^3=\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$.

Per $x\in\mathbb{R}^-$ si ha $A_x=\varnothing$, mentre per $x\in[0,+\infty[$ si ha

$$A_x=\left\{(y,z)\in\mathbb{R}^2 \mid y\ge 0,\ z\ge 0,\ y+z\le 1-x\right\}.$$

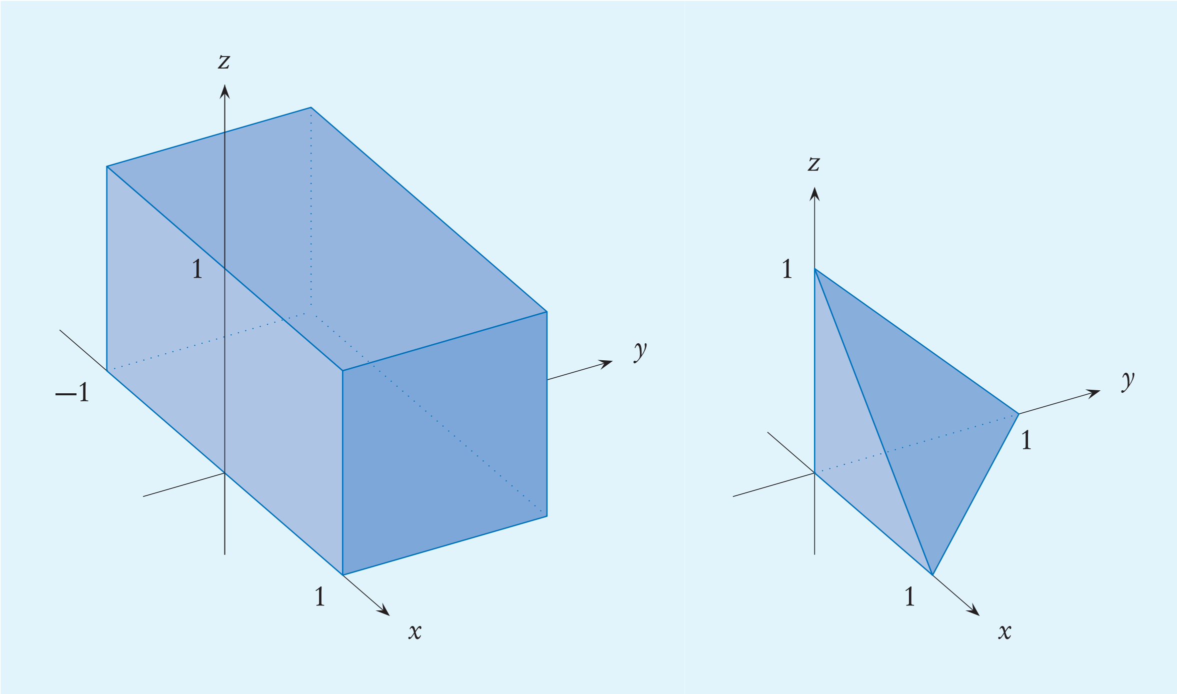


Figura 1.5.6
I domini di integrazione degli esempi 1.5.25 (a sinistra) e 1.5.26 (a destra).

Evidentemente questo insieme è vuoto se $1-x<0$, cioè $x>1$, quindi

$$A_x = \begin{cases} \left\{(y,z)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, y\geq 0,\ z\geq 0,\ y+z\leq 1-x\right\}, & \text{se } x\in[0,1[\,, \\ \{(0,0)\}, & \text{se } x=1\,, \\ \varnothing, & \text{se } x\in\,]-\infty,0[\,\cup\,]1,+\infty[\,. \end{cases}$$

Pertanto

$$\int_A (x+y+z)\,d(x,y,z) = \int_0^1 \left(\int_{A_x} (x+y+z)\,d(y,z)\right) dx\,.$$

Utilizziamo nuovamente il teorema di Tonelli per calcolare l'integrale in A_x. Posto, per $x\in[0,1[$ e $y\in\mathbb{R}$,

$$A_{x,y} = \left\{z\in\mathbb{R} \,\middle|\, (y,z)\in A_x\right\},$$

risulta $A_{x,y}=\varnothing$ se $y<0$, mentre se $y\geq 0$ si ha

$$A_{x,y} = \{z\in\mathbb{R} \,|\, z\geq 0,\ z\leq 1-x-y\}\,.$$

Quindi

$$A_{x,y} = \begin{cases} [0,1-x-y], & \text{se } y\in[0,1-x[\,, \\ \{0\}, & \text{se } y=1-x\,, \\ \varnothing, & \text{se } y\in\,]-\infty,0[\,\cup\,]1-x,+\infty[\,. \end{cases}$$

Perciò

$$\int_{A_x}(x+y+z)\,d(y,z)=\int_0^{1-x}\left(\int_0^{1-x-y}(x+y+z)\,dz\right)dy\,.$$

Pertanto si ha

$$\int_A(x+y+z)\,d(x,y,z)=\int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left(\int_0^{1-x-y}(x+y+z)\,dz\right)dy\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left[\frac{1}{2}(x+y+z)^2\right]_{z=0}^{z=1-x-y}dy\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\int_0^{1-x}(1-(x+y)^2)\,dy\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left[y-\frac{1}{3}(x+y)^3\right]_{y=0}^{y=1-x}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-x-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}x^3\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{3}x^3-x+\frac{2}{3}\right)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x\right]_0^1=\frac{1}{8}\,.$$

◀

Applicando il teorema di Tonelli 1.5.14 a funzioni misurabili di segno arbitrario si ottiene il seguente teorema.

1.5.27 Teorema (di Fubini[9] in $\mathbb{R}^n$)

Sia $f:\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^r\to\overline{\mathbb{R}}$ sommabile. Allora:

I) per quasi ogni $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^q$ la funzione $\boldsymbol{y}\mapsto f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ è sommabile;

II) posto

$$H=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^q\;\middle|\;\boldsymbol{y}\mapsto f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\text{ non è sommabile}\right\},$$

la funzione $\boldsymbol{x}\mapsto\int_{\mathbb{R}^r}f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}$ è sommabile in $\mathbb{R}^q\setminus H$;

III) $\int_{\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^r}f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\int_{\mathbb{R}^q\setminus H}\left(\int_{\mathbb{R}^r}f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}\right)d\boldsymbol{x}\,.$

Dimostrazione. Posto

$$H^{\pm}=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^q\;\middle|\;\boldsymbol{y}\mapsto f^{\pm}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\text{ non è misurabile}\right\},$$

per il teorema di Tonelli 1.5.14 si ha $\mu(H^{\pm})=0$ e

$$\int_{\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^r}f^{\pm}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\int_{\mathbb{R}^q\setminus H^{\pm}}\left(\int_{\mathbb{R}^r}f^{\pm}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}\right)d\boldsymbol{x}\,.$$

Poiché f è sommabile, si ha $\int_{\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^r}f^{\pm}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})<+\infty$; dalla precedente uguaglianza segue che le funzioni $\boldsymbol{x}\mapsto\int_{\mathbb{R}^r}f^{\pm}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}$ hanno integrale finito in $\mathbb{R}^q\setminus H^{\pm}$. Quindi,

[9] Il teorema prende il nome da Guido Fubini (Venezia, 1879 - New York, 1943) che lo dimostrò nel 1907. Fubini diede grandi contributi in vari settori dell'analisi e della geometria differenziale.

posto

$$G^{\pm} = \left\{ x \in \mathbb{R}^q \setminus H^{\pm} \,\middle|\, \int_{\mathbb{R}^r} f^{\pm}(x,y)\,dy = +\infty \right\},$$

per il teorema 1.4.29, $\mu(G^{\pm}) = 0$. Poniamo $H = H^+ \cup H^- \cup G^+ \cup G^-$; H ha misura nulla, perché unione di insiemi di misura nulla, e $\forall x \in \mathbb{R}^q \setminus H$, si ha $\int_{\mathbb{R}^r} f^{\pm}(x,y)\,dy < +\infty$, pertanto $y \mapsto f(x,y)$ è sommabile. Quindi è verificata l'affermazione I.

Poiché f è sommabile, per il teorema 1.4.24 e per il teorema di Tonelli 1.5.14, si ha

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^q \setminus H} \left| \int_{\mathbb{R}^r} f(x,y)\,dy \right| dx &\le \int_{\mathbb{R}^q \setminus H} \left(\int_{\mathbb{R}^r} |f(x,y)|\,dy \right) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r} |f(x,y)|\,d(x,y) < +\infty ,\end{aligned}$$

Quindi la funzione $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^r} f(x,y)\,dy$ è sommabile; perciò è verificata l'affermazione II.

Infine, ancora per il teorema di Tonelli,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r} f(x,y)\,d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r} f^+(x,y)\,d(x,y) - \int_{\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r} f^-(x,y)\,d(x,y) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^q \setminus H} \left(\int_{\mathbb{R}^r} f^+(x,y)\,dy \right) dx - \int_{\mathbb{R}^q \setminus H} \left(\int_{\mathbb{R}^r} f^-(x,y)\,dy \right) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^q \setminus H} \left(\int_{\mathbb{R}^r} (f^+(x,y) - f^-(x,y))\,dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^q \setminus H} \left(\int_{\mathbb{R}^r} f(x,y)\,dy \right) dx ,\end{aligned}$$

pertanto è verificata l'affermazione III. ■

Dal teorema di Tonelli per integrali in $\mathbb{R}^n$ 1.5.14 abbiamo dedotto il teorema di Tonelli per integrali in sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ 1.5.17; in modo analogo si ottiene la seguente versione del teorema di Fubini.

1.5.28 Teorema (di Fubini in sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$)

Siano $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r)$, $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ sommabile. Poniamo

$$P_A = \left\{ x \in \mathbb{R}^q \,\middle|\, A_x \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^r), \mu(A_x) > 0 \right\}.$$

Allora:

I) $P_A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^q)$;

II) per quasi ogni $x \in P_A$ la funzione $y \mapsto f(x,y)$ è sommabile;

III) posto

$$H = \left\{ x \in P_A \,\middle|\, y \mapsto f(x,y) \text{ non è sommabile} \right\},$$

la funzione $x \mapsto \int_{A_x} f(x,y)\,dy$ è sommabile in $P_A \setminus H$;

IV) $\int_A f(x,y)\,d(x,y) = \int_{P_A \setminus H} \left(\int_{A_x} f(x,y)\,dy \right) dx$.

1.5.29 Osservazione. Consideriamo il caso in cui f è prodotto di una funzione di $\boldsymbol{x}$ per una funzione di $\boldsymbol{y}$. Siano quindi $A = B \times C$, con $B \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^q)$ e $C \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^r)$, e $g : B \to [0, +\infty]$, $h : C \to [0, +\infty]$ sommabili. Per l'osservazione 1.5.19 si ha

$$\int_{B\times C} |g(\boldsymbol{x})h(\boldsymbol{y})|\, d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \int_B |g(\boldsymbol{x})|\, d\boldsymbol{x} \int_C |h(\boldsymbol{y})|\, d\boldsymbol{y} < +\infty\,.$$

Quindi la funzione $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \mapsto g(\boldsymbol{x})h(\boldsymbol{y})$ è sommabile e, ragionando come nell'osservazione 1.5.19, si ha

$$\int_{B\times C} g(\boldsymbol{x})h(\boldsymbol{y})\, d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \int_B g(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \int_C h(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}\,.$$ ◀

1.5.30 Esempio. Consideriamo

$$\int_A \frac{x}{\sqrt{x+y}}\, d(x,y),$$

con $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < y < 2\}$.

L'insieme A è aperto, quindi è misurabile, la funzione integranda è continua, quindi è misurabile.

Poiché la funzione integranda assume sia valori positivi che valori negativi, per applicare il teorema di Fubini 1.5.28 è necessario studiare la sommabilità.

Se $(x,y) \in A$, si ha $|x| < y$, quindi $y > 0$, pertanto se $y \le 0$ allora $A_y = \varnothing$; anche se $y \ge 2$ si ha $A_y = \varnothing$. Se $y \in \,]0,2[$, allora $A_y = \,]-y,y[$. Pertanto, per il teorema di Tonelli 1.5.17, si ha

$$\int_A \left|\frac{x}{\sqrt{x+y}}\right| d(x,y) = \int_0^2 \left(\int_{-y}^{y} \left|\frac{x}{\sqrt{x+y}}\right| dx\right) dy$$

Si ha $x/\sqrt{x+y} \ge 0$ se e solo se $x \ge 0$, pertanto

$$\int_0^2 \left(\int_{-y}^{y} \left|\frac{x}{\sqrt{x+y}}\right| dx\right) dy = \int_0^2 \left(\int_{-y}^{0} \frac{-x}{\sqrt{x+y}}\, dx + \int_0^y \frac{x}{\sqrt{x+y}}\, dx\right) dy\,.$$

Si ha

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+y}}\, dx = \int \frac{x+y-y}{\sqrt{x+y}}\, dx = \int \left(\sqrt{x+y} - \frac{y}{\sqrt{x+y}}\right) dx =$$
$$= \frac{2}{3}(x+y)^{3/2} - 2y\sqrt{x+y} + c\,.$$

Quindi risulta

$$\int_0^2 \left(\int_{-y}^{y} \left|\frac{x}{\sqrt{x+y}}\right| dx\right) dy =$$
$$= \int_0^2 \left(\left[-\frac{2}{3}(x+y)^{3/2} + 2y\sqrt{x+y}\right]_{x=-y}^{x=0} + \left[\frac{2}{3}(x+y)^{3/2} - 2y\sqrt{x+y}\right]_{x=0}^{x=y}\right) dy =$$

$$= \int_0^2 \Big(-\frac{2}{3} y^{3/2} + 2y\sqrt{y} + \frac{2}{3}(2y)^{3/2} - 2y\sqrt{2y} - \frac{2}{3} y^{3/2} + 2y^{3/2} \Big)\, dy\,.$$

Abbiamo ottenuto l'integrale di una funzione limitata in un insieme limitato, che non può essere $+\infty$, quindi la funzione studiata è sommabile.

Per il teorema di Fubini 1.5.28, si ha

$$\int_A \frac{x}{\sqrt{x+y}}\, d(x,y) = \int_0^2 \Big(\int_{-y}^{y} \frac{x}{\sqrt{x+y}}\, dx \Big) dy = \int_0^2 \Big[\frac{2}{3}(x+y)^{3/2} - 2y\sqrt{x+y} \Big]_{x=-y}^{x=y} dy =$$
$$= \int_0^2 \Big(\frac{2}{3}(2y)^{3/2} - 2y\sqrt{2y} \Big) dy = \int_0^2 \Big(-\frac{2\sqrt{2}}{3} y^{3/2} \Big) dy = \Big[-\frac{4\sqrt{2}}{15} y^{5/2} \Big]_0^2 = -\frac{32}{15}\,.$$

◀

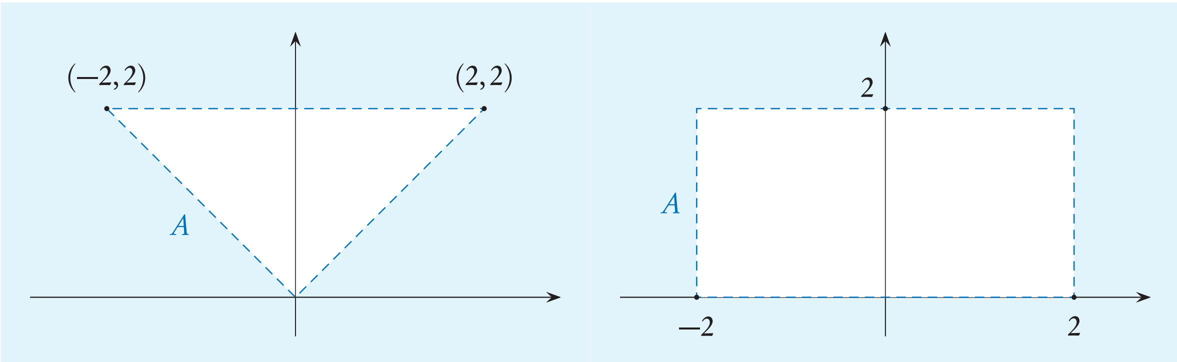


Figura 1.5.7
I domini di integrazione degli esempi 1.5.30 (a sinistra) e 1.5.31 (a destra).

1.5.31 Esempio. Consideriamo

$$\int_A \frac{x+y}{\sqrt{4-x^2}}\, d(x,y),$$

con $A = \,]-2,2[\, \times \,]0,2[\,$.

L'insieme A è aperto, quindi è misurabile, la funzione integranda è continua, quindi è misurabile.

Poiché la funzione integranda assume sia valori positivi che valori negativi, per applicare il teorema di Fubini 1.5.28 dobbiamo dimostrare che è sommabile. Si ha, $\forall (x,y) \in A$, $|x+y| \le |x| + |y| < 4$; la funzione $(x,y) \mapsto 4/\sqrt{4-x^2}$ è sommabile in A, perché, per l'osservazione 1.5.19, risulta

$$\int_A \frac{4}{\sqrt{4-x^2}}\, d(x,y) = \int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\, dx \int_0^2 4\, dy = 8\Big[\arcsin\Big(\frac{x}{2}\Big) \Big]_{x\to -2}^{x\to 2} = 8\pi\,.$$

Quindi la funzione integranda ha valore assoluto maggiorato da una funzione sommabile, pertanto, per il teorema 1.4.25, è sommabile.

Per il teorema di Fubini 1.5.28, si ha

$$\int_A \frac{x+y}{\sqrt{4-x^2}}\,d(x,y)=\int_{-2}^{2}\left(\int_0^2 \frac{x+y}{\sqrt{4-x^2}}\,dy\right)dx=\int_{-2}^{2}\left[\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\left(xy+\frac{1}{2}y^2\right)\right]_{y=0}^{y=2}dx=$$
$$=\int_{-2}^{2}\frac{2x+2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx=\left[-2\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{-2}^{2}=2\pi\,. \quad ◀$$

I teoremi di Tonelli e di Fubini hanno come immediata conseguenza i seguenti teoremi relativi allo scambio dell'ordine di integrazione.

1.5.32 Teorema (di scambio dell'ordine di integrazione per funzioni non negative)

Siano $B\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^q)$, $C\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^r)$ e $f:B\times C\to[0,+\infty]$ misurabile. Allora:

I) per quasi ogni $\boldsymbol{x}\in B$ la funzione $\boldsymbol{y}\mapsto f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ è misurabile;

II) posto
$$H=\{\boldsymbol{x}\in B\,|\,\boldsymbol{y}\mapsto f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\text{ non è misurabile}\},$$
la funzione $\boldsymbol{x}\mapsto\int_C f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}$ è misurabile in $B\setminus H$;

III) per quasi ogni $\boldsymbol{y}\in C$ la funzione $\boldsymbol{x}\mapsto f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ è misurabile;

IV) posto
$$K=\{\boldsymbol{y}\in C\,|\,\boldsymbol{x}\mapsto f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\text{ non è misurabile}\},$$
la funzione $\boldsymbol{y}\mapsto\int_B f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{x}$ è misurabile in $C\setminus K$;

V) $\int_{B\setminus H}\left(\int_C f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}\right)d\boldsymbol{x}=\int_{C\setminus K}\left(\int_B f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{x}\right)d\boldsymbol{y}$.

1.5.33 Teorema (di scambio dell'ordine di integrazione per funzioni sommabili)

Sian $B\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^q)$, $C\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^r)$ e $f:B\times C\to[0,+\infty]$ sommabile. Allora:

I) per quasi ogni $\boldsymbol{x}\in B$ la funzione $\boldsymbol{y}\mapsto f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ è sommabile;

II) posto
$$H=\{\boldsymbol{x}\in B\,|\,\boldsymbol{y}\mapsto f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\text{ non è sommabile}\},$$
la funzione $\boldsymbol{x}\mapsto\int_C f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}$ è sommabile in $B\setminus H$;

III) per quasi ogni $\boldsymbol{y}\in C$ la funzione $\boldsymbol{x}\mapsto f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ è sommabile;

IV) posto
$$K=\{\boldsymbol{y}\in C\,|\,\boldsymbol{x}\mapsto f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\text{ non è sommabile}\},$$
la funzione $\boldsymbol{y}\mapsto\int_B f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{x}$ è sommabile in $C\setminus K$;

V) $\int_{B\setminus H}\left(\int_C f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}\right)d\boldsymbol{x}=\int_{C\setminus K}\left(\int_B f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{x}\right)d\boldsymbol{y}$.

1.5.34 Esempio. Vediamo un esempio che mostra che, nel teorema dello scambio dell'ordine di integrazione, quando la funzione integranda assume valori di segno diverso, l'ipotesi di sommabilità è indispensabile.

Consideriamo

$$g_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad g_1(x,y) = \frac{|y|-x}{\left(1+\left(|y|-x\right)^2\right)^2}.$$

La funzione g_1 è continua, quindi è misurabile.

Fissato $y \in \mathbb{R}$, si ha $g_1(x,y) = O(|x|^{-3})$, per $x \to \pm\infty$, quindi la funzione $x \mapsto g_1(x,y)$ è sommabile; analogamente, fissato $x \in \mathbb{R}$, risulta $g_1(x,y) = O(|y|^{-3})$, per $y \to \pm\infty$, quindi la funzione $y \mapsto g_1(x,y)$ è sommabile.

Integrando g_1 prima rispetto a x e poi rispetto a y si ha

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} g_1(x,y)\,dx\right)dy &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|y|-x}{\left(1+\left(|y|-x\right)^2\right)^2}\,dx\right)dy = \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left[\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\left(|y|-x\right)^2}\right]_{x\to-\infty}^{x\to+\infty} dy = \int_{\mathbb{R}} 0\,dy = 0,
\end{aligned}$$

invece, integrando g_1 prima rispetto a y e poi rispetto a x, si ha

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} g_1(x,y)\,dy\right)dx &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|y|-x}{\left(1+\left(|y|-x\right)^2\right)^2}\,dy\right)dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(2\int_0^{+\infty} \frac{y-x}{\left(1+\left(y-x\right)^2\right)^2}\,dy\right)dx = \int_{\mathbb{R}} 2\left[-\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\left(y-x\right)^2}\right]_{y=0}^{y\to+\infty} dx = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left[\arctan x\right]_{x\to-\infty}^{x\to+\infty} = \pi.
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} g_1(x,y)\,dx\right)dy = 0 \neq \pi = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} g_1(x,y)\,dy\right)dx.$$

In questo caso non si può applicare il teorema dello scambio dell'ordine di integrazione perché g_1 non è sommabile. Infatti, per il teorema di Tonelli 1.5.14, si ha

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \left|g_1(x,y)\right| d(x,y) &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\left||y|-x\right|}{\left(1+\left(|y|-x\right)^2\right)^2}\,dx\right)dy = \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{-\infty}^{|y|} \frac{|y|-x}{\left(1+\left(|y|-x\right)^2\right)^2}\,dx + \int_{|y|}^{+\infty} \frac{x-|y|}{\left(1+\left(x-|y|\right)^2\right)^2}\,dx\right)dy = \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(\left[\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\left(|y|-x\right)^2}\right]_{x\to-\infty}^{x=|y|} + \left[-\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\left(x-|y|\right)^2}\right]_{x=|y|}^{x\to\infty}\right)dy = \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)dy = +\infty.
\end{aligned}$$

◀

1.5.2 Teorema di cambiamento di variabili

In questa sottosezione studiamo i cambiamenti di variabili negli integrali. Si tratta dell'analogo in più variabili dell'integrazione per sostituzione.

Una sostituzione è utile per semplificare la funzione integranda; nell'ambito degli integrali in più variabili, un cambiamento di variabili può essere utile sia perché semplifica la funzione integranda, sia perché trasforma l'insieme di integrazione in uno più semplice.

Definizione di diffeomorfismo

Siano $\Omega, O \subseteq \mathbb{R}^n$ aperti, $\boldsymbol{\Phi}: \Omega \to O$. Diciamo che $\boldsymbol{\Phi}$ è un **diffeomorfismo** (o un **cambiamento di variabili**) quando è iniettiva, suriettiva, di classe C^1, con inversa di classe C^1.

Per il teorema di invertibilità locale, condizione necessaria e sufficiente affinché l'inversa di una funzione invertibile di classe C^1 sia di classe C^1 è che essa abbia differenziale invertibile in ogni punto, cioè che $\det \mathscr{J}_{\boldsymbol{\Phi}}$ non si annulli.

Sarà utile il seguente teorema relativo al calcolo differenziale.

1.5.35 Teorema

Siano $B \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $\boldsymbol{F} \in C^1(B, \mathbb{R}^m)$ e $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in B$ tali che il segmento di estremi $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ è incluso in B. Allora

$$\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{y})\| \le \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \sup (D_j F_k)^2}\, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|.$$

Dimostrazione. Per il teorema del valor medio, per $k = 1, 2, \ldots, m$, esiste $\boldsymbol{\xi}_k$, appartenente al segmento di estremi $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, tale che $F_k(\boldsymbol{x}) - F_k(\boldsymbol{y}) = \nabla F_k(\boldsymbol{\xi}_k) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$. Quindi, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, risulta

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{y})\|^2 &= \sum_{k=1}^{m} \big(\nabla F_k(\boldsymbol{\xi}_k) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\big)^2 \le \sum_{k=1}^{m} \|\nabla F_k(\boldsymbol{\xi}_k)\|^2 \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 = \\ &= \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \big(D_j F_k(\boldsymbol{\xi}_k)\big)^2 \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2.\end{aligned}$$ ■

Per studiare i cambiamenti di variabile negli integrali è necessario anzitutto studiare come essi agiscono sulla misura di insiemi. Il seguente teorema fornisce le informazioni necessarie.

1.5.36 Teorema

Siano $\Omega, O \subseteq \mathbb{R}^n$ aperti, $\boldsymbol{\Phi}: \Omega \xrightarrow[\text{1-1}]{\text{su}} O$ diffeomorfismo, $A \subseteq \Omega$. Si ha $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ se e solo se $\boldsymbol{\Phi}(A) \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ e in tal caso risulta

$$\mu\big(\boldsymbol{\Phi}(A)\big) = \int_A \left|\det \mathscr{J}_{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{\xi})\right| d\boldsymbol{\xi}.$$

Poiché la dimostrazione di questo teorema è piuttosto complessa la spezziamo in vari lemmi. Nell'enunciare questi lemmi utilizziamo le notazioni del teorema senza ulteriori precisazioni.

Anzitutto proviamo che i cambiamenti di variabile trasformano insiemi di misura nulla in insiemi di misura nulla e insiemi misurabili in insiemi misurabili. Studiamo poi come cambia la misura nel caso particolare che il cambiamento di variabili sia una trasformazione lineare. Successivamente arriviamo a dimostrare il teorema nel caso che A sia un intervallo compatto con i lati di uguale lunghezza. Da qui è facile passare al caso generale.

In questi lemmi chiamiamo **cubo compatto** un intervallo compatto non degenere che ha tutti i lati della stessa lunghezza. Se $x \in \mathbb{R}^n$ e $\ell \in \mathbb{R}^+$, indichiamo con $C(x, \ell)$ il cubo compatto di centro x e lato 2ℓ, cioè

$$C(x, \ell) = \bigtimes_{j=1}^{n} [x_j - \ell, x_j + \ell].$$

Si verifica facilmente che $\overline{S}(x, \ell) \subseteq C(x, \ell) \subseteq \overline{S}(x, \sqrt{n}\,\ell)$.

1.5.37 Lemma

Sia $A \subseteq \Omega$; $\mu^*(A) = 0$ se e solo se $\mu^*(\boldsymbol{\Phi}(A)) = 0$.

Dimostrazione. Dimostriamo che se $\mu^*(A) = 0$ allora $\mu^*(\boldsymbol{\Phi}(A)) = 0$.

Supponiamo dapprima che esista $Q \subseteq \Omega$ compatto tale che $A \subseteq \operatorname{int} Q$.

Poiché $\boldsymbol{\Phi}$ è di classe C^1 e Q è compatto, le derivate parziali di $\boldsymbol{\Phi}$ sono limitate in Q; poniamo

$$K = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sup (D_j \Phi_k)^2}.$$

Se $C(x, \ell) \subseteq Q$, allora, per il teorema 1.5.35, $\forall \xi \in C(x, \ell)$, si ha

$$\|\boldsymbol{\Phi}(\xi) - \boldsymbol{\Phi}(x)\| \leq K \|\xi - x\| \leq K \sqrt{n}\,\ell,$$

quindi

$$\boldsymbol{\Phi}(C(x, \ell)) \subseteq S(\boldsymbol{\Phi}(x), K\sqrt{n}\,\ell) \subseteq C(\boldsymbol{\Phi}(x), K\sqrt{n}\,\ell).$$

L'insieme $\boldsymbol{\Phi}(C(x, \ell))$ è immagine del compatto $C(x, \ell)$ mediante la funzione continua $\boldsymbol{\Phi}$, quindi è compatto, pertanto è misurabile e si ha

$$\mu(\boldsymbol{\Phi}(C(x, \ell))) \leq \operatorname{mis}(C(\boldsymbol{\Phi}(x), K\sqrt{n}\,\ell)) = (2K\sqrt{n}\,\ell)^n = (K\sqrt{n})^n \operatorname{mis}(C(x, \ell)).$$

Sia $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Poiché $\mu(A) = 0$, per il teorema 1.2.36 esiste G_0 aperto, tale che $A \subseteq G_0$ e $\mu(G_0) < \varepsilon$. Posto $G = G_0 \cap \operatorname{int} Q$, l'insieme G ha le stesse proprietà di G_0 e inoltre $G \subseteq \operatorname{int} Q$. Per il teorema 1.2.28 $G = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k$, con i C_k cubi compatti a due a due con interno disgiunto. Allora si ha

$$\mu^*\big(\Phi(A)\big) \le \mu\big(\Phi(G)\big) \le \sum_{k=0}^{+\infty} \mu\big(\Phi(C_k)\big) \le \big(K\sqrt{n}\big)^n \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(C_k) = \\ = \big(K\sqrt{n}\big)^n \mu(G) < \big(K\sqrt{n}\big)^n \varepsilon\,.$$

Vista l'arbitrarietà di ε, si ha $\mu^*\big(\Phi(A)\big) = 0$.

Sia ora A un qualunque sottoinsieme di Ω di misura nulla. Per $k \in \mathbb{N}^*$ poniamo

$$Q_k = \left\{ x \in \Omega \,\middle|\, d(x, \complement\Omega) \ge \frac{1}{k} \right\} \cap [-k, k]^n\,.$$

Ciascun Q_k è chiuso, perché intersezione di chiusi, e limitato, perché incluso in $[-k,k]^n$, quindi è compatto; inoltre è contenuto in Ω e

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \operatorname{int} Q_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \left(\left\{ x \in \Omega \,\middle|\, d(x, \complement\Omega) > \frac{1}{k} \right\} \cap \left]-k, k\right[^n \right) = \Omega\,.$$

Per ogni $k \in \mathbb{N}^*$, $A \cap \operatorname{int} Q_k$ è contenuto nell'interno del compatto Q_k contenuto in Ω e ha misura nulla, quindi, per quanto già dimostrato, si ha $\mu\big(\Phi(A \cap \operatorname{int} Q_k)\big) = 0$. Risulta $\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}(A \cap \operatorname{int} Q_k) = A$, quindi $\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \Phi(A \cap \operatorname{int} Q_k) = \Phi(A)$. Pertanto $\Phi(A)$ è unione di una famiglia numerabile di insiemi di misura nulla, quindi ha misura nulla.

Viceversa, poiché Φ^{-1} è un diffeomorfismo, per quanto già provato, se $\mu^*\big(\Phi(A)\big) = 0$, allora $\mu^*\big(\Phi^{-1}(\Phi(A))\big) = 0$, cioè $\mu^*(A) = 0$. ■

1.5.38 Lemma

Sia $A \subseteq \Omega$; A è misurabile se e solo se $\Phi(A)$ è misurabile.

Dimostrazione. Dimostriamo che se A è misurabile, allora $\Phi(A)$ è misurabile.

Se $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ allora, per il teorema 1.2.36, esiste M di tipo G_δ tale che $A \subseteq M$ e $\mu(M \setminus A) = 0$. Poiché Ω è aperto, possiamo scegliere $M \subseteq \Omega$. Si ha $\Phi(A) = \Phi(M) \setminus \Phi(M \setminus A)$. Poiché Φ è un diffeomorfismo, trasforma aperti in aperti e quindi insiemi di tipo G_δ in insiemi di tipo G_δ; pertanto $\Phi(M) \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$. Inoltre, per il lemma 1.5.37, $\Phi(M \setminus A)$ ha misura nulla, quindi è misurabile. Pertanto $\Phi(A)$ è differenza di insiemi misurabili, quindi è misurabile.

Viceversa, poiché Φ^{-1} è un diffeomorfismo, da quanto già dimostrato segue che, se $\Phi(A) \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, allora $A = \Phi^{-1}\big(\Phi(A)\big) \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$. ■

1.5.39 Lemma

Siano T una trasformazione lineare da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ invertibile, D la sua matrice associata e $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$. Allora $T(A) \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ e $\mu\big(T(A)\big) = |\det D|\mu(A)$.

Dimostrazione. Poiché ogni trasformazione lineare invertibile è un diffeomorfismo, per il lemma 1.5.38, $T(A) \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$.

Ogni trasformazione lineare da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ invertibile può essere fattorizzata nel prodotto di trasformazioni lineari di uno dei seguenti tre tipi.

a) Scambio di coordinate: per $1 \le i < j \le n$,

$$S_{i,j}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad S_{i,j}(\boldsymbol{x}) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_n).$$

La matrice associata è

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & & i & & j & & n \end{array}\end{array},$$

che ha determinante -1.

b) Moltiplicazione di una coordinata per una costante non nulla: per $1 \le i \le n$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$

$$M_{i,\lambda}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad M_{i,\lambda}(\boldsymbol{x}) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, \lambda x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

La matrice associata è

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & & i & & n \end{array}\end{array},$$

che ha determinante λ.

c) Somma di un multiplo di una coordinata ad un'altra: per $1 \le i, j \le n$, $i \ne j$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$

$$C_{i,j,\lambda}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad C_{i,j,\lambda}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \lambda x_j e_i = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + \lambda x_j, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

La matrice associata è

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & & i & & j & & n \end{array}\end{array},$$

che ha determinante 1.

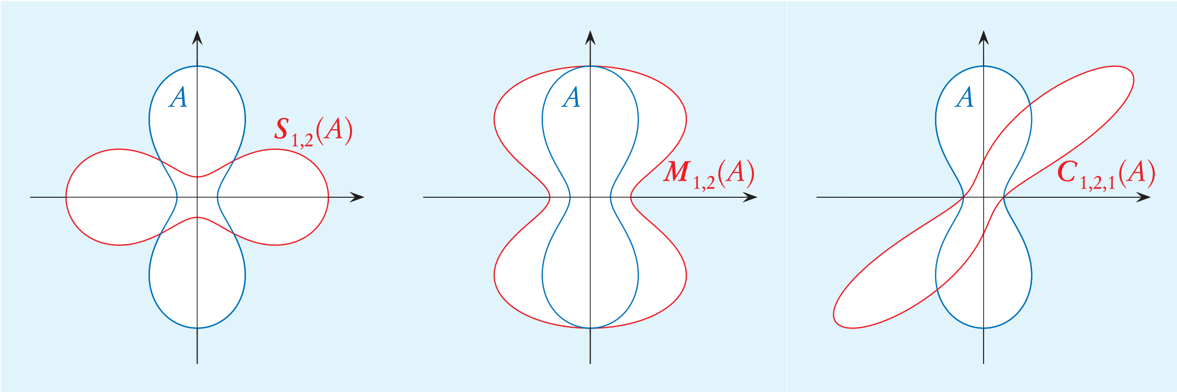


Figura 1.5.8
Trasformazione di un insieme mediante le trasformazioni lineari elementari utilizzate nella dimostrazione del lemma 1.5.39.
In ogni figura un insieme in blu e il trasformato in rosso; le trasformazioni applicate sono, da sinistra a destra, $S_{1,2}$ (scambio degli assi), $M_{1,2}$ (raddoppio della prima coordinata), $C_{1,2,1}$ (somma della seconda coordinata, moltiplicata per 1, alla prima).

Se I è un intervallo compatto di $\mathbb{R}^n$, allora $\boldsymbol{S}_{i,j}(I)$ è un intervallo compatto di $\mathbb{R}^n$ e $\operatorname{mis}\big(\boldsymbol{S}_{i,j}(I)\big) = \operatorname{mis}(I)$. Da questo segue facilmente che qualunque sia $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ si ha $\mu\big(\boldsymbol{S}_{i,j}(A)\big) = \mu(A)$.

Se I è un intervallo compatto di $\mathbb{R}^n$, allora $\boldsymbol{M}_{i,\lambda}(I)$ è un intervallo compatto di $\mathbb{R}^n$ e $\operatorname{mis}\big(\boldsymbol{M}_{i,\lambda}(I)\big) = \lambda \operatorname{mis}(I)$. Da questo segue facilmente che qualunque sia $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ si ha $\mu\big(\boldsymbol{M}_{i,\lambda}(A)\big) = \lambda\mu(A)$.

Per studiare la misura del trasformato di un insieme mediante $\boldsymbol{C}_{i,j,\lambda}$ limitiamoci al caso $n=2$, $i=1$, $j=2$, in modo da semplificare la notazione.

Si ha, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{C}_{1,2,\lambda}(x,y) = (x+\lambda y, y)$. Sia $I = [a,b]\times[c,d]$ un intervallo compatto di $\mathbb{R}^2$. Se $\lambda > 0$, per ogni $(x,y)\in I$ si ha $a+\lambda c \le x+\lambda y \le b+\lambda d$, pertanto

$$\boldsymbol{C}_{1,2,\lambda}(I) \subseteq [a+\lambda c, b+\lambda d]\times[c,d]$$

e quindi $\mu\big(\boldsymbol{C}_{1,2,\lambda}(I)\big) \le \big(b-a+\lambda(d-c)\big)(d-c)$. Se invece $\lambda < 0$, per ogni $(x,y)\in I$ si ha $a+\lambda d \le x+\lambda y \le b+\lambda c$, pertanto

$$\boldsymbol{C}_{1,2,\lambda}(I) \subseteq [a+\lambda d, b+\lambda c]\times[c,d]$$

e quindi $\mu\big(\boldsymbol{C}_{1,2,\lambda}(I)\big) \le \big(b-a+\lambda(c-d)\big)(d-c)$. Pertanto si ha in ogni caso

$$\mu\big(\boldsymbol{C}_{1,2,\lambda}(I)\big) \le \big(b-a+|\lambda|(d-c)\big)(d-c).$$

Inoltre, per $k\in\mathbb{N}^*$, suddividendo l'intervallo $[c,d]$ in k parti uguali, si ha

$$[a,b]\times[c,d] = \bigcup_{j=1}^{k} [a,b]\times\left[c+\frac{(j-1)(d-c)}{k}, c+\frac{j(d-c)}{k}\right],$$

quindi, utilizzando ciò che si è appena dimostrato,

$$\mu\big(C_{1,2,\lambda}([a,b]\times[c,d])\big)\leq\sum_{j=1}^{k}\mu\left(C_{1,2,\lambda}\left([a,b]\times\left[c+\frac{(j-1)(d-c)}{k},c+\frac{j(d-c)}{k}\right]\right)\right)\leq$$
$$\leq\sum_{j=1}^{k}\left(b-a+|\lambda|\frac{d-c}{k}\right)\frac{d-c}{k}=\left(b-a+|\lambda|\frac{d-c}{k}\right)(d-c).$$

Passando al limite per $k\to+\infty$, da qui si ottiene

$$\mu\big(C_{1,2,\lambda}([a,b]\times[c,d])\big)\leq(b-a)(d-c)=\mathrm{mis}([a,b]\times[c,d]).$$

Da qui segue facilmente che qualunque sia $A\in\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, si ha $\mu\big(C_{1,2,\lambda}(A)\big)\leq\mu(A)$. Poiché la trasformazione lineare $C_{1,2,\lambda}$ somma λ volte la seconda coordinata alla prima, lasciando invariata quest'ultima, la trasformazione inversa si ottiene sommando $-\lambda$ volte la seconda variabile alla prima; cioè $C_{1,2,\lambda}^{-1}=C_{1,2,-\lambda}$ Pertanto si ha anche

$$\mu(A)=\mu\Big(C_{1,2,-\lambda}\big(C_{1,2,\lambda}(A)\big)\Big)\leq\mu\big(C_{1,2,\lambda}(A)\big);$$

quindi $\mu(A)=\mu\big(C_{1,2,\lambda}(A)\big)$.

In ogni caso, il trasformato di un insieme misurabile A mediante una delle trasformazioni lineari $S_{i,j}$, $M_{i,\lambda}$, $C_{i,j,\lambda}$, ha misura uguale a $\mu(A)$ moltiplicato per il valore assoluto del determinante della matrice associata alla trasformazione lineare. Qualunque trasformazione lineare T è composizione di trasformazioni del tipo elencato sopra, quindi, se $A\in\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, allora $\mu\big(T(A)\big)$ è uguale al prodotto dei determinanti delle trasformazioni lineari in cui è fattorizzata T per $\mu(A)$, ma il prodotto di tali determinanti è il determinante di T. Questo prova il teorema. ■

1.5.40 Osservazione. Da questo lemma segue immediatamente che la misura di Lebesgue è invariante per trasformazioni lineari che hanno determinante della matrice associata uguale a 1 o a -1. In particolare è invariante per rotazioni e riflessioni, che hanno matrice associata ortogonale, con determinante 1 e -1, rispettivamente. ◀

Nei lemmi che seguono utilizzeremo particolari successioni di cubi compatti. Con l'espressione successione decrescente di cubi compatti inclusi in Ω che tende a $\{c\}$, dove $c\in\Omega$, intendiamo che, $\forall k\in\mathbb{N}$, C_k è un cubo compatto, $c\in C_k\subseteq\Omega$, $C_{k+1}\subseteq C_k$ e il lato di C_k tende a 0, per $k\to+\infty$, da ciò segue che $\bigcap_{k\in\mathbb{N}}C_k=\{c\}$.

1.5.41 Lemma

Siano $c\in\Omega$ e $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione decrescente di cubi compatti inclusi in Ω che tende a $\{c\}$. Se $\mathscr{J}_{\Phi}(c)$ è la matrice identità, allora

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\mu\big(\Phi(C_k)\big)}{\mu(C_k)}=1.$$

Dimostrazione. Poniamo $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{c})$ e indichiamo con $\boldsymbol{I}$ la funzione identità in $\mathbb{R}^n$.

Sia $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. La funzione $\boldsymbol{\Phi}-\boldsymbol{I}$ è di classe C^1 e ha le derivate parziali nulle in $\boldsymbol{c}$; quindi $\exists \delta_1 \in \mathbb{R}^+$ tale che, per $\xi \in \overline{S}(\boldsymbol{c}, \delta_1)$ e $j, k = 1, 2, \ldots, n$ si ha $\left|D_j(\boldsymbol{\Phi}-\boldsymbol{I})_k(\xi)\right| \leq \varepsilon/n$. Allora, per il teorema 1.5.35, $\forall \xi, \eta \in \overline{S}(\boldsymbol{c}, \delta_1)$, si ha

$$\|(\boldsymbol{\Phi}-\boldsymbol{I})(\xi)-(\boldsymbol{\Phi}-\boldsymbol{I})(\eta)\| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \sup\left(D_j(\boldsymbol{\Phi}-\boldsymbol{I})_k\right)^2}\, \|\xi-\eta\| \leq$$

$$\leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\varepsilon}{n}\right)^2}\, \|\xi-\eta\| = \varepsilon \|\xi-\eta\|.$$

Analogamente, poiché anche $\mathscr{J}_{\boldsymbol{\Phi}^{-1}}(\boldsymbol{d}) = \left(\mathscr{J}_{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{c})\right)^{-1}$ è la matrice identità, $\exists \delta_2 \in \mathbb{R}^+$ tale che, $\forall \xi, \eta \in \overline{S}(\boldsymbol{d}, \delta_2)$, si ha

$$\|(\boldsymbol{\Phi}^{-1}-\boldsymbol{I})(\xi)-(\boldsymbol{\Phi}^{-1}-\boldsymbol{I})(\eta)\| \leq \varepsilon \|\xi-\eta\|.$$

Siano $\alpha \in \mathbb{R}^n$ e $\ell \in \mathbb{R}^+$, tali che $C(\alpha, \ell) \subseteq \overline{S}(\boldsymbol{c}, \delta_1)$. Qualunque sia $\xi \in C(\alpha, \ell)$, per $j = 1, 2, \ldots, n$, si ha

$$\begin{aligned}&\left|\boldsymbol{\Phi}_j(\xi)-\boldsymbol{\Phi}_j(\alpha)\right| \leq |\xi_j-\alpha_j| + \left|(\boldsymbol{\Phi}-\boldsymbol{I})_j(\xi)-(\boldsymbol{\Phi}-\boldsymbol{I})_j(\alpha)\right| \leq \\ &\leq |\xi_j-\alpha_j| + \|(\boldsymbol{\Phi}-\boldsymbol{I})(\xi)-(\boldsymbol{\Phi}-\boldsymbol{I})(\alpha)\| \leq \|\xi-\alpha\| + \varepsilon\|\xi-\alpha\| \leq \left(1+\sqrt{n}\,\varepsilon\right)\ell;\end{aligned}$$

perciò

$$\boldsymbol{\Phi}\left(C(\alpha, \ell)\right) \subseteq C\left(\boldsymbol{\Phi}(\alpha), \left(1+\sqrt{n}\,\varepsilon\right)\ell\right).$$

Quindi

$$\frac{\mu\left(\boldsymbol{\Phi}\left(C(\alpha, \ell)\right)\right)}{\mu\left(C(\alpha, \ell)\right)} \leq \frac{\mu\left(C\left(\boldsymbol{\Phi}(\alpha), \left(1+\sqrt{n}\,\varepsilon\right)\ell\right)\right)}{\mu\left(C(\alpha, \ell)\right)} = \left(1+\sqrt{n}\,\varepsilon\right)^n. \tag{1.5.4}$$

Analogamente, se $\beta \in \mathbb{R}^n$ e $m \in \mathbb{R}^+$ sono tali che $C(\beta, m) \subseteq \overline{S}(\boldsymbol{d}, \delta_2)$, si ha

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}\left(C(\beta, m)\right) \subseteq C\left(\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\beta), \left(1+\sqrt{n}\,\varepsilon\right)m\right),$$

cioè, posto $\alpha = \boldsymbol{\Phi}^{-1}(\beta)$ e $\ell = \left(1+\sqrt{n}\,\varepsilon\right)m$,

$$C\left(\boldsymbol{\Phi}(\alpha), \ell/\left(1+\sqrt{n}\,\varepsilon\right)\right) \subseteq \boldsymbol{\Phi}\left(C(\alpha, \ell)\right).$$

Quindi

$$\frac{\mu\left(\boldsymbol{\Phi}\left(C(\alpha, \ell)\right)\right)}{\mu\left(C(\alpha, \ell)\right)} \geq \frac{\mu\left(C\left(\boldsymbol{\Phi}(\alpha), \ell/(1+\sqrt{n}\,\varepsilon)\right)\right)}{\mu\left(C(\alpha, \ell)\right)} = \left(1+\sqrt{n}\,\varepsilon\right)^{-n}. \tag{1.5.5}$$

Indichiamo ora con α_k e ℓ_k il centro e il semilato del cubo C_k. Per ipotesi $\ell_k \to 0$. Poiché $\boldsymbol{c} \in C_k = C(\alpha_k, \ell_k)$, definitivamente rispetto a k, si ha $C(\alpha_k, \ell_k) \subseteq \overline{S}(\boldsymbol{c}, \delta_1)$.

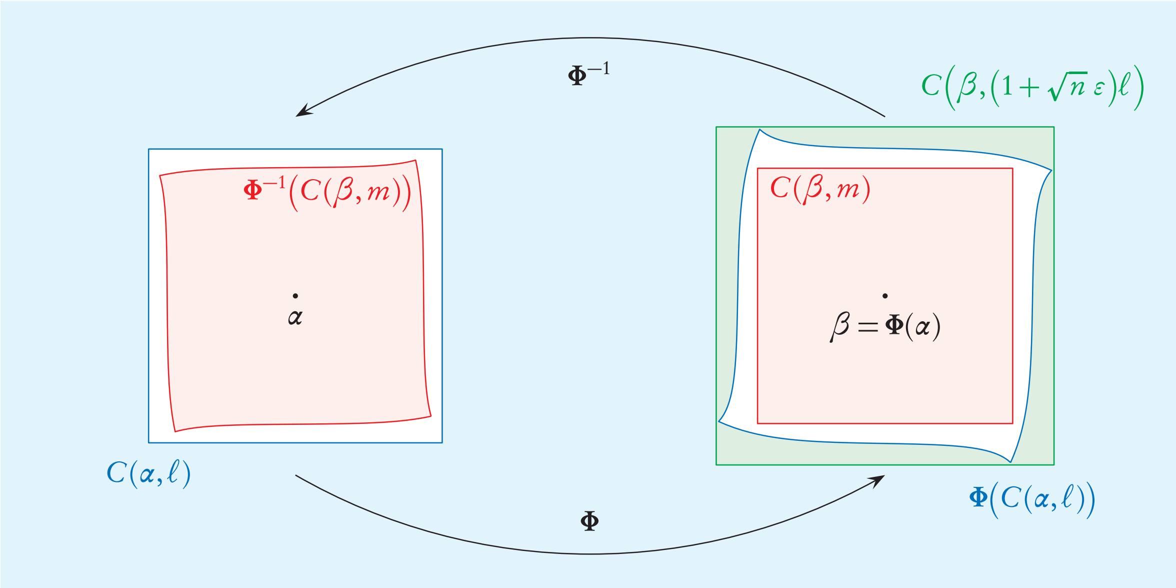


Figura 1.5.9
I cubi e i loro trasformati utilizzati nella dimostrazione del lemma 1.5.41.

Analogamente, definitivamente rispetto a k, si ha $C\big(\Phi(\alpha_k),\sqrt{n}\,\ell_k/(1+\sqrt{n}\,\varepsilon)\big)\subseteq\overline{S}(d,\delta_2)$. Quindi per C_k valgono definitivamente le disuguaglianze (1.5.4) e (1.5.5), cioè si ha

$$(1+\sqrt{n}\,\varepsilon)^{-n}\le\frac{\mu\big(\Phi(C_k)\big)}{\mu(C_k)}\le(1+\sqrt{n}\,\varepsilon)^{n}.$$

Per l'arbitrarietà di ε, questo prova che $\mu\big(\Phi(C_k)\big)/\mu(C_k)\to 1$. ■

1.5.42 Lemma

Siano $c\in\Omega$ e $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione decrescente di cubi compatti inclusi in Ω che tende a $\{c\}$. Allora

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\mu\big(\Phi(C_k)\big)}{\mu(C_k)}=\big|\det\mathscr{J}_\Phi(c)\big|.$$

Dimostrazione. Siano T la trasformazione lineare in $\mathbb{R}^n$ la cui matrice associata è $\mathscr{J}_\Phi(c)$ e $F=T^{-1}\circ\Phi$. Poiché T^{-1} è una trasformazione lineare invertibile, F è un diffeomorfismo da Ω su $T^{-1}(O)$. Inoltre $\mathscr{J}_F(c)=\big(\mathscr{J}_\Phi(c)\big)^{-1}\mathscr{J}_\Phi(c)=I$. Allora, per il lemma 1.5.41, $\lim_{k\to+\infty}\mu\big(F(C_k)\big)/\mu(C_k)=1$; inoltre, per il lemma 1.5.39,

$$\mu\big(F(C_k)\big)=\mu\Big(T^{-1}\big(\Phi(C_k)\big)\Big)=\big|\det\mathscr{J}_\Phi(c)\big|^{-1}\mu\big(\Phi(C_k)\big).$$

Pertanto

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\mu\big(\Phi(C_k)\big)}{\mu(C_k)}=\lim_{k\to+\infty}\frac{\big|\det\mathscr{J}_\Phi(c)\big|\mu\big(F(C_k)\big)}{\mu(C_k)}=\big|\det\mathscr{J}_\Phi(c)\big|.$$ ■

1.5.43 Lemma

Siano $\boldsymbol{c} \in \Omega$ e $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione decrescente di cubi compatti inclusi in Ω che tende a $\{\boldsymbol{c}\}$. Allora

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\mu\big(\boldsymbol{\Phi}(C_k)\big)} \int_{C_k} \left|\det \mathscr{J}_{\boldsymbol{\Phi}}(\xi)\right| d\xi = 1 .$$

Dimostrazione. Si ha

$$\frac{1}{\mu\big(\boldsymbol{\Phi}(C_k)\big)} \int_{C_k} \left|\det \mathscr{J}_{\boldsymbol{\Phi}}(\xi)\right| d\xi = \frac{\mu(C_k)}{\mu\big(\boldsymbol{\Phi}(C_k)\big)} \frac{1}{\mu(C_k)} \int_{C_k} \left|\det \mathscr{J}_{\boldsymbol{\Phi}}(\xi)\right| d\xi .$$

Per il lemma 1.5.42 la prima frazione ha limite $\left|\det \mathscr{J}_{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{c})\right|^{-1}$. I rimanenti termini sono la media della funzione $\xi \mapsto \left|\det \mathscr{J}_{\boldsymbol{\Phi}}(\xi)\right|$ sul cubo C_k. Poiché la funzione $\left|\det \mathscr{J}_{\boldsymbol{\Phi}}\right|$ è continua, e la successione dei cubi tende a $\{\boldsymbol{c}\}$, tale media ha limite $\left|\det \mathscr{J}_{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{c})\right|$. Infatti

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\mu(C_k)} \int_{C_k} \left|\det \mathscr{J}_{\boldsymbol{\Phi}}(\xi)\right| d\xi - \left|\det \mathscr{J}_{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{c})\right|\right| &= \left|\frac{1}{\mu(C_k)} \int_{C_k} \Big(\left|\det \mathscr{J}_{\boldsymbol{\Phi}}(\xi)\right| - \left|\det \mathscr{J}_{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{c})\right|\Big) d\xi\right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\mu(C_k)} \int_{C_k} \Big|\left|\det \mathscr{J}_{\boldsymbol{\Phi}}(\xi)\right| - \left|\det \mathscr{J}_{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{c})\right|\Big| d\xi .\end{aligned}$$

Poiché $\boldsymbol{\Phi}$ è di classe C^1 la funzione $\xi \mapsto \left|\det \mathscr{J}_{\boldsymbol{\Phi}}(\xi)\right|$ è continua, quindi, fissato $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $\exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tale che, se $\xi \in S(\boldsymbol{c}, \delta_\varepsilon) \cap \Omega$, allora la funzione integranda è minore di ε. Poiché la successione $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tende a $\{\boldsymbol{c}\}$, definitivamente si ha $C_k \subseteq S(\boldsymbol{c}, \delta_\varepsilon)$, pertanto, definitivamente, si ha

$$\left|\frac{1}{\mu(C_k)} \int_{C_k} \left|\det \mathscr{J}_{\boldsymbol{\Phi}}(\xi)\right| d\xi - \left|\det \mathscr{J}_{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{c})\right|\right| < \frac{1}{\mu(C_k)} \int_{C_k} \varepsilon \, d\xi = \varepsilon .$$

Questo prova il lemma. ■

1.5.44 Lemma

Sia C un cubo compatto contenuto in Ω. Allora

$$\mu\big(\boldsymbol{\Phi}(C)\big) = \int_C \left|\det \mathscr{J}_{\boldsymbol{\Phi}}(\xi)\right| d\xi .$$

Dimostrazione. Dimostriamo il lemma per assurdo. Supponiamo quindi che esista un cubo compatto $C_0 \subseteq \Omega$, per cui la tesi è falsa, cioè tale che si ha $\int_{C_0} \left|\det \mathscr{J}_{\boldsymbol{\Phi}}(\xi)\right| d\xi = \lambda \mu\big(\boldsymbol{\Phi}(C_0)\big)$, con $\lambda \neq 1$.

Consideriamo il caso $\lambda > 1$.

Indichiamo con ℓ il lato di C_0; suddividiamo C_0 in 2^n cubi di lato $\ell/2$, a due a due con interno disgiunto. Indichiamo con B_j, $j = 1, 2, \ldots, 2^n$ questi cubi. Poiché i B_j hanno a due a due intersezione di misura nulla, per il lemma 1.5.37 anche i $\mathbf{\Phi}(B_j)$ hanno a due a due intersezione di misura nulla. Perciò si ha

$$\sum_{j=1}^{2^n}\int_{B_j}\left|\det \mathscr{J}_{\mathbf{\Phi}}(\xi)\right| d\xi = \int_{C_0}\left|\det \mathscr{J}_{\mathbf{\Phi}}(\xi)\right| d\xi = \lambda\mu\big(\mathbf{\Phi}(C_0)\big) = \sum_{j=1}^{2^n}\lambda\mu\big(\mathbf{\Phi}(B_j)\big).$$

Evidentemente non è possibile che ognuno degli addendi della somma a primo membro sia minore del corrispondente addendo della somma a ultimo membro, quindi, per almeno uno dei B_j, risulta

$$\int_{B_j}\left|\det \mathscr{J}_{\mathbf{\Phi}}(\xi)\right| d\xi \geq \lambda\mu\big(\mathbf{\Phi}(B_j)\big).$$

Indichiamo con C_1 uno dei cubi per cui vale questa disuguaglianza. Notiamo che $C_1 \subseteq C_0$ e il lato di C_1 è $\ell/2$.

Il ragionamento può essere ripetuto per trovare un cubo C_2, incluso in C_1 di lato $\ell/2^2$, tale che

$$\int_{C_2}\left|\det \mathscr{J}_{\mathbf{\Phi}}(\xi)\right| d\xi \geq \lambda\mu\big(\mathbf{\Phi}(C_2)\big).$$

Proseguendo costruiamo una successione di cubi C_k, di lato $\ell/2^k$, con $C_{k+1} \subseteq C_k$, e tali che

$$\int_{C_k}\left|\det \mathscr{J}_{\mathbf{\Phi}}(\xi)\right| d\xi \geq \lambda\mu\big(\mathbf{\Phi}(C_k)\big),$$

cioè

$$\frac{1}{\mu\big(\mathbf{\Phi}(C_k)\big)}\int_{C_k}\left|\det \mathscr{J}_{\mathbf{\Phi}}(\xi)\right| d\xi \geq \lambda.$$

Poiché i C_k sono compatti e $C_{k+1} \subseteq C_k$, $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} C_k$ non è vuota. Sia $\boldsymbol{c} \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C_k$. Il lato di C_k tende a 0 per $k \to +\infty$, quindi abbiamo una successione decrescente di cubi compatti che tende a $\{\boldsymbol{c}\}$, pertanto, per il lemma 1.5.43,

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{\mu\big(\mathbf{\Phi}(C_k)\big)}\int_{C_k}\left|\det \mathscr{J}_{\mathbf{\Phi}}(\xi)\right| d\xi = 1.$$

Ciò è assurdo perché il quoziente è sempre maggiore o uguale a λ, che è maggiore di 1.

Se $\lambda < 1$ la dimostrazione è analoga. ■

Dimostrazione del teorema 1.5.36. Sia $G \subseteq \Omega$ aperto. Per il teorema 1.2.28, risulta essere $G = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k$, con i C_k cubi compatti a due a due con interno disgiunto. Poiché l'intersezione di due di questi cubi ha misura nulla, per il lemma 1.5.37 anche gli insiemi $\mathbf{\Phi}(C_k)$ hanno a due a due intersezione di misura nulla. Pertanto, per il lemma 1.5.44,

$$\mu\big(\mathbf{\Phi}(G)\big) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mu\big(\mathbf{\Phi}(C_k)\big) = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_{C_k}\left|\det \mathscr{J}_{\mathbf{\Phi}}(\xi)\right| d\xi = \int_{G}\left|\det \mathscr{J}_{\mathbf{\Phi}}(\xi)\right| d\xi\,.$$

Sia $M \subseteq \Omega$ di tipo G_δ.

Supponiamo che esista $Q \subseteq \Omega$ compatto tale che $M \subseteq \operatorname{int} Q$. Per l'osservazione 1.2.31 esiste una famiglia $\{G_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ di aperti contenuti in $\operatorname{int} Q$ tale che $M = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} G_k$ e $G_{k+1} \subseteq G_k$. Poiché Q è compatto e Φ è continua, $\Phi(Q)$ è limitato, quindi $\Phi(G_0)$ è limitato, pertanto ha misura finita. Dal teorema 1.2.24, affermazione II si ottiene

$$\mu\big(\Phi(M)\big) = \lim_{k\to+\infty} \mu\big(\Phi(G_k)\big) = \lim_{k\to+\infty} \int_{G_k} \big|\det \mathcal{J}_\Phi(\xi)\big|\, d\xi = \lim_{k\to+\infty} \int_\Omega \big|\det \mathcal{J}_\Phi(\xi)\big| \chi_{G_k}(\xi)\, d\xi .$$

Le funzioni $\big|\det \mathcal{J}_\Phi\big|\chi_{G_k}$ sono maggiorate da $\big|\det \mathcal{J}_\Phi\big|\chi_{G_0}$, che è sommabile perché il suo integrale è $\mu\big(\Phi(G_0)\big)$. Pertanto, per il teorema della convergenza dominata 1.4.32,

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty} \int_\Omega \big|\det \mathcal{J}_\Phi(\xi)\big| \chi_{G_k}(\xi)\, d\xi &= \int_\Omega \lim_{k\to+\infty} \big|\det \mathcal{J}_\Phi(\xi)\big| \chi_{G_k}(\xi)\, d\xi = \\ &= \int_\Omega \big|\det \mathcal{J}_\Phi(\xi)\big| \chi_M(\xi)\, d\xi = \int_M \big|\det \mathcal{J}_\Phi(\xi)\big|\, d\xi .\end{aligned}$$

Sia ora M un qualunque sottoinsieme di Ω di tipo G_δ. Per $k \in \mathbb{N}^*$ poniamo

$$Q_k = \left\{ x \in \Omega \;\middle|\; d\big(x, \complement\Omega\big) \geq \frac{1}{k} \right\} \cap [-k, k]^n .$$

Ciascun Q_k è compatto, contenuto in Ω e

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \operatorname{int} Q_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \left(\left\{ x \in \Omega \;\middle|\; d\big(x, \complement\Omega\big) > \frac{1}{k} \right\} \cap \left]-k, k\right[^n \right) = \Omega .$$

Inoltre poniamo $M_k = M \cap \operatorname{int} Q_k$. Ciascun M_k è di tipo G_δ e contenuto nell'interno di un compatto di Ω, quindi, per quanto già dimostrato, $\mu\big(\Phi(M_k)\big) = \int_{M_k} \big|\det \mathcal{J}_\Phi(\xi)\big|\, d\xi$. Poiché $M_k \subseteq M_{k+1}$ si ha $\chi_{M_k} \leq \chi_{M_{k+1}}$, quindi, utilizzando il teorema di Beppo Levi 1.4.13,

$$\begin{aligned}&\mu\big(\Phi(M)\big) = \lim_{k\to+\infty} \mu\big(\Phi(M_k)\big) = \lim_{k\to+\infty} \int_{M_k} \big|\det \mathcal{J}_\Phi(\xi)\big|\, d\xi = \\ &= \lim_{k\to+\infty} \int_\Omega \big|\det \mathcal{J}_\Phi(\xi)\big| \chi_{M_k}(\xi)\, d\xi = \int_\Omega \big|\det \mathcal{J}_\Phi(\xi)\big| \chi_M(\xi)\, d\xi = \int_M \big|\det \mathcal{J}_\Phi(\xi)\big|\, d\xi .\end{aligned}$$

Sia infine A un sottoinsieme misurabile di Ω. Per il teorema 1.2.36 esiste $M \subseteq \mathbb{R}^n$, di tipo G_δ, tale che $A \subseteq M$ e, posto $H = M \setminus A$, si ha $\mu(H) = 0$. Possiamo inoltre scegliere $M \subseteq \Omega$. Per il lemma 1.5.37, $\mu\big(\Phi(H)\big) = 0$ e, per il teorema 1.4.11, $\int_H \big|\det \mathcal{J}_\Phi(\xi)\big|\, d\xi = 0$, pertanto

$$\begin{aligned}\mu\big(\Phi(A)\big) &= \mu\big(\Phi(M)\big) = \int_M \big|\det \mathcal{J}_\Phi(\xi)\big|\, d\xi = \\ &= \int_A \big|\det \mathcal{J}_\Phi(\xi)\big|\, d\xi + \int_H \big|\det \mathcal{J}_\Phi(\xi)\big|\, d\xi = \int_A \big|\det \mathcal{J}_\Phi(\xi)\big|\, d\xi .\end{aligned}$$

■

Il teorema 1.5.36 fornisce una formula per calcolare la misura del trasformato di un insieme mediante un diffeomorfismo. Da questa si ricava facilmente una formula per l'integrale di funzioni semplici e, approssimando funzioni misurabili con funzioni semplici, si ottiene un teorema generale per funzioni misurabili. Esaminiamo prima il caso delle funzioni misurabili non negative e poi quello delle funzioni sommabili.

1.5.45 Teorema (del cambiamento di variabili per funzioni non negative)

Siano $\Omega, O \subseteq \mathbb{R}^n$ aperti, $\Phi \colon \Omega \xrightarrow[\text{1-1}]{\text{su}} O$ diffeomorfismo, $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ tale che $A \subseteq O$ e $f \colon A \to [0, +\infty]$. La funzione f è misurabile se e solo se $f \circ \Phi \left|\det \mathscr{J}_\Phi\right|$ è misurabile e in tal caso si ha

$$\int_A f(x)\,dx = \int_{\Phi^{-1}(A)} f\big(\Phi(\xi)\big)\left|\det \mathscr{J}_\Phi(\xi)\right| d\xi\,.$$

Dimostrazione. Poiché $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, per il lemma 1.5.38, $\Phi^{-1}(A)$ è misurabile.

Sia $c \in \mathbb{R}$. Posto $B_c = \left\{\xi \in \Phi^{-1}(A) \,\middle|\, (f \circ \Phi)(\xi) < c\right\}$ e $A_c = \left\{x \in A \,\middle|\, f(x) < c\right\}$, si ha $\xi \in B_c$ se e solo se $\Phi(\xi) \in A_c$, cioè $A_c = \Phi(B_c)$. Quindi, per il teorema 1.5.36, A_c è misurabile se e solo se B_c è misurabile, perciò f è misurabile se e solo se $f \circ \Phi$ è misurabile. Inoltre la funzione $|\det \mathscr{J}_\Phi|$ è continua, quindi misurabile, e non si annulla, pertanto se $f \circ \Phi$ è misurabile, allora $f \circ \Phi\,|\det \mathscr{J}_\Phi|$ è misurabile, viceversa, se $f \circ \Phi\,|\det \mathscr{J}_\Phi|$ è misurabile, allora $f \circ \Phi = \big(f \circ \Phi\,|\det \mathscr{J}_\Phi|\big)/|\det \mathscr{J}_\Phi|$ è misurabile.

Sia $f = \sum_{j=1}^p \lambda_j \chi_{B_j}$, con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in [0, +\infty[$ e $B_1, B_2, \ldots, B_p$ sottoinsiemi misurabili di A. Si ha $(\chi_{B_j} \circ \Phi)(\xi) = 1$ se e solo se $\Phi(\xi) \in B_j$, cioè $\xi \in \Phi^{-1}(B_j)$, quindi $\chi_{B_j} \circ \Phi = \chi_{\Phi^{-1}(B_j)}$. Per il teorema 1.5.36, si ha

$$\begin{aligned}
\int_A f(x)\,dx &= \int_A \sum_{j=1}^p \lambda_j \chi_{B_j}(x)\,dx = \sum_{j=1}^p \lambda_j \int_A \chi_{B_j}(x)\,dx = \sum_{j=1}^p \lambda_j \mu(B_j) = \\
&= \sum_{j=1}^p \lambda_j \int_{\Phi^{-1}(B_j)} \left|\det \mathscr{J}_\Phi(\xi)\right| d\xi = \sum_{j=1}^p \lambda_j \int_{\Phi^{-1}(A)} \chi_{\Phi^{-1}(B_j)}(\xi)\left|\det \mathscr{J}_\Phi(\xi)\right| d\xi = \\
&= \int_{\Phi^{-1}(A)} \sum_{j=1}^p \lambda_j \chi_{B_j}\big(\Phi(\xi)\big)\left|\det \mathscr{J}_\Phi(\xi)\right| d\xi = \int_{\Phi^{-1}(A)} f\big(\Phi(\xi)\big)\left|\det \mathscr{J}_\Phi(\xi)\right| d\xi\,.
\end{aligned}$$

Sia ora f una qualunque funzione misurabile non negativa; per il teorema 1.3.29 esiste $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ successione di funzioni non negative semplici crescente e convergente a f. Allora, per il teorema di Beppo Levi 1.4.13, si ha

$$\begin{aligned}
\int_A f(x)\,dx &= \lim_{k \to +\infty} \int_A f_k(x)\,dx = \lim_{k \to +\infty} \int_{\Phi^{-1}(A)} f_k\big(\Phi(\xi)\big)\left|\det \mathscr{J}_\Phi(\xi)\right| d\xi = \\
&= \int_{\Phi^{-1}(A)} f\big(\Phi(\xi)\big)\left|\det \mathscr{J}_\Phi(\xi)\right| d\xi\,.
\end{aligned}$$

■

1.5.46 Teorema (del cambiamento di variabili per funzioni sommabili)

Siano $\Omega, O \subseteq \mathbb{R}^n$ aperti, $\Phi\colon \Omega \xrightarrow[\text{1-1}]{\text{su}} O$ diffeomorfismo, $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ tale che $A \subseteq O$ e $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$. La funzione f è sommabile se e solo se $f \circ \Phi |\det \mathscr{J}_\Phi|$ è sommabile e in tal caso si ha

$$\int_A f(x)\,dx = \int_{\Phi^{-1}(A)} f\big(\Phi(\xi)\big)\,\big|\det \mathscr{J}_\Phi(\xi)\big|\,d\xi\,.$$

Dimostrazione. Dal teorema di cambiamento di variabili per funzioni non negative 1.5.45 segue che, se f è sommabile, allora $f \circ \Phi |\det \mathscr{J}_\Phi|$ è misurabile e si ha

$$\int_{\Phi^{-1}(A)} \big|f\big(\Phi(\xi)\big)\big|\,\big|\det \mathscr{J}_\Phi(\xi)\big|\,d\xi = \int_A \big|f(x)\big|\,dx < +\infty\,,$$

quindi $f \circ \Phi |\det \mathscr{J}_\Phi|$ è sommabile. In modo analogo si prova il viceversa.

Inoltre, se f è sommabile, allora, per lo stesso teorema,

$$\begin{aligned}
\int_A f(x)\,dx &= \int_A f^+(x)\,dx - \int_A f^-(x)\,dx = \\
&= \int_{\Phi^{-1}(A)} f^+\big(\Phi(\xi)\big)\,\big|\det \mathscr{J}_\Phi(\xi)\big|\,d\xi - \int_{\Phi^{-1}(A)} f^-\big(\Phi(\xi)\big)\,\big|\det \mathscr{J}_\Phi(\xi)\big|\,d\xi = \\
&= \int_{\Phi^{-1}(A)} f\big(\Phi(\xi)\big)\,\big|\det \mathscr{J}_\Phi(\xi)\big|\,d\xi\,.
\end{aligned}$$

■

1.5.47 Esempio. Utilizziamo un cambiamento di variabili per semplificare l'utilizzo del teorema di Tonelli nel calcolo di

$$\int_A (x^2 + y^2)\,d(x,y)\,,$$

con $A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, |x| + |y| \le 1\big\}$, già studiato nell'esempio 1.5.22.

Con una opportuna rotazione l'insieme A (v. figura 1.5.4) può essere trasformato in un quadrato con i lati paralleli agli assi. In questo modo si semplifica l'applicazione del teorema di riduzione.

La rotazione di centro l'origine e di ampiezza $\pi/4$ in senso antiorario è la trasformazione lineare di matrice associata

$$\begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & \sin(\pi/4) \\ -\sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix};$$

quindi consideriamo il cambiamento di variabili

$$\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,, \qquad \Phi(\xi,\eta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\xi + \frac{1}{\sqrt{2}}\eta, -\frac{1}{\sqrt{2}}\xi + \frac{1}{\sqrt{2}}\eta\right).$$

La matrice jacobiana di Φ è, in ogni punto, la matrice associata alla trasformazione lineare, che ha determinante 1, poiché si tratta di una rotazione. Determiniamo $\Phi^{-1}(A)$. Si ha

$$\begin{aligned}
\Phi(\xi,\eta)\in A &\iff \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\xi+\frac{1}{\sqrt{2}}\eta\right|+\left|-\frac{1}{\sqrt{2}}\xi+\frac{1}{\sqrt{2}}\eta\right|\le 1\\
&\iff (|\xi+\eta|+|-\xi+\eta|)^2\le 2\\
&\iff (\xi+\eta)^2+2|\xi+\eta||-\xi+\eta|+(-\xi+\eta)^2\le 2\\
&\iff 2\xi^2+2\eta^2+2|-\xi^2+\eta^2|\le 2\\
&\iff |-\xi^2+\eta^2|\le 1-\xi^2-\eta^2\\
&\iff \xi^2+\eta^2-1\le -\xi^2+\eta^2\le 1-\xi^2-\eta^2\\
&\iff 2\xi^2\le 1 \wedge 2\eta^2\le 1\\
&\iff \xi\in\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\wedge \eta\in\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right].
\end{aligned}$$

Quindi

$$\Phi^{-1}(A)=\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\times\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$

Per i teoremi di cambiamento di variabili 1.5.45 e di Tonelli 1.5.14 si ha

$$\begin{aligned}
&\int_A (x^2+y^2)\,d(x,y)=\int_{[-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}]^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\xi+\frac{1}{\sqrt{2}}\eta\right)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\xi+\frac{1}{\sqrt{2}}\eta\right)^2 d(\xi,\eta)=\\
&=\int_{[-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}]^2}(\xi^2+\eta^2)\,d(\xi,\eta)=\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}}\left(\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}}(\xi^2+\eta^2)\,d\eta\right)d\xi=\\
&=\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}}\left[\xi^2\eta+\frac{1}{3}\eta^3\right]_{\eta=-1/\sqrt{2}}^{\eta=1/\sqrt{2}}d\xi=\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\xi^2+\frac{1}{6\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\xi^2+\frac{1}{6\sqrt{2}}\right)d\xi=\\
&=\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\,\xi^2+\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)d\xi=\left[\frac{\sqrt{2}}{3}\xi^3+\frac{1}{3\sqrt{2}}\xi\right]_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

◀

1.5.48 Esempio. Fissato $\alpha\in\mathbb{R}^+$, studiamo la sommabilità della funzione

$$g_2\colon A\to\mathbb{R},\qquad g_2(x)=\frac{1}{\|x\|^\alpha},$$

con

$$A=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\|\le 1\}\setminus\{0\}.$$

L'insieme A è differenza di due chiusi, quindi è misurabile, g_2 è continua, quindi misurabile, ed è positiva.

Per $k\in\mathbb{N}$ poniamo

$$A_k=\{x\in\mathbb{R}^n \mid 2^{-k-1}<\|x\|\le 2^{-k}\}.$$

Si verifica facilmente che gli A_k sono misurabili, a due a due disgiunti e la loro unione è A; pertanto, per il teorema di additività numerabile dell'integrale 1.4.18 si ha

$$\int_A \frac{1}{\|x\|^\alpha}\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{A_k} \frac{1}{\|x\|^\alpha}\,dx\,. \tag{1.5.6}$$

Poniamo

$$\Phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\,, \qquad \Phi(x) = 2^{-1}x\,.$$

Evidentemente Φ è un diffeomorfismo e, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, si ha $\det \mathcal{J}_\Phi(x) = 2^{-n}$. Inoltre, per $k \in \mathbb{N}^*$ si ha

$$\Phi^{-1}(A_k) = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid 2^{-k-1} < \|2^{-1}\xi\| \le 2^{-k}\} = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid 2^{-k} < \|\xi\| \le 2^{-k+1}\} = A_{k-1}\,.$$

Pertanto

$$\int_{A_k} \frac{1}{\|x\|^\alpha}\,dx = \int_{A_{k-1}} \frac{1}{\|2^{-1}\xi\|^\alpha} 2^{-n}\,d\xi = 2^{\alpha-n} \int_{A_{k-1}} \frac{1}{\|x\|^\alpha}\,dx\,,$$

quindi

$$\int_{A_k} \frac{1}{\|x\|^\alpha}\,dx = 2^{k(\alpha-n)} \int_{A_0} \frac{1}{\|x\|^\alpha}\,dx\,.$$

Dall'equazione (1.5.6) segue

$$\int_A \frac{1}{\|x\|^\alpha}\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(2^{k(\alpha-n)} \int_{A_0} \frac{1}{\|x\|^\alpha}\,dx\right) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{k(\alpha-n)}\right) \int_{A_0} \frac{1}{\|x\|^\alpha}\,dx\,.$$

Poiché g_2 è limitata in A_0 che è limitato, l'integrale è un numero reale. Pertanto g_2 è sommabile se e solo se $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{k(\alpha-n)} < +\infty$, che equivale a $2^{\alpha-n} < 1$, cioè $\alpha < n$. ◀

1.5.49 Esempio. Fissato $\alpha \in \mathbb{R}^+$, studiamo la sommabilità della funzione

$$g_3\colon A \to \mathbb{R}\,, \qquad g_3(x) = \frac{1}{\|x\|^\alpha}\,,$$

con

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \ge 1\}\,.$$

L'insieme A è chiuso, quindi è misurabile, g_3 è continua, quindi misurabile, ed è positiva.

Per $k \in \mathbb{N}$ poniamo

$$A_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 2^k \le \|x\| < 2^{k+1}\}\,.$$

Si verifica facilmente che gli A_k sono misurabili, a due a due disgiunti e la loro unione è A; pertanto, per il teorema di additività numerabile dell'integrale 1.4.18 si ha

$$\int_A \frac{1}{\|x\|^\alpha}\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{A_k} \frac{1}{\|x\|^\alpha}\,dx\,. \tag{1.5.7}$$

Poniamo

$$\Phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\,, \qquad \Phi(x) = 2x\,.$$

Evidentemente $\mathbf{\Phi}$ è un diffeomorfismo e, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, si ha $\det \mathscr{J}_{\mathbf{\Phi}}(\boldsymbol{x}) = 2^n$. Inoltre, per $k \in \mathbb{N}^*$ si ha

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(A_k) = \left\{\xi \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, 2^k \le \|2\xi\| < 2^{k+1}\right\} = \left\{\xi \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, 2^{k-1} < \|\xi\| \le 2^k\right\} = A_{k-1}\,.$$

Pertanto

$$\int_{A_k} \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|^\alpha}\, d\boldsymbol{x} = \int_{A_{k-1}} \frac{1}{\|2\xi\|^\alpha} 2^n\, d\xi = 2^{n-\alpha} \int_{A_{k-1}} \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|^\alpha}\, d\boldsymbol{x}\,,$$

quindi

$$\int_{A_k} \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|^\alpha}\, d\boldsymbol{x} = 2^{k(n-\alpha)} \int_{A_0} \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|^\alpha}\, d\boldsymbol{x}\,.$$

Dall'equazione (1.5.7) segue

$$\int_A \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|^\alpha}\, d\boldsymbol{x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(2^{k(n-\alpha)} \int_{A_0} \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|^\alpha}\, d\boldsymbol{x}\right) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{k(n-\alpha)}\right) \int_{A_0} \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|^\alpha}\, d\boldsymbol{x}\,.$$

Poiché g_3 è limitata in A_0 che è limitato, l'integrale è un numero reale. Pertanto g_3 è sommabile se e solo se $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{k(n-\alpha)} < +\infty$, che equivale a $2^{n-\alpha} < 1$, cioè $\alpha > n$. ◀

1.5.50 Esempio (coordinate polari). Un punto del piano può essere individuato conoscendo la sua distanza dall'origine e la direzione della semiretta che esce dall'origine e passa per il punto. Tale direzione può essere individuata dall'angolo che la semiretta forma con il semiasse positivo delle ascisse, ruotando in senso antiorario a partire dal semiasse. Indichiamo con ρ la distanza e con θ la misura in radianti dell'angolo (v. figura 1.5.10).

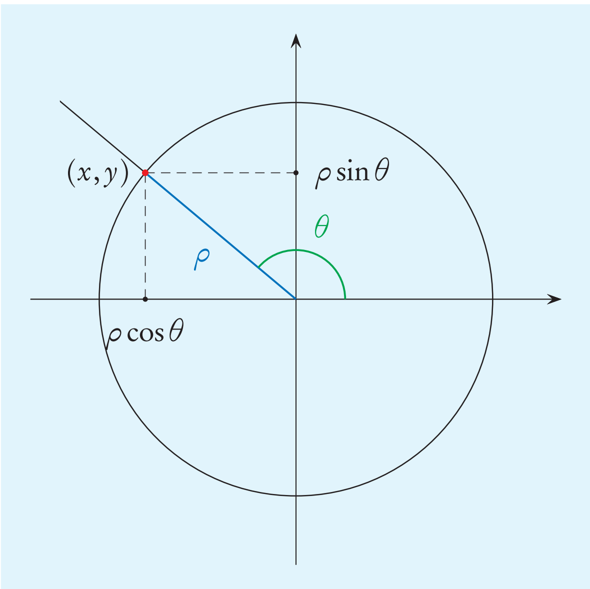


Figura 1.5.10
Il punto (x,y) del piano cartesiano ha coordinate polari (ρ,θ), dove ρ è la distanza del punto dall'origine e θ è la misura in radianti dell'angolo tra il semiasse positivo delle ascisse e la semiretta uscente dall'origine e passante per il punto, procedendo in senso antiorario.

Il punto del piano individuato dalla distanza ρ e dall'angolo di ampiezza θ ha coordinate cartesiane $(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. Pertanto le coordinate cartesiane sono collegate a quelle polari dalle equazioni

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\,, \\ y = \rho\sin\theta\,. \end{cases}$$

Quindi il cambiamento di coordinate è la funzione $(\rho,\theta)\mapsto(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$. Poiché ρ è una distanza è maggiore o uguale a 0; inoltre θ è la misura in radianti di un angolo, quindi $\theta\in[0,2\pi[$. Non possiamo scegliere come dominio $[0,+\infty[\times[0,2\pi[$ sia perché non è un insieme aperto, sia perché la funzione ristretta a tale insieme non è iniettiva; infatti se $\rho=0$, allora qualunque sia θ il punto corrispondente è $(0,0)$. Definiamo quindi il cambiamento di variabili sull'aperto $\mathbb{R}^+\times]0,2\pi[$. In questo modo l'immagine del cambiamento di variabili non è $\mathbb{R}^2$, perché non contiene l'origine e tutti i punti del semiasse positivo delle ascisse. Tale insieme ha misura nulla, quindi per il calcolo di integrali è ininfluente.

Poniamo quindi

$$\boldsymbol{\Phi}\colon\mathbb{R}^+\times]0,2\pi[\to\mathbb{R}^2,\qquad \boldsymbol{\Phi}(\rho,\theta)=(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta).$$

Dalle considerazioni geometriche segue che $\boldsymbol{\Phi}$ è iniettiva; ciò può anche essere provato per via analitica. Siano $(\rho_1,\theta_1),(\rho_2,\theta_2)\in\mathbb{R}^+\times]0,2\pi[$ tali che $\boldsymbol{\Phi}(\rho_1,\theta_1)=\boldsymbol{\Phi}(\rho_2,\theta_2)$, cioè $\rho_1\cos\theta_1=\rho_2\cos\theta_2$ e $\rho_1\sin\theta_1=\rho_2\sin\theta_2$. Pertanto

$$\rho_1^2\cos^2\theta_1+\rho_1^2\sin^2\theta_1=\rho_2^2\cos^2\theta_2+\rho_2^2\sin^2\theta_2,$$

quindi $\rho_1^2=\rho_2^2$, da cui segue $\rho_1=\rho_2$, perché $\rho_1,\rho_2\in\mathbb{R}^+$. Allora si ha $\cos\theta_1=\cos\theta_2$ e $\sin\theta_1=\sin\theta_2$, quindi $\theta_1=\theta_2$, perché $\theta_1,\theta_2\in]0,2\pi[$. Perciò $\boldsymbol{\Phi}$ è iniettiva.

Dalle considerazioni geometriche segue che l'immagine di $\boldsymbol{\Phi}$ è

$$O=\mathbb{R}^2\setminus\bigl\{(x,0)\bigm| x\in[0,+\infty[\bigr\}.$$

Proviamo questa uguaglianza anche per via analitica. Evidentemente l'immagine è inclusa in O. Sia $(x,y)\in O$; cerchiamo $(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^+\times]0,2\pi[$ tale che $(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=(x,y)$. Deve essere

$$x^2+y^2=\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta=\rho^2,$$

quindi $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$. Pertanto risulta

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=(\cos\theta,\sin\theta). \tag{1.5.8}$$

Poiché $\bigl(x/\sqrt{x^2+y^2},y/\sqrt{x^2+y^2}\bigr)$ appartiene alla circonferenza unitaria, $\exists\theta\in[0,2\pi[$ che verifica questa equazione. Se fosse $\theta=0$, si avrebbe

$$\begin{aligned} x&=\sqrt{x^2+y^2}\,\cos 0=\sqrt{x^2+y^2}>0,\\ y&=\sqrt{x^2+y^2}\,\sin 0=0,\end{aligned}$$

contro l'ipotesi che sia $(x,y)\in O$. Pertanto $\theta\in]0,2\pi[$.

Quindi $\boldsymbol{\Phi}$ è biunivoca da $\mathbb{R}^+\times]0,2\pi[$ su $\mathbb{R}^2\setminus\bigl\{(x,0)\bigm| x\in[0,+\infty[\bigr\}$.

Evidentemente $\boldsymbol{\Phi}$ è di classe C^1, calcoliamo il determinante della sua matrice jacobiana. Si ha, $\forall(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^+\times]0,2\pi[$,

$$\det\mathscr{J}_{\boldsymbol{\Phi}}(\rho,\theta)=\det\begin{pmatrix}\cos\theta & -\rho\sin\theta\\ \sin\theta & \rho\cos\theta\end{pmatrix}=\rho\cos^2\theta+\rho\sin^2\theta=\rho.$$

Pertanto, $\forall(\rho,\theta)\in\mathscr{D}(\boldsymbol{\Phi})$, $\det\mathscr{J}_{\boldsymbol{\Phi}}(\rho,\theta)\neq 0$, quindi $\boldsymbol{\Phi}$ è un diffeomorfismo. ◀

1.5.51 Esempio. Calcoliamo

$$\int_A x\,d(x,y),$$

con

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2\leq 4, x+y\leq 0\right\}.$$

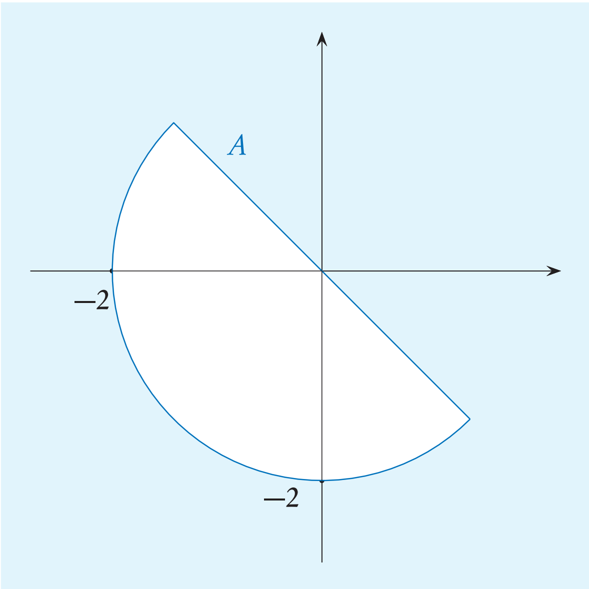


Figura 1.5.11
Il dominio di integrazione dell'esempio 1.5.51.

L'insieme A è chiuso, quindi è misurabile, la funzione integranda è continua, quindi misurabile. Inoltre la funzione è limitata in un insieme limitato, quindi è sommabile.

Effettuiamo un cambiamento di variabili utilizzando le coordinate polari introdotte nell'esempio 1.5.50. L'insieme A non è contenuto nell'immagine del cambiamento di variabili, perché l'origine appartiene ad A ma non all'immagine del cambiamento di variabili. Tuttavia tale immagine differisce da $\mathbb{R}^2$ per un insieme di misura nulla, quindi l'integrale in A coincide con l'integrale in A intersecato tale immagine. Posto quindi

$$\mathbf{\Phi}\colon \mathbb{R}^+\times\,]0,2\pi[\,\to\mathbb{R}^2, \qquad \mathbf{\Phi}(\rho,\theta)=(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta).$$

cioè

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta, \end{cases}$$

si ha

$$\int_A x\,d(x,y)=\int_{\mathbf{\Phi}^{-1}(A)}\rho\cos\theta\left|\det\mathscr{J}_{\mathbf{\Phi}}(\rho,\theta)\right|d(\rho,\theta)=\int_{\mathbf{\Phi}^{-1}(A)}\rho^2\cos\theta\,d(\rho,\theta).$$

Determiniamo $\mathbf{\Phi}^{-1}(A)$. Sia $(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^+\times\,]0,2\pi[$ tale che $\mathbf{\Phi}(\rho,\theta)\in A$. Ciò equivale a $\rho^2\leq 4$ e $\rho\cos\theta\leq\rho\sin\theta$. Quindi deve essere $\rho\in\,]0,2]$ e $\cos\theta\leq\sin\theta$. Si verifica facilmente che $\cos\theta\leq\sin\theta$ se e solo se $\theta\in[\pi/4,5\pi/4]$, pertanto

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(A)=\,]0,2]\times[\pi/4,5\pi/4].$$

Quindi, per il teorema di Fubini 1.5.28, si ha

$$\int_A x\,d(x,y) = \int_B \rho^2 \cos\theta\, d(\rho,\theta) = \int_0^2 \left(\int_{\pi/4}^{5\pi/4} \rho^2 \cos\theta\, d\theta \right) d\rho = \int_0^2 \left[\rho^2 \sin\theta\right]_{\theta=\pi/4}^{\theta=5\pi/4} d\rho =$$
$$= \int_0^2 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\rho^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\rho^2 \right) d\rho = -\int_0^2 \sqrt{2}\,\rho^2\, d\rho = -\left[\frac{\sqrt{2}}{3}\rho^3\right]_0^2 = -\frac{8\sqrt{2}}{3}.$$ ◀

1.5.52 Esempio. Utilizziamo le coordinate polari per calcolare un integrale in $\mathbb{R}$ che non può essere calcolato mediante il teorema fondamentale del calcolo integrale, perché la funzione non ammette primitive che si possano esprimere mediante funzioni elementari.

Poniamo

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx\,.$$

Per l'osservazione 1.5.19 si ha

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-y^2}\,dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, d(x,y)\,.$$

Passiamo in coordinate polari, tenendo conto di quanto osservato nell'esempio 1.5.51 sul fatto che ciò è possibile anche se l'insieme di integrazione non è contenuto nell'immagine del cambiamento di variabili. Si ottiene, utilizzando il teorema di Tonelli 1.5.17,

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}^+\times\,]0,2\pi[} e^{-\rho^2}\rho\, d(\rho,\theta) = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{2\pi} e^{-\rho^2} \rho\, d\theta \right) d\rho = \int_0^{+\infty} 2\pi e^{-\rho^2}\rho\, d\rho =$$
$$= -\pi \int_0^{+\infty} \frac{d e^{-\rho^2}}{d\rho}\, d\rho = -\pi\left[e^{-\rho^2}\right]_0^{+\infty} = \pi\,.$$

Pertanto $I = \sqrt{\pi}\,.$ ◀

1.5.53 Esempio (coordinate cilindriche). Un cambiamento di variabile utile per il calcolo di integrali in sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ si ottiene considerando le coordinate polari nel piano (x,y) (v. esempio 1.5.50) e lasciando invariata l'altra variabile.

Poniamo quindi

$$\mathbf{\Phi}\colon \mathbb{R}^+ \times\,]0,2\pi[\, \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\,, \qquad \mathbf{\Phi}(\rho,\theta,t) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, t)\,.$$

Dalle considerazioni fatte sulle coordinate polari segue immediatamente che $\mathbf{\Phi}$ è biunivoca dal suo dominio a

$$O = \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ (x,0,z) \,\middle|\, x \in [0,+\infty[,\ z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Inoltre si ha, $\forall (\rho,\theta,t) \in \mathbb{R}^+ \times\,]0,2\pi[\, \times \mathbb{R}$,

$$\det \mathscr{J}_{\mathbf{\Phi}}(\rho,\theta,t) = \det \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix} = \rho\,.$$

Pertanto, $\forall (\rho,\theta,t) \in \mathscr{D}(\mathbf{\Phi})$, $\det \mathscr{J}_{\mathbf{\Phi}}(\rho,\theta,t) \neq 0$, quindi $\mathbf{\Phi}$ è un diffeomorfismo. ◀

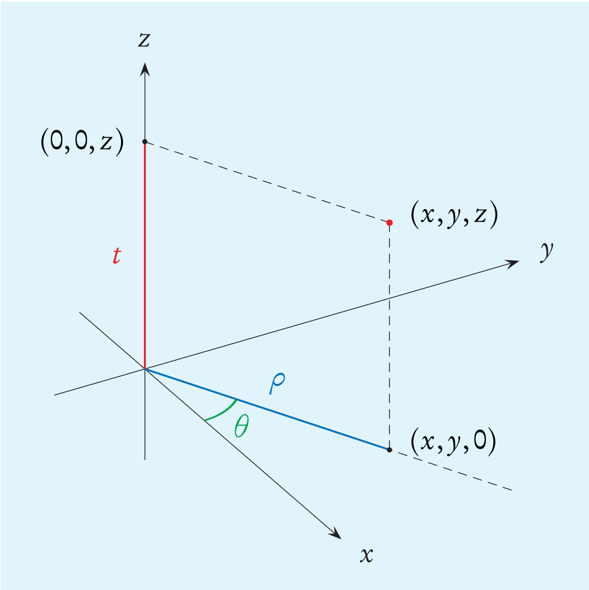


Figura 1.5.12
Il punto (x,y,z) del piano cartesiano ha coordinate cilindriche (ρ,θ,t), dove ρ è la distanza del punto dall'asse z e θ è la misura in radianti dell'angolo tra il semiasse positivo delle x e la semiretta uscente dall'origine e passante per la proiezione del punto sul piano (x,y), procedendo in senso antiorario, e t coincide con z.

1.5.54 Esempio. Calcoliamo la misura di

$$A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2\leq z^2+1,\ |z|\leq 3\right\}.$$

L'insieme A è chiuso, quindi è misurabile.
Per calcolare $\mu(A)$ possiamo calcolare $\int_A 1\,d(x,y,z)$.

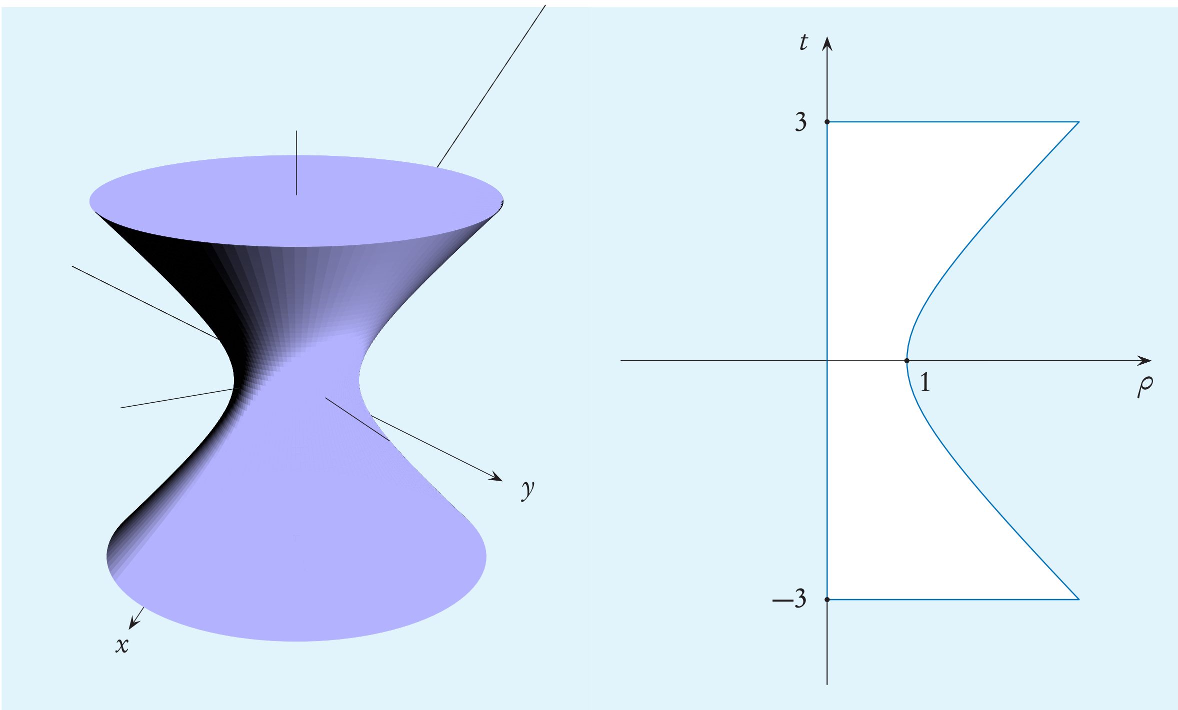


Figura 1.5.13
Il dominio di integrazione dell'esempio 1.5.54 (a sinistra) e l'insieme C ottenuto dopo l'applicazione del teorema di Tonelli (a destra).

Effettuiamo un cambiamento di variabili utilizzando le coordinate cilindriche introdotte nell'esempio 1.5.53. Poniamo quindi

$$\Phi\colon \mathbb{R}^+ \times \left]0,2\pi\right[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad \Phi(\rho,\theta,t) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, t).$$

Si ha $\Phi(\rho,\theta,t) \in A$, se e solo se $\rho^2\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta \le t^2+1$ e $|t| \le 3$, cioè $\rho^2 \le t^2+1$ e $-3 \le t \le 3$. Pertanto

$$\Phi^{-1}(A) = \left\{(\rho,\theta,t) \in \mathbb{R}^+ \times \left]0,2\pi\right[\times \mathbb{R} \,\middle|\, \rho \le \sqrt{t^2+1},\, -3 \le t \le 3\right\}.$$

Indicato con B tale insieme, per il teorema del cambiamento di variabili per funzioni non negative 1.5.45, si ha

$$\int_A 1\, d(x,y,z) = \int_B \rho\, d(\rho,\theta,t).$$

Calcoliamo questo integrale utilizzando il teorema di Tonelli 1.5.17. Dalla definizione di B risulta evidente che, fissati ρ e t, è semplice determinare i θ tali che $(\rho,\theta,t) \in B$. Infatti se $t \in [-3,3]$ e $\rho \in \left]0,\sqrt{t^2+1}\right]$, allora $(\rho,\theta,t) \in B$ se e solo se $\theta \in \left]0,2\pi\right[$, mentre se t e ρ non verificano tali disuguaglianze, allora, qualunque sia θ, $(\rho,\theta,t) \notin B$. Pertanto, posto

$$C = \left\{(\rho,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \,\middle|\, \rho \le \sqrt{t^2+1},\, -3 \le t \le 3\right\},$$

si ha

$$\int_B \rho\, d(\rho,\theta,t) = \int_C \left(\int_0^{2\pi} \rho\, d\theta\right) d(\rho,t) = 2\pi \int_C \rho\, d(\rho,t).$$

Per calcolare questo integrale utilizziamo nuovamente il teorema di Tonelli. Si ha $(\rho,t) \in C$ se e solo se $t \in [-3,3]$ e $\rho \in \left]0,\sqrt{1+t^2}\right]$, pertanto

$$C_t = \begin{cases} \left]0,\sqrt{1+t^2}\right], & \text{se } t \in [-3,3], \\ \varnothing, & \text{se } t \notin [-3,3]. \end{cases}$$

Quindi

$$2\pi \int_C \rho\, d(\rho,t) = 2\pi \int_{-3}^{3} \left(\int_0^{\sqrt{t^2+1}} \rho\, d\rho\right) dt = 2\pi \int_{-3}^{3} \left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_0^{\sqrt{t^2+1}} dt = \pi \int_{-3}^{3} (t^2+1)\, dt =$$
$$= \pi\left[\frac{1}{3}t^3 + t\right]_{-3}^{3} = \pi(9+3+9+3) = 24\pi. \qquad \blacktriangleleft$$

1.5.55 Esempio. Calcoliamo

$$\int_A (x^2+y^2)\, d(x,y,z),$$

con

$$A\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2 \le 4,\ x^2+y^2+z^2 \le 9\right\}.$$

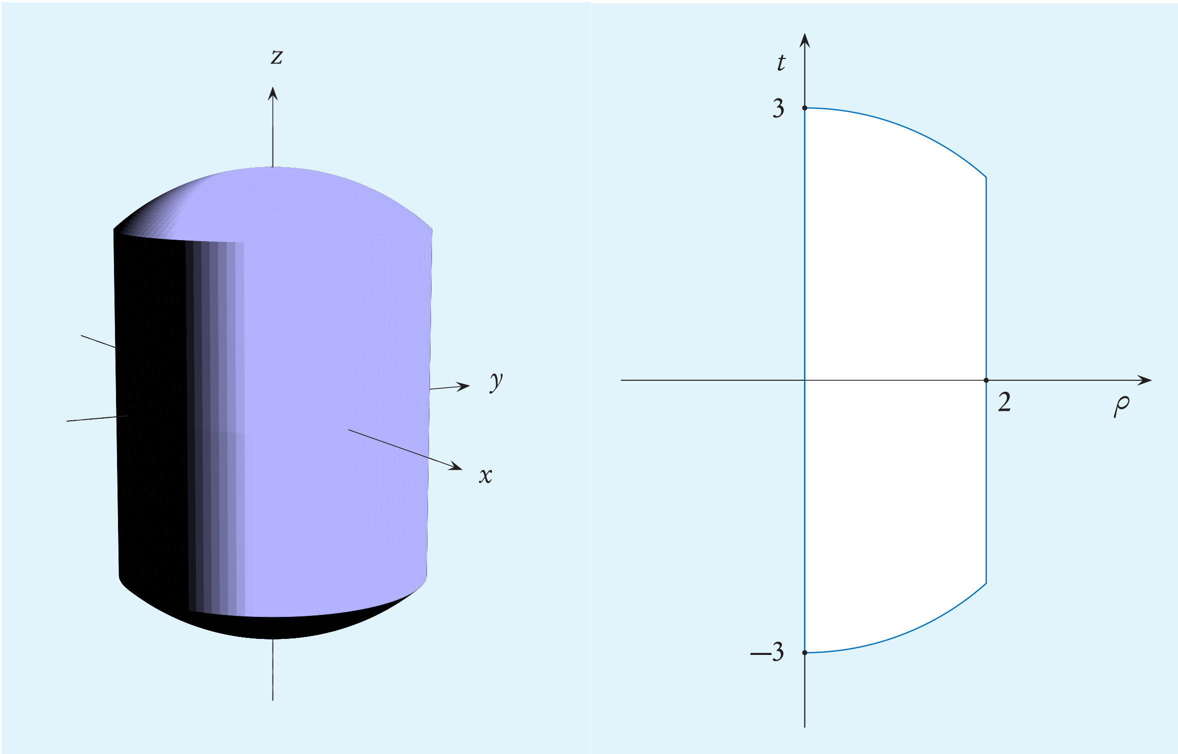


Figura 1.5.14
Il dominio di integrazione dell'esempio 1.5.55 (a sinistra) e l'insieme C ottenuto dopo l'applicazione del teorema di Tonelli (a destra).

L'insieme A è chiuso, quindi è misurabile, la funzione integranda è continua, quindi è misurabile, ed è a valori non negativi.

Effettuiamo un cambiamento di variabili utilizzando le coordinate cilindriche introdotte nell'esempio 1.5.53. Poniamo quindi

$$\mathbf{\Phi}\colon \mathbb{R}^+ \times \,]0,2\pi[\, \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad \mathbf{\Phi}(\rho,\theta,t) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, t).$$

Si ha $\mathbf{\Phi}(\rho,\theta,t) \in A$, se e solo se $\rho^2\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta \leq 4$ e $\rho^2\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta + t^2 \leq 9$, cioè $\rho^2 \leq 4$ e $\rho^2 + t^2 \leq 9$. Pertanto

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(A) = \left\{(\rho,\theta,t) \in \mathbb{R}^+ \times \,]0,2\pi[\, \times \mathbb{R} \,\middle|\, \rho \leq 2,\ \rho^2 + t^2 \leq 9\right\}.$$

Indicato con B tale insieme si ha

$$\int_A (x^2+y^2)\, d(x,y,z) = \int_B \rho^2 \rho \, d(\rho,\theta,t).$$

Calcoliamo questo integrale utilizzando il teorema di Tonelli 1.5.17. Dalla definizione di B risulta evidente che, fissati ρ e t è semplice determinare i θ tali che $(\rho,\theta,t) \in B$. Infatti se $\rho \in \,]0,2]$ e $\rho^2 + t^2 \leq 9$, allora $(\rho,\theta,t) \in B$ se e solo se $\theta \in \,]0,2\pi[$, mentre se ρ e t non verificano tali disuguaglianze, allora, qualunque sia θ, $(\rho,\theta,t) \notin B$. Pertanto, posto

$$C = \left\{(\rho,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \,\middle|\, \rho \leq 2,\ \rho^2 + t^2 \leq 9\right\},$$

si ha

$$\int_B \rho^3\, d(\rho,\theta,t) = \int_C \left(\int_0^{2\pi} \rho^3\, d\theta\right) d(\rho,t) = 2\pi \int_C \rho^3\, d(\rho,t).$$

Per calcolare questo integrale utilizziamo nuovamente il teorema di Tonelli. Si ha $(\rho,t)\in C$ se e solo se $\rho\in\,]0,2]$ e $\rho^2+t^2\le 9$, cioè $-\sqrt{9-\rho^2}\le t\le\sqrt{9-\rho^2}$, pertanto

$$C_\rho = \begin{cases} [-\sqrt{9-\rho^2}, \sqrt{9-\rho^2}], & \text{se } \rho\in\,]0,2]\,, \\ \varnothing, & \text{se } \rho\notin\,]0,2]\,. \end{cases}$$

Quindi

$$2\pi\int_C \rho^3\, d(\rho,t) = 2\pi \int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{9-\rho^2}}^{\sqrt{9-\rho^2}} \rho^3\, dt\right) d\rho = 4\pi \int_0^2 \rho^3 \sqrt{9-\rho^2}\, d\rho\,.$$

Effettuiamo la sostituzione $s=\sqrt{9-\rho^2}$, da cui si ricava $\rho=\varphi(s)=\sqrt{9-s^2}$, $\varphi'(s)=-s/\sqrt{9-s^2}$. Quindi si ha

$$4\pi\int_0^2 \rho^3\sqrt{9-\rho^2}\, d\rho = 4\pi \int_3^{\sqrt5} (9-s^2)^{3/2} s\, \frac{-s}{\sqrt{9-s^2}}\, ds = 4\pi \int_{\sqrt5}^3 (9s^2-s^4)\, ds =$$

$$= 4\pi \left[3s^3 - \frac{1}{5}s^5\right]_{\sqrt5}^3 = 4\pi\left(3^4 - \frac{3^5}{5} - 15\sqrt5 + 5\sqrt5\right) = 4\pi\left(\frac{162}{5} - 10\sqrt5\right).$$ ◀

1.5.56 Esempio (coordinate sferiche). Come nel caso del piano (v. esempio 1.5.50), un punto dello spazio può essere individuato conoscendo la sua distanza dall'origine e la direzione della semiretta che esce dall'origine e passa per il punto. Indichiamo con ρ la distanza del punto (x,y,z) dall'origine.

Per individuare una direzione nello spazio sono necessari due angoli. Ad esempio una semiretta è individuata conoscendo il semipiano di origine l'asse z che la contiene e l'angolo, contenuto in tale semipiano, tra la semiretta e il semiasse positivo delle z.

Indichiamo con con θ la misura in radianti dell'angolo convesso formato dal semiasse positivo delle z e dalla semiretta uscente dall'origine e passante per il punto.

Per individuare un semipiano di origine l'asse z è sufficiente conoscere la sua intersezione con il piano (x,y), che è la semiretta uscente dall'origine passante per la proiezione del punto (x,y,z) su tale semipiano, cioè per il punto $(x,y,0)$. Indichiamo quindi con φ la misura in radianti dell'angolo formato dal semipiano di origine l'asse delle z contenente il semiasse positivo delle x e dal semipiano di origine l'asse delle z contenente il punto.

Se (x,y,z) dista ρ dall'origine ed è contenuto in una semiretta uscente dall'origine e che forma un angolo di ampiezza θ con il semiasse positivo delle z, allora $z=\rho\cos\theta$. Inoltre la proiezione del punto sul piano (x,y) dista $\rho\sin\theta$ dall'origine, quindi, considerando le coordinate polari nel piano (x,y), risulta $x=\rho\sin\theta\cos\varphi$ e $y=\rho\sin\theta\sin\varphi$.

Poniamo quindi

$$\boldsymbol{\Phi}\colon \mathbb{R}^+\times\,]0,\pi[\,\times\,]0,2\pi[\,\to\mathbb{R}^2, \qquad \boldsymbol{\Phi}(\rho,\theta,\varphi) = (\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta).$$

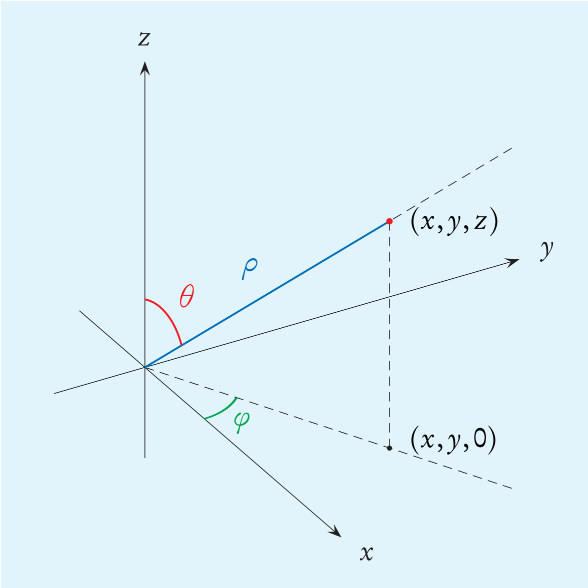


Figura 1.5.15
Il punto (x,y,z) del piano cartesiano ha coordinate sferiche (ρ,θ,φ), dove ρ è la distanza del punto dall'origine, θ è la misura in radianti dell'angolo tra il semiasse positivo delle z e la semiretta uscente dall'origine e passante per il punto e φ è la misura in radianti dell'angolo tra il semiasse positivo delle x e la semiretta uscente dall'origine e passante per la proiezione del punto sul piano (x,y), procedendo in senso antiorario.

Le considerazioni geometriche fatte assicurano che $\mathbf{\Phi}$ è iniettiva; ciò può anche essere provato per via analitica. Siano $(\rho_1,\theta_1,\varphi_1),(\rho_2,\theta_2,\varphi_2) \in \mathbb{R}^+ \times]0,\pi[\times]0,2\pi[$ tali che $\mathbf{\Phi}(\rho_1,\theta_1,\varphi_1) = \mathbf{\Phi}(\rho_2,\theta_2,\varphi_2)$, cioè

$$\begin{cases} \rho_1 \sin\theta_1 \cos\varphi_1 = \rho_2 \sin\theta_2 \cos\varphi_2\,, \\ \rho_1 \sin\theta_1 \sin\varphi_1 = \rho_2 \sin\theta_2 \sin\varphi_2\,, \\ \rho_1 \cos\theta_1 = \rho_2 \cos\theta_2\,. \end{cases}$$

Pertanto

$$\rho_1^2 \sin^2\theta_1 \cos^2\varphi_1 + \rho_1^2 \sin^2\theta_1 \sin^2\varphi_1 + \rho_1^2 \cos^2\theta_1 = \\ = \rho_2^2 \sin^2\theta_2 \cos^2\varphi_2 + \rho_2^2 \sin^2\theta_2 \sin^2\varphi_2 + \rho_2^2 \cos^2\theta_2\,,$$

quindi $\rho_1^2 = \rho_2^2$, da cui segue $\rho_1 = \rho_2$, perché $\rho_1,\rho_2 \in \mathbb{R}^+$. Allora si ha $\cos\theta_1 = \cos\theta_2$, pertanto $\theta_1 = \theta_2$, perché $\theta_1,\theta_2 \in]0,\pi[$ e la funzione coseno è iniettiva in tale intervallo. Da qui segue $\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2$ e $\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2$, quindi $\varphi_1 = \varphi_2$, perché $\varphi_1,\varphi_2 \in]0,2\pi[$. Perciò $\mathbf{\Phi}$ è iniettiva.

Dalle considerazioni geometriche segue che l'immagine di $\mathbf{\Phi}$ è

$$O = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z) \,|\, x \in [0,+\infty[,\ z \in \mathbb{R}\}.$$

Proviamo questa uguaglianza anche per via analitica. Evidentemente l'immagine è inclusa in O. Sia $(x,y,z) \in O$; determiniamo $(\rho,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^+ \times]0,\pi[\times]0,2\pi[$ tale che risulti $(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta) = (x,y,z)$. Deve essere

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + \rho^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi + \rho^2 \cos^2\theta = \rho^2\,,$$

quindi $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Pertanto risulta

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)\,. \tag{1.5.9}$$

Deve quindi essere $\theta = \arccos\left(z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$. Notiamo che, poiché $(x,y,z) \in O$, non può essere $x=y=0$, pertanto $z/\sqrt{x^2+y^2+z^2} \neq \pm 1$, quindi $\theta \neq 0$ e $\theta \neq \pi$, cioè $\theta \in \,]0,\pi[$. Da qui segue

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}} = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}},$$

quindi dall'equazione (1.5.9) segue

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}}\cos\varphi,$$
$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}}\cos\varphi,$$

cioè $\cos\varphi = x/\sqrt{x^2+y^2}$, $\sin\varphi = y/\sqrt{x^2+y^2}$. Poiché $\left(x/\sqrt{x^2+y^2}, y/\sqrt{x^2+y^2}\right)$ appartiene alla circonferenza unitaria, $\exists\varphi \in [0,2\pi[$ che verifica queste equazioni. Se fosse $\varphi = 0$, si avrebbe $x = \sqrt{x^2+y^2}\,\cos 0 = \sqrt{x^2+y^2} > 0$ e $y = \sqrt{x^2+y^2}\,\sin 0 = 0$, contro l'ipotesi che sia $(x,y,z) \in O$. Pertanto $\varphi \in \,]0,2\pi[$.

Quindi $\mathbf{\Phi}$ è biunivoca da $\mathbb{R}^+ \times \,]0,\pi[\, \times \,]0,2\pi[$ su $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z) \mid x \in [0,+\infty[\}$.

Evidentemente $\mathbf{\Phi}$ è di classe C^1, calcoliamo il determinante della matrice jacobiana. Si ha, $\forall(\rho,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \,]0,\pi[\, \times \,]0,2\pi[$,

$$\det \mathscr{J}_{\mathbf{\Phi}}(\rho,\theta,\varphi) = \det\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \cos\theta\det\begin{pmatrix} \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \end{pmatrix} + \rho\sin\theta\det\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \end{pmatrix} =$$
$$= \cos\theta\,\rho\cos\theta\,\rho\sin\theta\det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} + \rho\sin\theta\,\sin\theta\,\rho\sin\theta\det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} =$$
$$= \rho^2\sin\theta\cos^2\theta + \rho\sin^3\theta = \rho^2\sin\theta.$$

Pertanto, $\forall(\rho,\theta,\varphi) \in \mathscr{D}(\mathbf{\Phi})$, $\det\mathscr{J}_{\mathbf{\Phi}}(\rho,\theta,\varphi) \neq 0$, quindi $\mathbf{\Phi}$ è un diffeomorfismo. ◀

1.5.57 Esempio. Calcoliamo la misura di

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 16,\ z \geq \sqrt{x^2+y^2}\right\}.$$

L'insieme A è chiuso, quindi è misurabile.

Per calcolare $\mu(A)$ possiamo calcolare $\int_A 1\,d(x,y,z)$.

Effettuiamo un cambiamento di variabili utilizzando le coordinate sferiche introdotte nell'esempio 1.5.56. Poniamo quindi

$$\mathbf{\Phi}\colon \mathbb{R}^+ \times \,]0,\pi[\, \times \,]0,2\pi[\, \to \mathbb{R}^3, \qquad \mathbf{\Phi}(\rho,\theta,\varphi) = (\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta).$$

Si ha $\mathbf{\Phi}(\rho,\theta,\varphi)\in A$, se e solo se $\rho^2\le 16$ e $\rho\cos\theta\ge\sqrt{\rho^2\sin^2\theta\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi}$, cioè $\rho\le 4$ e $\rho\cos\theta\ge\sqrt{\rho^2\sin^2\theta}$. Si ha $\sin\theta>0$ e $\rho>0$, quindi la seconda condizione equivale a $\rho\cos\theta\ge\rho\sin\theta$, cioè a $\cot\theta\ge 1$, pertanto è verificata per $\theta\le\pi/4$. Pertanto

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(A)=\left]0,4\right]\times\left]0,\frac{\pi}{4}\right]\times\left]0,2\pi\right[.$$

Indicato con B tale insieme, per il teorema di cambiamento di variabili 1.5.45, si ha

$$\int_A 1\,d(x,y,z)=\int_B \rho^2\sin\theta\,d(\rho,\theta,\varphi).$$

Quindi, applicando due volte il teorema di Tonelli 1.5.17, si ottiene

$$\begin{aligned}\int_B \rho^2\sin\theta\,d(\rho,\theta,\varphi)&=\int_0^4\left(\int_0^{\pi/4}\left(\int_0^{2\pi}\rho^2\sin\theta\,d\varphi\right)d\theta\right)d\rho=\\&=\int_0^4\left(\int_0^{\pi/4}2\pi\rho^2\sin\theta\,d\theta\right)d\rho=\int_0^4\left[-2\pi\rho^2\cos\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/4}d\rho=\\&=\int_0^4(2-\sqrt{2})\pi\rho^2\,d\rho=\left[(2-\sqrt{2})\pi\frac{1}{3}\rho^3\right]_0^4=\frac{64(2-\sqrt{2})}{3}\pi.\end{aligned}$$ ◀

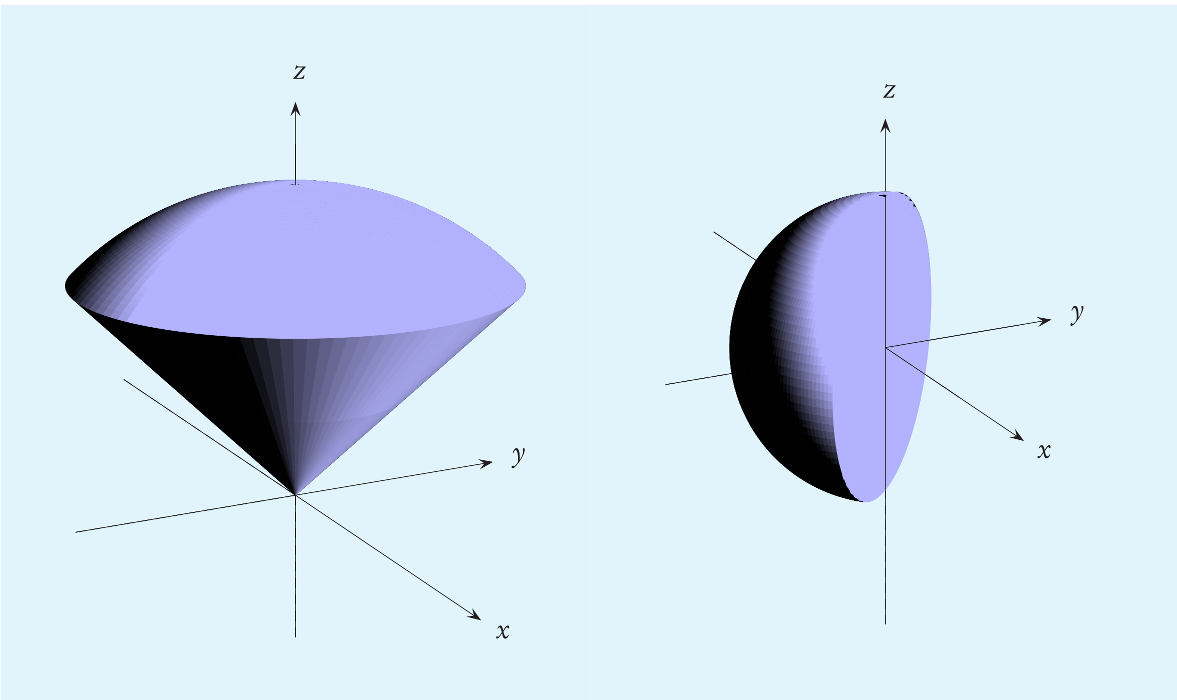


Figura 1.5.16
I domini di integrazione degli esempi 1.5.57 (a sinistra) e 1.5.58 (a destra).

1.5.58 Esempio. Calcoliamo

$$\int_A z^2 \, d(x,y,z),$$

con

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2 \leq 4,\ x+y \leq 0\right\}.$$

L'insieme A è chiuso, quindi è misurabile, la funzione integranda è continua, quindi è misurabile, ed è a valori non negativi.

Effettuiamo un cambiamento di variabili utilizzando le coordinate sferiche introdotte nell'esempio 1.5.56. Poniamo quindi

$$\boldsymbol{\Phi} : \mathbb{R}^+ \times \,]0,\pi[\, \times \,]0,2\pi[\, \to \mathbb{R}^3, \qquad \boldsymbol{\Phi}(\rho,\theta,\varphi) = (\rho \sin\theta \cos\varphi, \rho \sin\theta \sin\varphi, \rho\cos\theta).$$

Si ha $\boldsymbol{\Phi}(\rho,\theta,\varphi) \in A$ se e solo se $\rho^2 \leq 4$ e $\rho \sin\theta\cos\varphi + \rho\sin\theta\sin\varphi \leq 0$. Poiché $\rho > 0$ e $\sin\theta > 0$, la seconda condizione equivale a $\cos\varphi + \sin\varphi \leq 0$, cioè $(3/4)\pi \leq \varphi \leq (7/4)\pi$. Pertanto

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(A) = \,]0,2] \times \,]0,\pi[\, \times \left[\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right].$$

Indicato con B tale insieme, per il teorema di cambiamento di variabili 1.5.45, si ha

$$\int_A z^2 \, d(x,y,z) = \int_B (\rho\cos\theta)^2 \rho^2 \sin\theta \, d(\rho,\theta,\varphi) = \int_B \rho^3 \cos^2\theta \sin\theta \, d(\rho,\theta,\varphi).$$

Quindi, applicando due volte il teorema di Tonelli 1.5.17, si ottiene

$$\int_B \rho^3 \cos^2\theta \sin\theta \, d(\rho,\theta,\varphi) = \int_0^2 \left(\int_0^\pi \left(\int_{(3/4)\pi}^{(7/4)\pi} \rho^3 \cos^2\theta \sin\theta \, d\varphi \right) d\theta \right) d\rho =$$

$$= \int_0^2 \left(\int_0^\pi \pi\rho^3 \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta \right) d\rho = \int_0^2 \left[-\frac{\pi}{3}\rho^3 \cos^3\theta \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} d\rho = \int_0^2 \frac{2}{3}\pi\rho^3 \, d\rho =$$

$$= \left[\frac{1}{6}\pi\rho^4\right]_0^2 = \frac{8}{3}\pi.$$

◀

1.5.59 Esempio (coordinate polari in $\mathbb{R}^n$). Generalizziamo le coordinate polari in $\mathbb{R}^2$ (v. esempio 1.5.50) e le coordinate sferiche in $\mathbb{R}^3$ (v. esempio 1.5.56) a $\mathbb{R}^n$.

Per $n \geq 2$ definiamo per induzione la funzione $\boldsymbol{F}^{(n)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ come segue:

$$\boldsymbol{F}^{(2)}(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta),$$

e

$$F_j^{(n+1)}(\rho,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n) = \begin{cases} F_j^{(n)}(\rho,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{n-1}), & \text{se } j = 1,2,\ldots,n-1, \\ F_n^{(n)}(\rho,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{n-1})\cos\theta_n, & \text{se } j = n, \\ F_n^{(n)}(\rho,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{n-1})\sin\theta_n, & \text{se } j = n+1. \end{cases}$$

Si ha quindi

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}_1^{(n)}(\rho,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{n-1}) = \rho\cos\theta_1\,, \\ \boldsymbol{F}_2^{(n)}(\rho,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{n-1}) = \rho\sin\theta_1\,\cos\theta_2\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{F}_{n-1}^{(n)}(\rho,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{n-1}) = \rho\sin\theta_1\,\sin\theta_2\cdots\cos\theta_{n-1}\,, \\ \boldsymbol{F}_n^{(n)}(\rho,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{n-1}) = \rho\sin\theta_1\,\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-1}\,. \end{cases}$$

Se $n>2$, elevando al quadrato e sommando le ultime due uguaglianze si ottiene

$$\begin{aligned} &\big(F_{n-1}^{(n)}(\rho,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{n-1})\big)^2 + \big(F_n^{(n)}(\rho,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{n-1})\big)^2 = \\ &= \big(F_{n-1}^{(n-1)}(\rho,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{n-2})\big)^2\cos^2\theta_{n-1} + \big(F_{n-1}^{(n-1)}(\rho,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{n-2})\big)^2\sin^2\theta_{n-1} = \\ &= \big(F_{n-1}^{(n-1)}(\rho,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{n-2})\big)^2. \end{aligned} \tag{1.5.10}$$

Proviamo, per induzione, che se $n\geq 2$, allora si ha

$$\sum_{i=1}^{n}\big(F_i^{(n)}(\rho,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{n-1})\big)^2 = \rho^2.$$

Per $n=2$ si ha

$$\sum_{i=1}^{2}\big(F_i^{(2)}(\rho,\theta_1)\big)^2 = (\rho\cos\theta_1)^2 + (\rho\sin\theta_1)^2 = \rho^2.$$

Se l'uguaglianza è verificata per n, allora, per l'uguaglianza (1.5.10), si ha

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n+1}\big(F_i^{(n+1)}(\rho,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n)\big)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}\big(F_i^{(n+1)}(\rho,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n)\big)^2 + \big(F_n^{(n+1)}(\rho,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n)\big)^2 + \\ &\qquad\qquad + \big(F_{n+1}^{(n+1)}(\rho,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n)\big)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}\big(F_i^{(n)}(\rho,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{n-1})\big)^2 + \big(F_n^{(n)}(\rho,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{n-1})\big)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\big(F_i^{(n)}(\rho,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{n-1})\big)^2 = \rho^2. \end{aligned}$$

Pertanto si ha

$$\|\boldsymbol{F}^{(n)}(\rho,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{n-1})\| = \rho. \tag{1.5.11}$$

La funzione $\boldsymbol{F}^{(n)}$ è di classe C^∞. Proviamo, per induzione, che, $\forall(\rho,\theta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}$, si ha

$$\det\mathcal{J}_{\boldsymbol{F}^{(n)}}(\rho,\theta) = \rho^{n-1}\prod_{j=1}^{n-2}\sin^{n-j-1}\theta_j\,, \tag{1.5.12}$$

dove, nel caso $n=2$, si intende che il prodotto per j da 1 a 0 è uguale a 1.

Per $n=2$ abbiamo già dimostrato l'uguaglianza nell'esempio 1.5.50.

Supponiamo che l'equazione (1.5.12) valga per n e proviamola per $n+1$. Dalla definizione di $\boldsymbol{F}^{(n+1)}$, sviluppando il determinante rispetto all'ultima colonna, risulta

$$
\begin{aligned}
&\det \mathscr{J}_{\boldsymbol{F}^{(n+1)}} = \\
&= \det \begin{pmatrix}
D_\rho F_1^{(n)} & D_{\theta_1} F_1^{(n)} & \cdots & D_{\theta_{n-1}} F_1^{(n)} & 0 \\
D_\rho F_2^{(n)} & D_{\theta_1} F_2^{(n)} & \cdots & D_{\theta_{n-1}} F_2^{(n)} & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
D_\rho F_{n-1}^{(n)} & D_{\theta_1} F_{n-1}^{(n)} & \cdots & D_{\theta_{n-1}} F_{n-1}^{(n)} & 0 \\
D_\rho F_n^{(n)} \cos\theta_n & D_{\theta_1} F_n^{(n)} \cos\theta_n & \cdots & D_{\theta_{n-1}} F_n^{(n)} \cos\theta_n & -F_n^{(n)} \sin\theta_n \\
D_\rho F_n^{(n)} \sin\theta_n & D_{\theta_1} F_n^{(n)} \sin\theta_n & \cdots & D_{\theta_{n-1}} F_n^{(n)} \sin\theta_n & F_n^{(n)} \cos\theta_n
\end{pmatrix} = \\
&= F_n^{(n)} \sin\theta_n \det \begin{pmatrix}
D_\rho F_1^{(n)} & D_{\theta_1} F_1^{(n)} & \cdots & D_{\theta_{n-1}} F_1^{(n)} \\
D_\rho F_2^{(n)} & D_{\theta_1} F_2^{(n)} & \cdots & D_{\theta_{n-1}} F_2^{(n)} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
D_\rho F_{n-1}^{(n)} & D_{\theta_1} F_{n-1}^{(n)} & \cdots & D_{\theta_{n-1}} F_{n-1}^{(n)} \\
D_\rho F_n^{(n)} \sin\theta_n & D_{\theta_1} F_n^{(n)} \sin\theta_n & \cdots & D_{\theta_{n-1}} F_n^{(n)} \sin\theta_n
\end{pmatrix} + \\
&\qquad + F_n^{(n)} \cos\theta_n \det \begin{pmatrix}
D_\rho F_1^{(n)} & D_{\theta_1} F_1^{(n)} & \cdots & D_{\theta_{n-1}} F_1^{(n)} \\
D_\rho F_2^{(n)} & D_{\theta_1} F_2^{(n)} & \cdots & D_{\theta_{n-1}} F_2^{(n)} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
D_\rho F_{n-1}^{(n)} & D_{\theta_1} F_{n-1}^{(n)} & \cdots & D_{\theta_{n-1}} F_{n-1}^{(n)} \\
D_\rho F_n^{(n)} \cos\theta_n & D_{\theta_1} F_n^{(n)} \cos\theta_n & \cdots & D_{\theta_{n-1}} F_n^{(n)} \cos\theta_n
\end{pmatrix} = \\
&= F_n^{(n)} \sin^2\theta_n \det \mathscr{J}_{\boldsymbol{F}^{(n)}} + F_n^{(n)} \cos^2\theta_n \det \mathscr{J}_{\boldsymbol{F}^{(n)}} = F_n^{(n)} \det \mathscr{J}_{\boldsymbol{F}^{(n)}} = \\
&= \rho \prod_{j=1}^{n-1} \sin\theta_j \, \rho^{n-1} \prod_{j=1}^{n-2} \sin^{n-j-1} \sin\theta_j = \rho^n \prod_{j=1}^{n-1} \sin^{n-j} \sin\theta_j \,.
\end{aligned}
$$

Pertanto l'uguaglianza (1.5.12) vale per $n+1$.

Dimostriamo, per induzione, che la restrizione di $F^{(n)}$ a $\mathbb{R}^+ \times \,]0,\pi[^{n-2} \times \,]0,2\pi[$ è iniettiva, dove, nel caso $n=2$, con $\mathbb{R}^+ \times \,]0,\pi[^{n-2} \times \,]0,2\pi[$ intendiamo $\mathbb{R}^+ \times \,]0,2\pi[$.

Per $n=2$ ciò è già stato dimostrato nell'esempio 1.5.50.

Supponiamo che la restrizione di $\boldsymbol{F}^{(n)}$ sia iniettiva e dimostriamo che la restrizione di $\boldsymbol{F}^{(n+1)}$ è iniettiva.

Siano $(\rho,\theta),(\sigma,\varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \,]0,\pi[^{n-1} \times \,]0,2\pi[$, tali che $\boldsymbol{F}^{(n+1)}(\rho,\theta) = \boldsymbol{F}^{(n+1)}(\sigma,\varphi)$. Allora per $j=1,2,\ldots,n-1$, si ha

$$
F_j^{(n)}(\rho,\theta_1,\ldots,\theta_{n-1}) = F_j^{(n+1)}(\rho,\theta_1,\ldots,\theta_n) = F_j^{(n+1)}(\sigma,\varphi_1,\ldots,\varphi_n) = F_j^{(n)}(\sigma,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}).
$$

Inoltre, per l'uguaglianza (1.5.10), si ha

$$\begin{aligned}\big(F_n^{(n)}(\rho,\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})\big)^2 &= \big(F_n^{(n+1)}(\rho,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n)\big)^2+\big(F_{n+1}^{(n+1)}(\rho,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n)\big)^2 = \\ &= \big(F_n^{(n+1)}(\sigma,\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n)\big)^2+\big(F_{n+1}^{(n+1)}(\sigma,\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n)\big)^2 = \big(F_n^{(n)}(\sigma,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})\big)^2;\end{aligned}$$

poiché $\rho,\sigma\in\mathbb{R}^+$ e $\theta_j,\varphi_j\in\,]0,\pi[$, per $j=1,2,\ldots,n-1$, si verifica facilmente che risulta $F_n^{(n)}(\rho,\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})>0$ e $F_n^{(n)}(\sigma,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})>0$, quindi dall'uguaglianza tra i quadrati segue

$$F_n^{(n)}(\rho,\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})=F_n^{(n)}(\sigma,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}).$$

Pertanto

$$\boldsymbol{F}^{(n)}(\rho,\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})=\boldsymbol{F}^{(n)}(\sigma,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}),$$

quindi, per ipotesi induttiva, si ha $\rho=\sigma$ e $\theta_j=\varphi_j$, per $j=1,2,\ldots,n-1$. Quindi dalla definizione di $\boldsymbol{F}^{(n+1)}$ segue

$$\begin{aligned}F_n^{(n)}(\rho,\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})\cos\theta_n &= F_n^{(n)}(\rho,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{n-1})\cos\varphi_n,\\ F_n^{(n)}(\rho,\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})\sin\theta_n &= F_n^{(n)}(\rho,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{n-1})\sin\varphi_n,\end{aligned}$$

pertanto $\cos\theta_n=\cos\varphi_n$ e $\sin\theta_n=\sin\varphi_n$, perciò $\theta_n=\varphi_n$. Questo prova l'iniettività di $\boldsymbol{F}^{(n+1)}$.

Dimostriamo che

$$F^{(n)}\big(\mathbb{R}^+\times\,]0,\pi[^{n-2}\times\,]0,2\pi[\big)=\mathbb{R}^n\setminus\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\,|\,x_n=0,\ x_{n-1}\geq 0\}.$$

Sia $(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^+\times\,]0,\pi[^{n-2}\times\,]0,2\pi[$ tale che

$$F_n^{(n)}(\rho,\theta)=\rho\sin\theta_1\,\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-1}=0.$$

Poiché $\rho>0$ e $\sin\theta_j>0$, per $j=1,2,\ldots,n-2$, si ha $\sin\theta_{n-1}=0$, quindi $\theta_{n-1}=\pi$. Allora $\cos\theta_{n-1}=-1$, quindi

$$F_{n-1}^{(n)}(\rho,\theta)=\rho\sin\theta_1\,\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}<0.$$

Pertanto $\boldsymbol{F}^{(n)}(\rho,\theta)\notin\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\,|\,x_n=0,\ x_{n-1}\geq 0\}$, quindi

$$F^{(n)}\big(\mathbb{R}^+\times\,]0,\pi[^{n-2}\times\,]0,2\pi[\big)\subseteq\mathbb{R}^n\setminus\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\,|\,x_n=0,\ x_{n-1}\geq 0\}.$$

Dimostriamo per induzione l'inclusione inversa.

Per $n=2$ è già stata dimostrata nell'esempio 1.5.50.

Supponiamo che vi sia l'inclusione per n. Sia $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{n+1}\,|\,x_{n+1}=0,\ x_n\geq 0\}$. Poniamo $z=\sqrt{y_n^2+y_{n+1}^2}$; poiché almeno uno tra y_n e y_{n+1} è diverso da 0, risulta $z>0$.

Allora, per ipotesi induttiva, $(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, z) \in F^{(n)}\big(\mathbb{R}^+ \times]0,\pi[^{n-2} \times]0,2\pi[\big)$, quindi $\exists(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times]0,\pi[^{n-2} \times]0,2\pi[$ tale che $\boldsymbol{F}^{(n)}(\rho,\theta) = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, z)$. In particolare

$$F_n^{(n)}(\rho,\theta) = \rho \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cdots \sin\theta_{n-2} \sin\theta_{n-1} = z > 0 .$$

Poiché $\rho \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cdots \sin\theta_{n-2} > 0$ si ha $\sin\theta_{n-1} > z$, quindi $\theta_{n-1} \in]0,\pi[$. Inoltre $\big((y_n/z)^2 + (y_{n+1}/z)^2\big) = 1$, quindi $\exists\theta_n \in [0,2\pi[$ tale che $\cos\theta_n = y_n/z$ e $\sin\theta_n = y_{n+1}/z$. Non può essere $\theta_n = 0$, perché si avrebbe $y_n > 0$ e $y_{n+1} = 0$; perciò $\theta_n \in]0,2\pi[$. Evidentemente

$$\rho \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cdots \sin\theta_{n-2} \cos\theta_n = z\,\frac{y_n}{z} = y_n ,$$
$$\rho \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cdots \sin\theta_{n-2} \sin\theta_n = z\,\frac{y_{n+1}}{z} = y_{n+1} .$$

Abbiamo così determinato $(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times]0,\pi[^{n-1} \times]0,2\pi[$ tale che $\boldsymbol{F}^{(n+1)}(\rho,\theta) = \boldsymbol{y}$. Pertanto

$$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, x_{n+1} = 0,\ x_n \geq 0\} \subseteq F^{(n+1)}\big(\mathbb{R}^+ \times]0,\pi[^{n-1} \times]0,2\pi[\big).$$

Abbiamo così provato che la funzione $\boldsymbol{F}^{(n)}$ è biunivoca da $\mathbb{R}^+ \times]0,\pi[^{n-2} \times]0,2\pi[$ su $\mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, x_n = 0,\ x_{n-1} \geq 0\}$; tali insiemi sono evidentemente aperti. Tale funzione è di classe C^1 con

$$\det \mathcal{J}_{\boldsymbol{F}^{(n)}}(\rho,\theta) = \rho^{n-1} \prod_{j=1}^{n-2} \sin^{n-j-1}\theta_j ,$$

che è diverso da 0 in $\mathbb{R}^+ \times]0,\pi[^{n-2} \times]0,2\pi[$, perché la funzione seno non si annulla in $]0,\pi[$. Pertanto la restrizione di $\boldsymbol{F}^{(n)}$ a $\mathbb{R}^+ \times]0,\pi[^{n-2} \times]0,2\pi[$ è un diffeomorfismo.

L'immagine del diffeomorfismo è $\mathbb{R}^n$ privato dell'insieme $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, x_n = 0,\ x_{n-1} \geq 0\}$. Tale insieme ha misura nulla, perché è contenuto nell'iperpiano $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, x_n = 0\}$, che ha misura nulla (v. esempio 1.2.6); pertanto è irrilevante per il calcolo di integrali. Quindi questo cambiamento di coordinate può essere utilizzato per il calcolo di integrali in tutto $\mathbb{R}^n$. ◀

1.5.60 Esempio. Utilizziamo le coordinate polari in $\mathbb{R}^n$, studiate nell'esempio 1.5.59, per determinare la misura di una sfera di $\mathbb{R}^n$, già calcolata utilizzando direttamente il teorema di riduzione nell'esempio 1.5.12.

Per $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ e $R \in \mathbb{R}^+$ poniamo

$$S_{n,R} = \big\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,\big|\, \|\boldsymbol{x}\| \leq R\big\}.$$

Per calcolare la misura passiamo in coordinate polari, cioè utilizziamo il cambiamento di variabili introdotto nell'esempio 1.5.59. Per la precisione utilizziamo la restrizione di $\boldsymbol{F}^{(n)}$ a $\mathbb{R}^+ \times]0,\pi[\times]0,2\pi[$, che è un diffeomorfismo su $\mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, x_n = 0,\ x_{n-1} \geq 0\}$. Tale insieme non contiene $S_{n,R}$; tuttavia, posto

$$B = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, x_n = 0,\ x_{n-1} \geq 0\},$$

si ha $\mu(B)=0$, quindi

$$\mu(S_{n,R})=\int_{S_{n,R}} 1\,d\boldsymbol{x}=\int_{S_{n,R}\setminus B} 1\,d\boldsymbol{x}\,.$$

e $S_{n,R}\setminus B$ è incluso nell'immagine di $\boldsymbol{F}^{(n)}$. Pertanto, per il teorema del cambiamento di variabili 1.5.45,

$$\mu(S_{n,R})=\int_{S_{n,R}\setminus B} 1\,d\boldsymbol{x}=\int_{(\boldsymbol{F}^{(n)})^{-1}(S_{n,R}\setminus B)} \left|\det \mathscr{J}_{\boldsymbol{F}^{(n)}}(\rho,\theta)\right| d(\rho,\theta)\,.$$

Per $(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^+\times\,]0,\pi[^{n-2}\times\,]0,2\pi[$ si ha $\boldsymbol{F}^{(n)}(\rho,\theta)\in S_{n,R}\setminus B$ se e solo se $\left\|\boldsymbol{F}^{(n)}(\rho,\theta)\right\|\le R$ e, per l'equazione (1.5.11), ciò equivale a $\rho\le R$. Inoltre, per l'equazione (1.5.12), si ha

$$\det \mathscr{J}_{\boldsymbol{F}^{(n)}}(\rho,\theta)=\rho^{n-1}\prod_{j=1}^{n-2}\sin^{n-j-1}\theta_j\,,$$

Pertanto

$$\mu(S_{n,R})=\int_{]0,R]\times]0,\pi[^{n-2}\times]0,2\pi[} \rho^{n-1}\prod_{j=1}^{n-2}\sin^{n-j-1}\theta_j\,d(\rho,\theta)\,.$$

Applicando più volte il teorema di Tonelli 1.5.17 e ricordando l'osservazione 1.5.19 si ha

$$\begin{aligned}
&\int_{]0,R]\times]0,\pi[^{n-2}\times]0,2\pi[} \rho^{n-1}\prod_{j=1}^{n-2}\sin^{n-j-1}\theta_j\,d(\rho,\theta)=\\
&=\int_0^R\int_0^\pi\cdots\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\rho^{n-1}\prod_{j=1}^{n-2}\sin^{n-j-1}\theta_j\,d\theta_{n-1}\,d\theta_{n-2}\cdots d\theta_1\,d\rho=\\
&=\int_0^R\rho^{n-1}\,d\rho\prod_{j=1}^{n-2}\int_0^\pi\sin^{n-j-1}\theta_j\,d\theta_j\int_0^{2\pi}1\,d\theta_{n-1}\,.
\end{aligned}$$

Posto, per $j\in\mathbb{N}$, $I_j=\int_0^\pi\sin^j\theta\,d\theta$, l'integrale risulta uguale a

$$\left[\frac{1}{n}\rho^n\right]_0^R\prod_{j=1}^{n-2}I_{n-j-1}\,2\pi=\frac{2}{n}\pi R^n\prod_{j=1}^{n-2}I_j\,,$$

pertanto

$$\mu(S_{n,R})=\frac{2}{n}\pi\prod_{j=1}^{n-2}I_jR^n\,.$$

Si verifica facilmente che $I_0=\pi$ e $I_1=2$. Se $j\ge 2$, integrando per parti si ha

$$\begin{aligned}
I_j&=\int_0^\pi\sin^j\theta\,d\theta=\left[-\sin^{j-1}\theta\,\cos\theta\right]_0^\pi+\int_0^\pi(j-1)\sin^{j-2}\theta\,\cos^2\theta\,d\theta=\\
&=\int_0^\pi(j-1)\sin^{j-2}\theta\,(1-\sin^2\theta)\,d\theta=(j-1)\int_0^\pi(\sin^{j-2}\theta-\sin^j\theta)\,d\theta=(j-1)(I_{j-2}-I_j);
\end{aligned}$$

pertanto $I_j=\big((j-1)/j\big)I_{j-2}$.

Quindi si ha

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2}\pi\,, \qquad I_4 = \frac{3}{4} I_2 = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\pi\,,$$

e si prova facilmente per induzione che se j è pari si ha

$$I_j = \frac{\prod_{i=1}^{j/2}(2i-1)}{\prod_{i=1}^{j/2}(2i)}\pi\,. \tag{1.5.13}$$

Inoltre

$$I_3 = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3}2\,, \qquad I_5 = \frac{4}{5} I_3 = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}2\,,$$

e si prova facilmente per induzione che se j è dispari si ha

$$I_j = \frac{2\prod_{i=1}^{(j-1)/2}(2i)}{\prod_{i=1}^{(j+1)/2}(2i-1)}\,. \tag{1.5.14}$$

Proviamo, per induzione, che, posto, per $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$,

$$C_n = \begin{cases} \dfrac{2^{(n+1)/2}\pi^{(n-1)/2}}{\prod_{j=1}^{(n+1)/2}(2j-1)}\,, & \text{se } n \text{ è dispari,} \\[2ex] \dfrac{2^{n/2}\pi^{n/2}}{\prod_{j=1}^{n/2}(2j)}\,, & \text{se } n \text{ è pari}\,, \end{cases}$$

risulta

$$\frac{2}{n}\pi\prod_{j=1}^{n-2} I_j = C_n\,.$$

Per $n=2$ si ha $(2/n)\pi\prod_{j=1}^{n-2} I_j = \pi$ e

$$C_2 = \frac{2^1\pi^1}{\prod_{j=1}^{1}(2j)} = \pi\,,$$

quindi vale l'uguaglianza.

Supponiamo ora che valga per n. Allora

$$\frac{2}{n+1}\pi\prod_{j=1}^{n-1} I_j = \frac{2}{n}\,\frac{n}{n+1}\pi\prod_{j=1}^{n-2} I_j I_{n-1} = \frac{n}{n+1} I_{n-1} C_n\,.$$

Se n è dispari, quindi $n-1$ è pari, allora, per l'ipotesi induttiva e per l'uguaglianza (1.5.13), si ha

$$\frac{n}{n+1} I_{n-1} C_n = \frac{n}{n+1}\,\frac{\prod_{i=1}^{(n-1)/2}(2i-1)}{\prod_{i=1}^{(n-1)/2}(2i)}\pi\,\frac{2^{(n+1)/2}\pi^{(n-1)/2}}{\prod_{j=1}^{(n+1)/2}(2j-1)} = \frac{2^{(n+1)/2}\pi^{(n+1)/2}}{\prod_{i=1}^{(n+1)/2}(2i)} = C_{n+1}\,.$$

Se n è pari, quindi $n-1$ è dispari, allora, per l'ipotesi induttiva e per l'uguaglianza (1.5.14), si ha

$$\frac{n}{n+1} I_{n-1} C_n = \frac{n}{n+1} \frac{2\prod_{i=1}^{(j-1)/2}(2i)}{\prod_{i=1}^{n/2}(2i-1)} \frac{2^{n/2}\pi^{n/2}}{\prod_{j=1}^{n/2}(2j)} = \frac{2^{(n+2)/2}\pi^{n/2}}{\prod_{i=1}^{(n+2)/2}(2i-1)} = C_{n+1}\,.$$

Abbiamo così ottenuto nuovamente il risultato dell'esempio 1.5.11. ◀

2

Successioni e serie di funzioni

2.1 Successioni e serie di funzioni di tipo generale

In questo capitolo studiamo successioni e serie di funzioni, cioè successioni e serie i cui termini sono funzioni.

Come per le successioni e le serie in $\mathbb{R}$ studiate finora (che, per evitare malintesi, chiamiamo "successioni numeriche" e "serie numeriche") si può definire la convergenza di una successione o di una serie di funzioni, ma in questo ambito risultano utili diversi concetti di convergenza, che hanno proprietà più o meno buone.

Tra le serie di funzioni rivestono un particolare interesse le serie di potenze, che sono studiate in modo naturale in ambito complesso. Per questo motivo studiamo in generale funzioni definite in un sottoinsieme di $\mathbb{C}$ a valori in $\mathbb{C}$. Poiché $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ anche le funzioni reali di variabile reale rientrano in questa tipologia di funzioni.

Nel seguito studieremo la continuità di funzioni da sottoinsiemi di $\mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$ e le derivabilità di funzioni da intervalli di $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$. In questo ambito identifichiamo $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$, consideriamo quindi continuità e derivabilità secondo le definizioni date in $\mathbb{R}^2$.

2.1.1 Successioni di funzioni

In questo capitolo, dati due insiemi non vuoti A e B, indichiamo con $\mathscr{F}(A,B)$ l'insieme delle funzioni da A a B.

Ricordiamo che chiamiamo successione in un insieme E ogni funzione da $\mathbb{N}$ a E.

Definizione di successione di funzioni

Sia $A \subseteq \mathbb{C}$. Chiamiamo **successione di funzioni** una successione in $\mathscr{F}(A,\mathbb{C})$.

Sottolineiamo il fatto che tutti i termini di una successione di funzioni hanno lo stesso dominio e lo stesso codominio.

Ovviamente si possono considerare anche successioni di funzioni più generali, con dominio e codominio non necessariamente contenuti in $\mathbb{C}$, ma in questo capitolo ci limitiamo a questa situazione.

Studiamo la convergenza di una successione di funzioni.

Data una successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathscr{F}(A,\mathbb{C})$, ogni $x \in A$ individua la successione numerica $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$. È naturale studiare la convergenza delle successioni così ottenute. Otteniamo così la più semplice nozione di convergenza per una successione di funzioni, che precisiamo nella seguente definizione. In questa definizione distinguiamo l'insieme di convergenza dal dominio dei termini della successione, perché ci si trova frequentemente nella situazione in cui c'è convergenza solo in un sottoinsieme del dominio dei termini.

Definizione di successione di funzioni convergente puntualmente

Siano $A \subseteq \mathbb{C}$, $B \subseteq A$ e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathscr{F}(A,\mathbb{C})$. Diciamo che $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge puntualmente** in B quando, $\forall b \in B$, la successione $\big(f_n(b)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. In tal caso, posto

$$f : B \to \mathbb{C}, \qquad f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x),$$

diciamo che la funzione f è il **limite puntuale** di $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in B.

Quando $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente in A, diciamo che $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge puntualmente**.

2.1.1 Esempio. Consideriamo la successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, con

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = x^n .$$

Sappiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} x^n \begin{cases} = +\infty, & \text{se } x > 1, \\ = 1, & \text{se } x = 1, \\ = 0, & \text{se } -1 < x < 1, \\ \text{non esiste}, & \text{se } x \leq -1 . \end{cases}$$

Pertanto la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente in $]-1,1]$ alla funzione

$$f :]-1,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in]-1,1[, \\ 1, & \text{se } x = 1 . \end{cases}$$

◀

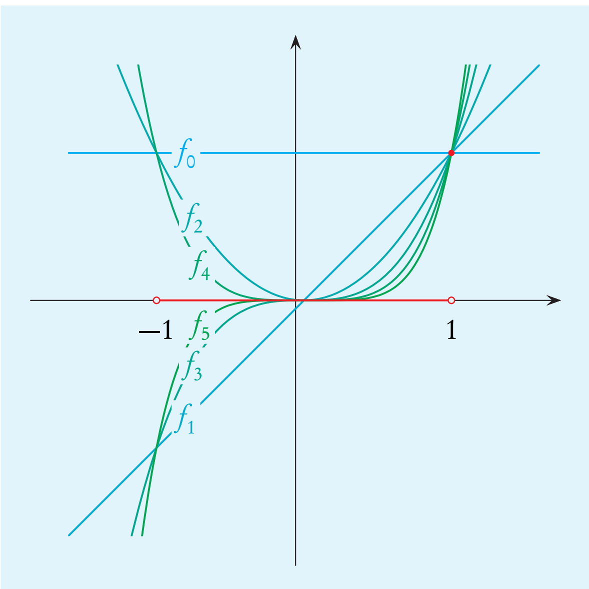


Figura 2.1.1
La successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ studiata nell'esempio 2.1.1.
In rosso la funzione limite puntuale della successione.

2.1.2 Esempio. Consideriamo la successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, con

$$f_n\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}\,.$$

Si ha, $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}=\sqrt{x^2}=|x|\,.$$

Pertanto la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente alla funzione valore assoluto. ◀

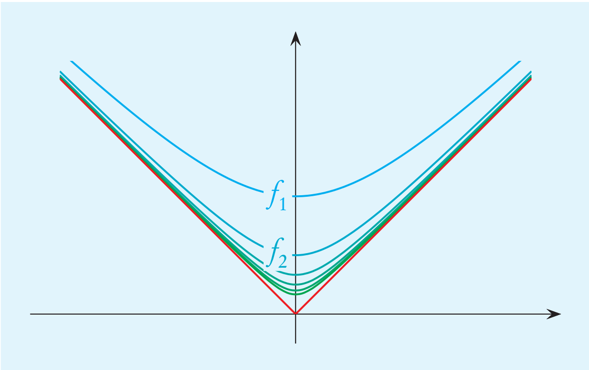


Figura 2.1.2
La successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ studiata nell'esempio 2.1.2.
In rosso la funzione limite puntuale della successione.

2.1.3 Esempio. Consideriamo la successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, con

$$f_n\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}, \qquad f_n(x)=\exp(2n\pi i x)\,.$$

Se $x\in\mathbb{Z}$ si ha, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $f_n(x)=1$, quindi $\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=1$. Se $x\notin\mathbb{Z}$, allora, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, si ha

$$\begin{aligned}\big|f_{n+1}(x)-f_n(x)\big| &= \big|\exp\big(2(n+1)\pi i x\big)-\exp(2n\pi i x)\big| = \\ &= \big|\exp(2n\pi i x)\exp(2\pi i x)-\exp(2n\pi i x)\big| = \\ &= \big|\exp(2n\pi i x)\big|\big|\exp(2\pi i x)-1\big| = \big|\exp(2\pi i x)-1\big|\,.\end{aligned}$$

Pertanto

$$\lim_{n\to+\infty}\big|f_{n+1}(x)-f_n(x)\big|=\big|\exp(2\pi i x)-1\big|\neq 0\,.$$

Se $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ fosse convergente tale limite sarebbe uguale a 0, quindi la successione non converge.

Pertanto $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente in $\mathbb{Z}$ alla funzione identicamente nulla. ◀

Osserviamo che i termini della successione studiata nell'esempio 2.1.1 sono le funzioni $x\mapsto x^n$, tali funzioni sono continue, mentre la funzione limite puntuale vale 0 in $]-1,1[$ e vale 1 in 1, quindi non è continua in 1. Pertanto la convergenza puntuale di una successione di funzioni continue non assicura la continuità della funzione limite.

Risulta utile definire un tipo di convergenza più restrittiva della convergenza puntuale, che assicuri che, passando al limite, si conserva la continuità.

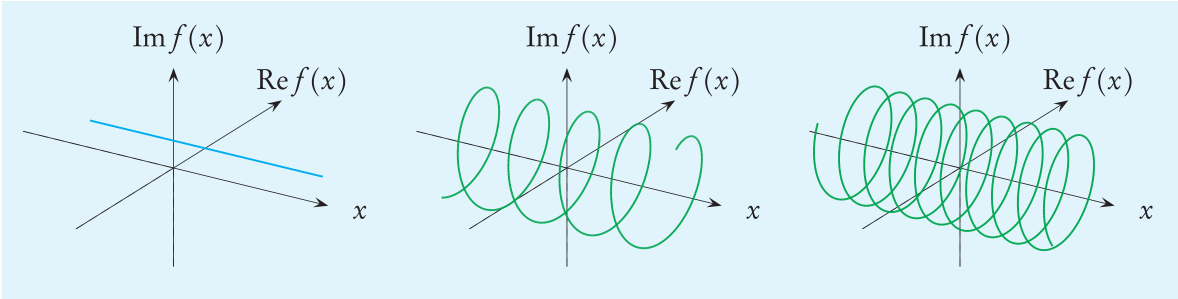


Figura 2.1.3
La successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ studiata nell'esempio 2.1.3. Da sinistra a destra le funzioni f_0, f_1 e f_2.

Definizione di successione di funzioni convergente uniformemente

Siano $A\subseteq\mathbb{C}$, $B\subseteq A$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathscr{F}(A,\mathbb{C})$ e $f: B\to\mathbb{C}$. Diciamo che $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformemente** a f in B quando

$$\lim_{n\to+\infty}\sup\left\{|f_n(x)-f(x)|\,\middle|\,x\in B\right\}=0.$$

Quando $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente in A diciamo che $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformemente.**

Osserviamo che la richiesta che sia $\sup\left\{|f_n(x)-f(x)|\,\middle|\,x\in B\right\}\to 0$ sottintende il fatto che, almeno definitivamente rispetto a n, tale estremo superiore sia reale, cioè che le funzioni f_n-f siano limitate in B.

2.1.4 Teorema

Siano $A\subseteq\mathbb{C}$, $B\subseteq A$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathscr{F}(A,\mathbb{C})$ e $f: B\to\mathbb{C}$. Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f in B, allora $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f in B.

Dimostrazione. Poiché, $\forall b\in B$, si ha

$$|f_n(b)-f(b)|\le\sup\left\{|f_n(x)-f(x)|\,\middle|\,x\in B\right\}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0,$$

allora, $\forall b\in B$, risulta $\lim_{n\to+\infty}|f_n(b)-f(b)|=0$, quindi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f in B. ■

2.1.5 Osservazione. Per definizione la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f in B se e solo se

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+,\ \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}\colon\ \forall n\in\mathbb{N},\quad n>n_\varepsilon\implies\sup\left\{|f_n(x)-f(x)|\,\middle|\,x\in B\right\}<\varepsilon.$$

Se $\sup\left\{|f_n(x)-f(x)|\,\middle|\,x\in B\right\}<\varepsilon$, allora, $\forall x\in B$, si ha $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$; viceversa se, $\forall x\in B$, si ha $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, allora $\sup\left\{|f_n(x)-f(x)|\,\middle|\,x\in B\right\}\le\varepsilon<2\varepsilon$. Pertanto la definizione di convergenza uniforme equivale a

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon\ \forall n \in \mathbb{N},\quad n > n_\varepsilon \implies \forall x \in B,\quad \left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon\,,$$

cioè

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon\ \forall x \in B,\ \forall n \in \mathbb{N},\quad n > n_\varepsilon \implies \left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon\,.$$

La definizione di convergenza puntuale in B è invece

$$\forall x \in B,\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon\ \forall n \in \mathbb{N},\quad n > n_\varepsilon \implies \left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon\,.$$

Risulta quindi evidente che, quando si ha convergenza puntuale, in corrispondenza di ogni $x \in B$ viene scelto un n_ε, mentre se c'è convergenza uniforme la scelta di n_ε viene fatta indipendentemente da x; questa è una richiesta più restrittiva. ◀

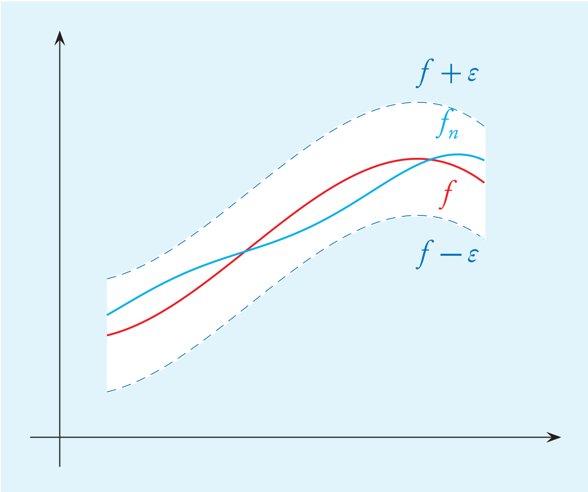


Figura 2.1.4
Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni reali che converge uniformemente a f; allora, fissato $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, definitivamente il grafico di f_n è compreso tra il grafico di $f-\varepsilon$ e quello di $f+\varepsilon$ (parte di piano in bianco).

La convergenza di una successione numerica è equivalente al fatto che la successione verifichi la condizione di Cauchy; una condizione analoga vale per la convergenza uniforme.

Definizione di condizione di Cauchy[10] uniforme

Siano $A \subseteq \mathbb{C}$, $B \subseteq A$ e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathscr{F}(A,\mathbb{C})$. Diciamo che $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifica la **condizione di Cauchy uniforme** in B quando

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon\ \forall n,m \in \mathbb{N},\quad n,m > n_\varepsilon \implies \sup\left\{\left|f_n(x) - f_m(x)\right| \,\middle|\, x \in B\right\} < \varepsilon\,.$$

2.1.6 Teorema (sulla condizione di Cauchy uniforme)

Siano $A \subseteq \mathbb{C}$, $B \subseteq A$ e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathscr{F}(A,\mathbb{C})$. La successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente in B se e solo se verifica la condizione di Cauchy uniforme in B.

[10] La condizione prende il nome da Augustin-Louis Cauchy (Parigi, 1789 - Sceaux, Francia, 1857) per analogia con la corrispondente condizione per le successioni. Cauchy diede grandi contributi allo studio dell'analisi, dove introdusse un maggior rigore rispetto a quanto era abituale a quei tempi.

Dimostrazione. Supponiamo che $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converga uniformemente in B e sia $f: B \to \mathbb{C}$ la funzione limite. Fissato $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, sia $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che, $\forall n \in \mathbb{N}$ con $n > n_\varepsilon$, risulta $\sup\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in B\} < \varepsilon$. Allora, se $m, m > n_\varepsilon$, si ha, $\forall x \in B$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \le \sup|f_n - f| + \sup|f - f_m| < 2\varepsilon\,.$$

Quindi è verificata la condizione di Cauchy uniforme.

Viceversa, se è verificata la condizione di Cauchy uniforme, allora, $\forall x \in B$, la successione numerica $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy, quindi converge. Indichiamo con $f(x)$ il limite.

Proviamo che $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f uniformemente. Fissato $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, sia $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che, $\forall n, m \in \mathbb{N}$ tali che $n, m > n_\varepsilon$, si ha $\sup\{|f_n(x) - f_m(x)| \mid x \in B\} < \varepsilon$. Allora, se $n > n_\varepsilon$, si ha, $\forall x \in B$,

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m\to+\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \le \varepsilon.$$

Quindi è anche $\sup\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in B\} \le \varepsilon$. Pertanto la convergenza è uniforme. ■

2.1.7 Esempio. Consideriamo la successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, con

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = x^n\,,$$

già studiata nell'esempio 2.1.1. Abbiamo visto che la successione converge puntualmente in $]-1,1]$ alla funzione

$$f :]-1,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in]-1,1[\,, \\ 1, & \text{se } x = 1\,. \end{cases}$$

Si ha

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} |x|^n, & \text{se } x \in]-1,1[\,, \\ 0, & \text{se } x = 1\,. \end{cases}$$

Pertanto

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in]-1,1]\} = \sup\{|x|^n \mid x \in]-1,1[\} = 1\,,$$

quindi la convergenza non è uniforme.

Studiamo la convergenza di questa successione in un insieme diverso. Sia $r \in]0,1[$; si ha

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in [r, r]\} = \sup\{|x^n| \mid x \in [-r, r]\} = r^n\,.$$

Poiché $\lim_{n\to+\infty} r^n = 0$, la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente in $[-r, r]$. ◀

2.1.8 Esempio. Consideriamo la successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, con

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}\,,$$

già studiata nell'esempio 2.1.2. Abbiamo visto che la successione converge puntualmente in $\mathbb{R}$ alla funzione valore assoluto.

Si ha, $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$x^2 \leq x^2 + \frac{1}{n^2} \leq |x|^2 + 2|x|\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} = \left(|x| + \frac{1}{n}\right)^2,$$

pertanto $|x| \leq f_n(x) \leq |x| + (1/n)$, cioè $0 \leq f_n(x) - |x| \leq 1/n$. Risulta perciò

$$\sup\left\{\left|f_n(x) - |x|\right| \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\} \leq 1/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0;$$

pertanto $\sup\left\{\left|f_n(x) - |x|\right| \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\} \to 0$, quindi la convergenza è uniforme. ◄

Abbiamo visto che una successione di funzioni continue puntualmente convergente può avere limite discontinuo (v. esempio 2.1.1). Invece la convergenza uniforme, che per il teorema 2.1.4 è una condizione più restrittiva, assicura la continuità della funzione limite di una successione di funzioni continue. Vale infatti il seguente teorema.

2.1.9 Teorema (sulla continuità della funzione limite)

Siano $A \subseteq \mathbb{C}$, $B \subseteq A$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathscr{F}(A, \mathbb{C})$, $f : B \to \mathbb{C}$ e $c \in B$; se, $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n è continua in c e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f in B, allora f è continua in c.

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Sia $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che, $\forall n \in \mathbb{N}$ con $n > n_\varepsilon$, risulta $\sup\left\{\left|f_n(x) - f(x)\right| \,\middle|\, x \in B\right\} < \varepsilon$. Sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > n_\varepsilon$, allora, $\forall x \in B$, si ha

$$\begin{aligned} |f(x) - f(c)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(c)| + |f_n(c) - f(c)| \leq \\ &\leq \sup|f - f_n| + |f_n(x) - f_n(c)| + \sup|f_n - f| < 2\varepsilon + |f_n(x) - f_n(c)|. \end{aligned}$$

Poiché f_n è continua in c, esiste V_ε intorno di c tale che, se $x \in B \cap V\varepsilon \setminus \{c\}$, allora si ha $|f_n(x) - f_n(c)| < \varepsilon$, pertanto, per tali x, risulta $|f(x) - f(c)| < 3\varepsilon$.

Per l'arbitrarietà di ε questo prova che f è continua in c. ■

Nell'esempio 2.1.1 abbiamo visto che la funzione limite f della successione di funzioni $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ non è continua in 1. Esprimiamo la discontinuità di f in termini di limiti: risulta

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 0 = 0 \neq 1 = f(1).$$

Se indichiamo con f_n la funzione $x \mapsto x^n$, si ha $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$; quanto scritto sopra significa che

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) \neq \lim_{n\to+\infty} f_n(1),$$

cioè, poiché le f_n sono continue,

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) \neq \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to 1^-} f_n(x)\right).$$

Pertanto non è lecito scambiare l'ordine dei limiti in questa espressione.

Per assicurarsi che scambiando l'ordine dei limiti il risultato non cambi, bisogna richiedere la convergenza uniforme della successione di funzioni. Abbiamo infatti il teorema seguente.

2.1.10 Teorema (sullo scambio dei limiti)

Siano $A \subseteq \mathbb{C}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathscr{F}(A,\mathbb{C})$ e $c \in PL(A)$; se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è uniformemente convergente e, $\forall n \in \mathbb{N}$, esiste $\lim_{x\to c} f_n(x) \in \mathbb{C}$, allora esistono $\lim_{n\to+\infty}\big(\lim_{x\to c} f_n(x)\big)$ e $\lim_{x\to c}\big(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\big)$ e si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\lim_{x\to c} f_n(x)\Big) = \lim_{x\to c}\Big(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\Big).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $f : A \to \mathbb{C}$ la funzione limite uniforme di $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e, $\forall n \in \mathbb{N}$, sia $\ell_n = \lim_{x\to c} f_n(x)$. Dobbiamo dimostrare che esistono $\lim_{x\to c} f(x)$, $\lim_{n\to+\infty} \ell_n$ e che questi limiti coincidono.

Per il teorema sulla condizione di Cauchy uniforme 2.1.6, fissato $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che, $\forall n, m \in \mathbb{N}$ con $n, m > n_\varepsilon$ risulta $\sup|f_n - f_m| < \varepsilon$, quindi, per il teorema del confronto, si ha $\lim_{x\to c}\big|f_n(x) - f_m(x)\big| \leq \varepsilon$, cioè $|\ell_n - \ell_m| \leq \varepsilon$. Pertanto la successione $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy, quindi ha limite. Poniamo $\ell = \lim_{n\to+\infty} \ell_n$.

Dobbiamo dimostrare che $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$. Qualunque sia $x \in A$ risulta

$$\big|f(x) - \ell\big| \leq \big|f(x) - f_n(x)\big| + \big|f_n(x) - \ell_n\big| + |\ell_n - \ell|.$$

Fissiamo $n \in \mathbb{N}$ in modo che sia $\sup|f_n - f| < \varepsilon$ e $|\ell_n - \ell|\varepsilon$. Allora, $\forall x \in A$, si ha

$$\big|f(x) - \ell\big| \leq \varepsilon + \big|f_n(x) - \ell_n\big| + \varepsilon.$$

Poiché $f_n(x) \to \ell_n$, per $x \to c$, esiste un intorno V_ε di c tale che, se $x \in A \cap V_\varepsilon \setminus \{c\}$, risulta $|f_n(x) - \ell_n| < \varepsilon$. Pertanto, per tali x, si ha $\big|f(x) - \ell\big| < 3\varepsilon$. Quindi $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$. ∎

La successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ studiata negli esempi 2.1.2 e 2.1.8 converge uniformemente. Si verifica facilmente che ciascuna f_n è derivabile, ma il limite è la funzione valore assoluto, che non è derivabile in 0. Pertanto la convergenza uniforme di una successione di funzioni non assicura che, passando al limite, sia conservata la derivabilità. Per questo sono necessarie condizioni più forti, come risulta dal seguente teorema.

2.1.11 Teorema (sulla derivabilità della funzione limite)

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ e $f, g : I \to \mathbb{R}$; se, $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n è derivabile, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f e $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a g, allora f è derivabile e si ha $f' = g$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $c \in I$. Dobbiamo dimostrare che

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = g(c).$$

Poiché $g(c) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(c)$, ciò significa dimostrare che

$$\lim_{x\to c}\bigg(\lim_{n\to+\infty} \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c}\bigg) = \lim_{n\to+\infty}\bigg(\lim_{x\to c} \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c}\bigg).$$

Per il teorema sullo scambio dei limiti 2.1.10, è sufficiente dimostrare che, posto, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_n : I \setminus \{c\} \to \mathbb{C}, \qquad \varphi_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c},$$

la successione di funzioni $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente. Per il teorema sulla condizione di Cauchy uniforme 2.1.6 è sufficiente dimostrare che tale successione verifica la condizione di Cauchy uniforme.

Per $x \in I \setminus \{c\}$ e $\forall n, m \in \mathbb{N}$ si ha

$$\varphi_n(x) - \varphi_m(x) = \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} - \frac{f_m(x) - f_m(c)}{x - c} = \frac{\big(f_n(x) - f_m(x)\big) - \big(f_n(c) - f_m(c)\big)}{x - c},$$

pertanto, per il teorema di Lagrange applicato alla funzione $f_n - f_m$, esiste ξ, appartenente all'intervallo di estremi c e x, tale che $\varphi_n(x) - \varphi_m(x) = f_m'(\xi) - f_n'(\xi)$. Perciò, $\forall x \in \setminus\{c\}$, risulta $\left|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)\right| \leq \sup|f_n' - f_m'|$, quindi si ha $\sup|\varphi_n - \varphi_m| \leq \sup|f_n' - f_m'|$. La successione $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ è uniformemente convergente, quindi verifica la condizione di Cauchy uniforme, pertanto anche $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifica la condizione di Cauchy uniforme.

Questo prova il teorema. ■

2.1.12 Osservazione. In questo teorema si richiede la convergenza uniforme della successione delle derivate, ma solo la convergenza puntuale della successione studiata. Queste condizioni implicano la convergenza uniforme della successione studiata, se l'intervallo I è limitato.

Infatti fissato $c \in I$; $\forall n \in \mathbb{N}$, il teorema di Lagrange assicura che, $\forall x \in I \setminus \{c\}$, esiste ξ compreso tra c e x tale che

$$\big(f_n(x) - f(x)\big) - \big(f_n(c) - f(c)\big) = \big(f_n'(\xi) - f'(\xi)\big)(x - c),$$

quindi

$$\big(f_n(x) - f(x)\big) = \big(f_n(c) - f(c)\big) + \big(f_n'(\xi) - g(\xi)\big)(x - c).$$

Pertanto

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| \leq \left|f_n(c) - f(c)\right| + \sup|f_n' - g|\,|x - c|,$$

Se I è limitato, allora $\{|x - c| \mid x \in I\}$ è limitato; indichiamo con M il suo estremo superiore. Risulta

$$\sup|f_n - f| \leq \left|f_n(c) - f(c)\right| + M \sup|f_n' - g|.$$

Poiché $\left|f_n(c) - f(c)\right| + M \sup|f_n' - g| \to 0$, questo prova che $\sup|f_n - f| \to 0$, cioè $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f. ◀

2.1.13 Esempio. Consideriamo la successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, con

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}},$$

già studiata negli esempi 2.1.2 e 2.1.8. Abbiamo visto che la successione converge uniformemente alla funzione valore assoluto.

Le funzioni f_n sono derivabili, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, e, $\forall x \in \mathbb{R}$, si ha

$$f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1/n^2}}.$$

Risulta $f_n'(0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, mentre se $x \neq 0$ si ha

$$f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2\bigl(1 + (1/n^2x^2)\bigr)}} = \frac{x}{|x|\sqrt{1 + (1/n^2x^2)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{x}{|x|} = \operatorname{sgn}(x).$$

Pertanto la successione $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge puntualmente alla funzione sgn.

La convergenza non è uniforme, perché in tal caso, per il teorema sulla derivabilità della funzione limite 2.1.11, la funzione limite sarebbe derivabile. Ciò è confermato dal fatto che, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, risulta

$$\lim_{x\to0^+} |f_n'(x) - \operatorname{sgn}(x)| = \lim_{x\to0^+} \left| \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1/n^2}} - 1 \right| = 1,$$

quindi si ha $\sup|f_n' - \operatorname{sgn}| \geq 1$. ◀

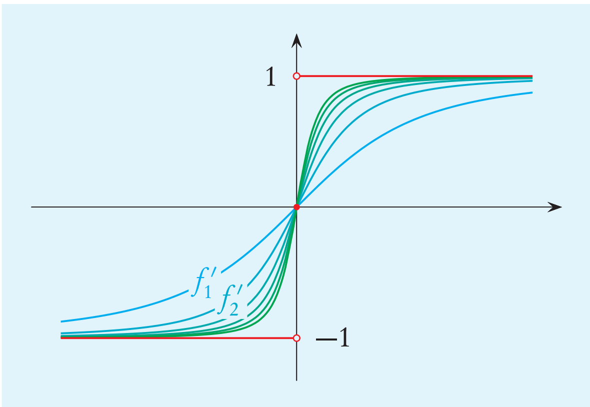


Figura 2.1.5
La successione di funzioni $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ studiata nell'esempio 2.1.13.
In rosso la funzione limite puntuale della successione.

Consideriamo una successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathscr{F}\bigl([a,b],\mathbb{R}\bigr)$, convergente puntualmente a $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$; supposto che ognuna delle f_n e la f siano integrabili, ci chiediamo se risulta

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Affinché questo sia vero non è sufficiente la convergenza puntuale, ma bisogna richiedere la convergenza uniforme.

2.1.14 Esempio. Consideriamo la successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, con

$$f_n\colon[0,1]\to\mathbb{R}, \qquad f_n(x) = n^2x^n(1-x),$$

Si ha, $\forall x \in [0,1[$, $n^2x^n \to 0$, quindi $f_n(x) \to 0$, inoltre, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, si ha $f_n(1) = 0$. Pertanto la successione converge puntualmente alla funzione identicamente nulla.

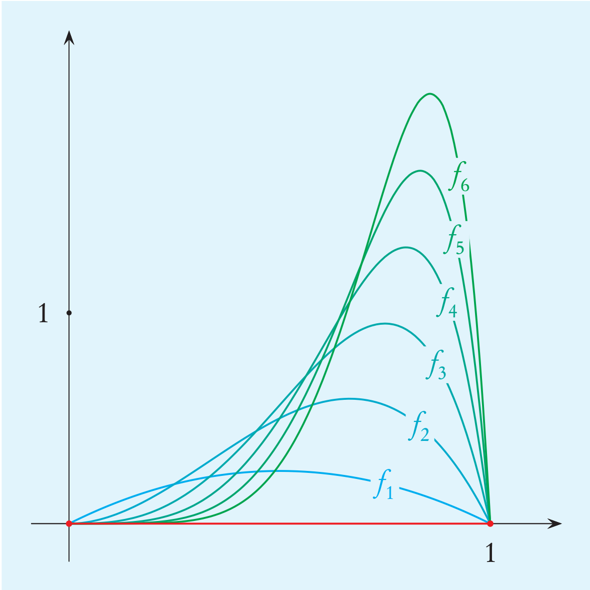


Figura 2.1.6
La successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ studiata nell'esempio 2.1.14.
In rosso la funzione limite puntuale della successione.

Studiamo la convergenza uniforme; per questo determiniamo $\sup|f_n|$. Per $n \in \mathbb{N}^*$ la funzione f_n è derivabile, non negativa e si annulla in 0 e in 1. Pertanto, per il teorema di Weierstrass, ha massimo, che viene assunto in un punto interno al dominio e, per il teorema di Fermat, in tale punto f_n' si annulla. Cerchiamo gli zeri di f_n' appartenenti a $]0,1[$. Si ha $\forall x \in]0,1[$,

$$f_n'(x) = n^2(nx^{n-1} - (n+1)x^n) = n^2 x^{n-1}\big(n - (n+1)x\big).$$

Pertanto per $x \in]0,1[$ si ha $f_n'(x) = 0$ se e solo se $n - (n+1)x$, cioè $x = n/(n+1)$. Quindi

$$\sup|f_n - 0| = \max f_n = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = n^2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} = n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Poiché $\lim_{n\to+\infty}\big(n/(n+1)\big)^{n+1} = 1/e$, si ha $\lim_{n\to+\infty}\sup|f_n - 0| = +\infty$, quindi la convergenza non è uniforme.

Si ha

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 n^2(x^n - x^{n+1})\,dx = n^2\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1} - \frac{1}{n+2}x^{n+2}\right]_0^1 =$$
$$= n^2\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Poiché

$$\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0,$$

risulta $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx$. ◀

2.1.15 Teorema (di passaggio al limite sotto il segno di integrale)

Siano $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathscr{F}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ e $f:[a,b]\to\mathbb{R}$; se, $\forall n\in\mathbb{N}$, f_n è integrabile secondo Riemann e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f, allora f è integrabile secondo Riemann e si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx\,.$$

Dimostrazione. Sia $A\subseteq[a,b]$. Si ha, $\forall x\in A$,

$$f(x)=f_n(x)+\big(f(x)-f_n(x)\big)\le f_n(x)+\big|f(x)-f_n(x)\big|\le\sup_A f_n+\sup_A|f-f_n|;$$

quindi

$$\sup_A f\le\sup_A f_n+\sup_A|f-f_n|\,.$$

Sia $\sigma=\{x_0,x_1,\ldots,x_p\}$, con $a=x_0<x_1<\cdots<x_p=b$, una scomposizione di $[a,b]$. Dalla disuguaglianza precedente segue che, $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}S(f,\sigma)&=\sum_{k=1}^{p}\sup_{[x_{k-1},x_k]}f\,(x_k-x_{k-1})\le\sum_{k=1}^{p}\Big(\sup_{[x_{k-1},x_k]}f_n+\sup_{[x_{k-1},x_k]}|f-f_n|\Big)(x_k-x_{k-1})=\\&=\sum_{k=1}^{p}\sup_{[x_{k-1},x_k]}f_n\,(x_k-x_{k-1})+\sum_{k=1}^{p}\sup_{[x_{k-1},x_k]}|f-f_n|\,(x_k-x_{k-1})\le\\&\le S(f_n,\sigma)+\sup_{[a,b]}|f-f_n|\,(b-a)\,.\end{aligned}$$

Passando all'estremo inferiore rispetto a σ, da qui segue

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx\le\int_a^b f_n(x)\,dx+\sup_{[a,b]}|f_n-f|\,(b-a)\,. \tag{2.1.1}$$

In modo analogo si prova che

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx\ge\int_a^b f_n(x)\,dx-\sup_{[a,b]}|f_n-f|\,(b-a)\,. \tag{2.1.2}$$

Pertanto

$$0\le\overline{\int_a^b} f(x)\,dx-\underline{\int_a^b} f(x)\,dx\le 2\sup_{[a,b]}|f_n-f|\,(b-a);$$

poiché $2\sup_{[a,b]}|f_n-f|\,(b-a)\to0$, d qui segue

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx-\underline{\int_a^b} f(x)\,dx=0,$$

quindi f è integrabile.

Dalle uguaglianze (2.1.1) e (2.1.2) segue

$$\int_a^b f(x)\,dx - \sup_{[a,b]}|f_n - f|\,(b-a) \le \int_a^b f_n(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx + \sup_{[a,b]}|f_n - f|\,(b-a),$$

quindi

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,. \qquad \blacksquare$$

2.1.2 Serie di funzioni

Ogni successione in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{C}$ è la successione dei termini di una serie numerica; in modo del tutto analogo, a ogni successione di funzioni possiamo associare una serie di funzioni.

Definizione di serie di funzioni

Siano $A \subseteq \mathbb{C}$ e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathscr{F}(A,\mathbb{C})$. Chiamiamo **serie di funzioni** di **termini** f_n la successione di funzioni $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definita ponendo

$$s_n : A \to \mathbb{C}, \qquad s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\,.$$

Chiamiamo **somma parziale della serie** ciascuna delle funzioni s_n e indichiamo la serie col simbolo $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

Le nozioni di convergenza puntuale e uniforme definite per le successioni di funzioni si trasportano alle serie di funzioni, richiedendo che le definizioni siano verificate dalla successione delle somme parziali. Abbiamo quindi le seguenti definizioni.

Definizione di serie di funzioni convergente puntualmente

Siano $A \subseteq \mathbb{C}$, $B \subseteq A$ e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathscr{F}(A,\mathbb{C})$. Diciamo che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ **converge puntualmente** in B quando la successione delle somme parziali $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente in B. In tal caso chiamiamo **somma della serie** la funzione

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n : B \to \mathbb{C}, \qquad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)(x) = \lim_{n\to+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} f_k\Big)_{n\in\mathbb{N}}(x)\,.$$

Quando $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge puntualmente in A diciamo che $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ **converge puntualmente.**

Definizione di serie di funzioni convergente uniformemente

Siano $A \subseteq \mathbb{C}$, $B \subseteq A$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathscr{F}(A,\mathbb{C})$ e $f: B \to \mathbb{C}$. Diciamo che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ **converge uniformemente** a f in B quando la successione delle somme parziali $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f in B.

Quando $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente in A diciamo che $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformemente**.

La convergenza a 0 del termine n-esimo è condizione necessaria per la convergenza di una serie numerica, pertanto una condizione necessaria per la convergenza puntuale di una serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ in B è che, $\forall x \in B$, sia $f_n(x) \to 0$; cioè che la successione dei termini converga puntualmente a 0. Analogamente, una condizione necessaria per la convergenza uniforme di una serie di funzioni è la convergenza uniforme a 0 dei termini della serie, come affermato dal seguente teorema.

2.1.16 Teorema (condizione necessaria per la convergenza uniforme di una serie di funzioni)

Siano $A \subseteq \mathbb{C}$, $B \subseteq A$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ una serie in $\mathscr{F}(A,\mathbb{C})$. Se $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente in B, allora $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a 0 in B.

Dimostrazione. Indichiamo con s la somma della serie e, $\forall n \in \mathbb{N}$, con s_n la somma parziale n-sima; si ha, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ e $\forall x \in B$,

$$|f_n(x)| = |s_n(x) - s_{n-1}(x)| \leq |s_n(x) - s(x)| + |s(x) - s_{n-1}(x)| \leq \sup_B |s_n - s| + \sup_B |s - s_{n-1}|;$$

pertanto

$$\sup_B |f_n| \leq \sup_B |s_n - s| + \sup_B |s - s_{n-1}| \to 0.$$

Quindi la successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a 0 in B. ■

Come nel caso delle serie numeriche, la condizione non è sufficiente per la convergenza uniforme di una serie di funzioni. Per rendersi conto di questo si può considerare una serie numerica $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, non convergente, ma con il termine n-simo che tende a 0. Allora la successione delle funzioni da $\mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$ che valgono costantemente a_n non converge, ma il termine n-simo tende uniformemente a 0.

I teoremi 2.1.6, 2.1.9, 2.1.10, 2.1.11 e 2.1.15 hanno i seguenti analoghi per le serie di funzioni. Si dimostrano facilmente applicando alle serie i teoremi citati.

2.1.17 Teorema (sulla condizione di Cauchy uniforme)

Siano $A \subseteq \mathbb{C}$, $B \subseteq A$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ una serie in $\mathscr{F}(A,\mathbb{C})$. La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente in B se e solo se

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \colon \forall m,n \in \mathbb{N}, \quad m > n > n_\varepsilon \implies \sup_B \left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k \right| < \varepsilon.$$

2.1.18 Teorema (sulla continuità della somma di una serie di funzioni)

Siano $A \subseteq \mathbb{C}$, $B \subseteq A$, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ una serie in $\mathscr{F}(A,\mathbb{C})$ e $c \in B$; se, $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n è continua in c e $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente in B, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ è continua in c.

2.1.19 Teorema (sul passaggio al limite termine a termine)

Siano $A \subseteq \mathbb{C}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ una serie in $\mathscr{F}(A,\mathbb{C})$ e $c \in PL(A)$; se $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente e, $\forall n \in \mathbb{N}$, esiste $\lim_{x\to c} f_n(x) \in \mathbb{C}$, allora $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{x\to c} f_n(x)\right)$ converge, esiste $\lim_{x\to c}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)$ e si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{x\to c} f_n(x)\right) = \lim_{x\to c}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right).$$

2.1.20 Teorema (di derivazione termine a termine)

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ una serie in $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$; se, $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n è derivabile, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge puntualmente e $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$ converge uniformemente, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ è derivabile e si ha

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'.$$

2.1.21 Teorema (di integrazione termine a termine)

Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ una serie in $\mathscr{F}([a,b],\mathbb{R})$; se, $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n è integrabile secondo Riemann e $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ è integrabile secondo Riemann e si ha

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Definiamo un altro tipo di convergenza per le serie, che implica la convergenza uniforme e solitamente è di verifica più semplice.

Definizione di serie di funzioni convergente totalmente

Siano $A \subseteq \mathbb{C}$, $B \subseteq A$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ una serie in $\mathscr{F}(A,\mathbb{C})$, tale che, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n|_B$ è limitata. Diciamo che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ **converge totalmente** in B quando converge la serie numerica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sup\left\{ |f_n(x)| \,\middle|\, x \in B \right\}.$$

Quando $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge totalmente in A diciamo che **converge totalmente**.

2.1.22 Osservazione. Solitamente non è semplice determinare l'estremo superiore di una funzione, ma per stabilire la convergenza totale di una serie di funzioni non è necessario determinare l'estremo superiore dei suoi termini. Infatti, se, $\forall n \in \mathbb{N}$, $M_n \in \mathbb{R}^+$ è tale che $M_n \geq \sup_B |f_n|$ e la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} M_n$ è convergente, allora, per il criterio del confronto, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_B |f_n|$ è convergente, quindi $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge totalmente in B. ◀

2.1.23 Teorema (criterio di Weierstrass[11])

Siano $A \subseteq \mathbb{C}$, $B \subseteq A$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ una serie in $\mathscr{F}(A, \mathbb{C})$, tale che, $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n è limitata in B. Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge totalmente in B, allora essa converge uniformemente in B.

Dimostrazione. Siano $m, n \in \mathbb{N}$, con $m > n$; allora, $\forall x \in B$, si ha

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \sup_B |f_k|,$$

quindi

$$\sup_B \left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \sup_B |f_k|. \tag{2.1.3}$$

Poiché la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_B |f_n|$ è convergente, la successione delle somme parziali è di Cauchy, quindi, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che, per $m > n > n_\varepsilon$, si ha $\sum_{k=n+1}^{m} \sup_B |f_k| < \varepsilon$. Allora, per la disuguaglianza (2.1.3), $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ verifica la condizione di Cauchy uniforme in B, quindi, per il teorema 2.1.17, è uniformemente convergente. ■

2.1.24 Esempio. Consideriamo la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ con

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{1}{n^2} \sin(nx).$$

Poiché la funzione seno ha immagine $[-1, 1]$, si ha, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\max|f_n| = 1/n^2$. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2$ è convergente, pertanto la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ è totalmente convergente, quindi, per il criterio di Weierstrass 2.1.23, è uniformemente convergente. ◀

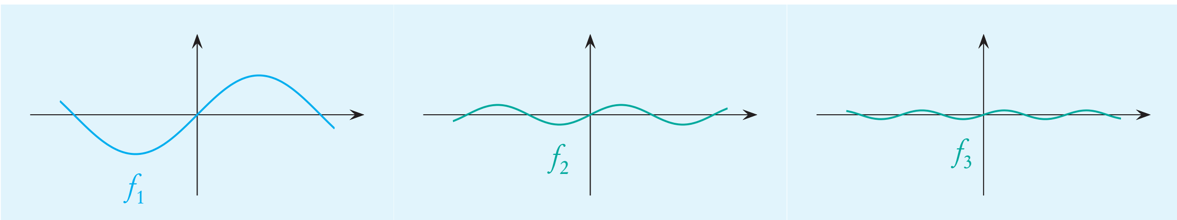


Figura 2.1.7
La successione di funzioni $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ studiata nell'esempio 2.1.24.

[11] Il criterio prende il nome da Karl Weierstrass (Ostenfelde, Germania, 1815 - Berlino, 1897) che, nel 1841, diede la definizione di convergenza uniforme e utilizzò il criterio. Weierstrass diede molti contributi a vari settori dell'analisi, soprattutto alla teoria delle funzioni di variabile complessa.

Il criterio di Weierstrass fornisce una condizione sufficiente per l'uniforme convergenza di una serie di funzioni. La condizione non è necessaria, come mostra il seguente esempio.

2.1.25 Esempio. Consideriamo la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ con

$$f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = x\chi_{]1/(n+1),1/n]}(x).$$

Si ha, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sup|f_n| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

Poiché la serie armonica è divergente, la serie considerata non è totalmente convergente.

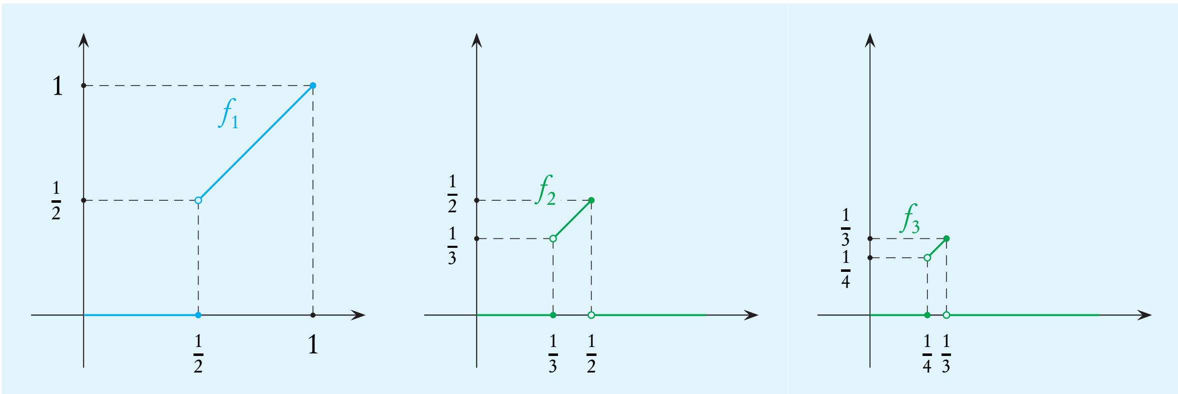


Figura 2.1.8
La successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ studiata nell'esempio 2.1.25.

Evidentemente, qualunque sia $x \in\,]0,1]$, solo un termine della serie è diverso da 0 e tale termine è uguale a x, quindi $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = x$. Se $x = 0$ tutti i termini i della serie sono nulli, quindi la serie converge a 0. Pertanto la serie converge puntualmente alla funzione $x \mapsto x$.

Inoltre

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = x\sum_{k=1}^{n} \chi_{]1/(k+1),1/k]}(x) = x\chi_{I_n}(x),$$

dove

$$I_n = \bigcup_{k=1}^{n} \left]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right] = \left]\frac{1}{n+1}, 1\right].$$

Pertanto $x - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = x\chi_{[0,1/(n+1)]}(x)$; quindi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, si ha

$$\sup_{x\in[0,1]} \left|x - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| = \sup_{x\in[0,1]} |x\chi_{[0,1/(n+1)]}(x)| = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Perciò la serie converge assolutamente. ◀

2.2 Serie di potenze

Consideriamo ora serie del tipo $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-c)^n$, cioè serie in cui il termine n-simo è della forma $a_n (z-c)^n$. Tali serie sono chiamate "serie di potenze" e possono essere considerate come "polinomi di grado infinito". Risulta naturale studiare tali serie in ambito complesso, cioè considerare i termini della serie come funzioni di variabile complessa a valori complessi.

Per semplificare l'esposizione, in questa sezione, per $c \in \mathbb{C}$ e $r \in \mathbb{R}^+$ poniamo

$$S(c,r) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-c| < r\}, \qquad \overline{S}(c,r) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-c| \leq r\}.$$

Pertanto $S(c,r)$ è la sfera aperta di centro c e raggio r per la distanza su $\mathbb{C}$ definita dal modulo, $\overline{S}(c,r)$ è la chiusura della sfera aperta.

Definizione di serie di potenze

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{C}$ e $c \in \mathbb{C}$. Chiamiamo **serie di potenze** di **punto iniziale** c e **coefficienti** a_n la serie di funzioni, di dominio $\mathbb{C}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-c)^n$.

2.2.1 Esempio. La **serie geometrica**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

è un esempio di serie di potenze. In questo caso il punto iniziale è 0; i coefficienti sono tutti uguali a 1.

Se $|z| \geq 1$ il termine n-simo della serie non tende a 0, quindi la serie non converge. Se $|z| < 1$ la serie converge e si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} z^k = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z}. \quad \blacktriangleleft$$

Studiamo la convergenza, puntuale e uniforme, di una serie di potenze. Per tale scopo è utile il seguente teorema.

2.2.2 Teorema (lemma di Abel[12])

Siano $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-c)^n$ una serie di potenze in $\mathbb{C}$ e $z_0, z_1 \in \mathbb{C} \setminus \{c\}$;

I) se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z_0-c)^n$ converge, allora, $\forall z \in S(c, |z_0-c|)$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-c)^n$ converge assolutamente;

II) se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z_1-c)^n$ non converge, allora, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \overline{S}(c, |z_1-c|)$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-c)^n$ non converge.

[12] Il lemma prende il nome da Niels Henrik Abel (Finnøy, Norvegia, 1802 - Froland, Norvegia, 1829) che lo enunciò in un articolo del 1826. Abel diede fondamentali contributi allo studio dell'algebra e della teoria delle funzioni.

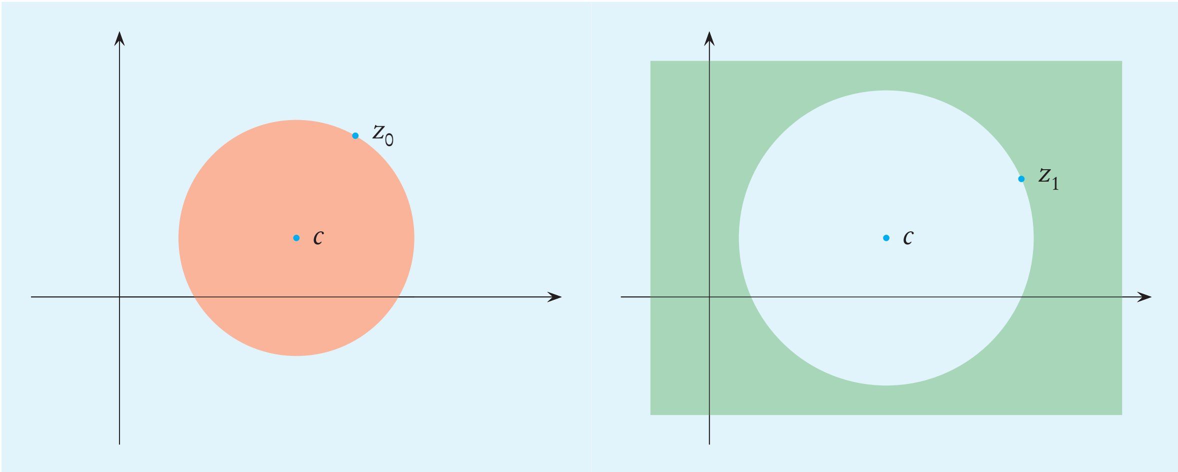


Figura 2.2.1
Illustrazione del lemma di Abel 2.2.2. Se una serie di potenze di centro c converge in z_0, allora la serie converge all'interno della circonferenza di centro c passante per z_0 (cerchio in rosso). Se una serie di potenze di centro c non converge in z_1, allora la serie non converge all'esterno della circonferenza di centro c passante per z_1 (parte di piano in verde).

Dimostrazione. Per semplificare l'esposizione dimostriamo il teorema nel caso $c = 0$. Il caso generale si prova con ovvie modifiche.

I) Poiché la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$ è convergente, la successione $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0, quindi è limitata; poniamo $M = \sup\{|a_n z_0^n| \mid n \in \mathbb{N}\}$. Se $z \in \mathbb{C}$ è tale che $|z| < |z_0|$, allora, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \frac{|z|^n}{|z_0|^n} \leq M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n .$$

Poiché $|z/z_0| < 1$, la serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} |z/z_0|^n$ è convergente (v. esempio 2.2.1), pertanto, per il criterio del confronto, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ è assolutamente convergente.

II) Sia $|z| > |z_1|$. Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ fosse convergente, allora, per l'affermazione I, anche $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_1^n$ sarebbe convergente, contrariamente all'ipotesi fatta. Pertanto $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ non converge. ■

Da questo teorema segue che, se si sa che una serie di potenze converge in un punto z che dista r dal punto iniziale, allora la serie converge all'interno del cerchio di raggio r centrato nel punto iniziale. Quindi tanto più z è lontano dal punto iniziale, quanto più grande è il cerchio in cui è assicurata la convergenza. Perciò ha interesse conoscere fino a che distanza dal punto iniziale si ha convergenza. Risulta quindi naturale la seguente definizione.

Definizione di raggio di convergenza di una serie di potenze

Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-c)^n$ una serie di potenze in $\mathbb{C}$; chiamiamo **raggio di convergenza** della serie il numero reale esteso

$$R = \sup\left\{|z-c| \,\middle|\, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-c)^n \text{ converge}\right\}.$$

A parole: il raggio di convergenza di una serie di potenze è l'estremo superiore dell'insieme delle distanze dal punto iniziale dei numeri complessi z per i quali la serie converge.

Dalla definizione segue immediatamente che il raggio di convergenza di una serie di potenze appartiene a $[0,+\infty]$.

2.2.3 Esempio. Consideriamo la serie di potenze di punto iniziale 0

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^n ,$$

dove $a \in \mathbb{C}^*$.

Poiché $a^n z^n = (az)^n$, si ha una serie geometrica. La serie converge se e solo se $|az| < 1$ (v. esempio 2.2.1), cioè $|z| < 1/|a|$. Quindi il raggio di convergenza è $1/|a|$. ◀

2.2.4 Esempio. Consideriamo la serie di potenze di punto iniziale 0

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n .$$

Si ha, $\forall z \in \mathbb{C}^*$,

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{z^{n+1}/(n+1)!}{z^n/n!} \right| \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{z^{n+1}}{z^n} \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{z}{n+1} \right| = 0;$$

pertanto, per il criterio del rapporto asintotico, la serie converge. Perciò la serie converge in $\mathbb{C}$, quindi il raggio di convergenza è $+\infty$. ◀

2.2.5 Esempio. Consideriamo la serie di potenze di punto iniziale 0

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n! z^n .$$

Si ha, $\forall z \in \mathbb{C}^*$,

$$\lim_{n\to+\infty} |n! z^n| = \lim_{n\to+\infty} n! |z|^n = +\infty ,$$

pertanto il termine n-simo della serie non tende a 0, quindi la serie non converge. Perciò la serie converge se e solo se $z = 0$, quindi il raggio di convergenza è 0. ◀

Vediamo quali informazioni si ottengono dalla conoscenza del raggio di convergenza.

2.2.6 Teorema

Siano $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-c)^n$ una serie di potenze in $\mathbb{C}$ e R il suo raggio di convergenza.

I) Se $R = 0$, allora la serie converge solo in c.

II) Se $R \in \mathbb{R}^+$, allora la serie dei moduli converge puntualmente in $S(c,R)$ e la serie non converge in z se $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{S}(c,R)$; inoltre, qualunque sia $r \in]0,R[$, la serie converge totalmente in $\overline{S}(c,r)$.

III) Se $R = +\infty$, allora la serie dei moduli converge puntualmente in $\mathbb{C}$; inoltre, qualunque sia $r \in \mathbb{R}^+$, la serie converge totalmente in $\overline{S}(c,r)$.

DIMOSTRAZIONE. Per semplificare l'esposizione dimostriamo il teorema nel caso $c = 0$. Il caso generale si prova con ovvie modifiche.

I) Segue immediatamente dalla definizione di raggio di convergenza.

II) Sia $z \in \mathbb{C}$.

Se $|z| < R$, allora, per definizione di raggio di convergenza, $\exists z_0 \in \mathbb{C}$, con $|z_0| > |z|$, tale che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$ converge; quindi, per il lemma di Abel 2.2.2, affermazione I, anche $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge assolutamente.

Se $|z| > R$, allora la serie non converge in z, per definizione di raggio di convergenza.

Sia $r < R$. Evidentemente, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $\sup\{|a_n z^n| \mid |z| \le r\} = |a_n| r^n$; per quanto appena dimostrato $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n$ converge. Perciò la serie converge totalmente in $\overline{S}(0, r)$.

III) Sia $z \in \mathbb{C}$. Per definizione di raggio di convergenza $\exists z_0 \in \mathbb{C}$, con $|z_0| > |z|$, tale che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$ converge; allora, per il lemma di Abel 2.2.2, affermazione I, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge assolutamente.

La dimostrazione della convergenza totale in $\overline{S}(0, r)$, $\forall r \in \mathbb{R}^+$, è del tutto analoga a quella relativa all'affermazione II. ■

Se il raggio di convergenza è $R \in \mathbb{R}^+$, allora la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-c)^n$ converge nel cerchio aperto $S(c,R)$ e non converge fuori dal cerchio chiuso $\overline{S}(c,R)$. Non si può dire nulla sulla convergenza nella circonferenza di centro c e raggio R, cioè nell'insieme $\partial S(c,R)$. I seguenti esempi mostrano che si può avere convergenza in ogni punto della circonferenza, oppure in nessun punto, oppure solo in alcuni punti.

2.2.7 Esempio. Nell'esempio 2.2.1 abbiamo visto che la serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ converge se e solo se $|z| < 1$.

Quindi la serie ha raggio di convergenza 1 e non converge nei punti di $\partial S(0, 1)$. ◀

2.2.8 Esempio. Consideriamo la serie di potenze di punto iniziale 0

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} z^n .$$

Se $|z| \le 1$ si ha, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|z^n/n^2| \le 1/n^2$, pertanto la serie dei moduli si maggiora con la serie armonica generalizzata di esponente 2 che è convergente. Per il criterio del confronto la serie converge.

Se $|z| > 1$, allora $|z^n/n^2| \to +\infty$, per $n \to +\infty$, perciò la serie non converge.

Quindi la serie ha raggio di convergenza 1 e converge in ogni punto di $\partial S(0, 1)$. ◀

2.2.9 Esempio. Consideriamo la serie di potenze di punto iniziale 0

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} z^n .$$

Per $z = 1$ si ha la serie armonica che non converge, quindi il raggio di convergenza è minore o uguale a 1. Per $|z| < 1$, la serie dei valori assoluti si maggiora con la serie geometrica $\sum_{n=1}^{+\infty} |z|^n$ che converge, per il criterio del rapporto la serie studiata converge, quindi il raggio di convergenza è maggiore o uguale a 1. Pertanto il raggio di convergenza è 1.

Studiamo la convergenza della serie in $z \in \partial S(0,1) \setminus \{1\}$. Il termine n-simo della serie è prodotto di z^n per $1/n$. La successione $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ è decrescente e infinitesima. Per $n \in \mathbb{N}^*$ si ha

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z^k\right| = \left|z \sum_{k=0}^{n-1} z^k\right| = \left|z\,\frac{z^n-1}{z-1}\right| \le |z|\,\frac{|z^n|+1}{|z-1|} = \frac{2}{|z-1|}\,;$$

pertanto la successione delle somme parziali della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} z^n$ è limitata. Allora, per il criterio di Dirichlet, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(1/n)z^n$ è convergente.

Quindi la serie ha raggio di convergenza 1, non converge in $z=1$ e converge negli altri punti di $\partial S(0,1)$. ◀

Il teorema 2.2.6 assicura la convergenza totale, e quindi uniforme, di una serie di potenze in ogni cerchio di raggio più piccolo del raggio di convergenza. In alcuni casi si ha convergenza uniforme anche in insiemi che raggiungono il bordo del cerchio di convergenza, come mostra il seguente teorema.

2.2.10 Teorema (di Abel[13])

Siano $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-c)^n$ una serie di potenze in $\mathbb{C}$ e $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{c\}$. Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z_0-c)^n$ converge, allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-c)^n$ converge uniformemente in $\big\{c+t(z_0-c) \,\big|\, t\in[0,1]\big\}$.

Osserviamo che $\big\{c+t(z_0-c) \,\big|\, t\in[0,1]\big\}$ è il segmento di estremi il punto iniziale della serie di potenze e z_0.

Il teorema ha interesse se $|z_0-c|=R$ (dove R è il raggio di convergenza), perché se risulta $|z_0-c|<R$ la tesi segue subito dal teorema 2.2.6.

Dimostrazione. Per semplificare l'esposizione dimostriamo il teorema nel caso $c=0$. Il caso generale si prova con ovvie modifiche.

Se $t \in [0,1[$, allora si ha $|tz_0| < |z_0|$, quindi, per il lemma di Abel 2.2.2, la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (tz_0)^k$ è convergente. Indichiamo con s_n la somma parziale n-sima della serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z_0^k$; allora, $\forall t\in[0,1]$ e $\forall m,n\in\mathbb{N}$, con $m>n$, si ha

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{m} a_k\, z_0^k t^k &= \sum_{k=n+1}^{m} (s_k - s_{k-1})t^k = \sum_{k=n+1}^{m} (s_k - s_n)t^k - \sum_{k=n+1}^{m} (s_{k-1} - s_n)t^k = \\
&= \sum_{k=n+1}^{m} (s_k - s_n)t^k - \sum_{k=n}^{m-1} (s_k - s_n)t^{k+1} = \\
&= \sum_{k=n+1}^{m} (s_k - s_n)t^k - \left(\sum_{k=n+1}^{m} (s_k - s_n)t^{k+1} - (s_m - s_n)t^{m+1}\right) = \\
&= \sum_{k=n+1}^{m} \Big((s_k - s_n)t^k - (s_k - s_n)t^{k+1}\Big) + (s_m - s_n)t^{m+1} =
\end{aligned}$$

[13] Il teorema prende il nome dal già citato Niels Henrik Abel (v. nota 12) che lo enunciò nel 1826 insieme al lemma di Abel.

$$= \sum_{k=n+1}^{m} (s_k - s_n)t^k(1-t) + (s_m - s_n)t^{m+1}\,.$$

Pertanto risulta

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\,(t z_0)^k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |s_k - s_n| t^k (1-t) + |s_m - s_n| t^{m+1}\,.$$

La successione delle somme parziali $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente, quindi è limitata, pertanto risulta $\sup\big\{|s_k - s_n| \,\big|\, k \geq n+1\big\} < +\infty$; indichiamo con M_n tale estremo superiore. Quindi risulta

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\,(t z_0)^k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} M_n t^k(1-t) + M_n t^{m+1} = M_n\Big(\sum_{k=n+1}^{m} t^k(1-t) + t^{m+1}\Big).$$

Si ha

$$\sum_{k=n+1}^{m} t^k(1-t) + t^{m+1} = \sum_{k=n+1}^{m} t^k - \sum_{k=n+1}^{m} t^{k+1} + t^{m+1} = \sum_{k=n+1}^{m} t^k - \sum_{k=n+2}^{m+1} t^k + t^{m+1} = t^{n+1}\,;$$

pertanto

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\,(t z_0)^k\right| \leq M_n t^{n+1} \leq M_n\,.$$

Quindi si ha

$$\sup\left\{\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\,(t z_0)^k\right| \,\middle|\, t \in [0,1]\right\} \leq M_n\,.$$

La successione delle somme parziali $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente, quindi è di Cauchy, pertanto $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che, se $m > n > n_\varepsilon$, si ha $|s_m - s_n| < \varepsilon$; pertanto, se $n > n_\varepsilon$, risulta

$$M_n = \sup\big\{|s_k - s_n| \,\big|\, k \geq n+1\big\} \leq \varepsilon\,.$$

Allora, per tali n , si ha anche

$$\sup\left\{\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\,(t z_0)^k\right| \,\middle|\, t \in [0,1]\right\} \leq \varepsilon\,;$$

per la condizione di Cauchy uniforme 2.1.17, da qui segue la convergenza uniforme. ■

Enunciamo due teoremi che consentono di determinare il raggio di convergenza di una serie di potenze.

Il primo può essere utilizzato per qualunque serie di potenze, il secondo può essere utilizzato solo per alcune serie di potenze con coefficienti diversi da 0; questo secondo criterio, in numerosi casi in cui può essere applicato, risulta di verifica più semplice del primo.

2.2.11 Teorema (di Cauchy-Hadamard[14])

Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-c)^n$ una serie di potenze in $\mathbb{C}$. Posto

$$L = \max\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

allora il raggio di convergenza della serie di potenze è $R = 1/L$, con la convenzione che sia $R = 0$ se $L = +\infty$ e $R = +\infty$ se $L = 0$.

Dimostrazione. Per semplificare l'esposizione dimostriamo il teorema nel caso $c = 0$. Il caso generale si prova con ovvie modifiche.

Indicato con R il raggio di convergenza, dimostriamo il teorema provando che si ha sia $R \geq 1/L$ che $R \leq 1/L$.

Proviamo anzitutto che si ha $R \geq 1/L$. Ciò è ovvio se $L = +\infty$, quindi supponiamo $L < +\infty$ e sia $z \in \mathbb{C}^*$ tale che $L|z| < 1$. Fissiamo $M \in \left]L, 1/|z|\right[$. Poiché

$$\lim_{n\to+\infty} \sup\left\{ \sqrt[m]{|a_m|} \,\middle|\, m \geq n \right\} = \max\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < M,$$

per il teorema della permanenza del segno, $\exists \overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che, se $n > \overline{n}$, allora si ha $\sup\left\{ \sqrt[m]{|a_m|} \,\middle|\, m \geq n \right\} < M$, quindi se $n > \overline{n}$, allora $\sqrt[n]{|a_n|} < M$. Per tali n risulta

$$|a_n z^n| = |a_n||z|^n < \left(M|z|\right)^n;$$

poiché $M|z| < 1$ la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(M|z|\right)^n$ è convergente, quindi, per il criterio del confronto, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ è assolutamente convergente, quindi è convergente. Pertanto se $L = 0$, allora la serie data converge $\forall z \in \mathbb{C}$, mentre se $L \in \mathbb{R}^+$ la serie data converge se $|z| < 1/L$, quindi $R \geq 1/L$.

Proviamo ora ora che si ha $R \leq 1/L$. Ciò è ovvio se $L = 0$, quindi supponiamo che sia $L > 0$ e sia $z \in \mathbb{C}^*$ tale che $L|z| > 1$. Fissiamo $M \in \left]1/|z|, L\right[$. Poiché

$$\lim_{n\to+\infty} \sup\left\{ \sqrt[m]{|a_m|} \,\middle|\, m \geq n \right\} = \max\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > M,$$

per il teorema della permanenza del segno, $\exists \overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che, se $n > \overline{n}$, allora si ha $\sup\left\{ \sqrt[m]{|a_m|} \,\middle|\, m \geq n \right\} > M$, cioè esiste $m_n \geq n$ tale che $\sqrt[m_n]{|a_{m_n}|} > M$. Per tali m_n si ha

$$|a_{m_n} z^{m_n}| = |a_{m_n}||z|^{m_n} > \left(M|z|\right)^{m_n} > 1;$$

pertanto la successione dei termini della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ non converge a 0, quindi la serie non converge. Pertanto se $L = +\infty$, allora la serie data non converge qualunque sia $z \in \mathbb{C}^*$, mentre se $L \in \mathbb{R}^+$ la serie data non converge se $|z| > 1/L$, quindi $R \leq 1/L$. ■

[14] La condizione prende il nome dal già citato Augustin-Louis Cauchy (v. nota 10) e da Jacques Hadamard (Versailles, Francia, 1865 - Parigi, 1963). Cauchy, in un trattato di analisi del 1821, stabilì il teorema nel caso che esista il limite; Hadamard, in un articolo pubblicato nel 1888, considerò il caso generale in cui non necessariamente esiste il limite e quindi si ricorre al massimo limite.

Hadamard studiò la teoria dei numeri e le equazioni differenziali alla derivate parziali.

2.2.12 Esempio. Consideriamo la serie di potenze di punto iniziale 0

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \exp\big((-1)^n n\big)\, z^n .$$

Si ha $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\exp\big((-1)^n n\big)} = \exp\big((-1)^n\big)$. Poiché, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $\sqrt[n]{|a_n|} \le e$, risulta $\max\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le e$. Inoltre la sottosuccessione dei termini di indice pari della successione $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n\in\mathbb{N}^*}$ vale costantemente e, pertanto $\max\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \ge e$. Quindi il massimo limite è e. Per il teorema di Cauchy-Hadamard il raggio di convergenza della serie è $1/e$.

Notiamo che una somma parziale di indice dispari della serie si può scrivere come:

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \exp\big((-1)^k k\big)\, z^k = \sum_{j=0}^{n} \exp\big((-1)^{2j} 2j\big)\, z^{2j} + \sum_{j=0}^{n} \exp\big((-1)^{2j+1}(2j+1)\big)\, z^{2j+1} =$$
$$= \sum_{j=0}^{n} \exp(2j)\, z^{2j} + \sum_{j=0}^{n} \exp\big(-(2j+1)\big)\, z^{2j+1} = \sum_{j=0}^{n} (e^2 z^2)^j + \frac{z}{e}\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{z^2}{e^2}\right)^j .$$

Se $|z| < 1/e$ risulta (v. esempio 2.2.1)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}(e^2z^2)^j + \frac{z}{e}\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{z^2}{e^2}\right)^j\right) = \frac{1}{1-e^2z^2} + \frac{z}{e}\,\frac{1}{1-(z^2/e^2)} = \frac{1}{1-e^2z^2} + \frac{ez}{e^2-z^2} .$$

Poiché, per tali z, la serie è convergente, la successione delle somme parziali ha lo stesso limite della sottosuccessione dei termini di indice dispari. Pertanto

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \exp\big((-1)^n n\big)\, z^n = \frac{1}{1-e^2z^2} + \frac{ez}{e^2-z^2} .$$ ◀

2.2.13 Teorema

Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-c)^n$ una serie di potenze in $\mathbb{C}$, con i coefficienti a_n diversi da 0. Se esiste

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L,$$

allora il raggio di convergenza è $R = 1/L$, con la convenzione che sia $R = 0$ se $L = +\infty$, $R = +\infty$ se $L = 0$.

Dimostrazione. Per semplificare l'esposizione dimostriamo il teorema nel caso $c = 0$. Il caso generale si prova con ovvie modifiche.

Sia $z \in \mathbb{C}^*$ e applichiamo il criterio del rapporto asintotico per studiare la convergenza assoluta della serie data. Si ha

$$\frac{|a_{n+1}\, z^{n+1}|}{|a_n\, z^n|} = |z|\,\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \longrightarrow \begin{cases} 0, & \text{se } L = 0, \\ |z|L, & \text{se } L \in \mathbb{R}^+, \\ +\infty, & \text{se } L = +\infty . \end{cases}$$

Ricordiamo che nella dimostrazione del criterio del rapporto asintotico, se il limite è maggiore di 1, si prova che il termine n-simo non converge a 0, pertanto in tal caso non solo non è convergente la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n z^n|$, ma non è convergente neppure la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Nel caso $L \in \mathbb{R}^+$, la serie data converge se $|z|L < 1$ e non converge se $|z|L > 1$, cioè converge se $|z| < 1/L$ e non converge se $|z| > 1/L$; pertanto il raggio di convergenza è $1/L$. Nel caso $L = 0$ il limite è sempre 0, quindi si ha convergenza $\forall z \in \mathbb{C}$, pertanto il raggio di convergenza è $+\infty$. Nel caso $L = +\infty$ i limite è sempre $+\infty$, quindi la serie non converge qualunque sia $z \in \mathbb{C}^*$, pertanto il raggio di convergenza è 0. ■

2.2.14 Esempio. Ritroviamo i raggi di convergenza delle serie di potenze studiate negli esempi 2.2.3, 2.2.4 e 2.2.5 utilizzando questo teorema.

Consideriamo la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^n ,$$

dove $a \in \mathbb{C}^*$. Si ha

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|a^{n+1}|}{|a^n|} = |a| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |a| .$$

Pertanto il raggio di convergenza è $1/|a|$.

Consideriamo la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n .$$

Si ha

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 .$$

Pertanto il raggio di convergenza è $+\infty$.

Consideriamo la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n!\, z^n .$$

Si ha

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty .$$

Pertanto il raggio di convergenza è 0. ◀

Per il teorema 2.2.6, una serie di potenze converge uniformemente in ogni disco di raggio minore del raggio di convergenza. Per il teorema 2.1.18, questo assicura la continuità della somma della serie di potenze in tali dischi. Si ha quindi continuità nell'unione dei dischi, cioè nel disco aperto di raggio uguale al raggio di convergenza. Per studiare la derivabilità della serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-c)^n$ bisogna studiare la convergenza della serie delle derivate, che è la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z-c)^{n-1}$, cioè $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}(z-c)^n$. Il seguente teorema consente di determinare il raggio di convergenza di questa serie.

2.2.15 Teorema (sul raggio di convergenza della serie delle derivate)

Siano $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-c)^n$ una serie di potenze in $\mathbb{C}$ e R il suo raggio di convergenza. Allora la serie di potenze delle derivate $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}(z-c)^n$ ha anch'essa raggio di convergenza R.

Dimostrazione. Per semplificare l'esposizione dimostriamo il teorema nel caso $c=0$. Il caso generale si prova con ovvie modifiche.

Indichiamo con R' il raggio di convergenza della serie delle derivate. Dimostriamo che $R' \geq R$ provando che se la serie converge in z_0, allora la serie delle derivate converge in ogni z tale che $|z|<|z_0|$; viceversa dimostriamo che $R' \leq R$ provando che se la serie delle derivate converge in z_1, allora la serie converge in ogni z tale che $|z|<|z_1|$.

Sia $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tale che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$ converge. Allora $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0, quindi è limitata; poniamo $M=\sup\{|a_n z_0^n| \mid n\in\mathbb{N}\}$. Se $z\in\mathbb{C}$ è tale che $|z|<|z_0|$, si ha, $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$\left|(n+1)a_{n+1} z^n\right| = \left|a_{n+1} z_0^{n+1} \frac{n+1}{z_0}\left(\frac{z}{z_0}\right)^n\right| \leq M \frac{n+1}{|z_0|}\left|\frac{z}{z_0}\right|^n .$$

Per il criterio del rapporto asintotico, la serie avente i termini a ultimo membro converge. Infatti

$$\frac{(n+2)|z/z_0|^{n+1}}{(n+1)|z/z_0|^n} = \frac{n+2}{n+1}\left|\frac{z}{z_0}\right| \to \left|\frac{z}{z_0}\right| < 1 .$$

Pertanto, per il criterio del confronto, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1} z^n$ è assolutamente convergente, quindi è convergente.

Sia $z_1 \in \mathbb{C}^*$ tale che $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1} z_1^n$ converge. Allora $\left((n+1)a_{n+1} z_1^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0, quindi è limitata, pertanto anche la successione $(a_{n+1} z_1^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata; poniamo $M=\sup\{|a_n z_1^n| \mid n\in\mathbb{N}\}$. Se $z\in\mathbb{C}$ è tale che $|z|<|z_1|$, si ha, $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$|a_n z^n| = \left|a_n z_1^n \left(\frac{z}{z_1}\right)^n\right| \leq M\left|\frac{z}{z_1}\right|^n .$$

Poiché $|z/z_1|<1$, la serie geometrica di ragione $|z/z_1|$ converge, pertanto, per il criterio del confronto, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n z^n$ è assolutamente convergente, quindi è convergente. ■

Da questo teorema si ottiene facilmente il seguente.

2.2.16 Teorema

Siano $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$ una serie di potenze in $\mathbb{R}$ e R il suo raggio di convergenza. Supponiamo $R>0$. Posto

$$s :]c-R, c+R[\to \mathbb{R}, \qquad s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n ,$$

s è di classe C^∞ e, $\forall j \in \mathbb{N}$ e $\forall x \in]c-R, c+R[$, si ha

$$s^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+j)(n+j-1)\dots(n+1)a_{n+j}(x-c)^n .$$

Dimostrazione. Per semplificare l'esposizione dimostriamo il teorema nel caso $c = 0$. Il caso generale si prova con ovvie modifiche.

Dimostriamo, per induzione. che, $\forall j \in \mathbb{N}$, s è derivabile j volte, la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+j)(n+j-1)\dots(n+1)a_{n+j}(x-c)^n \tag{2.2.1}$$

ha raggio di convergenza R e in $]-R, R[$ la sua somma coincide con $s^{(j)}$.

Per $j = 0$ l'affermazione è ovvia.

Supponiamo che l'affermazione valga per j. La serie (2.2.1) ha come serie delle derivate

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (n+j)(n+j-1)\dots(n+1)n\, a_{n+j}(x-c)^{n-1},$$

cioè

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+j+1)(n+j)\dots(n+1)a_{n+j+1}(x-c)^n, \tag{2.2.2}$$

Per il teorema sul raggio di convergenza della serie delle derivate 2.2.15 questa serie ha lo stesso raggio di convergenza della serie (2.2.1), cioè R. Quindi, per il teorema 2.2.6, qualunque sia $r \in]0, R[$, le serie (2.2.1) e (2.2.2) convergono uniformemente in $[-r, r]$, pertanto, per il teorema 2.1.20, $s^{(j)}$ è derivabile in tale intervallo e la sua derivata è uguale alla somma della serie (2.2.2). Per l'arbitrarietà di r, ciò è vero in $]-R, R[$, quindi l'affermazione è vera per $j + 1$. ■

Una serie di potenze può essere integrata termine a termine. Abbiamo cioè il seguente teorema relativo all'integrale della somme di una serie di potenze.

2.2.17 Teorema

Siano $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$ una serie di potenze in $\mathbb{R}$ e R il suo raggio di convergenza. Supponiamo $R > 0$. Posto

$$s :]c-R, c+R[\to \mathbb{R}, \qquad s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n,$$

$\forall x \in]c-R, c+R[$ risulta

$$\int_c^x s(t)\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n}(x-c)^n .$$

Dimostrazione. Per semplificare l'esposizione dimostriamo il teorema nel caso $c = 0$. Il caso generale si prova con ovvie modifiche.

La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ è la serie delle derivate della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_{n-1}/n) x^n$, pertanto, per il teorema 2.2.15, anche questa seconda serie ha raggio di convergenza R. Poniamo

$$S\colon]-R,R[\to \mathbb{R}, \qquad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n .$$

Per il teorema 2.2.16, S è una primitiva di s, inoltre $S(0) = 0$, quindi, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, si ha

$$S(x) = S(x) - S(0) = \int_0^x s(t)\,dt . \qquad \blacksquare$$

2.2.18 Esempio. Consideriamo la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n .$$

La serie delle derivate è la serie geometrica $\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}$, cioè $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, che ha raggio di convergenza 1 e somma $1/(1-x)$ (v. esempi 2.2.1 e 2.2.3). Per il teorema di integrazione termine a termine 2.2.17, $\forall x \in]-1,1[$, si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = \big[-\log(1-t)\big]_0^x = -\log(1-x). \qquad \blacktriangleleft$$

2.3 Serie di Taylor

2.3.1 Definizioni e proprietà fondamentali

Se I è un intervallo di $\mathbb{R}$ e $f \in C^\infty(I,\mathbb{R})$, possiamo considerare i polinomi di Taylor di f di punto iniziale $c \in I$ e di ordine n arbitrario

$$T_{c,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k .$$

Risulta naturale vedere questi polinomi come somme parziali di una serie di potenze.

Definizione di serie di Taylor[15]

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f \in C^\infty(I,\mathbb{R})$ e $c \in I$. Chiamiamo **serie di Taylor** di f di punto iniziale c la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n .$$

Ovviamente se $x = c$ la serie di Taylor converge e ha somma $f(c)$. Per valori di x diversi da c la serie potrebbe non convergere o convergere a una somma diversa da $f(x)$.

Definizione di funzione sviluppabile in serie di Taylor

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $J \subseteq I$ intervallo, $f \in C^\infty(I,\mathbb{R})$ e $c \in J$. Diciamo che f è **sviluppabile in serie di Taylor** di punto iniziale c in J se la serie di Taylor di punto iniziale c di f converge puntualmente in J e, $\forall x \in J$, si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = f(x). \tag{2.3.1}$$

Diciamo che f è **sviluppabile in serie di Taylor** di punto iniziale c se $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$ tale che f è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale c in $I \cap]c-\delta, c+\delta[$.

L'uguaglianza (2.3.1) equivale a $\lim_{n\to+\infty} T_{c,n}(x) = f(x)$, cioè

$$\lim_{n\to+\infty} R_{c,n}(x) = 0,$$

dove $R_{c,n}(x) = f(x) - T_{c,n}(x)$ è il resto della formula di Taylor.

2.3.1 Esempio. Vediamo un esempio di funzione di classe C^∞ che ha una serie di Taylor convergente, ma la cui somma è diversa dalla funzione.

Sia

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_1(x) = \begin{cases} \exp(-x^{-2}), & \text{per } x \in \mathbb{R}^*, \\ 0, & \text{per } x = 0. \end{cases}$$

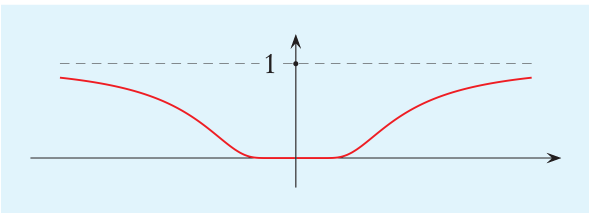


Figura 2.3.1
Grafico della funzione f_1 studiata nell'esempio 2.3.1.

La funzione f_1 è evidentemente di classe C^∞ in $\mathbb{R}^*$. Poiché $\lim_{x\to 0}(-x^{-2}) = -\infty$, si ha $\lim_{x\to 0} \exp(-x^{-2}) = 0$, quindi f_1 è continua in $\mathbb{R}$. Studiamo la derivabilità in 0. Per $x \in \mathbb{R}^*$ risulta

$$f_1'(x) = 2x^{-3}\exp(-x^{-2}),$$
$$f_1''(x) = (-6x^{-4} + 4x^{-6})\exp(-x^{-2}).$$

Derivando ulteriormente, è evidente che, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, risulta

$$f_1^{(n)}(x) = P_n(x^{-1})\exp(-x^{-2}),$$

dove P_n è un opportuno polinomio. Si ha $\lim_{x\to 0} f_1^{(n)}(x) = 0$, perché la funzione esponenziale, che tende a 0, prevale sul polinomio. Per il teorema sul limite della derivata,

[15] Come i corrispondenti polinomi, queste serie di potenze prendono il nome da Brook Taylor (Edmonton, Inghilterra, 1685 - Londra, 1731).

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, esiste $f_1^{(n)}(0) = 0$ e $f_1^{(n)}$ è continua. Quindi f_1 è di classe C^∞ in $\mathbb{R}$, la sua serie di Taylor di punto iniziale 0 ha tutti i coefficienti nulli, quindi ha somma identicamente nulla.

Quindi la serie di Taylor di f_1 di punto iniziale 0 non converge a $f_1(x)$ se $x \neq 0$. ◀

2.3.2 Esempio. Vediamo un esempio di funzione di classe C^∞ che ha serie di Taylor con raggio di convergenza 0.

Consideriamo la serie di funzioni $\sum_{j=0}^{+\infty} e^{-j}\cos(j^2 x)$. Questa serie converge totalmente, perché, $\forall j \in \mathbb{N}$, si ha

$$\sup\left\{\left|e^{-j}\cos(j^2 x)\right| \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\} = e^{-j} = (e^{-1})^j,$$

e la serie $\sum_{j=0}^{+\infty}(e^{-1})^j$ è una serie geometrica di ragione minore di 1, quindi convergente (v. esempio 2.2.1). Per il criterio di Weierstrass 2.1.23 la serie converge uniformemente, quindi possiamo porre

$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_2(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-j}\cos(j^2 x).$$

Evidentemente f_2 è continua, perché limite uniforme di una successione di funzioni continue; dimostriamo che è di classe C^∞. I termini della serie sono di classe C^∞, quindi, per il teorema 2.2.16, è sufficiente dimostrare che la serie delle derivate di qualunque ordine converge uniformemente e per questo è sufficiente provare la convergenza totale. Osserviamo che, $\forall x \in \mathbb{R}$, si ha $\cos'(x) = -\sin x = \cos(x + \pi/2)$, quindi, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall x \in \mathbb{R}$, risulta

$$\frac{d^n}{dx^n} e^{-j}\cos(j^2 x) = e^{-j} j^{2n} \cos\left(j^2 x + \frac{n}{2}\pi\right).$$

Pertanto

$$\sup\left\{\left|\frac{d^n}{dx^n} e^{-j}\cos(j^2 x)\right| \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\} = e^{-j} j^{2n}.$$

Studiamo la convergenza della serie $\sum_{j=0}^{+\infty} e^{-j} j^{2n}$. Si ha

$$\lim_{j\to+\infty} \frac{e^{-j-1}(j+1)^{2n}}{e^{-j} j^{2n}} = \lim_{j\to+\infty} e^{-1}\left(\frac{j+1}{j}\right)^{2n} = e^{-1} < 1,$$

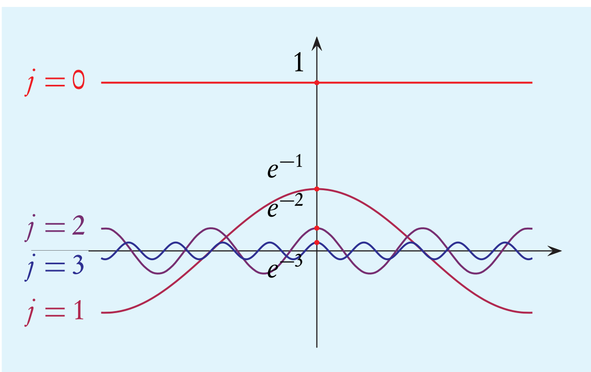


Figura 2.3.2
I primi 4 termini della serie che definisce la funzione f_2, studiata nell'esempio 2.3.2.

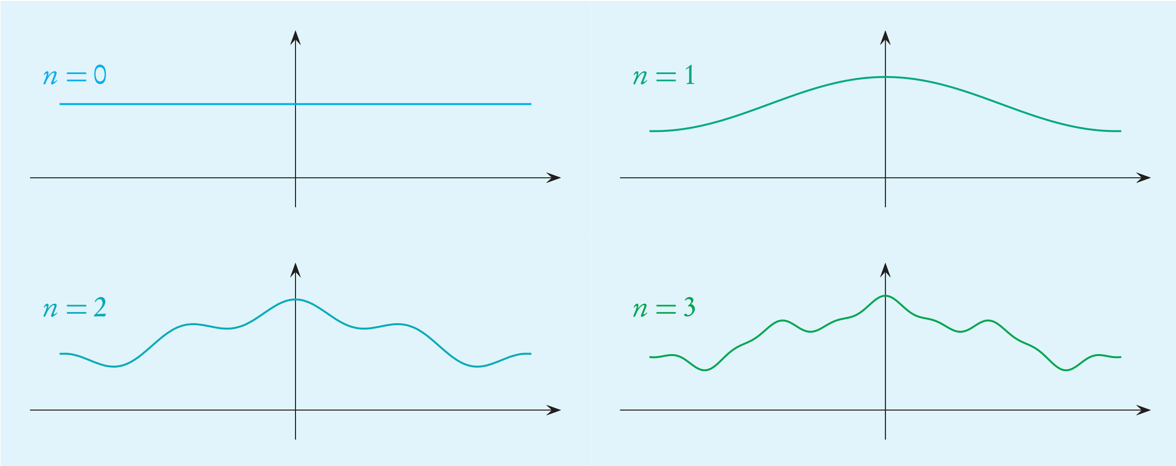


Figura 2.3.3
Le prime 4 somme parziali della serie che definisce la funzione f_2, studiata nell'esempio 2.3.2.

quindi, per il criterio del rapporto asintotico, la serie $\sum_{j=0}^{+\infty} e^{-j} j^{2n}$ è convergente. Pertanto la serie delle derivate n-sime converge totalmente.

Determiniamo la serie di Taylor di f_2 di punto iniziale 0. Si ha

$$f_2^{(n)}(0) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{d^n}{dx^n} e^{-j} \cos(j^2 x)\Big|_{x=0} = \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-j} j^{2n} \cos\left(\frac{n}{2}\right).$$

Questo è nullo se n è dispari ed è uguale a $(-1)^{n/2} \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^{n/2} e^{-j} j^{2n}$, se n è pari. Pertanto la serie di Taylor è

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-j} j^{4k} x^{2k}.$$

Osserviamo che, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n!$ è il prodotto di n fattori minori o uguali a n, pertanto $n! \leq n^n$. Quindi, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, si ha

$$\left| \frac{(-1)^k}{(2k)!} \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-j} j^{4k} x^{2k} \right| = \frac{|x|^{2k}}{(2k)!} \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-j} j^{4k} \geq \frac{|x|^{2k}}{(2k)^{2k}} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j^{4k}}{e^j};$$

una serie a termini positivi ha somma maggiore di ciascuno dei suoi termini, in particolare del termine di indice $j=2k$, quindi si ha

$$\frac{|x|^{2k}}{(2k)^{2k}} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j^{4k}}{e^j} > \frac{|x|^{2k}}{(2k)^{2k}} \frac{(2k)^{4k}}{e^{2k}} = \left(\frac{2k|x|}{e}\right)^{2k},$$

Qualunque sia $x \in \mathbb{R}^*$, se $k > e/(2|x|)$, allora $\left(2k|x|/e\right)^{2k} > 1$, quindi il termine k-simo della serie di Taylor non converge a 0, pertanto la serie non converge. ◀

Vediamo ora una condizione sufficiente per la sviluppabilità in serie di Taylor di una funzione.

2.3.3 Teorema

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f \in C^\infty(I,\mathbb{R})$ e $c \in I$. Se esistono $C, M \in \mathbb{R}^+$ tali che, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall x \in I$, si ha

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq C M^n\,,$$

allora f è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale c in I.

Dimostrazione. Basta provare che, $\forall x \in I \setminus \{c\}$, si ha $R_{c,n}(x) \to 0$ per $n \to +\infty$. Per la formula di Taylor col resto nella forma di Lagrange, $\forall n \in \mathbb{N}$, esiste d_n, compreso tra c e x, tale che

$$\left|R_{c,n}(x)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(d_n)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}\right| = \frac{\left|f^{(n+1)}(d_n)\right|}{(n+1)!}|x-c|^{n+1} \leq \frac{CM^{n+1}}{(n+1)!}|x-c|^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\,.$$

Il teorema è così provato. ■

Il teorema 2.2.16 assicura che la somma di una serie di potenze con raggio di convergenza maggiore di 0 è una funzione di classe C^∞, quindi è definita la serie di Taylor di tale funzione. Questa serie di Taylor coincide con la serie di potenze assegnata, come assicura il seguente teorema.

2.3.4 Teorema

Siano $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$ una serie di potenze in $\mathbb{R}$ e R il suo raggio di convergenza. Supponiamo $R > 0$ e sia $f\colon]c-R, c+R[\to \mathbb{R}$ la somma della serie di potenze. Allora:

I) f è di classe C^∞;

II) la serie di Taylor di punto iniziale c di f è la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$;

III) f è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale c in $]c-R, c+R[$.

Dimostrazione. I) Segue dal teorema 2.2.16.

II) Per il teorema 2.2.16, $\forall j \in \mathbb{N}$, si ha $f^{(j)}(c) = j!\,a_j$. Pertanto la serie di Taylor di f di punto iniziale c è

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!\,a_n}{n!}(x-c)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n\,. \qquad ■$$

III) Dall'affermazione II segue che la serie di Taylor di punto iniziale c di f converge in $]c-R, c+R[$ a f.

Il teorema precedente assicura che una funzione f, somma di una serie di potenze di punto iniziale c, è sviluppabile in serie di Taylor con lo stesso punto iniziale. Possiamo però considerare anche la serie di Taylor per f con un diverso punto iniziale. Il seguente teorema assicura che f è sviluppabile in serie di Taylor anche in tali punti.

2.3.5 Teorema

Siano $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$ una serie di potenze in $\mathbb{R}$ e R il suo raggio di convergenza. Supponiamo $R>0$ e siano $f :]c-R, c+R[\to \mathbb{R}$ la somma della serie di potenze e $d \in]c-R, c+R[$. Allora f è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale d.

Dimostrazione. Per semplificare l'esposizione dimostriamo il teorema nel caso $c=0$. Il caso generale si prova con ovvie modifiche.

Dimostriamo che, se $\delta \in \mathbb{R}^+$ è tale che $[d-\delta, d+\delta] \subseteq]-R, R[$, cioè $|d|+\delta<R$, allora, $\forall x \in [d-\delta, d+\delta]$, si ha

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(d)}{k!}(x-d)^k = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n . \tag{2.3.2}$$

Questo assicura che f è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale d.

Per il teorema 2.2.16 si ha, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$f^{(k)}(d) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n n(n-1)\ldots(n-k+1) d^{n-k} = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} d^{n-k}$$

pertanto

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(d)}{k!}(x-d)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} d^{n-k}(x-d)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \binom{n}{k} d^{n-k}(x-d)^k .$$

Siano $m \in \mathbb{N}$ e $x \in [d-\delta, d+\delta]$. Si ha

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(d)}{k!}(x-d)^k &= \sum_{k=0}^{m} \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \binom{n}{k} d^{n-k}(x-d)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{m} \sum_{n=k}^{m} a_n \binom{n}{k} d^{n-k}(x-d)^k + \sum_{k=0}^{m} \sum_{n=m+1}^{+\infty} a_n \binom{n}{k} d^{n-k}(x-d)^k .\end{aligned}$$

Scambiamo l'ordine delle sommatorie nel primo addendo. Osserviamo che tale addendo è somma di termini che dipendono da k e n, numeri interi tali che $0 \le k \le n \le m$, quindi può essere scritto come sommatoria per n che varia da 0 a m di una sommatoria per k che varia da 0 a n, pertanto

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m} \sum_{n=k}^{m} a_n \binom{n}{k} d^{n-k}(x-d)^k &= \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_n \binom{n}{k} d^{n-k}(x-d)^k = \\ &= \sum_{n=0}^{m} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d^{n-k}(x-d)^k = \sum_{n=0}^{m} a_n x^n .\end{aligned}$$

Quindi si ha

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(d)}{k!}(x-d)^k = \sum_{n=0}^{m} a_n x^n + \sum_{k=0}^{m} \sum_{n=m+1}^{+\infty} a_n \binom{n}{k} d^{n-k}(x-d)^k ;$$

Perciò, per provare l'uguaglianza (2.3.2), è sufficiente dimostrare che, $\forall x \in [d-\delta, d+\delta]$, si ha

$$\lim_{m\to+\infty} \sum_{k=0}^{m} \sum_{n=m+1}^{+\infty} a_n \binom{n}{k} d^{n-k} (x-d)^k = 0 .$$

Risulta

$$\left| \sum_{k=0}^{m} \sum_{n=m+1}^{+\infty} a_n \binom{n}{k} d^{n-k} (x-d)^k \right| \leq \sum_{k=0}^{m} \sum_{n=m+1}^{+\infty} |a_n| \binom{n}{k} |d|^{n-k} |x-d|^k =$$
$$= \sum_{n=m+1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{m} |a_n| \binom{n}{k} |d|^{n-k} |x-d|^k \leq \sum_{n=m+1}^{+\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |d|^{n-k} |x-d|^k =$$
$$= \sum_{n=m+1}^{+\infty} |a_n| \big(|d| + |x-d|\big)^n .$$

Poiché $|d| + |x-d| \leq |d| + \delta < R$, per il teorema 2.2.6 la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \big(|d| + |x-d|\big)^n$ è assolutamente convergente, quindi

$$\lim_{m\to+\infty} \sum_{n=m+1}^{+\infty} |a_n| \big(|d| + |x-d|\big)^n = 0 ,$$

pertanto anche

$$\lim_{m\to+\infty} \sum_{k=0}^{m} \sum_{n=m+1}^{+\infty} a_n \binom{n}{k} d^{n-k} (x-d)^k = 0 .$$
■

2.3.2 Serie di Taylor di funzioni elementari

Studiamo la sviluppabilità in serie di Taylor di punto iniziale 0 di alcune funzioni elementari di classe C^∞.

2.3.6 Esempio (serie esponenziale). Studiamo la serie di Taylor di punto iniziale 0 della funzione esponenziale. Poiché la derivata di qualunque ordine dell'esponenziale è l'esponenziale stesso, che vale 1 in 0, la serie di Taylor è

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n ,$$

che è detta **serie esponenziale**.

Fissato $L \in \mathbb{R}^+$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall x \in]-\infty, L]$, risulta

$$\left| \frac{d^n}{dx^n} e^x \right| = e^x \leq e^L ,$$

pertanto, per il teorema 2.3.3, la serie esponenziale converge alla funzione esponenziale per $x \in]-\infty, L]$. Per l'arbitrarietà di L, ciò è vero $\forall x \in \mathbb{R}$.

Quindi l'esponenziale è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale 0 in $\mathbb{R}$. ◀

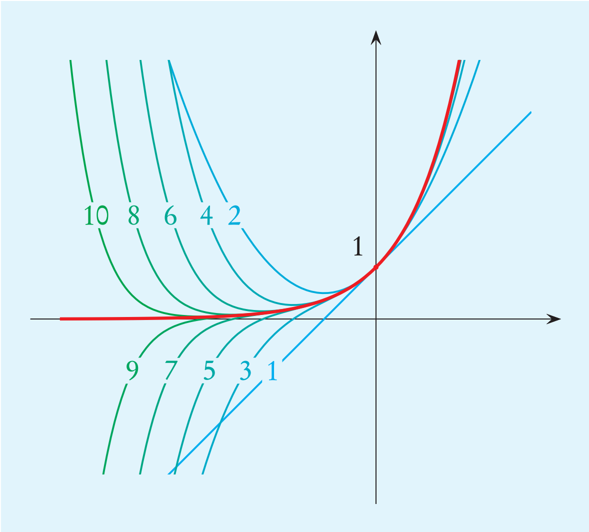


Figura 2.3.4
Somme parziali della serie di Taylor di punto iniziale 0 per la funzione esponenziale.

2.3.7 Esempio. Studiamo la serie di Taylor di punto iniziale 0 delle funzioni seno e coseno.

Osserviamo che, $\forall x \in \mathbb{R}$, si ha $\sin'(x) = \cos x = \sin(x + \pi/2)$, pertanto, $\forall n \in \mathbb{N}$, risulta $\sin^{(n)}(x) = \sin\big(x + (n/2)\pi\big)$; quindi, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall x \in \mathbb{R}$, risulta $\big|\sin^{(n)}(x)\big| \leq 1$. Per il teorema 2.3.3 da qui segue che la funzione seno è sviluppabile in serie di Taylor di qualunque punto iniziale, in particolare di punto iniziale 0. Inoltre, se n è pari, cioè $n = 2k$, con $k \in \mathbb{N}$, si ha $\sin^{(n)}(0) = \sin\big(k\pi\big) = 0$, se n è dispari, cioè $n = 2k+1$, con $k \in \mathbb{N}$, si ha $\sin^{(n)}(x) = \sin\big(k\pi + \pi/2\big) = (-1)^k$. Perciò, $\forall x \in \mathbb{R}$, si ha

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1}\,.$$

Analogamente si ha, $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall n \in \mathbb{N}$, $\cos^{(n)}(x) = \cos\big(x + (n/2)\pi\big)$, quindi risulta $\big|\cos^{(n)}(x)\big| \leq 1$. Pertanto la funzione coseno è sviluppabile in serie di Taylor di qualunque punto iniziale, in particolare di punto iniziale 0. Inoltre si ha $\cos^{(n)}(0) = 0$ se n è dispari e $\cos^{(n)}(x) = (-1)^{n/2}$ se n è pari. Perciò, $\forall x \in \mathbb{R}$, si ha

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k}\,.$$

Quindi le funzioni seno e coseno sono sviluppabili in serie di Taylor di punto iniziale 0 in $\mathbb{R}$. ◀

2.3.8 Esempio. Poiché la funzione esponenziale è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale 0 in $\mathbb{R}$ (v. esempio 2.3.6), $\forall x \in \mathbb{R}$, risulta

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\, x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\, (-x)^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\, \frac{1+(-1)^n}{2}\, x^n\,,$$
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\, x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\, (-x)^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\, \frac{1-(-1)^n}{2}\, x^n\,.$$

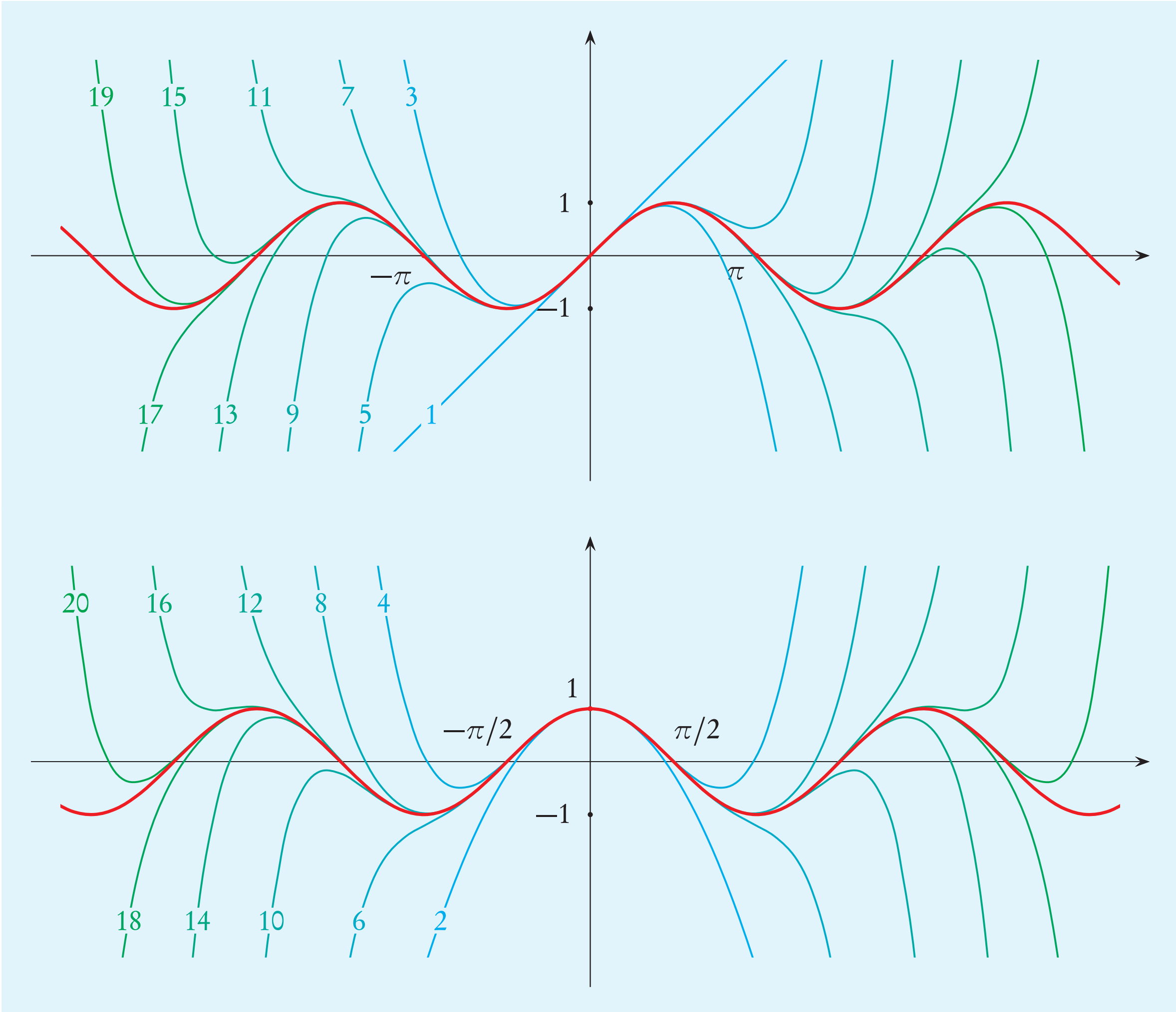


Figura 2.3.5
Somme parziali della serie di Taylor di punto iniziale 0 per la funzione seno (in alto) e coseno (in basso).

Si ha

$$\frac{1+(-1)^n}{2}=\begin{cases}1, & \text{se } n \text{ è pari},\\ 0, & \text{se } n \text{ è dispari};\end{cases} \qquad \frac{1-(-1)^n}{2}=\begin{cases}0, & \text{se } n \text{ è pari},\\ 1, & \text{se } n \text{ è dispari},\end{cases}$$

quindi risulta, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\cosh x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k)!}\,x^{2k}, \qquad \sinh x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)!}\,x^{2k+1}.$$

Per il teorema 2.3.4, se una funzione è somma di una serie di potenze, allora questa è la sua serie di Taylor, quindi la serie di Taylor della funzione coseno iperbolico di punto iniziale 0 è la serie $\sum_{k=0}^{+\infty}\big(1/(2k)!\big)\,x^{2k}$, mentre quella della funzione seno iperbolico è la serie $\sum_{k=0}^{+\infty}\big(1/(2k+1)!\big)\,x^{2k+1}$.

Quindi le funzioni seno iperbolico e coseno iperbolico sono sviluppabili in serie di Taylor di punto iniziale 0 in $\mathbb{R}$. ◀

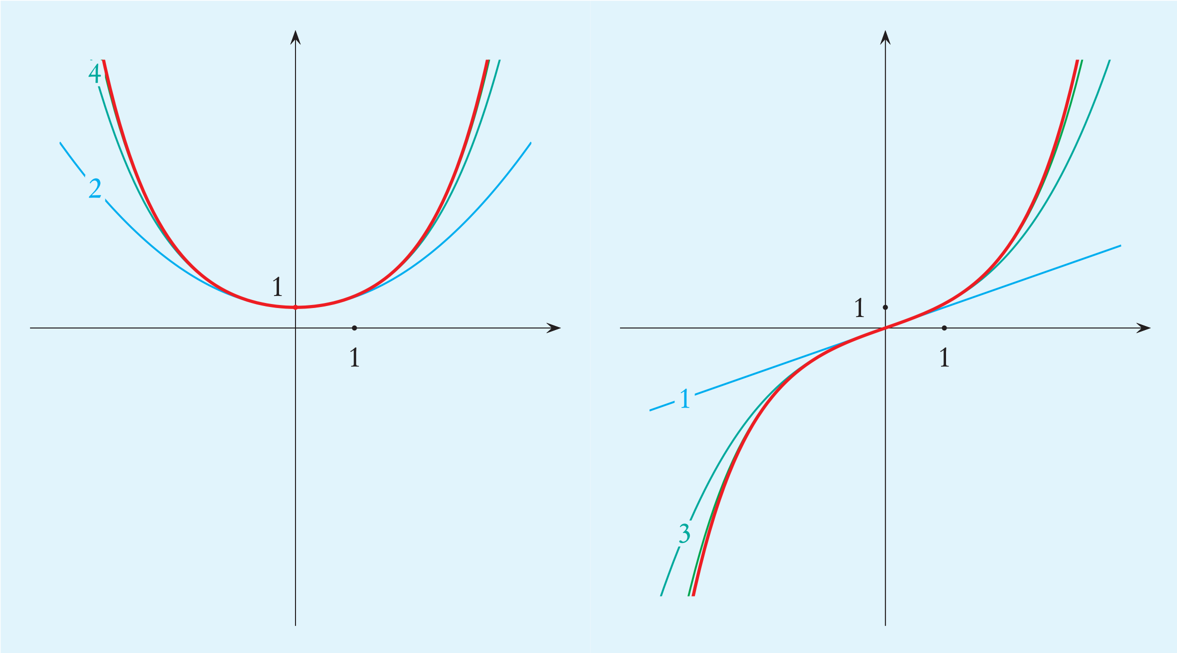


Figura 2.3.6
Somme parziali della serie di Taylor di punto iniziale 0 per la funzione coseno iperbolico (a sinistra) e seno iperbolico (a destra).

2.3.9 Esempio (serie geometrica). Nell'esempio 2.2.1 abbiamo visto che la serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, converge puntualmente in $]-1,1[$ alla funzione

$$f :]-1,1[\to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Per il teorema 2.3.4, f è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale 0 in $]-1,1[$; la serie di Taylor è la serie geometrica. ◀

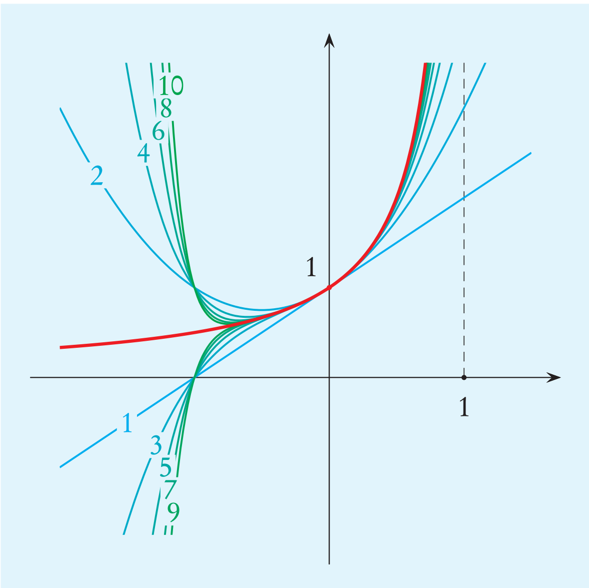


Figura 2.3.7
Somme parziali della serie di Taylor di punto iniziale 0 per la funzione $x \mapsto 1/(1-x)$.

2.3.10 Esempio. Poniamo

$$f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \log(1+x).$$

La funzione f è derivabile e, $\forall x \in]-1, +\infty[$, si ha $f'(x) = 1/(1+x)$. Quindi (v. esempio 2.3.9), per $x \in]-1, 1[$ risulta

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n .$$

Pertanto, per il teorema di integrazione termine a termine 2.2.17, $\forall x \in]-1, 1[$, si ha

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n \, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n .$$

Pertanto, per il teorema 2.3.4, f è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale 0 in $]-1, 1[$.

Per $x = -1$ la serie è l'opposto della serie armonica, quindi non è convergente. Per $x = 1$ si ottiene la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}/n$, che è convergente per il criterio di Leibniz. Per il teorema di Abel 2.2.10 la serie converge uniformemente in $[0, 1]$, quindi, per il teorema 2.1.18, la somma della serie è continua, pertanto si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{x \to 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \lim_{x \to 1} \log(1+x) = \log 2 .$$ ◀

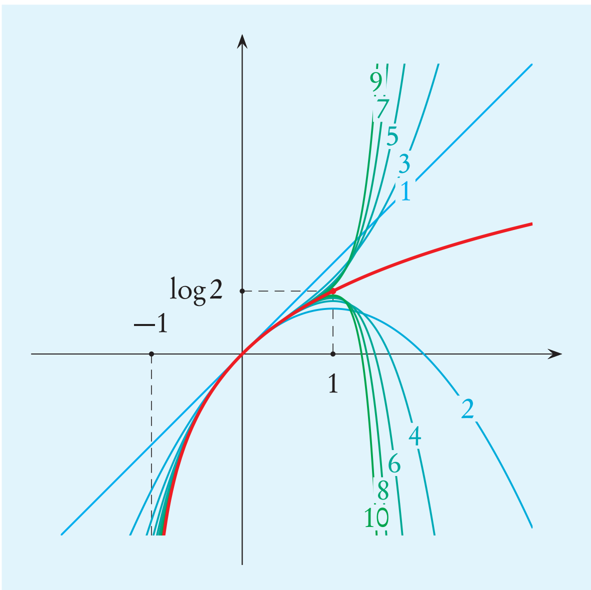


Figura 2.3.8
Somme parziali della serie di Taylor di punto iniziale 0 per la funzione $x \mapsto \log(1+x)$.

2.3.11 Esempio. La funzione arcotangente è derivabile e, $\forall x \in \mathbb{R}$, si ha

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} .$$

Quindi (v. esempio 2.3.9), $\forall x \in]-1, 1[$, risulta

$$\arctan'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} ;$$

pertanto, per il teorema di integrazione termine a termine 2.2.17, per tali x si ha

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1}\,.$$

Quindi, per il teorema 2.3.4, la funzione arcotangente è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale 0 in $]-1,1[$.

Per $x=1$ la serie è $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n/(2n+1)$ che, per il criterio di Leibniz, è convergente. Per il teorema di Abel 2.2.10 la serie converge uniformemente in $[0,1]$, quindi, per il teorema sulla continuità della somma di una serie di funzioni 2.1.18, la somma della serie è continua, pertanto si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x\to 1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1} = \lim_{x\to 1} \arctan x = \frac{\pi}{4}\,.$$

Per $x=-1$ la serie è l'opposta della precedente.

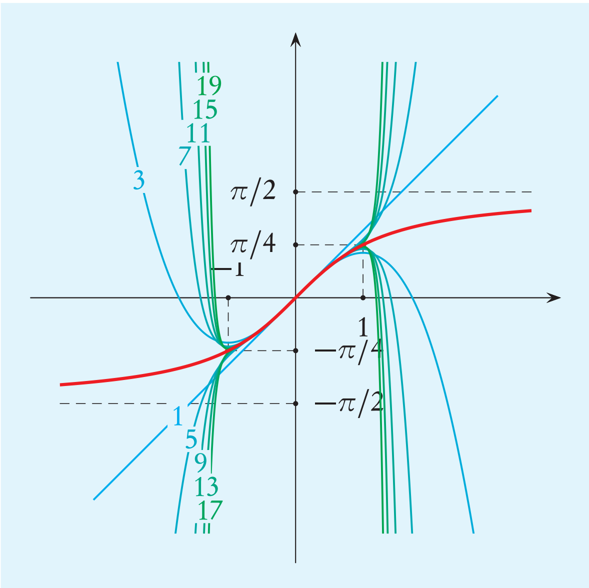


Figura 2.3.9
Somme parziali della serie di Taylor di punto iniziale 0 per la funzione arcotangente.

2.3.12 Esempio. La funzione settortangente iperbolica è derivabile e, $\forall x \in\,]-1,1[$, si ha

$$\operatorname{secttanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2}\,.$$

Quindi (v. esempio 2.3.9), per $x \in\,]-1,1[$ risulta

$$\operatorname{secttanh}'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}\,.$$

pertanto, per il teorema di integrazione termine a termine 2.2.17, $\forall x \in\,]-1,1[$ si ha

$$\operatorname{secttanh} x = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}\, x^{2n+1}\,.$$

Quindi, per il teorema 2.3.4, la funzione settortangente iperbolica è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale 0 in $]-1,1[$.

Per $x=1$ la serie è $\sum_{n=0}^{+\infty} 1/(2n+1)$ che si comporta come la serie armonica, quindi non è convergente.

Per $x=-1$ la serie è l'opposta della precedente. ◀

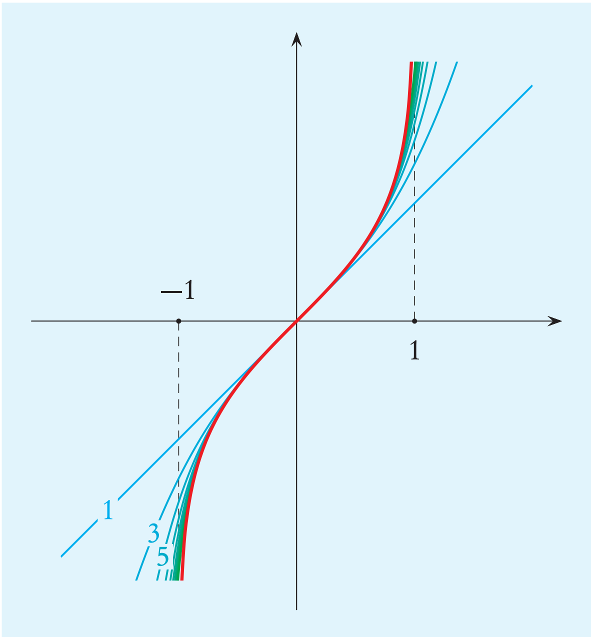


Figura 2.3.10
Somme parziali della serie di Taylor di punto iniziale 0 per la funzione settortangente iperbolica.

2.3.13 Esempio (serie binomiale). Studiamo la serie di Taylor di punto iniziale 0 della funzione

$$f:]-1,+\infty[\to \mathbb{R}, \qquad f(x)=(1+x)^\alpha,$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$. Escludiamo i valori di α naturali, perché in tal caso f è polinomiale, quindi le derivate di ordine superiore all'ordine del polinomio sono identicamente nulle, pertanto la serie di Taylor ha solo un numero finito di termini non nulli.

Si ha, $\forall x \in]-1,+\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \\ f''(x) &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f^{(n)}(x) &= \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}. \end{aligned}$$

Pertanto $f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)$ e la serie di Taylor di f di punto iniziale 0 è

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n.$$

Il quoziente $\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)/n!$ è una generalizzazione dei coefficienti binomiali, perché se $\alpha\in\mathbb{N}$ e $\alpha>n$ si ha

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)\cdots 1}{n!(\alpha-n)\cdots 1}=\frac{\alpha!}{n!(\alpha-n)!}=\binom{\alpha}{n}.$$

Per questo motivo utilizziamo la notazione definita per i coefficienti binomiali anche per indicare questi quozienti. Quindi, per $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$, poniamo

$$\binom{\alpha}{n} = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0, \\ \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} = \dfrac{\prod_{j=0}^{n-1}(\alpha-j)}{n!}, & \text{se } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Quindi la serie di Taylor di f può essere scritta nella forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n,$$

che è detta **serie binomiale**.

Non è facile verificare che, per questa funzione, risulta $f(x) - T_{0,n}(x) = R_{0,n}(x) \to 0$ per $n \to +\infty$, quindi studiamo la sviluppabilità della funzione con altri metodi.

Determiniamo anzitutto il raggio di convergenza della serie. Si ha

$$\frac{\binom{\alpha}{n+1}}{\binom{\alpha}{n}} = \frac{\prod_{j=0}^{n}(\alpha-j)}{(n+1)!} \, \frac{n!}{\prod_{j=0}^{n-1}(\alpha-j)} = \frac{\alpha-n}{n+1}. \tag{2.3.3}$$

Quindi,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\binom{\alpha}{n+1}\right|}{\left|\binom{\alpha}{n}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|\alpha-n|}{n+1} = 1,$$

pertanto, per il teorema 2.2.13, il raggio di convergenza della serie è 1, quindi converge in $]-1,1[$.

Dimostriamo che, $\forall x \in]-1,1[$, la somma della serie è uguale a $(1+x)^\alpha$. Per questo dimostriamo che, posto

$$g :]-1,1[\to \mathbb{R}, \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n,$$

risulta $(1+x)^{-\alpha} g(x) = 1$. Evidentemente l'uguaglianza vale per $x = 0$. Osserviamo che, per il teorema 2.2.16, g è derivabile con derivata $\sum_{n=1}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} n x^{n-1}$. Inoltre, $\forall x \in]-1,1[$, risulta

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\big((1+x)^{-\alpha} g(x)\big) = -\alpha(1+x)^{-\alpha-1} g(x) + (1+x)^{-\alpha} g'(x) = \\
&= (1+x)^{-\alpha-1}\left(-\alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n + (1+x) \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} n x^{n-1}\right) = \\
&= (1+x)^{-\alpha-1}\left(-\alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n+1} (n+1) x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} n x^n\right) = \\
&= (1+x)^{-\alpha-1}\left(-\alpha + \binom{\alpha}{1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\alpha\binom{\alpha}{n} + \binom{\alpha}{n+1}(n+1) + \binom{\alpha}{n} n\right) x^n\right)
\end{aligned}$$

Si ha
$$-\alpha+\binom{\alpha}{1}=-\alpha+\alpha=0$$
e dall'uguaglianza (2.3.3) segue
$$-\alpha\binom{\alpha}{n}+\binom{\alpha}{n+1}(n+1)+\binom{\alpha}{n}n=-\alpha\binom{\alpha}{n}+\binom{\alpha}{n}\frac{\alpha-n}{n+1}(n+1)+\binom{\alpha}{n}n=0;$$
pertanto la funzione $x\mapsto(1+x)^{-\alpha}g(x)$ ha derivata identicamente nulla. Poiché per $x=0$ tale funzione vale 1, essa vale identicamente 1, quindi $g(x)=(1+x)^{\alpha}$.

Pertanto la funzione $x\mapsto(1+x)^{\alpha}$ è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale 0 in $]-1,1[$.

Studiamo la convergenza per $x=\pm1$, cioè la convergenza delle serie
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n},\qquad \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\binom{\alpha}{n}. \tag{2.3.4}$$
Osserviamo che dall'uguaglianza (2.3.3) segue che, se $n>\alpha$, allora $\binom{\alpha}{n}$ e $\binom{\alpha}{n+1}$ hanno segni discordi, quindi la prima di queste serie è definitivamente a termini di segno alterno, mentre la seconda ha termini definitivamente di segno costante.

Dall'uguaglianza (2.3.3) segue che, $\forall\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$ e $\forall n\in\mathbb{N}$ tale che $n>\alpha$, si ha
$$\frac{\left|\binom{\alpha}{n+1}\right|}{\left|\binom{\alpha}{n}\right|}=\frac{|\alpha-n|}{n+1}=\frac{n-\alpha}{n+1}\begin{cases}>1, & \text{se } \alpha<-1\,,\\ =1, & \text{se } \alpha=-1\,,\\ <1, & \text{se } \alpha>-1\,.\end{cases} \tag{2.3.5}$$
Da qui segue
$$(n+1)\left|\binom{\alpha}{n+1}\right|=(n-\alpha)\left|\binom{\alpha}{n}\right|,$$
cioè
$$\alpha\left|\binom{\alpha}{n}\right|=n\left|\binom{\alpha}{n}\right|-(n+1)\left|\binom{\alpha}{n+1}\right|. \tag{2.3.6}$$

Se $\alpha\le-1$, allora, per la (2.3.5), la successione $\left(\left|\binom{\alpha}{n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ è definitivamente crescente, quindi non ha limite 0, pertanto le serie (2.3.4) non convergono.

Se $\alpha>0$, allora, per l'equazione (2.3.6), si ha
$$\begin{aligned}\sum_{k=[\alpha]+1}^{n}\left|\binom{\alpha}{k}\right|&=\frac{1}{\alpha}\sum_{k=[\alpha]+1}^{n}\left(k\left|\binom{\alpha}{k}\right|-(k+1)\left|\binom{\alpha}{k+1}\right|\right)=\\&=\frac{1}{\alpha}\left(\sum_{k=[\alpha]+1}^{n}k\left|\binom{\alpha}{k}\right|-\sum_{j=[\alpha]+2}^{n+1}j\left|\binom{\alpha}{j}\right|\right)=\\&=\frac{1}{\alpha}\left(([\alpha]+1)\left|\binom{\alpha}{[\alpha]+1}\right|-(n+1)\left|\binom{\alpha}{n+1}\right|\right)\le\frac{[\alpha]+1}{\alpha}\left|\binom{\alpha}{[\alpha]+1}\right|.\end{aligned}$$

Quindi la successione delle somme parziali della serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\left|\binom{\alpha}{n}\right|$ è superiormente limitata; poiché la serie è a termini non negativi, questo assicura che è convergente. Pertanto le serie (2.3.4) convergono. Inoltre si ha

$$\sup\left\{\left|\binom{\alpha}{n}x^n\right| \,\middle|\, x\in[-1,1]\right\} = \left|\binom{\alpha}{n}\right|,$$

quindi la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ converge totalmente, perciò, per il criterio di Weierstrass 2.1.23, converge uniformemente, pertanto, per il teorema 2.1.18, la somma della serie è continua. Quindi si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n} = \lim_{x\to 1}\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n = \lim_{x\to 1}(1+x)^\alpha = 2^\alpha,$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}(-1)^n = \lim_{x\to -1}\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n = \lim_{x\to -1}(1+x)^\alpha = 0.$$

Se $-1<\alpha<0$, allora, per la (2.3.5), la successione $\left(\left|\binom{\alpha}{n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ è definitivamente decrescente, quindi ha limite non negativo. Dimostriamo che tale limite è 0. Per $n\in\mathbb{N}^*$ si ha

$$\frac{\left|\binom{\alpha}{n}\right|}{\left|\binom{\alpha}{2n}\right|} = \frac{\prod_{j=0}^{n-1}|\alpha-j|}{n!}\,\frac{(2n)!}{\prod_{j=0}^{2n-1}|\alpha-j|} = \frac{\prod_{j=n+1}^{2n} j}{\prod_{j=n}^{2n-1}(j-\alpha)} = \frac{\prod_{j=n+1}^{2n} j}{\prod_{j=n+1}^{2n}(j-1-\alpha)} =$$

$$= \prod_{j=n+1}^{2n}\frac{j}{j-1-\alpha} = \prod_{j=n+1}^{2n}\left(1+\frac{1+\alpha}{j-1-\alpha}\right).$$

Poiché tutti i fattori sono maggiori o uguali a quello che si ottiene per $j=2n$, utilizzando la disuguaglianza di Bernoulli si ha

$$\prod_{j=n+1}^{2n}\left(1+\frac{1+\alpha}{j-1-\alpha}\right) \geq \prod_{j=n+1}^{2n}\left(1+\frac{1+\alpha}{2n-1-\alpha}\right) = \left(1+\frac{1+\alpha}{2n-1-\alpha}\right)^n \geq$$

$$\geq 1+n\,\frac{1+\alpha}{2n-1-\alpha} > 1+\frac{1}{2}(1+\alpha) = \frac{3+\alpha}{2}.$$

Pertanto si ha

$$\left|\binom{\alpha}{2n}\right| < \frac{2}{3+\alpha}\left|\binom{\alpha}{n}\right|,$$

da cui segue immediatamente che, $\forall k\in\mathbb{N}$, risulta

$$\left|\binom{\alpha}{2^k}\right| < \left(\frac{2}{3+\alpha}\right)^k\left|\binom{\alpha}{1}\right|,$$

Poiché $2/(3+\alpha)<1$, risulta $\big(2/(3+\alpha)\big)^k\to 0$, per $k\to+\infty$, quindi anche $\left|\binom{\alpha}{2^k}\right|\to 0$. Pertanto la successione $\left(\left|\binom{\alpha}{n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0, perché ha limite e ha una sottosuccessione convergente a 0.

Allora, per il criterio di Leibniz, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\left|\binom{\alpha}{n}\right|(-1)^n$ è convergente. Si verifica facilmente che, per i valori di α che stiamo studiando, $\left|\binom{\alpha}{n}\right|(-1)^n = \binom{\alpha}{n}$, quindi la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}$ è convergente. Per il teorema di Abel 2.2.10 la serie di potenze converge uniformemente in $[0,1]$, quindi, per il teorema 2.1.18, la somma della serie è continua. Quindi si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n} = \lim_{x\to 1}\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n = \lim_{x\to 1}(1+x)^\alpha = 2^\alpha .$$

La serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}(-1)^n$ non converge. Infatti tale serie coincide con $\sum_{n=0}^{+\infty}\left|\binom{\alpha}{n}\right|$ e se, per assurdo, questa fosse convergente, allora ragionando come nel caso $\alpha > 0$, la serie binomiale sarebbe convergente totalmente in $[-1,1]$; da ciò segue

$$\lim_{x\to -1}(1+x)^\alpha = \lim_{x\to -1}\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}(-1)^n$$

che è assurdo, perché $\lim_{x\to -1}(1+x)^\alpha = +\infty$.

Riassumendo, la serie binomiale $\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ converge se e solo se

$$\begin{aligned} &x \in\,]-1,1[\,, && \text{se } \alpha \in\,]-\infty,-1],\\ &x \in\,]-1,1], && \text{se } \alpha \in\,]-1,0[,\\ &x \in [-1,1], && \text{se } \alpha \in\,]0,+\infty[\,\setminus \mathbb{N}. \end{aligned}$$

In ogni caso la somma della serie è $(1+x)^\alpha$. ◀

2.3.14 Esempio. La funzione arcoseno è derivabile in $]-1,1[$ e per x in tale insieme si ha

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} .$$

Pertanto (v. esempio 2.3.13), per $x \in\,]-1,1[$, risulta

$$\arcsin'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{-1/2}{n}(-1)^n x^{2n} .$$

Si ha, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\binom{-1/2}{n} = \frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(-\frac{2n-1}{2}\right) = (-1)^n\,\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots(2n)} = (-1)^n\,\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, \tag{2.3.7}$$

utilizzando la notazione $k!!$ che indica, se k è un naturale dispari, il prodotto di tutti i naturali dispari da 1 a k e, se k è un naturale positivo pari, il prodotto di tutti i naturali pari da 2 a k . Quindi

$$\arcsin'(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,x^{2n} .$$

Pertanto, per il teorema di integrazione termine a termine 2.2.17, $\forall x \in\,]-1,1[$, si ha

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_0^x\left(1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,t^{2n}\right)dt = x + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}\,x^{2n+1} .$$

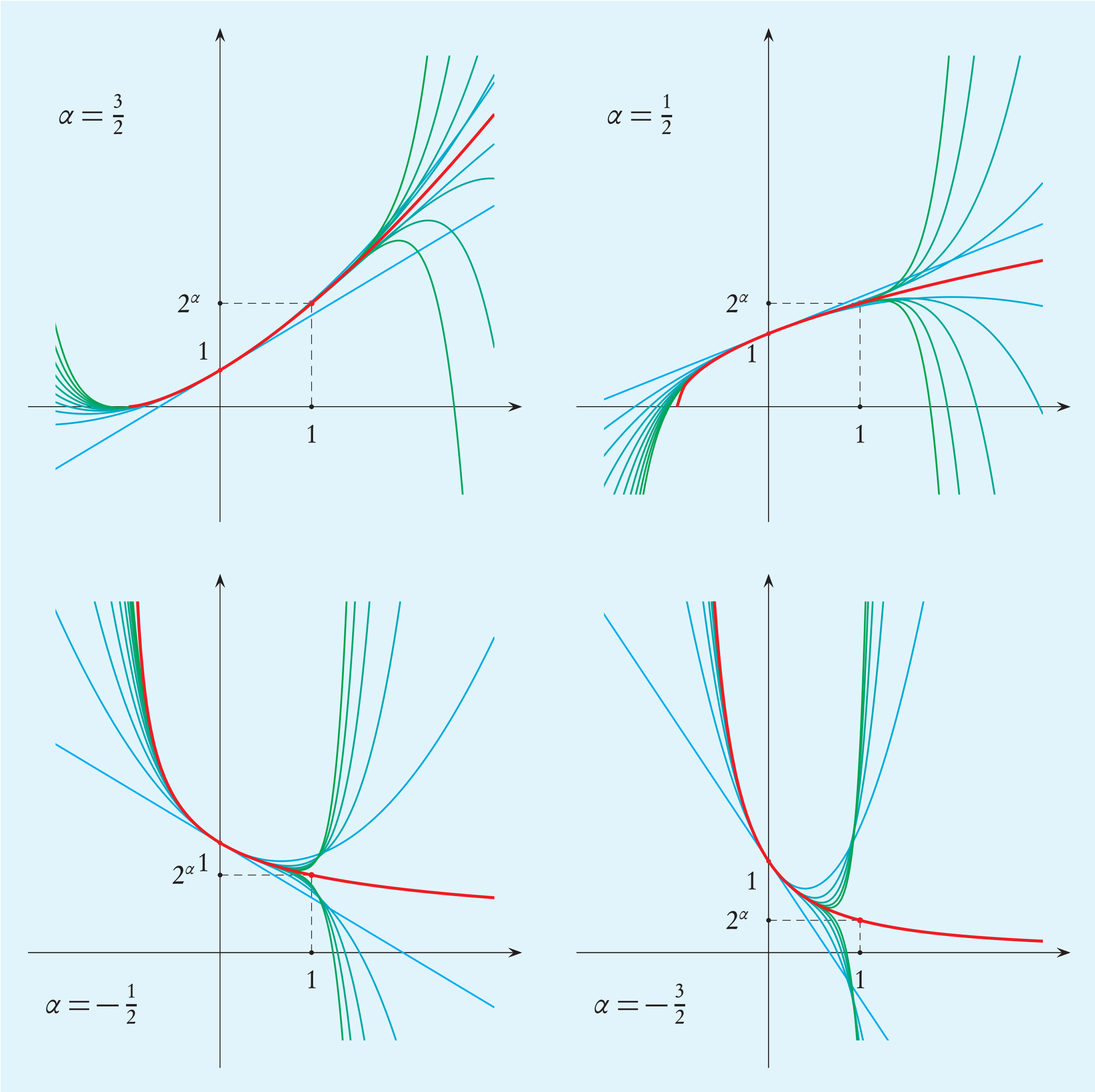


Figura 2.3.11
Somme parziali della serie di Taylor di punto iniziale 0 per la funzione $x \mapsto (1+x)^\alpha$ per alcuni valori di α. Notare che la scala verticale cambia da un grafico all'altro.

Quindi, per il teorema 2.3.4, la funzione arcoseno è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale 0 in $]-1,1[$.

Per $x=1$ la serie è

$$1+\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}. \tag{2.3.8}$$

Dimostriamo che questa serie converge. Per l'uguaglianza (2.3.7), si ha

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!} = \frac{1}{2n+1}(-1)^n\binom{-1/2}{n} \sim \frac{1/2}{n+1}(-1)^n\binom{-1/2}{n} = (-1)^n\binom{1/2}{n+1}.$$

Poiché $1/2 > 0$, per quanto visto nell'esempio 2.3.13, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\binom{1/2}{n+1}$ converge, quindi, per il criterio del confronto asintotico, anche la serie (2.3.8) converge.

Poiché, per $n \in \mathbb{N}^*$, si ha

$$\sup\left\{\left|\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}x^{2n+1}\right| \middle| x \in [-1,1]\right\} = \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!},$$

la serie di potenze converge totalmente, quindi, per il criterio di Weierstrass 2.1.23, converge uniformemente; pertanto, per il teorema 2.1.18, la somma della serie è continua, perciò

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!} = \lim_{x\to 1} \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

Analogamente, la serie converge per $x = -1$ e la somma è uguale a $-\pi/2$. ◀

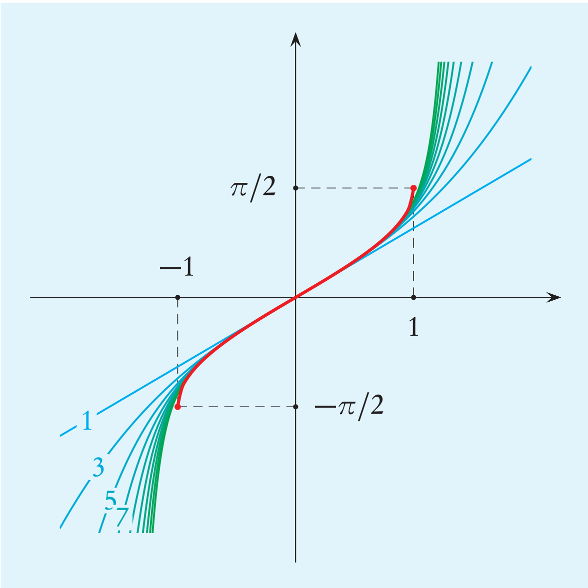


Figura 2.3.12
Somme parziali della serie di Taylor di punto iniziale 0 per la funzione arcoseno.

2.3.15 Esempio. La funzione settorseno iperbolico è derivabile e, $\forall x \in \mathbb{R}$, si ha

$$\operatorname{sectsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-1/2}.$$

Pertanto (v. esempio 2.3.13), per $x \in]-1,1[$ risulta

$$\operatorname{sectsinh}'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{n} x^{2n}.$$

Dall'uguaglianza (2.3.7) si ha, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\binom{-1/2}{n} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

quindi

$$\operatorname{sectsinh}'(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}.$$

Pertanto, per il teorema di integrazione termine a termine 2.2.17, $\forall x \in \,]-1,1[$, si ha

$$\begin{aligned}\operatorname{sectsinh} x &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = \int_0^x \left(1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,t^{2n}\right)dt = \\ &= x+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}\,x^{2n+1}\,.\end{aligned}$$

Quindi, per il teorema 2.3.4, la funzione settorseno iperbolico è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale 0 in $]-1,1[$.

Per $x=1$ la serie è

$$1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}\,.$$

Come visto nell'esempio 2.3.14, questa serie è assolutamente convergente e da qui segue che

$$1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}=\lim_{x\to 1}\operatorname{sectsinh} x=\operatorname{sectsinh} 1=\log\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Analogamente, la serie converge per $x=-1$ e la somma è uguale a $-\log\left(1+\sqrt{2}\right)$. ◀

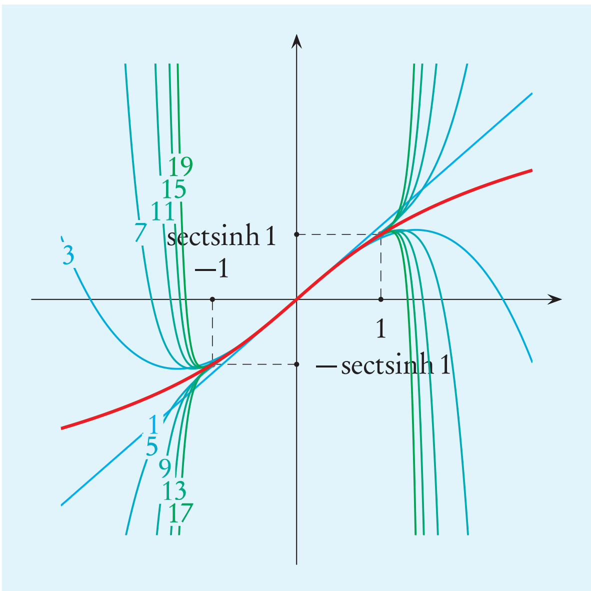


Figura 2.3.13
Somme parziali della serie di Taylor di punto iniziale 0 per la funzione settorseno iperbolico.

3

Equazioni differenziali ordinarie

3.1 Esistenza e unicità della soluzione

3.1.1 Equazioni differenziali del primo ordine

In questa sottosezione studiamo equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. Con questa espressione indichiamo un'equazione in cui l'incognita è una funzione e nell'equazione compare la derivata dell'incognita. Il termine "ordinaria" significa che non compaiono derivate parziali, cioè la funzione incognita dipende da una sola variabile. Vengono chiamate del primo ordine, perché nell'equazione compare solo la derivata prima. Studieremo solo equazioni "in forma normale", cioè in cui a primo membro compare solo la derivata della funzione ed essa non compare a secondo membro. In generale un'equazione di tale tipo è della forma

$$y'(t)=f\big(t,y(t)\big), \tag{3.1.1}$$

dove f è una assegnata funzione di due variabili a valori reali e y è la funzione incognita.

Solitamente si cerca una soluzione dell'equazione che verifichi una "condizione iniziale", cioè che assuma un valore assegnato in un punto fissato del suo dominio. Abbiamo quindi un problema del tipo

$$\begin{cases} y'(t)=f\big(t,y(t)\big), \\ y(t_0)=y_0\,, \end{cases} \tag{3.1.2}$$

dove $f\colon A\to\mathbb{R}$, con $A\subseteq\mathbb{R}^2$, e $(t_0,y_0)\in A$. Questo problema è detto **problema di Cauchy**[16] per un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine.

L'equazione (3.1.1) ha una semplice interpretazione geometrica. Una soluzione è una funzione il cui grafico è una curva del piano di cui è assegnata in ogni punto la retta tangente. Infatti se il grafico di una funzione che verifica l'equazione (3.1.1) passa per il punto (t,y), allora la funzione in t ha derivata $f(t,y)$, pertanto la retta tangente al grafico ha coefficiente angolare $f(t,y)$ (v. figura 3.1.1).

Definiamo anzitutto cosa intendiamo per soluzione di un problema di Cauchy.

[16] La condizione prende il nome dal già citato Augustin-Louis Cauchy (v. nota 10) che fu tra i fondatori della teoria delle equazioni differenziali.

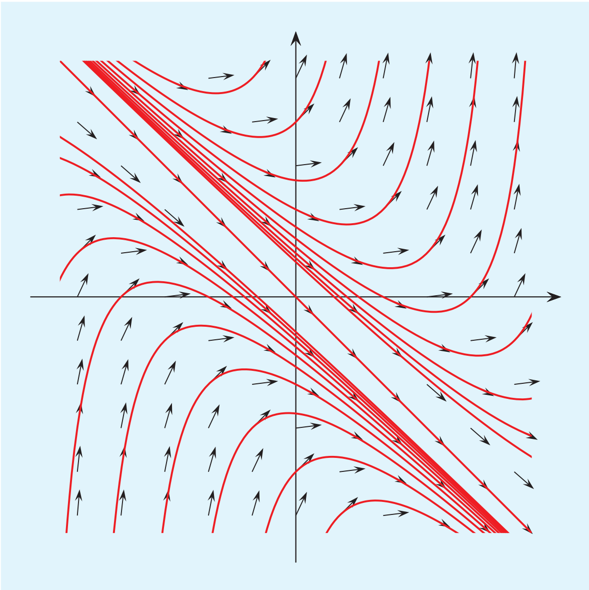


Figura 3.1.1
Le frecce indicano la direzione della tangente al grafico di una funzione che verifica l'equazione differenziale
$$y'(t)=\big((y(t)+t)^2/2\big)-1\,.$$
In rosso alcune funzioni che verificano l'equazione.

Definizione di soluzione di un problema di Cauchy per un'equazione

Siano $A\subseteq\mathbb{R}^2$ aperto, $f\in C(A,\mathbb{R})$, $(t_0,y_0)\in A$, $I\subseteq\mathbb{R}$ intervallo e $v\colon I\to\mathbb{R}$. Diciamo che v è **soluzione del problema di Cauchy** (3.1.2) quando si ha:

I) $v\in C^1(I,\mathbb{R})$;

II) $\forall t\in I$, $\big(t,v(t)\big)\in A$ e
$$v'(t)=f\big(t,v(t)\big);$$

III) $t_0\in I$ e $v(t_0)=y_0$.

In questa definizione non viene fatta alcuna precisazione sull'intervallo I dominio della soluzione. Questo perché in generale non si hanno informazioni sul dominio di una soluzione se non la si determina esplicitamente. Anche se la funzione f che definisce l'equazione ha dominio $\mathbb{R}^2$, può non esistere una soluzione con dominio $\mathbb{R}$, come mostra il seguente esempio.

3.1.1 Esempio. Consideriamo il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'(t)=\exp\big(-y(t)\big),\\ y(0)=y_0\,. \end{cases} \tag{3.1.3}$$
dove $y_0\in\mathbb{R}$.

Sia v una funzione, definita in un intervallo contenente 0, che verifichi l'equazione differenziale e tale che $v(0)=y_0$. Una tale funzione v verifica, per ogni t, l'uguaglianza $v'(t)\exp\big(v(t)\big)=1$, cioè
$$\frac{d}{dt}\exp\big(v(t)\big)=1;$$
pertanto $\exists c\in\mathbb{R}$ tale che, per ogni t, si ha $\exp\big(v(t)\big)=t+c$. Poiché $v(0)=y_0$, deve essere $c=\exp\big(v(0)\big)=e^{y_0}$, pertanto $\exp\big(v(t)\big)=t+e^{y_0}$. Si ha $\exp\big(v(t)\big)>0$, quindi se

$t \in \mathscr{D}(v)$ deve essere $t + e^{y_0} > 0$, cioè $t > -e^{y_0}$. Quindi se v verifica la (3.1.3) risulta $\mathscr{D}(v) \subseteq]-e^{y_0}, +\infty[$, pertanto non esistono soluzioni di dominio $\mathbb{R}$.

Osserviamo che da $\exp\big(v(t)\big) = t + e^{y_0}$ segue $v(t) = \log(t + e^{y_0})$ e si prova facilmente che la funzione

$$v :]-e^{y_0}, +\infty[\to \mathbb{R}, \qquad v(t) = \log(t + e^{y_0}),$$

verifica la (3.1.3). ◀

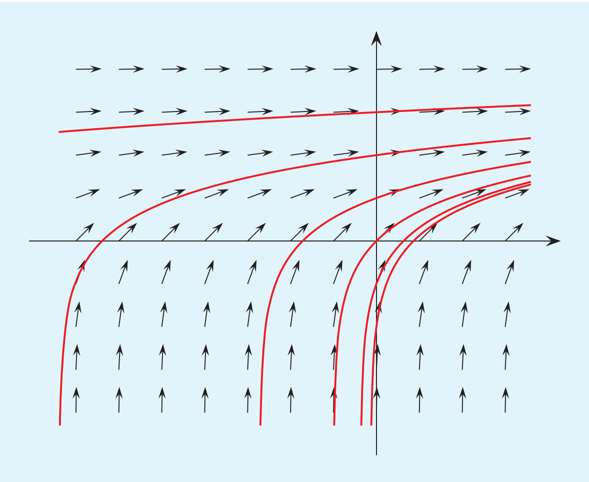


Figura 3.1.2
Soluzioni del problema di Cauchy (3.1.3) per $y_0 = -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

Integrando entrambi i membri, il problema di Cauchy (3.1.2) può essere trasformato nell'equazione integrale

$$v(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, v(s)\big)\, ds; \tag{3.1.4}$$

questa è più semplice da studiare, inoltre se ne possono agevolmente trovare soluzioni approssimate.

Precisiamo la corrispondenza tra le soluzioni del problema di Cauchy (3.1.2) e le soluzioni dell'equazione integrale (3.1.4).

3.1.2 Teorema

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f \in C(A, \mathbb{R})$, $(t_0, y_0) \in A$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo tale che $t_0 \in I$ e $v : I \to \mathbb{R}$. La funzione v è soluzione del problema di Cauchy (3.1.2) se, e solo se,

I) $v \in C(I, \mathbb{R})$;

II) $\forall t \in I$, $\big(t, v(t)\big) \in A$ e $v(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, v(s)\big)\, ds$.

Dimostrazione. Sia $v \in C^1(I, \mathbb{R})$ soluzione del problema (3.1.2). Per la definizione di soluzione vale l'affermazione I e, $\forall t \in I$, $\big(t, v(t)\big) \in A$. Inoltre, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, $\forall t \in I$, si ha

$$v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^{t} v'(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} f\big(s, v(s)\big)\, ds;$$

quindi

$$v(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, v(s)\big)\,ds$$

e vale l'affermazione II.

Viceversa, sia $v\colon I \to \mathbb{R}$ che verifica le affermazioni I e II. Dall'affermazione II segue $v(t_0) = y_0$. Inoltre, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, la funzione $t \mapsto y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, v(s)\big)\,ds$ è derivabile, con derivata $f\big(t, v(t)\big)$; pertanto v è derivabile con derivata continua e, $\forall t \in I$, risulta $v'(t) = f\big(t, v(t)\big)$. Quindi v è soluzione del problema di Cauchy (3.1.2). ■

Enunciamo ora il principale teorema relativo all'esistenza di soluzioni di un problema di Cauchy.

3.1.3 Teorema (di Peano[17])

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f \in C(A, \mathbb{R})$ e $(t_0, y_0) \in A$. Allora esiste una soluzione, definita in un intorno di t_0, del problema di Cauchy (3.1.2).

La dimostrazione è complessa, ma si basa su una idea semplice. La soluzione viene approssimata da funzioni il cui grafico è una curva costituita da segmenti.

Per la precisione si costruisce una successione di funzioni definite in un intervallo a destra del punto t_0 in cui è assegnata la condizione di Cauchy. Per definire la n-sima funzione si suddivide tale intervallo in n parti uguali, nel primo intervallo il grafico della funzione è un segmento che ha un estremo in (t_0, y_0) e coefficiente angolare $f(t_0, y_0)$. Negli intervalli successivi il grafico è un segmento che ha estremo sinistro coincidente con l'estremo destro del segmento precedente e coefficiente angolare il valore di f nell'estremo sinistro.

Successivamente si dimostra che la successione ottenuta ha una sottosuccessione uniformemente convergente e che il limite della sottosuccessione è la soluzione cercata.

Dimostrazione. Per il teorema 3.1.2, è sufficiente dimostrare che esiste una soluzione dell'equazione integrale (3.1.4).

Poiché A è aperto, esistono $a, b \in \mathbb{R}^+$ tali che $[t_0 - a, t_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \subseteq A$. Poniamo

$$M = \max\big\{ |f(t,y)| \;\big|\; t \in [t_0 - a, t_0 + a],\, y \in [y_0 - b, y_0 + b] \big\}.$$

Questo massimo esiste per il teorema di Weierstrass, perché stiamo considerando una funzione continua in un insieme compatto. Posto $\delta = \min\{a, b/M\}$, dimostriamo l'esistenza di una soluzione definita in $I_\delta = [t_0, t_0 + \delta]$; in modo analogo si dimostra l'esistenza di una soluzione definita in $[t_0 - \delta, t_0]$. Per semplificare le notazioni poniamo $J_b = [y_0 - b, y_0 + b]$.

[17] Il teorema prende il nome da Giuseppe Peano (Cuneo, 1858 - Torino, 1932) che lo enunciò con una dimostrazione incompleta nel 1886 e lo dimostrò rigorosamente nel 1890. Peano ottenne importanti risultati in logica matematica, algebra lineare e in vari settori dell'analisi tra cui le equazioni differenziali. Fu anche studioso di filosofia.

Costruiamo anzitutto una successione di funzioni continue da I_δ a J_b che, in qualche senso, approssimano una soluzione. Tali funzioni sono affini a tratti, cioè il dominio è scomposto nell'unione di un numero finito di intervalli in ciascuno dei quali esse sono definite tramite un polinomio di primo grado.

Sia $n \in \mathbb{N}^*$; per $i = 0, 1, \dots, n$ poniamo $t_{n,i} = t_0 + (i\delta/n)$. Osserviamo che si ha $t_0 = t_{n,0} < t_{n,1} < \cdots < t_{n,n} = t_0 + \delta$. Definiamo $v_n : I_\delta \to \mathbb{R}$ ponendo

$$v_n(t) = \begin{cases} y_0, & \text{per } t = t_0, \\ v_n(t_{n,i}) + f\big(t_{n,i}, v_n(t_{n,i})\big)(t - t_{n,i}), & \text{per } t \in]t_{n,i}, t_{n,i+1}],\ i = 0, 1, \dots, n-1. \end{cases}$$

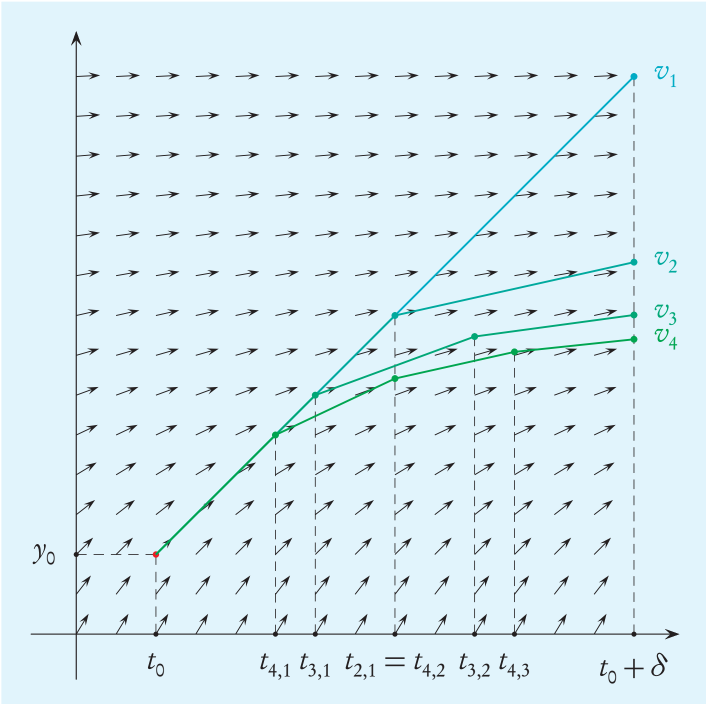


Figura 3.1.3
Approssimanti di una soluzione di un problema di Cauchy costruite nella dimostrazione del teorema 3.1.3.

Proviamo che $v_n(t) \in J_b$, per ogni $t \in I_\delta$, quindi è definito $f\big(t_{n,i}, v_n(t_{n,i})\big)$ e la definizione di v_n è ben posta. Infatti se $t \in]t_{n,0}, t_{n,1}]$, allora

$$|v_n(t) - y_0| = |v_n(t_{n,0}) + f\big(t_{n,0}, v_n(t_{n,0})\big)(t - t_{n,0}) - y_0| = |f\big(t_0, v_n(t_0)\big)(t - t_0)| \leq M(t - t_0).$$

Pertanto

$$|v_n(t) - y_0| \leq M\,\frac{\delta}{n} \leq M\delta \leq b,$$

quindi $v_n(t) \in J_b$. Inoltre risulta $|v_n(t_{n,1}) - y_0| \leq M(t_{n,1} - t_0)$. Se $t \in]t_{n,1}, t_{n,2}]$, allora

$$\begin{aligned} |v_n(t) - y_0| &= |v_n(t_{n,1}) + f\big(t_{n,1}, v_n(t_{n,1})\big)(t - t_{n,1}) - y_0| \leq \\ &\leq |v_n(t_{n,1}) - y_0| + |f\big(t_{n,1}, v_n(t_{n,1})\big)(t - t_{n,1})| \leq M(t_{n,1} - t_0) + M(t - t_{n,1}) = M(t - t_0). \end{aligned}$$

Pertanto

$$|v_n(t) - y_0| \leq M\,\frac{2\delta}{n} \leq M\delta \leq b.$$

quindi $v_n(t) \in J_b$. Se si ripete il ragionamento per gli intervalli successivi si prova che, $\forall t \in I_\delta$, si ha $|v_n(t)-y_0| \leq M(t-t_0)$, perciò tutti i $v_n(t_{n,i})$ appartengono a J_b, quindi v_n è ben definita, e ha valori in J_b; pertanto $\{v_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ è equilimitato. Inoltre v_n è evidentemente continua nei punti diversi da $t_{n,i}$ e, calcolando i limiti destro e sinistro, si verifica che è continua anche in tali punti.

Osserviamo che, posto

$$\varphi_n : I_\delta \to \mathbb{R}, \qquad \varphi_n(t) = \begin{cases} f(t_0, y_0), & \text{per } t \in [t_0, t_{n,1}], \\ f\big(t_{n,i}, v_n(t_{n,i})\big), & \text{per } t \in \,]t_{n,i}, t_{n,i+1}]\,,\ i = 1, 2, \dots, n-1, \end{cases}$$

risulta $v_n'(t) = \varphi_n(t)$, se $t \in I_\delta \setminus \{t_{n,1}, t_{n,2}, \dots, t_{n,n-1}\}$, pertanto, $\forall t \in I_\delta$,

$$v_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} \varphi_n(s)\, ds\,. \tag{3.1.5}$$

Per $n \in \mathbb{N}^*$ e $t \in I_\delta$ si ha

$$|\varphi_n(t)| \leq \max\big\{|f(t,y)| \mid t \in I_\delta, y \in J_b\big\} = M,$$

pertanto, $\forall t, \tau \in I_\delta$, si ha

$$|v_n(t) - v_n(\tau)| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \varphi_n(s)\, ds - \int_{t_0}^{\tau} \varphi_n(s)\, ds \right| \leq \left| \int_{\tau}^{t} |\varphi_n(s)|\, ds \right| \leq \left| \int_{\tau}^{t} M\, ds \right| = M|t-\tau|. \tag{3.1.6}$$

Quindi, per $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, si ha, $\forall t, \tau \in I_\delta$, $|t-\tau| < \varepsilon/M \implies |v_n(t) - v_n(\tau)| < \varepsilon$, pertanto $\{v_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ è equicontinuo.

L'insieme $\{v_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ è equicontinuo ed equilimitato, quindi, per il teorema di Ascoli-Arzelà, esiste una sottosuccessione $(v_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ uniformemente convergente a una funzione $v : I_\delta \to J_b$ continua.

Dimostriamo che, $\forall t \in I_\delta$, si ha $v(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, v(s)\big)\, ds$ e quindi, per il teorema 3.1.2, v è soluzione del problema di Cauchy. Utilizzando l'uguaglianza (3.1.5), si ha, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in I_\delta$,

$$\begin{aligned} \left| v(t) - y_0 - \int_{t_0}^{t} f\big(s, v(s)\big)\, ds \right| &= \left| v(t) - v_{k_n}(t) + \int_{t_0}^{t} \varphi_{k_n}(s)\, ds - \int_{t_0}^{t} f\big(s, v_{k_n}(s)\big)\, ds + \right. \\ &\qquad \left. + \int_{t_0}^{t} f\big(s, v_{k_n}(s)\big)\, ds - \int_{t_0}^{t} f\big(s, v(s)\big)\, ds \right| \leq \\ &\leq |v(t) - v_{k_n}(t)| + \int_{t_0}^{t} \big|\varphi_{k_n}(s) - f\big(s, v_{k_n}(s)\big)\big|\, ds + \int_{t_0}^{t} \big| f\big(s, v_{k_n}(s)\big) - f\big(s, v(s)\big)\big|\, ds\,. \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Per il teorema di Heine-Cantor f è uniformemente continua in $I_\delta \times J_b$, quindi, fissato $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $\exists \eta_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$\forall (t_1, y_1), (t_2, y_2) \in I_\delta \times J_b, \quad \big(|t_1 - t_2| < \eta_\varepsilon \wedge |y_1 - y_2| < \eta_\varepsilon\big) \implies |f(t_1, y_1) - f(t_2, y_2)| < \varepsilon\,.$$

Sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $\delta/k_n < \eta_\varepsilon$, $M\delta/k_n < \eta_\varepsilon$ e $\sup|v_{k_n} - v| < \eta_\varepsilon$. Per semplificare la notazione indichiamo con m il numero k_n. Sia $t \in I_\delta$. Allora si ha $\varphi_m(t) = f\big(t_{m,i}, v_m(t_{m,i})\big)$ per un opportuno i tale che $t_{m,i} \le t \le t_{m,i+1}$, pertanto $0 \le t - t_{m,i} \le \delta/m < \eta_\varepsilon$, quindi, dalla disuguaglianza (3.1.6), segue

$$\big|v_m(t_{m,i}) - v_m(t)\big| \le M(t - t_{m,i}) \le M\delta/m < \eta_\varepsilon .$$

Pertanto

$$\big|\varphi_m(t) - f\big(t, v_m(t)\big)\big| = \big|f\big(t_{m,i}, v_m(t_{m,i})\big) - f\big(t, v_m(t)\big)\big| < \varepsilon .$$

Poiché $\sup|v_m - v| < \eta_\varepsilon$ si ha $\big|f\big(t, v_m(t)\big) - f\big(t, v(t)\big)\big| < \varepsilon$, quindi dalla disuguaglianza (3.1.7) segue

$$\left|v(t) - y_0 - \int_{t_0}^{t} f\big(s, v(s)\big)\,ds\right| < \varepsilon + \int_{t_0}^{t} \varepsilon\,ds + \int_{t_0}^{t} \varepsilon\,ds = \varepsilon + 2(t - t_0)\varepsilon \le (1 + 2\delta)\varepsilon.$$

Poiché questa disuguaglianza vale $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, risulta $v(t) - y_0 - \int_{t_0}^{t} f\big(s, v(s)\big)\,ds = 0$.

Il teorema è così dimostrato. ■

3.1.4 Osservazione. In questa dimostrazione abbiamo provato l'esistenza di una soluzione del problema di Cauchy nell'intervallo $[t_0, t_0 + \delta]$, con $\delta = \min\{a, b/M\}$ (conserviamo la notazione della dimostrazione). Vediamo una motivazione della scelta di δ.

Si può dimostrare che, se K è un compatto contenuto in A tale che $(t_0, y_0) \in \operatorname{int} K$, allora ogni soluzione del problema (3.1.2) si può prolungare, a sinistra e a destra di t_0, almeno fino a che il suo grafico non esce da K. In particolare consideriamo il rettangolo compatto $K = [t_0 - a, t_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$. Studiamo una soluzione v del problema di Cauchy a destra del punto t_0. Il grafico di questa soluzione esce dal rettangolo o intersecando il lato di destra, oppure quello inferiore, oppure quello superiore.

Sia $\overline{t} > t_0$ tale che il grafico di v rimane in K almeno fino a $\overline{t}$, cioè $\overline{t}$ è tale che $\overline{t} \le t_0 + a$ e, $\forall t \in [t_0, \overline{t}\,]$, si ha $v(t) \in [y_0 - b, y_0 + b]$. Allora, per il teorema di Lagrange, $\forall t \in\,]t_0, \overline{t}\,]$, $\exists \tau \in\,]t_0, t[$ tale che

$$\big|v(t) - y_0\big| = \big|v(t) - v(t_0)\big| = \big|v'(\tau)\big|(t - t_0) = \big|f\big(\tau, v(\tau)\big)\big|(t - t_0).$$

Si ha $\big(\tau, v(\tau)\big) \in K$, quindi risulta $\big|f\big(\tau, v(\tau)\big)\big| \le M$, pertanto $\big|v(t) - y_0\big| \le M(t - t_0)$, cioè

$$y_0 - M(t - t_0) \le v(t) \le y_0 + M(t - t_0).$$

Pertanto a destra di t_0 il grafico di v, finché non esce dal rettangolo K, è compreso tra le rette di equazione $y = y_0 - M(t - t_0)$ e $y_0 + M(t - t_0)$. Calcoli analoghi provano che lo stesso avviene a sinistra di t_0, ma in tal caso le due rette sono scambiate. Queste rette intersecano la retta $t = t_0 + \delta$ nei punti di ordinata $y_0 \pm aM$.

Se $b/M \ge a$, allora le due rette rimangono all'interno del rettangolo K per t in tutto l'intervallo $[t_0 - a, t_0 + a]$, quindi la soluzione può uscire da K solo dal lato destro e dal lato sinistro.

Se $b/M < a$, allora le due rette escono da K in punti di ascissa $t_0 \pm (b/M)$ e la soluzione può uscire da K anche dal lato superiore o inferiore.

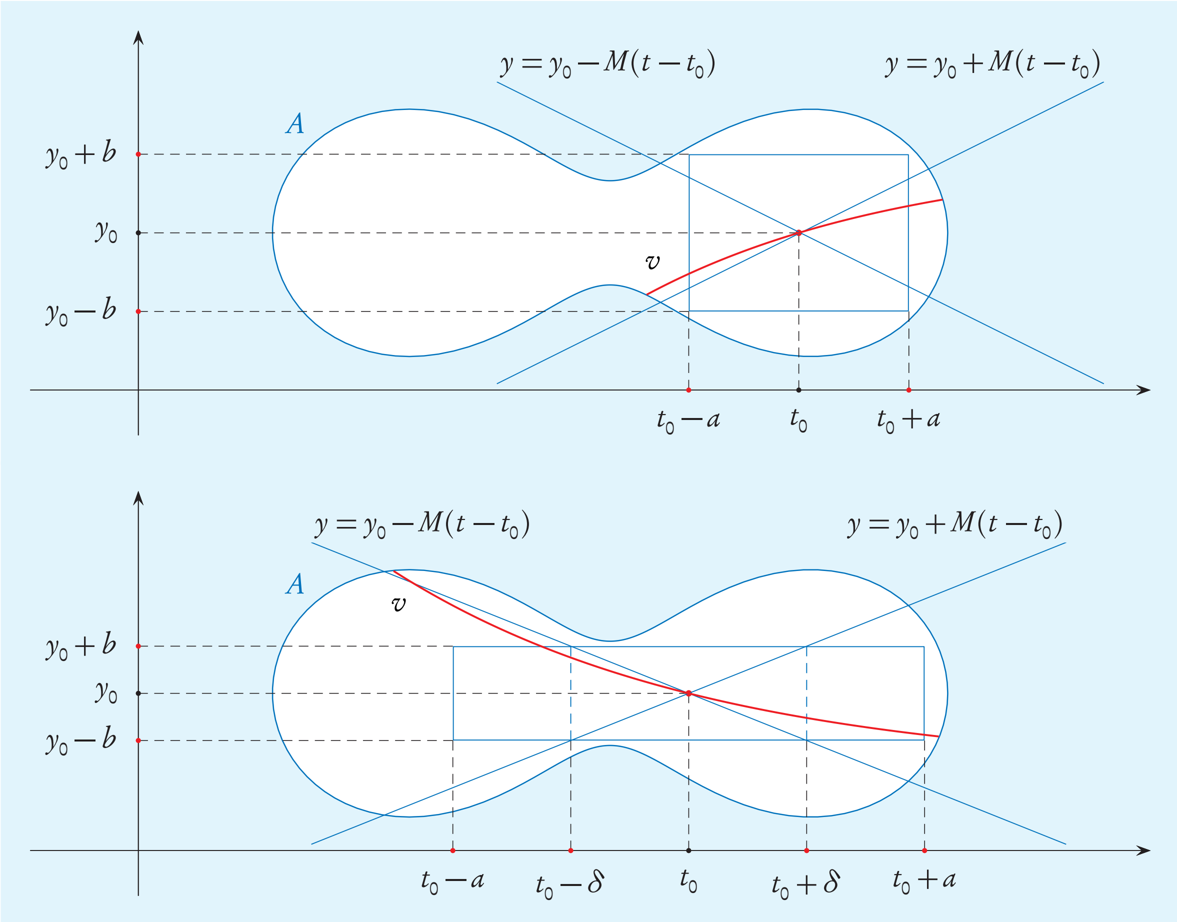


Figura 3.1.4
Illustrazione dell'osservazione 3.1.4. Una soluzione v del problema di Cauchy (in rosso) è compresa tra le rette di equazione $y = y_0 - M(t-t_0)$ e $y_0 + M(t-t_0)$.
In alto: quando $b/M > a$ si ha $\delta = a$; in questo caso una soluzione può uscire dal rettangolo $[t_0 - a, t_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ solo dal lato destro e da quello sinistro.
In basso: quando $b/M < a$ si ha $\delta = b/M$; in questo caso una soluzione può uscire dal rettangolo $[t_0 - a, t_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ da qualunque lato.

Perciò la soluzione v è definita, a destra di t_0, in un intervallo di lunghezza a oppure in un intervallo di lunghezza almeno b/M; in ogni caso in un intervallo di lunghezza maggiore o uguale a $\delta = \min\{a, b/M\}$. ◀

Per il teorema di Peano, un problema di Cauchy ha soluzione, se la funzione che determina la derivata è continua. Il seguente esempio mostra che vi possono essere più soluzioni.

3.1.5 Esempio. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = 2\sqrt{|y(t)|}, \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{3.1.8}$$

Evidentemente questo problema ha come soluzione la funzione identicamente nulla.

Anche la funzione

$$v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad v(t)=t|t|,$$

è soluzione. Infatti $\forall t\in\mathbb{R}^*$ si ha

$$v'(t)=|t|+t\,\mathrm{sgn}(t)=2|t|=2\sqrt{|t|t||}=2\sqrt{|v(t)|};$$

e

$$v'(0)=\lim_{t\to 0}\frac{v(t)-v(0)}{t-0}=\lim_{t\to 0}\frac{t|t|}{t}=\lim_{t\to 0}|t|=0=2\sqrt{|v(0)|}.$$

Inoltre $v(0)=0$. Quindi il problema di Cauchy (3.1.8) ha due soluzioni distinte.

Si verifica facilmente che esistono altre soluzioni del problema. Sono soluzioni la funzione che coincide con v in $\mathbb{R}^+$ ed è nulla in $]-\infty,0]$ e quella che coincide con v in $\mathbb{R}^-$ ed è nulla in $[0,+\infty[$. Inoltre qualunque siano $a\in]-\infty,0]$ e $b\in[0,+\infty[$, è soluzione la funzione

$$w:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad w(t)=\begin{cases}-(t-a)^2, & \text{se } t<a,\\ 0, & \text{se } a\le t\le b,\\ (t-b)^2, & \text{se } t>b.\end{cases}$$ ◀

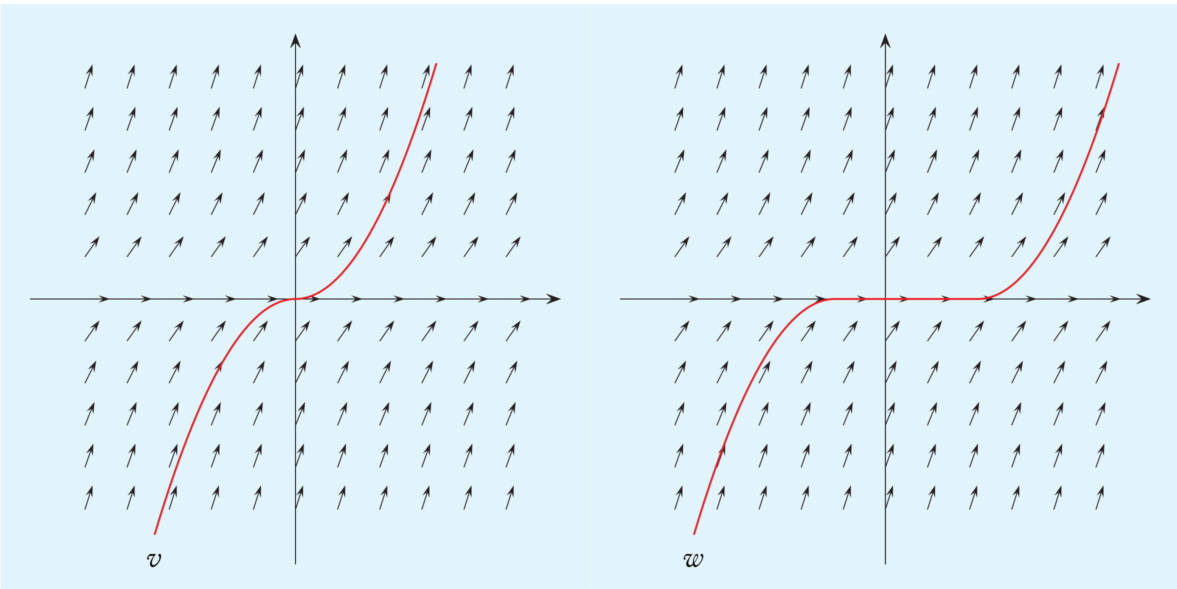


Figura 3.1.5
Due soluzioni del problema di Cauchy (3.1.8).

Se si aggiunge una ulteriore ipotesi sulla funzione f, allora la soluzione del problema di Cauchy è unica. Dobbiamo precisare cosa significa che la soluzione è unica. Secondo la definizione data, qualunque restrizione di una soluzione a un intervallo contenente il punto iniziale t_0 è ancora una soluzione. Pertanto si può parlare di unicità della soluzione solo prescindendo dalle differenze di dominio, cioè chiedendo che due soluzioni, pur potendo avere domini diversi, coincidano nei punti in cui entrambe sono definite.

Definizione di unicità della soluzione

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f: A \to \mathbb{R}$ e $(t_0, y_0) \in A$. Diciamo che c'è **unicità della soluzione** per il problema di Cauchy (3.1.2) quando, qualunque siano $v \in C^1(I, \mathbb{R})$ e $w \in C^1(J, \mathbb{R})$, soluzioni del problema, $\forall t \in I \cap J$, si ha $v(t) = w(t)$.

Introduciamo una condizione utile per stabilire l'unicità per un problema di Cauchy.

Definizione di funzione lipschitziana

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e $f: A \to \mathbb{R}$.

Diciamo che f è **lipschitziana rispetto alla seconda variabile uniformemente rispetto alla prima** quando $\exists L \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$\forall (t, y_1), (t, y_2) \in A, \quad \big|f(t, y_1) - f(t, y_2)\big| \leq L|y_1 - y_2|.$$

Diciamo che f è **localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile uniformemente rispetto alla prima** quando, $\forall (t, y) \in A$, esiste U intorno di (t, y) tale che $f|_{A \cap U}$ è lipschitziana rispetto alla seconda variabile uniformemente rispetto alla prima.

3.1.6 Osservazione. Se una funzione continua è localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile uniformemente rispetto alla prima, allora è lipschitziana rispetto alla seconda variabile uniformemente rispetto alla prima in ogni compatto incluso nel suo dominio.

Per provare questo, dimostriamo che se esiste K, compatto contenuto in A, in cui f non è lipschitziana allora non è localmente lipschitziana.

Sia $K \subseteq A$ compatto su cui f non è lipschitziana; allora

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists (t_n, v_n), (t_n, w_n) \in K: \quad \big|f(t_n, v_n) - f(t_n, w_n)\big| > n|v_n - w_n|. \tag{3.1.9}$$

Per il teorema di Weierstrass, $|f|$ ha massimo in K. Indichiamo tale massimo con M. Da (3.1.9) segue

$$|v_n - w_n| \leq \frac{1}{n}\big|f(t_n, v_n) - f(t_n, w_n)\big| \leq \frac{1}{n}\Big(\big|f(t_n, v_n)\big| + \big|f(t_n, w_n)\big|\Big) \leq \frac{2M}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Poiché K è compatto, per il teorema di Bolzano-Weierstrass, la successione $\big((t_n, v_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ ha una sottosuccessione $\big((t_{k_n}, v_{k_n})\big)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a un elemento di K, che indichiamo con $(\bar{t}, \bar{v})$. Poiché $v_{k_n} - w_{k_n} \to 0$, risulta anche $(t_{k_n}, w_{k_n}) \to (\bar{t}, \bar{v})$. Allora, qualunque sia U intorno di $(\bar{t}, \bar{v})$, definitivamente risulta $(t_{k_n}, v_{k_n}), (t_{k_n}, w_{k_n}) \in U$; poiché vale (3.1.9), f non è lipschitziana in U. Pertanto f non è localmente lipschitziana. ◀

3.1.7 Osservazione. Solitamente non è facile dimostrare che una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ è lipschitziana o localmente lipschitziana verificando la definizione. In molti casi si può dedurre la lipschitzianità di una funzione da proprietà delle sue derivate che sono più semplici da verificare.

Se A è aperto e convesso, una semplice condizione che implica la lipschitzianità è che f sia derivabile parzialmente rispetto alla seconda variabile, con derivata limitata. Infatti, in tal caso, se $(t,y_1),(t,y_2)\in A$, allora, per la convessità di A, il segmento di estremi (t,y_1) e (t,y_2) è incluso in A, quindi la funzione $y\mapsto f(t,y)$ è definita nell'intervallo di estremi y_1 e y_2. Per il teorema di Lagrange, esiste η appartenente a tale intervallo tale che $f(t,y_1)-f(t,y_2)=f_y(\eta)(y_1-y_2)$, pertanto

$$\left|f(t,y_1)-f(t,y_2)\right|=\left|f_y(t,\eta)\right||y_1-y_2|\le\sup\left\{\left|f_y(t,y)\right|\,\middle|\,(t,y)\in A\right\}|y_1-y_2|.$$

Se A è aperto e f è derivabile parzialmente rispetto alla seconda variabile, con derivata continua, allora f è localmente lipschitziana. Infatti se $(t,y)\in A$, scelto $r\in\mathbb{R}^+$ tale che $\overline{S}\big((t,y),r\big)\subseteq A$, per il teorema di Weierstrass f_y è limitata in $\overline{S}\big((t,y),r\big)$, quindi anche in $S\big((t,y),r\big)$, che è convesso. Per quanto osservato sopra f è lipschitziana in tale insieme. ◀

3.1.8 Teorema (di Cauchy)

Siano $A\subseteq\mathbb{R}^2$ aperto, $f\in C(A,\mathbb{R})$ e $(t_0,y_0)\in A$. Supponiamo f localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile, uniformemente rispetto alla prima. Allora esiste una soluzione, definita in un intorno di t_0, del problema di Cauchy (3.1.2) e per questo problema c'è unicità della soluzione.

Dimostrazione. Per il teorema 3.1.2, è sufficiente dimostrare che esiste una soluzione dell'equazione integrale (3.1.4).

Siano $a,b\in\mathbb{R}^+$ tali che il compatto $[t_0-a,t_0+a]\times[y_0-b,y_0+b]$ è incluso in A. Per l'osservazione 3.1.6 f è lipschitziana in tale insieme, quindi $\exists L\in\mathbb{R}^+$ tale che,

$$\forall(t,y_1),(t,y_2)\in[t_0-a,t_0+a]\times[y_0-b,y_0+b],\qquad \left|f(t,y_1)-f(t,y_2)\right|\le L|y_1-y_2|.$$

Poniamo

$$M=\max\left\{\left|f(t,y)\right|\,\middle|\,t\in[t_0-a,t_0+a],y\in[y_0-b,y_0+b]\right\}.$$

Questo massimo esiste per il teorema di Weierstrass, perché stiamo considerando una funzione continua in un insieme compatto. Posto $\delta=\min\{a,b/M\}$, dimostriamo l'esistenza di una soluzione definita in $I_\delta=[t_0,t_0+\delta]$; in modo analogo si dimostra l'esistenza di una soluzione definita in $[t_0-\delta,t_0]$. Per semplificare le notazioni poniamo $J_b=[y_0-b,y_0+b]$.

Per provare il teorema definiamo una funzione in uno spazio metrico completo di funzioni continue i cui punti fissi sono le soluzioni dell'equazione integrale (3.1.4) e proviamo che una potenza di questa funzione è una contrazione, quindi, per un corollario del teorema di Banach-Caccioppoli, ha uno e un solo punto fisso.

Sia $X=C(I_\delta,J_b)$, lo spazio delle funzioni continue da I_δ a J_b. Questo è un sottoinsieme chiuso dello spazio metrico completo $C(I_\delta,\mathbb{R})$. Pertanto X dotato della distanza ereditata da $C(I_\delta,\mathbb{R})$, cioè

$$d(w,z)=\max\left\{\left|w(t)-z(t)\right|\,\middle|\,t\in I_\delta\right\},$$

è uno spazio metrico completo.

Se $w\in X$, allora, posto

$$z:I_\delta\to\mathbb{R},\qquad z(t)=y_0+\int_{t_0}^{t}f\big(s,w(s)\big)\,ds,\tag{3.1.10}$$

risulta $z \in X$, perché è continua e ha immagine contenuta in J_b. Infatti, $\forall t \in I_\delta$, si ha $\big(t, w(t)\big) \in I_\delta \times J_b \subseteq A$, quindi la funzione $t \mapsto f\big(t, w(t)\big)$ è definita in I_δ; inoltre essa è continua, perché composizione di funzioni continue. Pertanto z è ben definita e, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, è continua. Inoltre, $\forall t \in I_\delta$, si ha

$$\big|f\big(t, w(t)\big)\big| \le \max\big\{|f(t,y)| \,\big|\, t \in I_\delta, y \in J_b\big\} \le M;$$

quindi risulta

$$|z(t) - y_0| = \left|\int_{t_0}^{t} f\big(s, w(s)\big)\,ds\right| \le \int_{t_0}^{t} \big|f\big(s, w(s)\big)\big|\,ds \le \int_{t_0}^{t} M\,ds = M(t - t_0).$$

Poiché $M(t - t_0) \le M\delta \le b$, si ha $z(t) \in J_b$, quindi $z \in X$. Indichiamo con S la funzione da X a X definita dalla (3.1.10), cioè poniamo

$$S : X \to X, \qquad S(w)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, w(s)\big)\,ds.$$

Una funzione $w \in X$ è punto fisso per S se e solo se, $\forall t \in I_\delta$, si ha

$$w(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, w(s)\big)\,ds$$

cioè se e solo se w è soluzione dell'equazione integrale (3.1.4).

Proviamo che $\exists k \in \mathbb{N}^*$ tale che S^k è una contrazione. Se $w, z \in X$, allora, $\forall t \in I_\delta$, si ha

$$\begin{aligned} |S(w)(t) - S(z)(t)| &= \left|\int_{t_0}^{t} \Big(f\big(s, w(s)\big) - f\big(s, z(s)\big)\Big)\,ds\right| \le \\ &\le \int_{t_0}^{t} \big|f\big(s, w(s)\big) - f\big(s, z(s)\big)\big|\,ds \le \int_{t_0}^{t} L|w(s) - z(s)|\,ds; \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

pertanto

$$|S(w)(t) - S(z)(t)| \le \int_{t_0}^{t} L|w(s) - z(s)|\,ds \le \int_{t_0}^{t} L d(w,z)\,ds = L(t - t_0)d(w,z). \tag{3.1.12}$$

Dalla disuguaglianza (3.1.11) a con $S(w)$ e $S(z)$ al posto di w e di z si ha

$$|S^2(w)(t) - S^2(z)(t)| \le \int_{t_0}^{t} L|S(w)(s) - S(z)(s)|\,ds;$$

da qui, per la disuguaglianza (3.1.12), si ottiene

$$|S^2(w)(t) - S^2(z)(t)| \le \int_{t_0}^{t} L^2(s - t_0)\,d(w,z)\,ds = \frac{L^2(t - t_0)^2}{2}\,d(w,z).$$

Ripetendo il ragionamento si prova che, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, risulta

$$|S^k(w)(t) - S^k(z)(t)| \le \frac{L^k(t - t_0)^k}{k!}\,d(w,z), \tag{3.1.13}$$

pertanto

$$d\big(S^k(w),S^k(z)\big)\le \max_{t\in I_\delta}\frac{L^k(t-t_0)^k}{k!}\,d(w,z)=\frac{L^k\delta^k}{k!}\,d(w,z).$$

Quindi S^k è lipschitziana di costante $L^k\delta^k/k!$. Per $k\to+\infty$ tale costante tende a 0, pertanto, per k grande, S^k è una contrazione. Quindi esiste uno e un solo punto fisso per S, pertanto esiste una e una sola soluzione del problema di Cauchy definita in I_δ.

Dimostriamo che c'è unicità della soluzione non solo in I_δ. Proviamo l'unicità della soluzione definita a destra di t_0, un analogo argomento prova l'unicità anche a sinistra di t_0.

Siano I, J intervalli di $\mathbb{R}$, con $\min I=\min J=t_0$ e $v\in C^1(I,\mathbb{R})$, $w\in C^1(J,\mathbb{R})$ soluzioni del problema di Cauchy. Dobbiamo provare che v e w coincidono in $I\cap J$. Supponiamo, per assurdo, che $\big\{t\in I\cap J \,\big|\, v(t)\neq w(t)\big\}$ sia non vuoto. Tale insieme ha minorante t_0, quindi ha estremo inferiore reale. Indichiamolo con $\overline{t}$. Abbiamo già dimostrato che $\exists\delta\in\mathbb{R}^+$ tale che esiste una sola soluzione definita in $[t_0,t_0+\delta]$, pertanto per t in tale intervallo risulta $v(t)=w(t)$, quindi $\overline{t}\ge t_0+\delta>t_0$. Poiché $\forall t\in[t_0,\overline{t}[$ si ha $v(t)=w(t)$ e v e w sono continue, risulta $v(\overline{t})=w(\overline{t})$. Pertanto v e w sono soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t)=f\big(t,y(t)\big),\\ y(\overline{t})=v(\overline{t}).\end{cases}$$

Per definizione di $\overline{t}$ non esiste nessun intorno destro di $\overline{t}$ su cui le due soluzioni coincidono. Ciò è assurdo perché abbiamo dimostrato che qualunque problema di Cauchy per l'equazione $y'(t)=f\big(t,y(t)\big)$ ha una unica soluzione definita in un opportuno intorno destro del punto in cui è assegnata la condizione iniziale. ■

Rafforzando le ipotesi del teorema di Cauchy si ha l'esistenza di una soluzione non solo in un intorno di t_0, ma nel più grande intervallo in cui può essere definita una soluzione. Abbiamo infatti il seguente teorema.

3.1.9 Teorema (di esistenza globale)

Siano $J\subseteq\mathbb{R}$ intervallo aperto, $f\in C(J\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ e $(t_0,y_0)\in J\times\mathbb{R}$. Supponiamo che la restrizione di f a ogni insieme $K\times\mathbb{R}$, con $K\subseteq J$ compatto, sia lipschitziana rispetto alla seconda variabile, uniformemente rispetto alla prima. Allora esiste una soluzione definita in J del problema di Cauchy (3.1.2) e per questo problema c'è unicità della soluzione.

Dimostrazione. Come fatto per il teorema di Cauchy 3.1.8, dimostriamo l'esistenza di una soluzione definita in $[t_0,\sup J[$; in modo analogo si dimostra l'esistenza di una soluzione definita in $]\inf J,t_0]$.

Sia $T\in\,]t_0,\sup J[$. Poiché $[t_0,T]$ è un sottoinsieme compatto di J, $\exists L\in\mathbb{R}^+$ tale che $\forall(t,y_1),(t,y_2)\in[t_0,T]\times\mathbb{R}$, si ha $|f(t,y_1)-f(t,y_2)|\le L|y_1-y_2|$.

Posto $X=C\big([t_0,T],\mathbb{R}\big)$, possiamo definire $S\colon X\to X$, ponendo

$$S(w)(t)=y_0+\int_{t_0}^{t} f\big(s,w(s)\big)\,ds\,.$$

Procedendo come nella dimostrazione del teorema di Cauchy 3.1.8, si prova che, anche in questo caso, vale la disuguaglianza (3.1.13), da cui segue

$$d\big(S^k(w), S^k(z)\big) \leq \max_{t\in[t_0,t_0+T]} \frac{L^k(t-t_0)^k}{k!}\, d(w,z) = \frac{L^k T^k}{k!}\, d(w,z).$$

Pertanto, per k grande, S^k è una contrazione, quindi esiste un punto fisso. Tale punto fisso è l'unica soluzione del problema di Cauchy con dominio $[t_0, T]$. Indichiamola con v_T.

Per l'unicità, due soluzioni, v_{T_1} e v_{T_2}, coincidono nell'intersezione dei loro domini, pertanto è possibile definire una funzione $v\colon [t_0, \sup J[\to \mathbb{R}$ "incollando" le v_T. Cioè definiamo $v\colon [t_0, \sup J[\to \mathbb{R}$ ponendo $v(t) = v_T(t)$, dove T è un qualunque elemento di J maggiore di t. Poiché $v_T(t)$ non dipende da T, in questo modo si definisce una funzione che è la soluzione cercata.

L'unicità della soluzione è una immediata conseguenza dell'unicità su ciascuno degli intervalli $[t_0, T]$. ■

3.1.10 Esempio. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt{\dfrac{\big(y(t)\big)^2+1}{16-t^2}}, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{3.1.14}$$

con $y_0 \in \mathbb{R}$.

L'equazione è definita dalla funzione

$$f\colon]-1,1[\, \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(t,y) = \sqrt{\frac{y^2+1}{16-t^2}}.$$

Tale funzione è continua e derivabile parzialmente rispetto a y e, $\forall (t,y) \in\,]-1,1[\, \times \mathbb{R}$, si ha

$$f_y(t,y) = \frac{1}{\sqrt{16-t^2}}\, \frac{y}{\sqrt{y^2+1}},$$

quindi

$$|f_y(t,y)| = \frac{1}{\sqrt{16-t^2}}\, \frac{|y|}{\sqrt{y^2+1}} < \frac{1}{\sqrt{16-t^2}}.$$

Se K è un compatto contenuto in $]-4,4[$, allora $1/\sqrt{16-t^2}$ è limitato in K, pertanto f_y è limitata in $K\times\mathbb{R}$. Per l'osservazione 3.1.7, questo assicura che f è lipschitziana rispetto alla seconda variabile uniformemente rispetto alla prima. Pertanto sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza globale 3.1.9, quindi il problema ha una soluzione definita in $]-4,4[$.

Sia v una funzione, definita in un intervallo contenente 0, che verifica l'equazione differenziale e tale che $v(0) = y_0$. Una tale funzione v verifica, per ogni t nel dominio, l'uguaglianza

$$\frac{v'(t)}{\sqrt{\big(v(t)\big)^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{16-t^2}},$$

cioè

$$\frac{d}{dt}\operatorname{sectsinh}\big(v(t)\big)=\frac{d}{dt}\arcsin\Big(\frac{t}{4}\Big);$$

pertanto $\exists c \in \mathbb{R}$ tale che, per ogni t, si ha $\operatorname{sectsinh}\big(v(t)\big) = \arcsin(t/4)+c$. Poiché $v(0)=y_0$, deve essere $c=\operatorname{sectsinh} y_0$, pertanto $\operatorname{sectsinh}\big(v(t)\big)=\arcsin(t/4)+\operatorname{sectsinh} y_0$, perciò $v(t)=\sinh(\arcsin(t/4)+\operatorname{sectsinh} y_0)$. Questa funzione è definita in $[-4,4]$ ed è di classe C^1 in $]-4,4[$. Quindi la funzione

$$v\colon\,]-4,4[\,\to\mathbb{R},\qquad v(t)=\sinh\Big(\arcsin\Big(\frac{t}{4}\Big)+\operatorname{sectsinh} y_0\Big),$$

è la soluzione del problema di Cauchy (3.1.14) di dominio $]-4,4[$. ◀

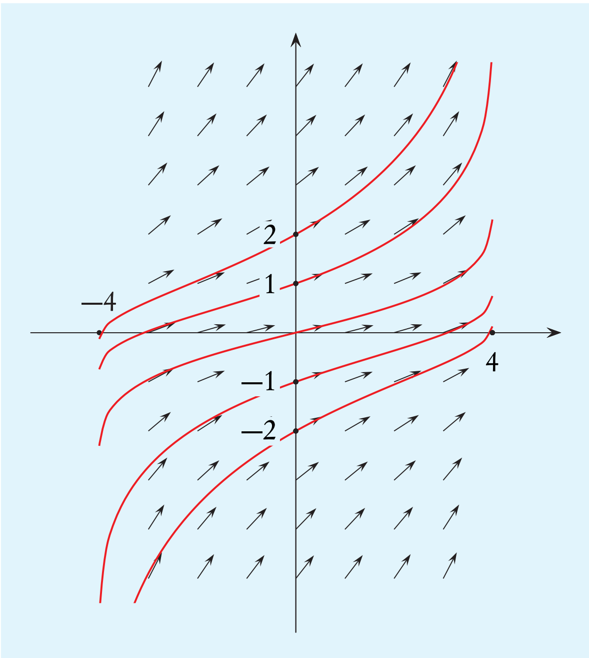


Figura 3.1.6
La soluzione del problema di Cauchy (3.1.14) per $y_0=-2,-1,0,1,2$.

3.1.2 Sistemi di equazioni differenziali del primo ordine

Consideriamo sistemi di più equazioni differenziali ordinarie in più incognite. In generale un sistema del primo ordine, con un numero di equazioni uguale a quello delle incognite, in forma normale, è della forma

$$\begin{cases} y_1'(t)=f_1\big(t,y_1(t),y_2(t),\dots,y_n(t)\big),\\ y_2'(t)=f_2\big(t,y_1(t),y_2(t),\dots,y_n(t)\big),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ y_n'(t)=f_n\big(t,y_1(t),y_2(t),\dots,y_n(t)\big).\end{cases}\tag{3.1.15}$$

dove $f_k : A \to \mathbb{R}$ (per $k = 1, 2, \ldots, n$), con $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, è assegnata e $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sono le funzioni incognite, che sono funzioni reali di variabile reale.

Risulta più comodo scrivere il sistema (3.1.15) in forma vettoriale, considerando una funzione incognita a valori vettoriali e scrivendo, invece di n equazioni scalari, una equazione in $\mathbb{R}^n$. Perciò studiamo il sistema

$$\boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{f}\big(t, \boldsymbol{y}(t)\big),$$

dove $\boldsymbol{f} : A \to \mathbb{R}^n$, con $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, e l'incognita $\boldsymbol{y}$ è una funzione a valori in $\mathbb{R}^n$.

Come fatto per le equazioni, cerchiamo una soluzione che verifichi una condizione iniziale. Consideriamo quindi un problema del tipo

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{f}\big(t, \boldsymbol{y}(t)\big), \\ \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0, \end{cases} \tag{3.1.16}$$

con $(t_0, \boldsymbol{y}_0) \in A$.

Questo problema è detto **problema di Cauchy** per un sistema di equazioni differenziali del primo ordine.

Definiamo anzitutto cosa intendiamo per soluzione di questo problema.

Definizione di soluzione di un problema di Cauchy per un sistema

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aperto, $\boldsymbol{f} \in C(A, \mathbb{R}^n)$, $(t_0, \boldsymbol{y}_0) \in A$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $\boldsymbol{v} : I \to \mathbb{R}^n$. Diciamo che $\boldsymbol{v}$ è **soluzione del problema di Cauchy** (3.1.16) quando si ha:

I) $\boldsymbol{v} \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$;

II) $\forall t \in I$, $\big(t, \boldsymbol{v}(t)\big) \in A$ e
$$\boldsymbol{v}'(t) = \boldsymbol{f}\big(t, \boldsymbol{v}(t)\big);$$

III) $t_0 \in I$ e $\boldsymbol{v}(t_0) = \boldsymbol{y}_0$.

I teoremi di esistenza e di unicità relativi alle equazioni differenziali del primo ordine che abbiamo enunciato si trasportano, con ovvie modifiche, ai sistemi. Non riportiamo le dimostrazioni in questo caso, si ottengono con ovvie modifiche dalle corrispondenti dimostrazioni per le equazioni.

3.1.11 Teorema

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aperto, $\boldsymbol{f} \in C(A, \mathbb{R}^n)$, $(t_0, \boldsymbol{y}_0) \in A$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo tale che $t_0 \in I$ e $\boldsymbol{v} : I \to \mathbb{R}^n$. La funzione $\boldsymbol{v}$ è soluzione del problema di Cauchy (3.1.16) se, e solo se,

I) $\boldsymbol{v} \in C(I, \mathbb{R}^n)$;

II) $\forall t \in I$, $\big(t, \boldsymbol{v}(t)\big) \in A$ e $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}\big(s, \boldsymbol{v}(s)\big)\, ds$.

3.1.12 Teorema (di Peano per i sistemi)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aperto, $f \in C(A, \mathbb{R}^n)$ e $(t_0, y_0) \in A$. Allora esiste una soluzione, definita in un intorno di t_0, del problema di Cauchy (3.1.16).

Definizione di unicità della soluzione

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}^n$ e $(t_0, y_0) \in A$. Diciamo che c'è **unicità della soluzione** per il problema di Cauchy (3.1.16) quando, qualunque siano $v \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ e $w \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$, soluzioni del problema, $\forall t \in I \cap J$, si ha $v(t) = w(t)$.

Definizione di funzione lipschitziana

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ e $f : A \to \mathbb{R}^n$.

Diciamo che f è **lipschitziana rispetto alle ultime n variabili uniformemente rispetto alla prima** quando $\exists L \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$\forall (t, y_1), (t, y_2) \in A, \quad \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \le L \|y_1 - y_2\|.$$

Diciamo che f è **localmente lipschitziana rispetto alle ultime n variabili uniformemente rispetto alla prima** quando, $\forall (t, y) \in A$, esiste U intorno di (t, y) tale che $f|_{A \cap U}$ è lipschitziana rispetto alla seconda variabile uniformemente rispetto alla prima.

3.1.13 Osservazione. Analogamente al caso $n = 1$ (v. osservazione 3.1.7), se A è un aperto convesso e f è derivabile parzialmente rispetto alle ultime n variabili, con derivate limitate, allora è lipschitziana. Se A è aperto e f è derivabile parzialmente rispetto alle ultime n variabili, con derivate continue, allora è localmente lipschitziana. ◀

3.1.14 Teorema (di Cauchy per i sistemi)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aperto, $f \in C(A, \mathbb{R}^n)$ e $(t_0, y_0) \in A$. Supponiamo f localmente lipschitziana rispetto alle ultime n variabili, uniformemente rispetto alla prima. Allora esiste una soluzione, definita in un intorno di t_0, del problema di Cauchy (3.1.16) e per questo problema c'è unicità della soluzione.

3.1.15 Teorema (di esistenza globale)

Siano $J \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto, $f \in C(J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ e $(t_0, y_0) \in J \times \mathbb{R}^n$. Supponiamo che la restrizione di f a ogni insieme $K \times \mathbb{R}^n$, con $K \subseteq J$ compatto, sia lipschitziana rispetto alle ultime n variabili, uniformemente rispetto alla prima. Allora esiste una soluzione, definita in J, del problema di Cauchy (3.1.16) e per questo problema c'è unicità della soluzione.

3.1.3 Equazioni differenziali di ordine superiore al primo

Passiamo a studiare equazioni differenziali di ordine maggiore di 1, dove chiamiamo ordine dell'equazione l'ordine massimo di derivazione della funzione incognita. Come nel caso delle equazioni del primo ordine, ci limitiamo a studiare equazioni "in forma normale", cioè in cui a primo membro compare solo la derivata di ordine massimo della funzione ed essa non compare a secondo membro. Queste equazioni sono della forma:

$$y^{(n)}(t)=f\big(t,y(t),y'(t),\dots,y^{(n-1)}(t)\big),$$

dove $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, $f:A\to\mathbb{R}$, con $A\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$, è assegnata e y è la funzione incognita.

Come abbiamo fatto per le equazioni del primo ordine e per i sistemi, studiamo il problema di Cauchy; cioè cerchiamo soluzioni dell'equazione che verifichino anche delle condizioni iniziali. In questo caso risulta ragionevole assegnare non solo il valore della soluzione in un punto fissato del dominio, ma anche il valore delle sue derivate fino all'ordine $n-1$ nello stesso punto. Consideriamo quindi il seguente problema

$$\begin{cases} y^{(n)}(t)=f\big(t,y(t),y'(t),\dots,y^{(n-1)}(t)\big), \\ y(t_0)=y_0\,, \\ y'(t_0)=y_1\,, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ y^{(n-1)}(t_0)=y_{n-1}\,, \end{cases} \tag{3.1.17}$$

con $(t_0,y_0,y_1,\dots,y_{n-1})\in A$. Questo problema è detto **problema di Cauchy** per un'equazione differenziale ordinaria di ordine superiore.

Definiamo anzitutto cosa intendiamo per soluzione di questo problema.

Definizione di soluzione di un problema di Cauchy

Siano $A\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ aperto, $f:A\to\mathbb{R}$, $(t_0,y_0,y_1,\dots,y_{n-1})\in A$, $I\subseteq\mathbb{R}$ intervallo e $v:I\to\mathbb{R}$. Diciamo che v è **soluzione del problema di Cauchy** (3.1.17) quando si ha:

I) $v\in C^n(I,\mathbb{R})$;

II) $\forall t\in I$, $\big(t,v(t),v'(t),\dots,v^{(n-1)}(t)\big)\in A$ e

$$v^{(n)}(t)=f\big(t,v(t),v'(t),\dots,v^{(n-1)}(t)\big);$$

III) $t_0\in I$ e $v^{(k)}(t_0)=y_k$, per $k=0,1,\dots,n-1$.

Lo studio di un problema di Cauchy per un'equazione di ordine superiore può essere ricondotto a quello di un problema di Cauchy per un sistema del primo ordine; in questo modo i teoremi relativi ai sistemi del primo ordine che abbiamo enunciato si traducono facilmente in analoghi teoremi relativi alle equazioni di ordine superiore.

Il legame tra equazioni di ordine superiore e sistemi del primo ordine è stabilito dal seguente teorema.

3.1.16 Teorema

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aperto, $f \in C(A,\mathbb{R})$ e $(t_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in A$. Se $v: I \to \mathbb{R}$ è soluzione del problema di Cauchy per l'equazione di ordine n (3.1.17), allora $\bigl(v, v', \ldots, v^{(n-1)}\bigr)$ è soluzione del problema di Cauchy per il sistema del primo ordine

$$\begin{cases} z_1'(t) = z_2(t), \\ z_2'(t) = z_3(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z_{n-1}'(t) = z_n(t), \\ z_n'(t) = f\bigl(t, z_1(t), z_2(t), \ldots, z_n(t)\bigr), \\ z_1(t_0) = y_0, \\ z_2(t_0) = y_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z_n(t_0) = y_{n-1}. \end{cases} \tag{3.1.18}$$

Viceversa, se $w: J \to \mathbb{R}^n$ è soluzione del problema (3.1.18), allora w_1 è soluzione del problema (3.1.17).

Dimostrazione. La prima affermazione è di verifica immediata.

Viceversa sia $w \in C^1(J,\mathbb{R}^n)$ soluzione del problema (3.1.18). Dalla prima equazione segue $w_1' = w_2$; poiché w_2 è di classe C^1, w_1 è di classe C^2. Dalla seconda equazione segue $w_1'' = w_2' = w_3$ e, poiché w_3 è di classe C^1, w_1 è di classe C^3. Ripetendo il ragionamento si ottiene che w_1 è di classe C^n e $w_1^{(j)} = w_{j+1}$, per $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Pertanto $w = \bigl(w_1, w_1', \ldots, w_1^{(n-1)}\bigr)$ e $w_1^{(n)} = w_n'$. Perciò, $\forall t \in J$, si ha

$$\bigl(t, w_1(t), w_1'(t), \ldots, w_1^{(n-1)}(t)\bigr) = \bigl(t, w(t)\bigr) \in A$$

e

$$w_1^{(n)}(t) = w_n'(t) = f\bigl(t, w_1(t), w_2(t), \ldots, w_n(t)\bigr) = f\bigl(t, w_1(t), w_1'(t), \ldots, w_1^{(n-1)}(t)\bigr).$$

Questo prova che w_1 soddisfa l'equazione del problema (3.1.17).

Si verifica facilmente che w_1 soddisfa le condizioni iniziali del problema (3.1.17). ■

Il teorema 3.1.16 consente di trasportare i teoremi di Peano 3.1.12, di Cauchy 3.1.14 e di esistenza globale 3.1.15 enunciati per sistemi alle equazioni di ordine superiore. Otteniamo i teoremi seguenti.

3.1.17 Teorema (di Peano per le equazioni di ordine superiore)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aperto, $f \in C(A,\mathbb{R})$ e $(t_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in A$. Allora esiste una soluzione, definita in un intorno di t_0, del problema di Cauchy (3.1.17).

Definizione di unicità della soluzione

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$ e $(t_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in A$. Diciamo che c'è **unicità della soluzione** per il problema di Cauchy (3.1.16) quando, qualunque siano $v \in C^n(I, \mathbb{R})$ e $w \in C^n(J, \mathbb{R})$, soluzioni del problema, $\forall t \in I \cap J$, si ha $v(t) = w(t)$.

Definizione di funzione lipschitziana

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ e $f : A \to \mathbb{R}$.

Diciamo che f è **lipschitziana rispetto alle ultime n variabili uniformemente rispetto alla prima** quando $\exists L \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$\forall (t, \boldsymbol{y}_1), (t, \boldsymbol{y}_2) \in A, \quad \left| f(t, \boldsymbol{y}_1) - f(t, \boldsymbol{y}_2) \right| \leq L \|\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2\|.$$

Diciamo che f è **localmente lipschitziana rispetto alle ultime n variabili uniformemente rispetto alla prima** quando, $\forall (t, \boldsymbol{y}) \in A$, esiste U intorno di (t, y) tale che $f|_{A \cap U}$ è lipschitziana rispetto alle ultime n variabili uniformemente rispetto alla prima.

Analogamente al caso $n = 1$, se A è aperto e convesso e f è derivabile parzialmente rispetto alle ultime n variabili, con derivate limitate, allora f è lipschitziana. Se A è aperto e f è derivabile parzialmente rispetto alle ultime n variabili, con derivate continue, allora f è localmente lipschitziana.

Osserviamo che se $f : A \to \mathbb{R}$ individua un'equazione di ordine n, il corrispondente sistema (v. teorema 3.1.16) è individuato dalla funzione

$$\boldsymbol{g} : A \to \mathbb{R}^n, \qquad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) = \big(y_2, y_3, \dots, y_n, f(\boldsymbol{y})\big).$$

Si verifica facilmente che f è lipschitziana se e solo se $\boldsymbol{g}$ è lipschitziana.

3.1.18 Teorema (di Cauchy per le equazioni di ordine superiore)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aperto, $f \in C(A, \mathbb{R})$ e $(t_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in A$. Supponiamo f localmente lipschitziana rispetto alle ultime n variabili, uniformemente rispetto alla prima. Allora esiste una soluzione, definita in un intorno di t_0, del problema di Cauchy (3.1.17) e per questo problema c'è unicità della soluzione.

3.1.19 Teorema (di esistenza globale per le equazioni di ordine superiore)

Siano $J \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto, $f \in C(J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ e $(t_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in J \times \mathbb{R}^n$. Supponiamo che la restrizione di f a ogni insieme $K \times \mathbb{R}^n$, con $K \subseteq J$ compatto, sia lipschitziana rispetto alle ultime n variabili, uniformemente rispetto alla prima. Allora esiste una soluzione, definita in J, del problema di Cauchy (3.1.17) e per questo problema c'è unicità della soluzione.

3.2 Soluzioni massimali

In questa sezione studiamo le soluzioni di problemi di Cauchy per equazioni o sistemi del primo ordine che hanno il dominio più grande possibile.

3.2.1 Equazioni differenziali del primo ordine

Sappiamo che sotto opportune ipotesi sulla funzione f il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f\big(t, y(t)\big), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{3.2.1}$$

ha una soluzione e questa è unica, a meno del dominio di definizione. In questa sottosezione studiamo la soluzione con il dominio più ampio possibile.

Definizione di soluzione massimale di un problema di Cauchy

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f \in C(A, \mathbb{R})$ e $(t_0, y_0) \in A$; supponiamo che per il problema di Cauchy (3.2.1) ci sia unicità della soluzione. Sia v soluzione del problema; diciamo che v è la **soluzione massimale** del problema di Cauchy (3.2.1) se per qualunque altra soluzione w si ha $\mathscr{D}(w) \subseteq \mathscr{D}(v)$.

Segue immediatamente dalla definizione che la soluzione massimale, se esiste, è unica. Infatti se v e w sono entrambe soluzioni massimali, allora $\mathscr{D}(v) = \mathscr{D}(w)$ e, in tale dominio, v e w coincidono.

Vale inoltre il seguente teorema.

3.2.1 Teorema

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f \in C(A, \mathbb{R})$ e $(t_0, y_0) \in A$; supponiamo che per il problema di Cauchy (3.2.1) ci sia unicità della soluzione. Allora esiste v soluzione massimale e $\mathscr{D}(v)$ è un intervallo aperto.

Dimostrazione. Poniamo

$$t_+ = \sup\big\{ T \in \,]t_0, +\infty[\;\big|\; \text{esiste una soluzione di (3.2.1) definita in } [t_0, T] \big\}.$$

Per l'unicità, due soluzioni, v e w, coincidono nell'intersezione dei loro domini, pertanto è possibile definire una funzione $v_+ : [t_0, t_+[\,\to \mathbb{R}$ "incollando" le soluzioni, cioè procedendo come segue. Se $t \in [t_0, t_+[$, per definizione di t_+ esiste $T > t$ tale che il problema (3.2.1) ha soluzione w definita in $[t_0, T]$; poniamo $v_+(t) = w(t)$. Per l'unicità della soluzione il valore di v_+ non dipende dalla scelta di w. Evidentemente v_+ è soluzione del problema (3.2.1).

In modo analogo, posto

$$t_- = \inf\big\{ T \in \,]-\infty, t_0[\;\big|\; \text{esiste una soluzione di (3.2.1) definita in } [T, t_0] \big\},$$

si dimostra che esiste una soluzione v_- con dominio $]t_-, t_0]$.

Posto, per $t \in]t_-, t_+[$,

$$v(t) = \begin{cases} v_+(t), & \text{per } t \in [t_0, t_+[\ , \\ v_-(t), & \text{per } t \in]t_-, t_0[\ , \end{cases}$$

v è soluzione di dominio $]t_-, t_+[$. Dimostriamo che v è la soluzione massimale. Supponiamo, per assurdo, che questo non sia vero; pertanto esiste una soluzione avente dominio più grande di $]t_-, t_+[$, in particolare tale soluzione è definita in t_+ , oppure è definita in t_- .

Consideriamo il primo caso. Sia w una soluzione definita in t_+ ; per il teorema di Peano 3.1.3, $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$ tale che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f\big(t, y(t)\big), \\ y(t_+) = w(t_+), \end{cases}$$

ha soluzione z definita in $[t_+, t_+ + \delta]$. Sia

$$u : [t_0, t_+ + \delta] \to \mathbb{R}, \qquad u(t) = \begin{cases} w(t), & \text{per } t \in [t_0, t_+], \\ z(t), & \text{per } t \in]t_+, t_+ + \delta]. \end{cases}$$

La funzione u è soluzione del problema (3.2.1). Infatti è evidente che u è continua; inoltre essa è derivabile in $[t_0, t_+ + \delta] \setminus \{t_+\}$, con $u'(t) = f\big(t, u(t)\big)$. Risulta

$$\lim_{t \to t_+} u'(t) = \lim_{t \to t_+} f\big(t, u(t)\big) = f\big(t_+, u(t_+)\big),$$

pertanto u è derivabile anche in t_+ e si ha $u'(t_+) = f\big(t_+, u(t_+)\big)$. Perciò u è derivabile e, $\forall t \in [t_0, t_+ + \delta]$, si ha $u'(t) = f\big(t, u(t)\big)$. Inoltre $u(t_0) = v(t_0) = y_0$. Quindi u è una soluzione definita in $[t_0, t_+ + \delta]$ del problema (3.2.1); ciò è assurdo, perché

$$t_+ + \delta > t_+ = \sup\big\{T \in]t_0, +\infty[\ \big| \text{esiste una soluzione di (3.2.1) definita in } [t_0, T]\big\}.$$

In modo analogo si prova che non esiste una soluzione definita in t_- .

Quindi v è la soluzione massimale e il suo dominio è un intervallo aperto. ■

Studiamo ora le condizioni per determinare quando una soluzione non può essere ulteriormente prolungata. Per dimostrare il relativo teorema è necessario il seguente lemma.

3.2.2 Lemma

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f \in C(A, \mathbb{R})$, $(t_0, y_0) \in A$, $a, b \in \mathbb{R}^+$ tali che si ha $[t_0, t_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \subseteq A$ e $v : [t_0, t_0 + a] \to \mathbb{R}$ soluzione del problema di Cauchy (3.2.1). Posto $M = \max_{[t_0, t_0+a] \times [y_0 - b, y_0 + b]} |f|$, se risulta $Ma \leq b$, allora, $\forall t \in [t_0, t_0 + a]$, si ha $|v(t) - y_0| \leq b$.

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che esista $t \in]t_0, t_0 + a]$ tale che si abbia $|v(t) - y_0| > b$. Poiché $t \mapsto |v(t) - y_0|$ è continua e si annulla in t_0 , per il teorema degli zeri

$$\big\{t \in [t_0, t_0 + a[\ \big| \ |v(t) - y_0| = b\big\} \neq \varnothing.$$

Sia $\bar{t}$ l'estremo inferiore di tale insieme, per la continuità di v si ha $|v(t)-y_0| = b$. Inoltre risulta $\bar{t} < t_0+a$. Poiché, $\forall t \in [t_0, \bar{t}]$, si ha $\big(t, v(t)\big) \in [t_0, t_0+a] \times [y_0-b, y_0+b]$, risulta

$$b = |v(\bar{t})-y_0| = \left|\int_{t_0}^{\bar{t}} v'(t)\,dt\right| \leq \int_{t_0}^{\bar{t}} |v'(t)|\,dt = \int_{t_0}^{\bar{t}} \big|f\big(t, v(t)\big)\big|\,dt \leq \int_{t_0}^{\bar{t}} M\,dt =$$
$$= M(\bar{t}-t_0) < Ma \leq b\,,$$

che è assurdo. ■

3.2.3 Teorema (caratterizzazione delle soluzioni massimali)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f \in C(A, \mathbb{R})$ e $(t_0, y_0) \in A$; supponiamo che per il problema di Cauchy (3.2.1) ci sia unicità della soluzione. Se $v\colon]t_-, t_+[\to \mathbb{R}$ è la soluzione massimale, allora è verificata almeno una tra le condizioni:

1. $t_+ = +\infty$,
2. $v(t)$ diverge per $t \to t_+$,
3. $\forall T \in]t_-, t_+[$, $d\Big(\big\{\big(t, v(t)\big) \,\big|\, t \in [T, t_+[\big\}, \partial A\Big) = 0$;

e almeno una tra le condizioni:

1′. $t_- = -\infty$,

2′. $v(t)$ diverge per $t \to t_-$,

3′. $\forall T \in]t_-, t_+[$, $d\Big(\big\{\big(t, v(t)\big) \,\big|\, t \in]t_-, T]\big\}, \partial A\Big) = 0$.

Viceversa, se v è soluzione definita in $]t_-, t_+[$ del problema (3.2.1) e sono verificate una tra le condizioni 1, 2, 3 e una tra le condizioni 1′, 2′, 3′, allora v è la soluzione massimale.

Ricordiamo che se B_1 e B_2 sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$, con $d(B_1, B_2)$ indichiamo la distanza dei due insiemi, cioè

$$\inf\big\{\|x_1 - x_2\| \,\big|\, x_1 \in B_1, x_2 \in B_2\big\}\,.$$

La condizione 3 (e analogamente la 3′) significa che se consideriamo la restrizione della soluzione a un qualunque intorno di t_+ (o di t_-), il grafico di tale restrizione è "vicino" alla frontiera di A.

Dimostrazione. Dimostriamo che vale almeno una tra le condizioni 1, 2 e 3, per le condizioni 1′, 2′ e 3′ la dimostrazione è analoga.

Supponiamo che non sia verificata la 1, cioè che sia $t_+ \in \mathbb{R}$, e dimostriamo che se $\lim_{t \to t_+} |v(t)| = +\infty$, allora è verificata la 2, mentre se non si ha $\lim_{t \to t_+} |v(t)| = +\infty$, allora è verificata la 3.

Se $\lim_{t \to t_+} |v(t)| = +\infty$, allora $\exists T \in]t_0, t_+[$ tale che, $\forall t \in]T, t_+[$, si ha $|v(t)| > 1$. Perciò in $]T, t_+[$ v non si annulla, quindi, per il teorema degli zeri, è sempre positiva o sempre negativa. Se v è positiva, allora si ha $\lim_{t\to t_+} v(t) = \lim_{t\to t_+}|v(t)| = +\infty$, se v è negativa, allora risulta $\lim_{t\to t_+} v(t) = \lim_{t\to t_+}\big(-|v(t)|\big) = -\infty$; in ogni caso è verificata la 2.

Se non si ha $\lim_{t\to t_+}|v(t)| = +\infty$, allora esistono $C \in \mathbb{R}^+$ e una successione $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $]t_0, t_+[$, convergente a t_+, tale che $|v(t_n)| \leq C$. Quindi, per il teorema di Bolzano-Weierstrass, esiste una sottosuccessione $(t_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\big(v(t_{k_n})\big)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente; indichiamo con v_0 il limite di tale successione.

Poiché $(t_+, v_0) = \lim_{n\to+\infty}\big(t_{k_n}, v(t_{k_n})\big)$ e $\big(t_{k_n}, v(t_{k_n})\big) \in A$, risulta $(t_+, v_0) \in \overline{A}$, quindi $(t_+, v_0) \in \partial A$ oppure $(t_+, v_0) \in A$. Supponiamo, per assurdo, che sia $(t_+, v_0) \in A$ e dimostriamo che in tal caso v può essere estesa a una soluzione definita in $]t_-, t_+]$, quindi non è massimale. Per questo proviamo che $\lim_{t\to t_+} v(t) = v_0$; da qui segue che il prolungamento w di v a $]t_-, t_+]$ ottenuto ponendo $w(t_+) = v_0$, è di classe C^1 e verifica il problema di Cauchy (3.2.1).

Siano $a, b \in \mathbb{R}^+$ tali che si ha $[t_+ - a, t_+] \times [v_0 - b, v_0 + b] \subseteq A$ e poniamo

$$M = \max\big\{|f(t,y)| \,\big|\, (t,y) \in [t_+ - a, t_+] \times [v_0 - b, v_0 + b]\big\}.$$

Sia $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tale che $\varepsilon < b/2$. Poiché $\big(t_{k_n}, v(t_{k_n})\big) \to (t_+, v_0)$, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $t_+ - t_{k_n} < \min\{a, \varepsilon/M\}$ e $|v(t_{k_n}) - v_0| < \varepsilon$. La funzione v è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f\big(t, y(t)\big), \\ y(t_{k_n}) = v(t_{k_n}). \end{cases}$$

Poiché $v_0 - \varepsilon < v(t_{k_n}) < v_0 + \varepsilon$, si ha $v(t_{k_n}) - \varepsilon > v_0 - 2\varepsilon$ e $v(t_{k_n}) + \varepsilon < v_0 + 2\varepsilon$. Perciò

$$[t_{k_n}, t_+] \times \big[v(t_{k_n}) - \varepsilon, v(t_{k_n}) + \varepsilon\big] \subseteq [t_+ - a, t_+] \times [v_0 - b, v_0 + b],$$

quindi

$$\max_{[t_{k_n}, t_+]\times[v(t_{k_n})-\varepsilon, v(t_{k_n})+\varepsilon]} |f| \leq \max_{[t_+-a, t_+]\times[v_0-b, v_0+b]} |f| = M.$$

Pertanto, per il lemma 3.2.2, per $t \in]t_{k_n}, t_+[$, si ha $|v(t) - v(t_{k_n})| \leq \varepsilon$, quindi

$$|v(t) - v_0| \leq |v(t) - v(t_{k_n})| + |v(t_{k_n}) - v_0| < 2\varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ε questo prova che $\lim_{t\to t_+} v(t) = v_0$.

Poniamo

$$w\colon]t_-, t_+] \to \mathbb{R}, \qquad w(t) = \begin{cases} v(t), & \text{per } t \in]t_-, t_+[, \\ v_0, & \text{per } t = t_+. \end{cases}$$

Proviamo che w è derivabile in t_+, con $w'(t_+) = f\big(t_+, w(t_+)\big)$. Si ha $\lim_{t\to t_+} v(t) = v_0$, quindi risulta

$$\lim_{t\to t_+} w'(t) = \lim_{t\to t_+} v'(t) = \lim_{t\to t_+} f\big(t, v(t)\big) = f(t_+, v_0) = f\big(t_+, w(t_+)\big);$$

pertanto, per il teorema sul limite della funzione derivata, w è derivabile in t_+, con derivata $f\big(t_+, w(t_+)\big)$. Quindi w è soluzione del problema (3.2.1) e prolunga v, assurdo perché v è soluzione massimale.

Pertanto $(t_+, v_0) \in \partial A$. Si ha allora, $\forall T \in]t_-, t_+[$ e per n tale che $t_{k_n} > T$,

$$d\Big(\big\{(t, v(t)) \,\big|\, t \in [T, t_+[\big\}, \partial A\Big) \leq \big\|\big(t_{k_n}, v(t_{k_n})\big) - (t_+, v_0)\big\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0;$$

quindi risulta

$$d\Big(\big\{(t, v(t)) \,\big|\, t \in [T, t_+[\big\}, \partial A\Big) = 0.$$

Viceversa, supponiamo che v sia una soluzione del problema (3.2.1) che verifica una tra le condizioni 1, 2, 3 e una tra le condizioni 1′, 2′, 3′. Se vale 1 non esistono funzioni che prolungano v definite in t_+. Se vale 2 non esistono funzioni continue definite in t_+ che prolungano v, quindi non esistono soluzioni definite in t_+ che prolungano v. Se vale 3 allora qualunque funzione w definita in t_+ che prolunga v è tale che $\big(t_+, w(t_+)\big) \in \partial A$, quindi w non può essere soluzione del problema (3.2.1). Analogamente se vale una tra 1′, 2′, 3′, allora non esiste una soluzione definita in t_- che prolunga v. Pertanto v è soluzione massimale. ■

3.2.4 Osservazione. In questo teorema, se $A = \mathbb{R}^2$, allora $\partial A = \emptyset$. In tale caso le condizioni 3 e 3′ non hanno senso (perché non è definita la distanza di un punto dall'insieme vuoto), possono valere solo le condizioni 1, 2, 1′ e 2′. ◀

3.2.5 Esempio. Riprendiamo in considerazione il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \exp\big(-y(t)\big), \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

già studiato nell'esempio 3.1.1. Abbiamo stabilito che il problema ha la soluzione

$$v \colon]-e^{y_0}, +\infty[\to \mathbb{R}, \qquad v(t) = \log(t + e^{y_0}).$$

L'equazione differenziale è della forma $y'(t) = f\big(f(t, y(t)\big)$, con

$$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(t, y) = e^{-y}.$$

Questa funzione è di classe C^1, quindi, per l'osservazione 3.1.7, è localmente lipschitziana; pertanto, per il teorema di Cauchy 3.1.8, c'è unicità della soluzione.

L'estremo superiore di $\mathscr{D}(v)$ è $+\infty$, quindi è verificata la condizione 1 del teorema 3.2.3; $v(t)$ diverge a $-\infty$ per t che tende all'estremo inferiore di $\mathscr{D}(v)$, quindi è verificata la condizione 2′. Pertanto v è la soluzione massimale. ◀

3.2.2 Sistemi di equazioni differenziali del primo ordine

Quanto stabilito per le equazioni differenziali si può ripetere con poche modifiche per i sistemi. Sappiamo che sotto opportune ipotesi sulla funzione $\boldsymbol{f}$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{f}\big(t, \boldsymbol{y}(t)\big), \\ \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0, \end{cases} \tag{3.2.2}$$

ha una soluzione e questa è unica, a meno del dominio di definizione. Studiamo le soluzioni con il dominio più ampio possibile.

Definizione di soluzione massimale di un problema di Cauchy

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aperto, $f \in C(A, \mathbb{R}^n)$ e $(t_0, y_0) \in A$; supponiamo che per il problema di Cauchy (3.2.2) ci sia unicità della soluzione. Sia v soluzione del problema; diciamo che v è la **soluzione massimale** del problema di Cauchy (3.2.2) se per qualunque altra soluzione w si ha $\mathscr{D}(w) \subseteq \mathscr{D}(v)$.

Segue immediatamente dalla definizione che la soluzione massimale, se esiste, è unica. Vale inoltre il seguente teorema.

3.2.6 Teorema

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aperto, $f \in C(A, \mathbb{R}^n)$ e $(t_0, y_0) \in A$; supponiamo che per il problema di Cauchy (3.2.2) ci sia unicità della soluzione. Allora esiste v soluzione massimale e $\mathscr{D}(v)$ è un intervallo aperto.

La dimostrazione è analoga a quella del teorema 3.2.1.

Il seguente teorema fornisce condizioni per determinare quando una soluzione non può essere ulteriormente prolungata

3.2.7 Teorema

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aperto, $f \in C(A, \mathbb{R}^n)$ e $(t_0, y_0) \in A$; supponiamo che per il problema di Cauchy (3.2.2) ci sia unicità della soluzione. Se $v\colon]t_-, t_+[\to \mathbb{R}^n$ è la soluzione massimale, allora è verificata almeno una tra le condizioni:

1. $t_+ = +\infty$,
2. $\lim_{t \to t_+} \|v(t)\| = +\infty$,
3. $\forall T \in]t_-, t_+[,\ d\Big(\big\{(t, v(t)) \,\big|\, t \in [T, t_+[\big\}, \partial A\Big) = 0$;

e almeno una tra le condizioni:

1′. $t_- = -\infty$,

2′. $\lim_{t \to t_-} \|v(t)\| = +\infty$,

3′. $\forall T \in]t_-, t_+[,\ d\Big(\big\{(t, v(t)) \,\big|\, t \in]t_-, T]\big\}, \partial A\Big) = 0$.

Viceversa, se v è soluzione definita in $]t_-, t_+[$ del problema (3.2.2) e sono verificate una tra le condizioni 1, 2, 3 e una tra le condizioni 1′, 2′, 3′, allora v è la soluzione massimale.

La dimostrazione è analoga a quella del teorema 3.2.3.

3.2.8 Osservazione. In questo teorema, se $A = \mathbb{R}^{n+1}$, allora $\partial A = \emptyset$. In tale caso le condizioni 3 e 3′ non hanno senso (in quanto non è definita la distanza di un punto dall'insieme vuoto), possono valere solo le condizioni 1, 2, 1′ e 2′. ◀

3.3 Equazioni di tipo particolare

In questa sezione studiamo alcune tipologie di equazioni differenziali per le quali c'è un procedimento risolutivo. Osserviamo che spesso il procedimento non consente di determinare un'espressione esplicita della soluzione, perché richiede l'uso di integrali, che solo in casi particolari possono essere calcolati esplicitamente.

3.3.1 Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Studiamo le equazioni differenziali del primo ordine definite da una funzione polinomiale di primo grado rispetto alla variabile y.

Risulta utile scrivere l'equazione in una forma diversa da quella abituale: consideriamo equazioni del tipo

$$y'(t)+a(t)y(t)=b(t), \tag{3.3.1}$$

dove $a,b\in C(I,\mathbb{R})$, con $I\subseteq\mathbb{R}$ intervallo. Un'equazione di questo tipo è detta **equazione differenziale lineare**; la funzione a è detta **coefficiente** dell'equazione e la funzione b **termine noto**. Se $b=0$, l'equazione diventa

$$y'+a(t)y=0, \tag{3.3.2}$$

che è detta **equazione omogenea**. L'equazione (3.3.2), ottenuta dalla (3.3.1) ponendo il termine noto uguale a 0, è detta **equazione omogenea associata** all'equazione (3.3.1).

Se I è aperto, la funzione

$$f:I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad f(t,y)\mapsto -a(t)y+b(t),$$

verifica le ipotesi del teorema di esistenza globale 3.1.9. Infatti se K è un compatto di I, allora, per il teorema di Weierstrass, $\exists M\in\mathbb{R}^+$ tale che, $\forall t\in K$, si ha $|a(t)|\leq M$, pertanto, $\forall(t,y_1),(t,y_2)\in K\times\mathbb{R}$, si ha

$$\big|\big(-a(t)y_1+b(t)\big)-\big(-a(t)y_2+b(t)\big)\big|=|a(t)||y_1-y_2|\leq M|y_1-y_2|;$$

quindi in $K\times\mathbb{R}$ si ha lipschitzianità rispetto alla seconda variabile, uniformemente rispetto alla prima. Pertanto, qualunque problema di Cauchy per l'equazione (3.3.1) ha una soluzione con dominio I e tale soluzione è unica. Per questo, nel seguito consideriamo solo soluzioni con dominio uguale al dominio del coefficiente e del termine noto.

Si può dimostrare che quanto appena osservato è vero anche se I non è aperto; pertanto in questa sottosezione non chiediamo che I sia aperto.

Definizione di soluzione di un'equazione differenziale lineare e di integrale generale

Sia $v:I\to\mathbb{R}$. Diciamo che v è **soluzione dell'equazione differenziale** (3.3.1) quando $v\in C^1(I,\mathbb{R})$ e si ha, $\forall t\in I$,

$$v'(t)+a(t)v(t)=b(t).$$

Chiamiamo **integrale generale** dell'equazione differenziale (3.3.1) l'insieme delle soluzioni dell'equazione.

Consideriamo ora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t)+a(t)y(t)=b(t), \\ y(t_0)=y_0, \end{cases} \tag{3.3.3}$$

dove $a,b \in C(I,\mathbb{R})$, con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, e $(t_0,y_0)\in I\times\mathbb{R}$. Evidentemente ogni soluzione di questo problema di Cauchy che ha dominio I è soluzione dell'equazione differenziale lineare (3.3.1). Viceversa se v è soluzione di tale equazione, allora, scelto $t_0 \in I$, v è soluzione del problema di Cauchy (3.3.3) con $y_0 = v(t_0)$. Pertanto l'integrale generale di (3.3.1) è l'insieme di tutte le soluzioni del problema di Cauchy (3.3.3), al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$.

Un semplice accorgimento rende possibile determinare tutte le soluzioni dell'equazione (3.3.1). Sia $A\colon I \to \mathbb{R}$ una primitiva di a. Se $v \in C^1(I,\mathbb{R})$ è soluzione dell'equazione differenziale, allora moltiplicando per $\exp\big(A(t)\big)$ entrambi i membri, otteniamo, $\forall t \in I$,

$$e^{A(t)}v'(t)+e^{A(t)}a(t)v(t)=e^{A(t)}b(t),$$

da cui

$$\frac{d}{dt}\big(e^{A(t)}v(t)\big)=e^{A(t)}b(t).$$

Pertanto, fissato $t_0 \in I$, $\exists c \in \mathbb{R}$ tale che

$$e^{A(t)}v(t)=\int_{t_0}^{t} e^{A(s)}b(s)\,ds+c,$$

cioè

$$v(t)=e^{-A(t)}\int_{t_0}^{t} e^{A(s)}b(s)\,ds+c\,e^{-A(t)}. \tag{3.3.4}$$

Qualunque sia $c \in \mathbb{R}$, questa funzione è soluzione dell'equazione (3.3.1). Infatti, $A \in C^1(I,\mathbb{R})$, perché primitiva di una funzione continua, perciò la funzione v definita sopra appartiene a $C^1(I,\mathbb{R})$. Inoltre, $\forall t \in I$, si ha

$$\begin{aligned} v'(t)+a(t)v(t) &= -A'(t)e^{-A(t)}\int_{t_0}^{t} e^{A(s)}b(s)\,ds+e^{-A(t)}e^{A(t)}b(t)-c\,A'(t)e^{-A(t)}+ \\ &\quad +a(t)e^{-A(t)}\int_{t_0}^{t} e^{A(s)}b(s)\,ds+c\,a(t)e^{A(t)}=b(t); \end{aligned}$$

pertanto tutte le funzioni definite da (3.3.4) sono soluzioni dell'equazione (3.3.1).

Abbiamo così provato il seguente teorema.

3.3.1 Teorema

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $a,b \in C(I,\mathbb{R})$ e $t_0 \in I$. Se $A \in C^1(I,\mathbb{R})$ è una primitiva di a, allora una funzione $v\colon I \to \mathbb{R}$ è soluzione dell'equazione (3.3.1) se e solo se $\exists c \in \mathbb{R}$ tale che

$$v(t)=e^{-A(t)}\int_{t_0}^{t} e^{A(s)}b(s)\,ds+c\,e^{-A(t)}. \tag{3.3.5}$$

Da questo teorema segue facilmente un teorema analogo per la soluzione del corrispondente problema di Cauchy.

3.3.2 Teorema

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $a, b \in C(I, \mathbb{R})$ e $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$. Se $A \in C^1(I, \mathbb{R})$ è una primitiva di a, allora la funzione

$$v : I \to \mathbb{R}, \qquad v(t) = e^{-A(t)} \int_{t_0}^{t} e^{A(s)} b(s)\, ds + e^{-A(t)} e^{A(t_0)} y_0$$

è l'unica soluzione del problema di Cauchy (3.3.3).

Dimostrazione. Dobbiamo determinare una soluzione dell'equazione (3.3.1) che verifichi la condizione iniziale $y(t_0) = y_0$; per il teorema 3.3.1, ogni soluzione è nella forma data da (3.3.5), quindi dobbiamo determinare $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$y_0 = e^{-A(t_0)} \int_{t_0}^{t_0} e^{A(s)} b(s)\, ds + c\, e^{-A(t_0)};$$

da Qui si ricava immediatamente $c = e^{A(t_0)} y_0$. Questo prova il teorema. ■

Se, nel teorema 3.3.2, si sceglie $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(\sigma)\, d\sigma$, risulta $A(t_0) = 0$, quindi si ha

$$v(t) = \exp\Big(-\int_{t_0}^{t} a(\sigma)\, d\sigma\Big) \int_{t_0}^{t} \exp\Big(\int_{t_0}^{s} a(\sigma)\, d\sigma\Big) b(s)\, ds + \exp\Big(-\int_{t_0}^{t} a(\sigma)\, d\sigma\Big) y_0,$$

cioè

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} \exp\Big(-\int_{s}^{t} a(\sigma)\, d\sigma\Big) b(s)\, ds + \exp\Big(-\int_{t_0}^{t} a(\sigma)\, d\sigma\Big) y_0. \tag{3.3.6}$$

3.3.3 Osservazione. Dal teorema 3.3.1 segue che l'integrale generale dell'equazione omogenea (3.3.2) è un sottospazio vettoriale di dimensione 1 dello spazio $C^1(I, \mathbb{R})$ e l'integrale generale dell'equazione non omogenea (3.3.1) è un sottospazio affine di $C^1(I, \mathbb{R})$, traslato dell'integrale generale dell'omogenea associata. Ciò può essere dimostrato anche senza fare uso della formula risolutiva, studiando combinazioni lineari di soluzioni. ◀

3.3.4 Esempio. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) + 2t y(t) = 0, \\ y(0) = 2. \end{cases} \tag{3.3.7}$$

L'equazione è lineare omogenea, il coefficiente è definito in $\mathbb{R}$. Procedendo come sopra moltiplichiamo entrambi i membri per l'esponenziale di una primitiva del coefficiente $t \mapsto 2t$. Quindi moltiplichiamo per e^{t^2}, ottenendo $e^{t^2} y'(t) + 2t e^{t^2} y(t) = 0$, cioè

$$\frac{d}{dt}\big(e^{t^2} y(t)\big) = 0;$$

pertanto $\exists c \in \mathbb{R}$ tale che, $\forall t \in \mathbb{R}$, risulta $e^{t^2} y(t) = c$, cioè $y(t) = c e^{-t^2}$. La condizione iniziale $y(0) = 2$ è verificata se $c = 2$. Pertanto il problema (3.3.7) ha la soluzione

$$v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad v(t) = 2e^{-t^2}.$$ ◀

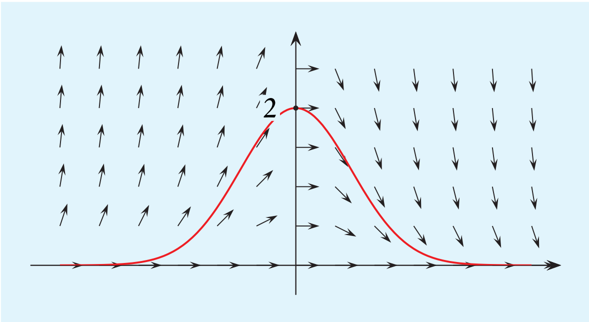


Figura 3.3.1
La soluzione del problema di Cauchy (3.3.7).

3.3.5 Esempio. Consideriamo l'equazione differenziale lineare non omogenea

$$y'(t)+\frac{2t}{t^2+1}y(t)=1. \tag{3.3.8}$$

Una primitiva del coefficiente $t\mapsto 2t/(t^2+1)$ è la funzione $t\mapsto \log(t^2+1)$, pertanto, per il teorema 3.3.1, sono soluzione dell'equazione le funzioni $v\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tali che

$$\begin{aligned}v(t)&=\exp\bigl(-\log(t^2+1)\bigr)\int_0^t \exp\bigl(\log(s^2+1)\bigr)\,ds+c\exp\bigl(-\log(t^2+1)\bigr)=\\&=\frac{1}{t^2+1}\int_0^t (s^2+1)\,ds+\frac{c}{t^2+1}=\frac{1}{t^2+1}\left(\frac{t^3}{3}+t\right)+\frac{c}{t^2+1}=\frac{t^3+3t+3c}{3(t^2+1)},\end{aligned}$$

con $c\in\mathbb{R}$. Quindi l'integrale generale dell'equazione (3.3.8) è

$$\left\{t\mapsto\frac{t^3+3t+d}{3(t^2+1)}\;\middle|\;d\in\mathbb{R}\right\}.$$

◀

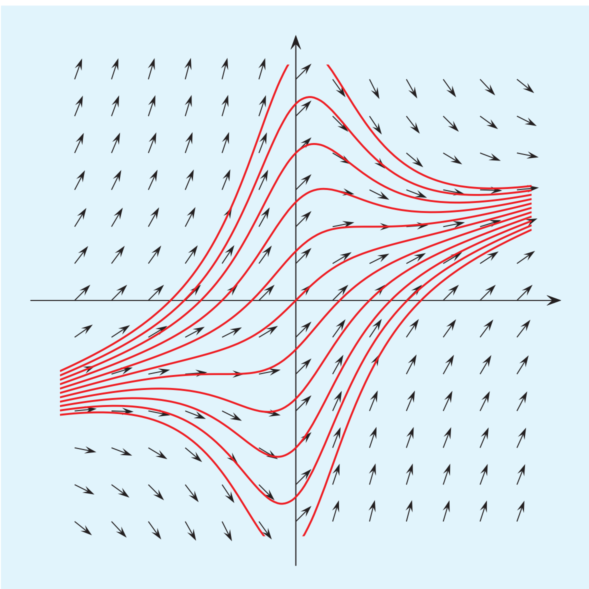


Figura 3.3.2
Soluzioni dell'equazione (3.3.8).

3.3.2 Equazioni a variabili separabili

Studiamo le equazioni differenziali del primo ordine in cui il secondo membro è il prodotto di una funzione di t per una di y.

Consideriamo quindi il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = g(t)h\big(y(t)\big), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{3.3.9}$$

dove $g \in C(I,\mathbb{R})$, $h \in C(J,\mathbb{R})$, con $I,J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli, $t_0 \in \operatorname{int} I$ e $y_0 \in \operatorname{int} J$; supponiamo inoltre che h non si annulli.

L'equazione differenziale che compare in questo problema è detta **equazione a variabili separabili**, perché, come vedremo studiando il procedimento risolutivo, è possibile scriverla in modo che in un membro compaia solo t e nell'altro solo y.

Il problema illustrato nell'esempio 3.1.1 è di questo tipo, abbiamo

$$g,h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(t) = 1, \qquad h(y) = e^{-y},$$

e $t_0 = y_0 = 0$. Questo esempio mostra che non è in generale possibile richiedere che il dominio di una soluzione coincida col dominio di g; infatti in questo caso $\mathscr{D}(g) = \mathbb{R}$, ma l'equazione non ha soluzioni definite in $\mathbb{R}$.

Poiché h non si annulla, una funzione di classe C^1, $v\colon I_1 \to J$, con I_1 intervallo tale che $t_0 \in I_1 \subseteq I$, è soluzione del problema (3.3.9) se e solo se si ha $v(t_0) = y_0$ e, $\forall t \in I_1$,

$$\frac{v'(t)}{h\big(v(t)\big)} = g(t).$$

Da qui segue

$$\int_{t_0}^{t} \frac{v'(s)}{h\big(v(s)\big)}\, ds = \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds$$

e, effettuando la sostituzione $\sigma = v(s)$ nell'integrale a primo membro, si ottiene

$$\int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{1}{h(\sigma)}\, d\sigma = \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds,$$

cioè, visto che $v(t_0) = y_0$,

$$\int_{y_0}^{v(t)} \frac{1}{h(\sigma)}\, d\sigma = \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds,$$

Viceversa, se, $\forall t \in I_1$, $v(t)$ verifica questa uguaglianza, allora, invertendo il ragionamento, si prova che risulta $v'(t) = g(t)h\big(v(t)\big)$ e, ponendo $t = t_0$, si ha

$$\int_{y_0}^{v(t_0)} \frac{1}{h(\sigma)}\, d\sigma = \int_{t_0}^{t_0} g(s)\, ds = 0.$$

Poiché h non si annulla ed è continua in un intervallo, per il teorema degli zeri è sempre positiva oppure sempre negativa; lo stesso vale per $1/h$, quindi l'integrale può essere nullo solo se l'intervallo di integrazione si riduce a un punto, cioè $v(t_0)=y_0$. Quindi $v: I_1 \to \mathbb{R}$ è soluzione del problema (3.3.9) se e solo se, $\forall t \in I_1$, si ha

$$\int_{y_0}^{v(t)} \frac{1}{h(\sigma)}\, d\sigma = \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds\,. \tag{3.3.10}$$

Ponendo

$$G: I \to \mathbb{R}, \qquad G(t) = \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds\,,$$
$$H: J \to \mathbb{R}, \qquad H(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{h(\sigma)}\, d\sigma\,;$$

l'uguaglianza (3.3.10) diventa

$$H\big(v(t)\big) = G(t)\,.$$

La funzione H è derivabile con derivata $1/h$, che ha segno costante, quindi, per il test di monotonia stretta, H è strettamente monotona, quindi iniettiva. Pertanto, $\forall t \in I_1$, deve essere $G(t) \in H(J)$ e $v(t) = H^{-1}\big(G(t)\big)$ e viceversa se I_1 è un intervallo tale che $t_0 \in I_1 \subseteq I$ e $G(I_1) \subseteq H(J)$, allora la funzione

$$v: I_1 \to \mathbb{R}, \qquad v(t) = H^{-1}\big(G(t)\big),$$

è soluzione del problema (3.3.9).

Per dimostrare che esiste una soluzione resta da provare che esiste un intervallo I_1 con le proprietà richieste. Poiché H è continua e J è un intervallo, per il teorema dei valori intermedi $H(J)$ è un intervallo. Abbiamo richiesto $y_0 \in \operatorname{int} J$, poiché H è strettamente monotona da ciò segue che $0 = H(y_0) \in \operatorname{int} H(J)$. Quindi esiste V, intorno di 0, tale che $V \subseteq H(J)$. La funzione G è continua e $G(t_0) = 0$, quindi esiste U, intorno di t_0, tale che, $\forall t \in U \cap I$, si ha $G(t) \in V$; pertanto $G(U \cap I) \subseteq V \subseteq H(J)$. Possiamo quindi scegliere $I_1 = U \cap I$.

Abbiamo così dimostrato il seguente teorema.

3.3.6 Teorema

Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli, $g \in C(I, \mathbb{R})$, $h \in C(J, \mathbb{R})$, $t_0 \in \operatorname{int} I$, $y_0 \in \operatorname{int} J$; supponiamo che, $\forall y \in J$, sia $h(y) \neq 0$, Posto

$$G: I \to \mathbb{R}, \qquad G(t) = \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds\,,$$
$$H: J \to \mathbb{R}, \qquad H(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{h(\sigma)}\, d\sigma\,,$$

H risulta iniettiva. Inoltre esiste $I_1 \subseteq I$ intervallo, tale che $t_0 \in I_1$, $G(I_1) \subseteq H(J)$ e la funzione

$$v: I_1 \to \mathbb{R}, \qquad v(t) = H^{-1}\big(G(t)\big),$$

è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = g(t)\,h\big(y(t)\big), \\ y(t_0) = y_0 \,. \end{cases}$$

Viceversa se $w\colon K \to \mathbb{R}$, con $K \subseteq I$ intervallo, è soluzione di questo problema, allora $G(K) \subseteq H(J)$ e, $\forall t \in K$, $w(t) = H^{-1}\big(G(t)\big)$.

Questo teorema mostra che per il problema di Cauchy per un'equazione a variabili separabili c'è unicità della soluzione con la sola ipotesi di continuità della funzione che definisce l'equazione.

3.3.7 Osservazione. Studiamo il problema di Cauchy (3.3.9) nel caso che h si annulli in qualche punto del dominio.

Se $h(y_0) = 0$, allora la funzione che vale costantemente y_0 è soluzione del problema, come si verifica facilmente. In questo caso può non esserci unicità della soluzione, come visto nell'esempio 3.1.5.

Se $h(y_0) \neq 0$, ma h si annulla in qualche altro punto, allora, per il teorema della permanenza del segno, esiste un intorno di y_0 in cui h è diversa da 0; si può applicare il teorema 3.3.6 alla restrizione di h a tale intorno. ◀

3.3.8 Esempio. Nel teorema 3.3.6 la richiesta che sia $t_0 \in \operatorname{int} I$ non è essenziale; se t_0 è un estremo di I si può ripetere il ragionamento fatto per dimostrare che esiste una soluzione del problema definita solo a destra o solo a sinistra di t_0 a seconda dei casi. Invece è essenziale che sia $y_0 \in \operatorname{int} J$, se y_0 è un estremo di J il problema (3.3.9) può non avere soluzione.

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = -t\Big(\sqrt{y(t)} + 1\Big), \\ y(0) = 0 \,. \end{cases}$$

L'equazione è a variabili separabili, perché il secondo membro è prodotto delle funzioni

$$\begin{aligned} &g_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, && g_1(t) = -t\,, \\ &h_1\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}, && h_1(y) = \sqrt{y} + 1\,. \end{aligned}$$

Le funzioni g_1 e h_1 sono continue e h_1 non si annulla. Poiché $\mathscr{D}(h_1) = [0, +\infty[$, ogni eventuale soluzione del problema è a valori non negativi. Se esistesse una soluzione v definita in un intervallo $[0, t_1]$, allora, $\forall t \in]0, t_1]$, si avrebbe $v'(t) = -t\Big(\sqrt{v(t)} + 1\Big) < 0$, quindi, per il test di stretta monotonia, sarebbe $v(t_1) < v(0) = 0$. Ciò è assurdo perché v ha valori non negativi. In modo analogo si dimostra che non esistono soluzioni definite a sinistra di 0. ◀

3.3.9 Esempio. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{t+1}{y(t)}, \\ y(1) = 3 \,. \end{cases} \tag{3.3.11}$$

L'equazione è a variabili separabili, perché il secondo membro è prodotto delle funzioni

$$g_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g_2(t) = t+1,$$
$$h_2 \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \qquad h_2(y) = \frac{1}{y}.$$

Le funzioni g_2 e h_2 sono continue e h_2 non si annulla. La funzione $y \mapsto 1/y$ è considerata sul dominio $\mathbb{R}^+$ perché la condizione iniziale richiede che y sia positiva.

Ripetendo i ragionamenti visti sopra, si prova che $v \in C^1(I_2, \mathbb{R})$, con $I_1 \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, è soluzione del problema (3.3.11) se e solo se, $\forall t \in I_1$, si ha

$$\begin{cases} v'(t)v(t) = t+1, \\ v(1) = 3, \end{cases}$$
$$\int_3^{v(t)} \sigma \, d\sigma = \int_1^t (s+1)\, ds,$$
$$\frac{\big(v(t)\big)^2}{2} - \frac{9}{2} = \frac{t^2}{2} + t - \frac{1}{2} - 1,$$
$$\big(v(t)\big)^2 = t^2 + 2t + 6,$$
$$v(t) = \sqrt{t^2 + 2t + 6}.$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo scelto la soluzione uguale alla radice e non al suo opposto, perché deve essere positiva.

Possiamo scegliere $\mathbb{R}$ come dominio della soluzione perché questo è il dominio naturale di v e i ragionamenti già fatti assicurano che v verifica l'equazione in tutto il dominio, se questo è un intervallo. Tale funzione è evidentemente la soluzione massimale. ◀

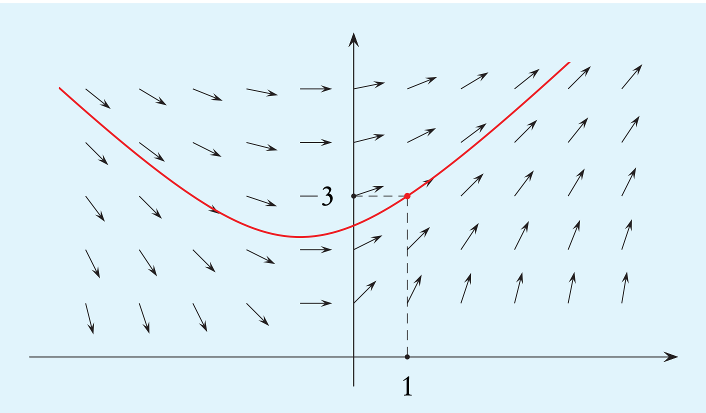


Figura 3.3.3
La soluzione del problema di Cauchy (3.3.11).

3.3.10 Esempio. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{\big(y(t)\big)^2 + 1}{2(t^2+1)}, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{3.3.12}$$

con $y_0 \in \mathbb{R}$.

L'equazione è a variabili separabili, perché il secondo membro è prodotto delle funzioni

$$g_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g_3(t) = \frac{1}{2(t^2+1)},$$
$$h_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad h_3(y) = y^2 + 1.$$

Le funzioni g_3 e h_3 sono continue e h_3 non si annulla.

Ripetendo i ragionamenti visti sopra, si prova che $v \in C^1(I_1, \mathbb{R})$, con $I_1 \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, è soluzione del problema (3.3.11) se e solo se, $\forall t \in I_1$, si ha

$$\begin{cases} \dfrac{v'(t)}{\big(v(t)\big)^2+1} = \dfrac{1}{2(t^2+1)}, \\ v(0) = y_0, \end{cases}$$

$$\int_{y_0}^{v(t)} \frac{1}{\sigma^2+1}\, d\sigma = \int_1^t \frac{1}{s^2+1}\, ds,$$

$$\arctan\big(v(t)\big) - \arctan y_0 = \frac{1}{2}\arctan t,$$

$$v(t) = \tan\left(\frac{1}{2}\arctan t + \arctan y_0\right),$$

dove l'ultimo passaggio richiede che sia

$$\frac{1}{2}\arctan t + \arctan y_0 \in \arctan(\mathbb{R}) = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,$$

cioè

$$-\pi - 2\arctan y_0 < \arctan t < \pi - 2\arctan y_0.$$

Poiché, $\forall t \in \mathbb{R}$, si ha $\arctan t \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$, la prima disequazione è sempre verificata se $-\pi - 2\arctan y_0 \leq -\pi/2$, cioè $2\arctan y_0 \geq -\pi/2$, che equivale a $y_0 \geq \tan(-\pi/4) = -1$. Se invece $y_0 < -1$, allora tale disequazione è verificata per

$$t > \tan(-\pi - 2\arctan y_0) = -\tan(2\arctan y_0).$$

In modo analogo la seconda disequazione è verificata $\forall t \in \mathbb{R}$ se $y_0 \leq 1$, mentre è verificata per $t < -\tan(2\arctan y_0)$ se $y_0 > 1$,

Quindi il problema (3.3.12) ha la soluzione

$$v : \begin{cases} \left]-\tan(2\arctan y_0), +\infty\right[\to \mathbb{R}, & \text{se } y_0 < -1, \\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & \text{se } -1 \leq y_0 \leq 1, \\ \left]-\infty, -\tan(2\arctan y_0)\right[\to \mathbb{R}, & \text{se } y_0 > 1, \end{cases} \quad v(t) = \tan\left(\frac{1}{2}\arctan t + \arctan y_0\right).$$

Osserviamo che, se $y_0 < -1$, abbiamo ottenuto che $\mathscr{D}(v) = \left]-\tan(2\arctan y_0), +\infty\right[$ perché deve risultare $(1/2)\arctan t + \arctan y_0 > -\pi/2$, quindi se $t \to -\tan(2\arctan y_0)^+$ si ha $(1/2)\arctan t + \arctan y_0 \to -\pi/2$ e risulta $(1/2)\arctan t + \arctan y_0 > -\pi/2$, perciò $v(t) \to -\infty$. Pertanto v è la soluzione massimale.

Per motivi analoghi, anche nel caso $y_0 > 1$, v è la soluzione massimale. ◀

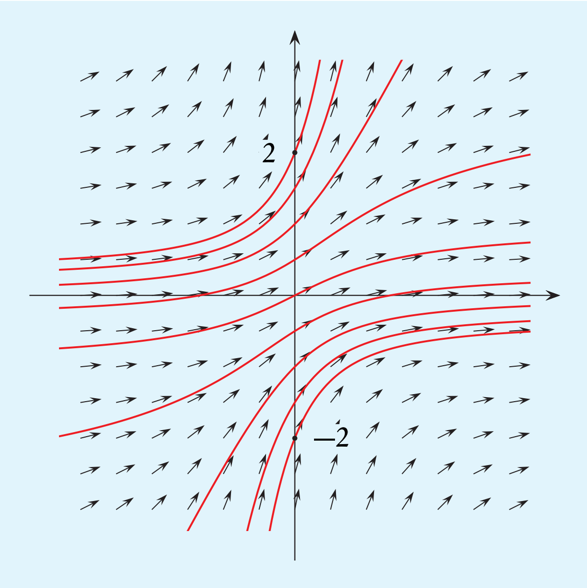


Figura 3.3.4
La soluzione del problema di Cauchy (3.3.12) con $y_0 = -2, -3/2, -1, -1/2, 0, 1/2, 1, 3/2, 2$.

3.3.11 Esempio. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt{1-\big(y(t)\big)^2}\,, \\ y(0) = 0\,, \end{cases} \tag{3.3.13}$$

L'equazione è a variabili separabili, perché il secondo membro è prodotto delle funzioni

$$\begin{aligned} &g_4 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, && g_4(t) = 1\,, \\ &h_4 \colon]-1,1[\to \mathbb{R}\,, && h_4(y) = \sqrt{1-y^2}\,. \end{aligned}$$

Le funzioni g_4 e h_4 sono continue e h_4 non si annulla, poiché abbiamo scelto come dominio $]-1,1[$, anziché il dominio naturale della funzione $y \mapsto \sqrt{1-y^2}$ che è $[-1,1]$.

Ripetendo i ragionamenti visti sopra, si prova che $v \in C^1(I_1, \mathbb{R})$, con $I_1 \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, è soluzione del problema (3.3.11) se e solo se, $\forall t \in I_1$, si ha

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \dfrac{v'(t)}{\sqrt{1-\big(y(t)\big)^2}} = 1\,, \\ v(0) = 0\,, \end{cases} \\ &\int_0^{v(t)} \frac{1}{\sqrt{1-\sigma^2}}\, d\sigma = \int_0^t 1\, ds\,, \\ &\arcsin\big(v(t)\big) = t\,. \end{aligned}$$

Se $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, questo equivale a $v(t) = \sin t$. Tuttavia il ragionamento fatto ci garantisce che la funzione così ottenuta verifica l'equazione solo quando $v(t) \in]-1,1[$, cioè $t \in]-\pi/2, \pi/2[$. Si ha

$$\sin'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 = \sqrt{1 - \sin^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)},$$
$$\sin'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 = \sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)},$$

quindi la funzione seno verifica l'equazione in $[-\pi/2, \pi/2]$. Invece essa non verifica l'equazione nei punti t tali che $\cos t < 0$; infatti in tal caso $\sin'(t) < 0$, mentre $\sqrt{1 - \sin^2 t} > 0$. Quindi l'intervallo più ampio in cui la funzione seno è soluzione del problema (3.3.13) è $[-\pi/2, \pi/2]$.

Notiamo che in questo caso la funzione trovata ha dominio naturale più grande dell'intervallo in cui è soluzione del problema di Cauchy. Dobbiamo quindi fare attenzione nel determinare il dominio della soluzione di un problema di Cauchy per un'equazione a variabili separabili.

Le funzioni che valgono costantemente 1 o -1 verificano l'equazione differenziale, quindi la funzione

$$w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad w(t) = \begin{cases} -1, & \text{se } t \leq -\dfrac{\pi}{2}, \\ \sin t, & \text{se } -\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{se } t \geq \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

è soluzione del problema (3.3.13).

La funzione w è l'unica soluzione di tale problema. Infatti, poiché l'equazione è a variabili separabili, la soluzione è unica se assume valori in $]-1, 1[$; quindi w è l'unica soluzione definita in $]-\pi/2, \pi/2[$. Per continuità una soluzione deve valere 1 in $\pi/2$ e -1 in $-\pi/2$. Ogni soluzione dell'equazione ha derivata non negativa, quindi è crescente e assume valori in $[-1, 1]$, perché l'equazione è definita solo per y in tale intervallo. Quindi se una soluzione dell'equazione vale 1 in un punto, allora vale costantemente 1 a destra di tale punto; se invece vale -1 in un punto, allora vale costantemente -1 a sinistra di tale punto.

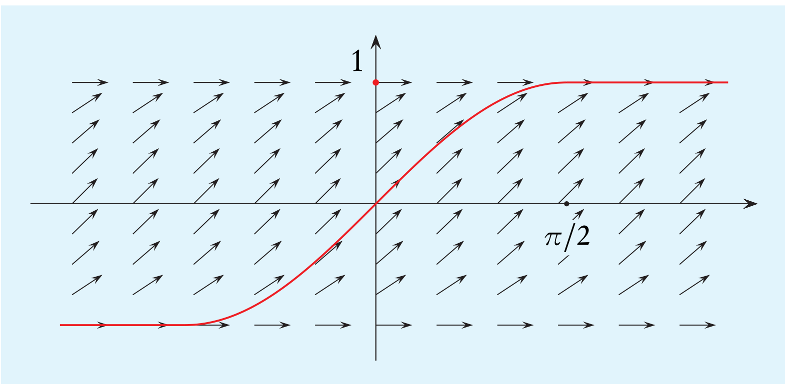


Figura 3.3.5
La soluzione del problema di Cauchy (3.3.13).

Vi sono problemi di Cauchy per l'equazione $y' = \sqrt{1-y^2}$ che hanno più di una soluzione. Ad esempio consideriamo il problema

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt{1-\big(y(t)\big)^2}, \\ y\Big(\dfrac{\pi}{2}\Big) = 1. \end{cases} \tag{3.3.14}$$

Evidentemente w e la funzione che vale costantemente 1 sono soluzione di questo problema. Si verifica anche facilmente che, $\forall c \in \mathbb{R}^+$, la funzione $t \mapsto w(t+c)$ è soluzione del problema (3.3.14). ◀

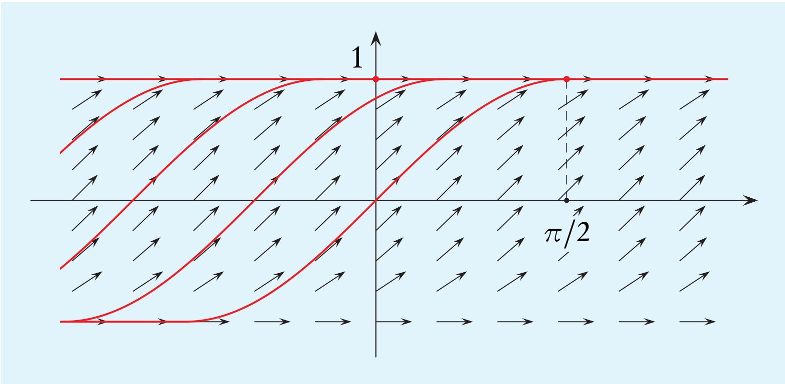


Figura 3.3.6
Alcune soluzioni del problema di Cauchy (3.3.14).

3.3.3 Equazioni di Bernoulli

Studiamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y(t)' + a(t)y = b(t)\big(y(t)\big)^\alpha, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{3.3.15}$$

dove $a, b \in C(I, \mathbb{R})$, con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $\alpha \in \mathbb{R}$, $t_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$. L'equazione è detta **equazione di Bernoulli**[18].

Se $\alpha = 0$ oppure $\alpha = 1$ oppure b è identicamente nulla, allora equazione è lineare ed è già stata studiata nella sottosezione 3.3.1. Quindi nel seguito supporremo $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ e b non identicamente nulla.

Poiché la funzione incognita è elevata alla α, a seconda del valore di α, intero o non intero, positivo o negativo, l'insieme dei valori che la soluzione può assumere cambia; indichiamo con J_α l'insieme degli y per cui è definito y^α, cioè poniamo

$$J_\alpha = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{se } \alpha \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \\ \mathbb{R}^*, & \text{se } \alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, \\ \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, & \text{se } \alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}, \\ \mathbb{R}^+, & \text{se } \alpha \in \mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Z}. \end{cases}$$

[18] L'equazione prende il nome da Jakob Bernoulli (Basilea, 1655, Basilea, 1705), che in un articolo del 1695 pose il problema di risolverla. Un metodo risolutivo fu trovato l'anno successivo da Gottfried Leibniz (Lipsia, 1646, Hannover 1716).

Bernoulli ha dato fondamentali contributi al calcolo differenziale e alla teoria della probabilità.

Leibniz fu tra i fondatori del calcolo differenziale e del calcolo integrale

Ovviamente deve essere $y_0 \in J_\alpha$.

Cerchiamo una funzione $v\colon I_1 \to \mathbb{R}$ soluzione del problema di Cauchy (3.3.15), con $I_1 \subseteq I$ intervallo, tale che $t_0 \in I_1$.

Se $y_0 = 0$, cosa possibile solo se $\alpha > 0$, allora la funzione identicamente nulla è soluzione del problema.

Supponiamo ora che sia $y_0 > 0$ e quindi che una soluzione del problema (3.3.15) sia positiva, almeno in un intorno di t_0.

Consideriamo una nuova funzione incognita z tale che $z = y^{1-\alpha}$. Se y verifica l'equazione di Bernoulli risulta

$$\begin{aligned} z' &= (1-\alpha)y^{-\alpha}y' = (1-\alpha)y^{-\alpha}(-ay + by^\alpha) = -(1-\alpha)ay^{1-\alpha} + (1-\alpha)b = \\ &= -(1-\alpha)az + (1-\alpha)b\,, \end{aligned}$$

quindi z verifica l'equazione lineare

$$z' + (1-\alpha)az = (1-\alpha)b\,,$$

che sappiamo risolvere (v. sottosezione 3.3.1). La condizione iniziale diventa $z(t_0) = y_0^{1-\alpha}$. Pertanto abbiamo il problema

$$\begin{cases} z'(t) + (1-\alpha)a(t)z(t) = (1-\alpha)b(t)\,, \\ z(t_0) = y_0^{1-\alpha}\,. \end{cases} \tag{3.3.16}$$

Viceversa sia $w\colon I_1 \to J_\alpha$, con $I_1 \subseteq \mathbb{R}$ intervallo tale che $t_0 \in I_1$, una soluzione del problema (3.3.16) a valori positivi. Poniamo, per $t \in I_1$,

$$v\colon I_1 \to \mathbb{R}, \qquad v(t) = \big(w(t)\big)^{1/(1-\alpha)}.$$

Evidentemente $v \in C^1(I_1, \mathbb{R})$ e, $\forall t \in I_1$, si ha

$$\begin{aligned} v'(t) + a(t)v(t) &= \frac{1}{1-\alpha}\big(w(t)\big)^{-1+1/(1-\alpha)} w'(t) + a(t)\big(w(t)\big)^{1/(1-\alpha)} = \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\big(w(t)\big)^{-1+1/(1-\alpha)}\big(w'(t) + (1-\alpha)a(t)w(t)\big) = \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\big(w(t)\big)^{\alpha/(1-\alpha)}(1-\alpha)\,b(t) = b(t)\big(v(t)\big)^\alpha. \end{aligned} \tag{3.3.17}$$

Inoltre $v(t_0) = \big(w(t_0)\big)^{1/(1-\alpha)} = y_0$. Pertanto v è soluzione del problema (3.3.15).

Consideriamo ora il caso $y_0 < 0$, cosa possibile se α è intero. Procedendo come sopra, si prova che se $v \in C^1(I_1, \mathbb{R})$, a valori negativi, è soluzione del problema (3.3.15), allora la funzione

$$w\colon I_1 \to \mathbb{R}, \qquad w(t) = \big(v(t)\big)^{1-\alpha},$$

è soluzione del problema (3.3.16).

Per ottenere una soluzione del problema (3.3.15) a partire da una soluzione del problema (3.3.16) è necessario distinguere il caso α pari da quello dispari.

Se α è dispari, allora $1-\alpha$ è pari, quindi $y_0^{1-\alpha} > 0$; pertanto, se w è soluzione del problema (3.3.16), esiste un intorno di t_0, in cui w è positiva. Procedendo come nella (3.3.17), si dimostra che

$$v : I_1 \to \mathbb{R}, \qquad v(t) = -\big(w(t)\big)^{1/(1-\alpha)},$$

è soluzione del problema (3.3.15).

Se α è pari, allora $1-\alpha$ è dispari, quindi $y_0^{1-\alpha} < 0$; pertanto, se w è soluzione del problema (3.3.16), esiste un intorno di t_0 in cui w è negativa. Anche in questo caso si dimostra che

$$v : I_1 \to \mathbb{R}, \qquad v(t) = -\big(-w(t)\big)^{1/(1-\alpha)},$$

è soluzione del problema (3.3.15).

3.3.12 Osservazione. Se $\alpha \notin]0,1[$, allora la funzione $(t,y) \mapsto -a(t)y + b(t)y^\alpha$ è derivabile rispetto a y con derivata continua, quindi, per l'osservazione 3.1.7, localmente lipschitziana. Pertanto, per il teorema di Cauchy 3.1.8, in questo caso c'è unicità della soluzione per il problema (3.3.15).

Se $\alpha \in]0,1[$, allora può non esserci unicità della soluzione.

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y(t)' + a(t)y = b(t)\big(y(t)\big)^\alpha, \\ y(t_0) = 0, \end{cases} \tag{3.3.18}$$

con $t_0 \in I$. La funzione identicamente nulla è soluzione di questo problema. Inoltre, per il teorema 3.3.1, se A è una primitiva di a, allora la funzione

$$w : I \to \mathbb{R}, \qquad w(t) = (1-\alpha)e^{-(1-\alpha)A(t)} \int_{t_0}^{t} e^{(1-\alpha)A(s)} b(s)\, ds$$

è soluzione dell'equazione lineare $z'(t)+(1-\alpha)a(t)z(t) = (1-\alpha)b(t)$ e risulta $w(t_0) = 0$. Se t_0 non è il massimo di I e $b(t_0) > 0$, allora $\exists \delta \in \mathbb{R}^+$ tale che, $\forall t \in]t_0, t_0+\delta]$, si ha $b(t) > 0$, quindi, per tali t, $w(t) > 0$. Allora, per quanto visto sopra, la funzione

$$v : [t_0, t_0+\delta] \to \mathbb{R}, \qquad v(t) = \big(w(t)\big)^{1/(1-\alpha)},$$

è soluzione del problema (3.3.18) diversa dalla soluzione identicamente nulla. Pertanto per questo problema non c'è unicità della soluzione.

Analogamente, se t_0 non è il minimo di I e $b(t_0) < 0$, allora esiste una soluzione del problema non identicamente nulla definita in un intervallo a sinistra di t_0. ◀

Osserviamo che nel caso α intero una soluzione di un problema di Cauchy per un'equazione di Bernoulli non può cambiare di segno.

Infatti tale soluzione è continua e definita in un intervallo, pertanto, se assume sia valori positivi che valori negativi deve annullarsi. Se $\alpha < 0$ ciò non è possibile, perché l'equazione non è definita per $y = 0$. Se $\alpha > 0$, una soluzione dell'equazione di Bernoulli che si annulla in un punto d è anche soluzione del problema di Cauchy con la condizione iniziale $y(d) = 0$; tale problema di Cauchy ha la soluzione identicamente nulla e c'è unicità della soluzione (v. osservazione 3.3.12), quindi la soluzione è quella identicamente nulla.

3.3.13 Esempio. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) + \tan t\, y(t) = \bigl(y(t)\bigr)^2, \\ y(0) = 2. \end{cases} \tag{3.3.19}$$

L'equazione è di Bernoulli con $\alpha = 2$. Moltiplicando entrambi i membri dell'equazione per $-\bigl(y(t)\bigr)^{-2}$ l'equazione diventa

$$-\bigl(y(t)\bigr)^{-2} y'(t) - \tan t \bigl(y(t)\bigr)^{-1} = -1;$$

ponendo $z = y^{-1}$, si ottiene

$$\begin{cases} z'(t) - \tan t\, z(t) = -1, \\ z(0) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Abbiamo un'equazione lineare con coefficiente $t \mapsto -\tan t$. Poiché ci interesse una soluzione definita in un intorno di 0, in cui la funzione coseno è positiva, possiamo considerare la primitiva $t \mapsto \log(\cos t)$. Per il teorema 3.3.2 la soluzione è

$$\begin{aligned} w(t) &= \exp\bigl(-\log(\cos t)\bigr) \int_0^t \exp\bigl(\log(\cos s)\bigr)(-1)\, ds + \exp\bigl(-\log(\cos t)\bigr) \exp\bigl(\log(\cos 0)\bigr) \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{\cos t} \int_0^t (-\cos s)\, ds + \frac{1}{2\cos t} = \frac{1}{\cos t} \bigl[-\sin s\bigr]_0^t + \frac{1}{2\cos t} = \frac{-2\sin t + 1}{2\cos t}. \end{aligned}$$

La funzione w è definita in $]-\pi/2, \pi/2[$ e si annulla in t se e solo se $\sin t = 1/2$ cioè, nell'intervallo considerato, $t = \pi/6$. Pertanto il problema (3.3.19) ha la soluzione

$$v \colon \Bigl]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\Bigr[\to \mathbb{R}, \qquad v(t) = \frac{1}{w(t)} = \frac{2\cos t}{-2\sin t + 1}.$$

Osserviamo che l'equazione è definita per $(t, y) \in \,]-\pi/2, \pi/2[\, \times \mathbb{R}$ e il grafico di v si avvicina alla frontiera di tale insieme per $t \to -\pi/2$, inoltre $\lim_{t \to \pi/6^-} v(t) = +\infty$, quindi, per il teorema 3.2.1, questa è la soluzione massimale. ◀

3.3.14 Esempio. Consideriamo l'equazione differenziale studiata nell'esempio 3.3.13, con una diversa condizione iniziale

$$\begin{cases} y'(t) + \tan t\, y(t) = \bigl(y(t)\bigr)^2, \\ y(0) = -\dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{3.3.20}$$

Procedendo come nell'esempio 3.3.13, se si pone $z = y^{-1}$ si ottiene il problema

$$\begin{cases} z'(t) - \tan t\, z(t) = -1, \\ z(0) = -2, \end{cases} \tag{3.3.21}$$

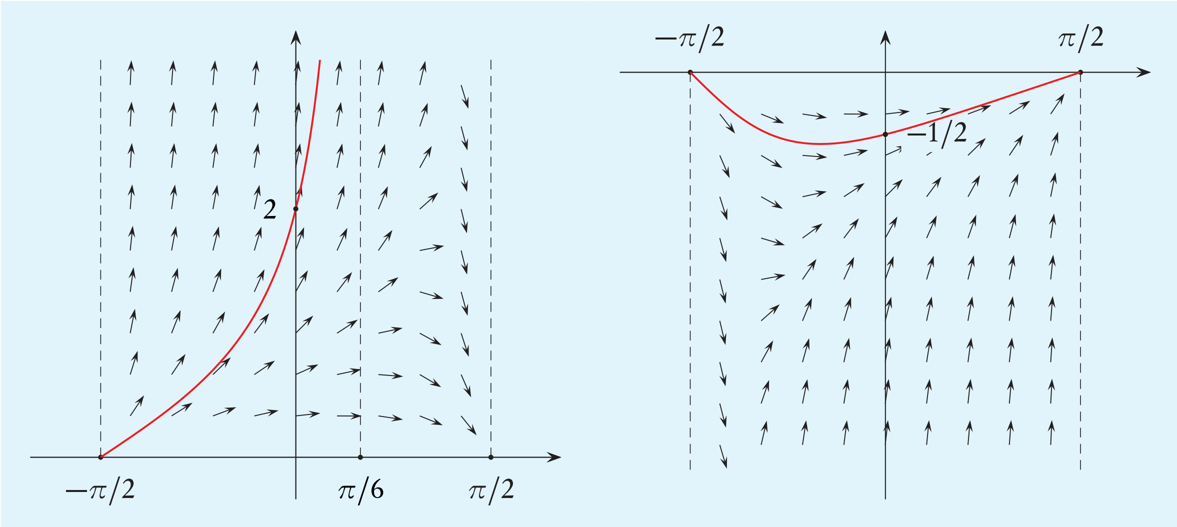


Figura 3.3.7
Soluzioni dei problemi di Cauchy (3.3.19) (a sinistra) e (3.3.20) (a destra).

che ha la soluzione

$$\begin{aligned} w(t) &= \\ &= \exp\bigl(-\log(\cos t)\bigr)\int_0^t \exp\bigl(\log(\cos s)\bigr)(-1)\,ds + \exp\bigl(-\log(\cos t)\bigr)\exp\bigl(\log(\cos 0)\bigr)(-2) = \\ &= \frac{1}{\cos t}\int_0^t (-\cos s)\,ds - \frac{2}{\cos t} = \frac{1}{\cos t}\bigl[-\sin s\bigr]_0^t - \frac{2}{\cos t} = -\frac{\sin t + 2}{\cos t}. \end{aligned}$$

La funzione w è definita in $]-\pi/2, \pi/2[$ ed è negativa. Pertanto il problema (3.3.20) ha la soluzione

$$v\colon \Bigl]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Bigr[\to \mathbb{R}, \qquad v(t) = \frac{1}{w(t)} = -\frac{\cos t}{\sin t + 2}.$$

Poiché l'equazione è definita per $(t, y) \in \,]-\pi/2, \pi/2[\, \times \mathbb{R}$ questa è la soluzione massimale. ◀

3.3.15 Esempio. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) - y(t) = \dfrac{2t}{y(t)}, \\ y(0) = 2. \end{cases} \tag{3.3.22}$$

L'equazione è di Bernoulli con $\alpha = -1$. Ponendo $z = y^2$ si ha

$$z'(t) = 2y(t)y'(t) = 2\bigl(y(t)\bigr)^2 + 4t = 2z(t) + 4t;$$

Quindi otteniamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} z'(t) - 2z(t) = 4t, \\ z(0) = 4. \end{cases} \tag{3.3.23}$$

Abbiamo un'equazione lineare con coefficiente costante uguale a -2. Per il teorema 3.3.2 la soluzione è

$$w(t) = e^{2t}\int_0^t e^{-2s}4s\,ds + 4e^{2t} = e^{2t}\big[-2e^{-2s}s\big]_0^t - e^{2t}\int_0^t(-2)e^{-2s}\,ds + 4e^{2t} =$$
$$= -2t - e^{2t}\big[e^{-2s}\big]_0^t + 4e^{2t} = -2t - 1 + 5e^{2t}.$$

Dall'espressione mediante l'integrale risulta evidente che w è a valori positivi. Infatti se $t > 0$, allora si ha l'integrale di una funzione positiva su $[0, t]$, che è positivo, a cui è sommato $4e^{2t}$, che è positivo; se $t < 0$ l'integrale si può scrivere come $\int_t^0(-e^{-2s}4s)\,ds$ quindi anche in questo caso abbiamo l'integrale di una funzione positiva. Quindi la funzione

$$v\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad v(t) = \sqrt{5e^{2t} - 2t - 1},$$

è soluzione del problema (3.3.22).

Poiché il dominio è $\mathbb{R}$, questa è la soluzione massimale. ◀

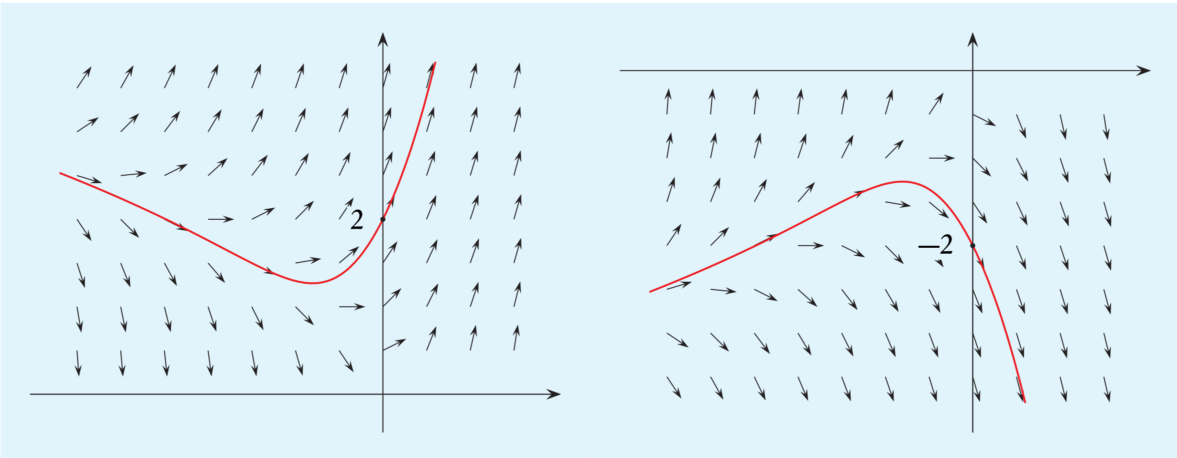


Figura 3.3.8
Soluzioni dei problemi di Cauchy (3.3.22) (a sinistra) e (3.3.24) (a destra).

3.3.16 Esempio. Consideriamo l'equazione differenziale studiata nell'esempio 3.3.15, con una diversa condizione iniziale

$$\begin{cases} y'(t) - y(t) = \dfrac{2t}{y(t)}, \\ y(0) = -2. \end{cases} \tag{3.3.24}$$

Ponendo $z = y^2$, si ha $z(0) = (-2)^2 = 4$, quindi, procedendo come in tale esempio, si ottiene ancora il problema di Cauchy (3.3.23). Sappiamo che tale problema ha la soluzione

$$w\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad w(t) = 5e^{2t} - 2t - 1,$$

che è a valori positivi, quindi la funzione

$$v\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad v(t) = -\sqrt{5e^{2t} - 2t - 1}.$$

è soluzione del problema (3.3.24). ◀

3.3.17 Esempio. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) - \dfrac{2y(t)}{t} = \dfrac{2\sqrt{y(t)}}{t}, \\ y(2) = 1. \end{cases} \tag{3.3.25}$$

L'equazione è di Bernoulli con $\alpha = 1/2$. L'equazione è definita solo per $t \neq 0$; poiché la condizione iniziale è assegnata per $t = 2$, studiamo l'equazione in $\mathbb{R}^+$. Moltiplicando entrambi i membri dell'equazione per $\big(y(t)\big)^{-1/2}/2$ l'equazione diventa

$$\frac{1}{2}\big(y(t)\big)^{-1/2} y'(t) - \frac{1}{t}\big(y(t)\big)^{1/2} = \frac{1}{t};$$

ponendo $z = y^{1/2}$, si ottiene

$$\begin{cases} z'(t) - \dfrac{1}{t} z(t) = \dfrac{1}{t}, \\ z(2) = 1. \end{cases}$$

Abbiamo un'equazione lineare con coefficiente $t \mapsto -1/t$. Poiché ci interesse una soluzione definita in un intorno di 2 possiamo considerare la primitiva $t \mapsto -\log t$. Per il teorema 3.3.2 la soluzione è

$$w(t) = \exp(\log t)\int_2^t \exp(-\log s)\frac{1}{s}\,ds + \exp(\log t)\exp(-\log 2) = t\int_2^t \frac{1}{s^2}\,ds + \frac{t}{2} =$$
$$= t\left[-\frac{1}{s}\right]_2^t + \frac{t}{2} = t - 1.$$

La funzione w è non negativa in $[1, +\infty[$, pertanto il problema (3.3.25) ha la soluzione

$$v\colon [1, +\infty[\to \mathbb{R}, \qquad v(t) = \big(w(t)\big)^2 = (t-1)^2.$$

Osserviamo che il dominio naturale della funzione $t \mapsto (t-1)^2$ è $\mathbb{R}$, ma questa non è soluzione del problema di Cauchy se estesa al di fuori dell'intervallo considerato. Infatti, per $t \in \,]0, 1[$ si ha:

$$\frac{d}{dt}(t-1)^2 - \frac{2}{t}(t-1)^2 = 2(t-1) - 2(t-1)\left(1 - \frac{1}{t}\right) = \frac{2(t-1)}{t},$$
$$\frac{2}{t}\sqrt{(t-1)^2} = \frac{2}{t}|t-1| = \frac{2(1-t)}{t},$$

pertanto l'equazione non è verificata.

Osserviamo che è possibile prolungare questa soluzione a $\mathbb{R}^+$, ponendola uguale a 0 per $t \in \,]0, 1[$.

Notiamo che siamo nella situazione esposta nell'osservazione 3.3.12, con $\alpha \in \,]0, 1[$. Come spiegato in tale osservazione, in questo caso un problema di Cauchy con valore iniziale della funzione uguale a 0 può avere più soluzioni e quindi esistono funzioni non identicamente nulle che verificano l'equazione e sono nulle in una parte del dominio. ◀

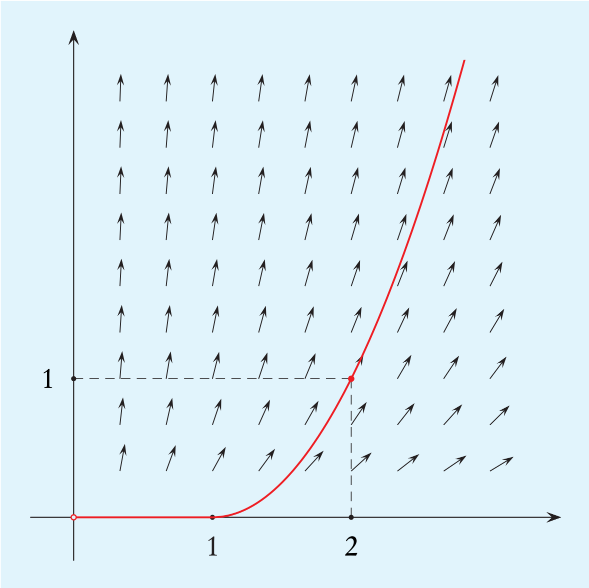


Figura 3.3.9
Soluzione del problema di Cauchy (3.3.25).

3.3.4 Equazioni a secondo membro omogeneo

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ tale che, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, se $(t, y) \in A$, allora $(\lambda t, \lambda y) \in A$. Diciamo che $f : A \to \mathbb{R}$ è **omogenea di grado** 0 se, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$ e $\forall (t, y) \in A$, si ha $f(\lambda t, \lambda y) = f(t, y)$.

Osserviamo che la condizione su A significa che tale insieme è l'unione di rette passanti per l'origine, eventualmente private di tale punto. Le uniche funzioni continue, omogenee di grado 0 e definite in $(0,0)$ sono le funzioni costanti. Infatti se f è definita in $(0,0)$, allora, dalla definizione di funzione omogenea e dalla continuità, $\forall (t, y) \in A$, si ha

$$f(t, y) = \lim_{\lambda \to 0} f(\lambda t, \lambda y) = f(0,0).$$

3.3.18 Esempio. Si verifica facilmente che le funzioni

$$\begin{aligned}
&g_1 : (\mathbb{R}^2)^* \to \mathbb{R}, && g_1(t, y) = \frac{t y}{t^2 + 4y^2},\\
&g_2 : \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 \mid t \neq y\} \to \mathbb{R}, && g_2(t, y) = \frac{t + y}{t - y},\\
&g_3 : \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\} \to \mathbb{R}, && g_3(t, y) = \sin\left(\frac{t}{y}\right),
\end{aligned}$$

sono omogenee di grado 0. ◀

Studiamo le equazioni differenziali del primo ordine definite da una funzione omogenea di grado 0.

Consideriamo quindi il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f\big(t, y(t)\big), \\ y(t_0) = y_0 . \end{cases} \tag{3.3.26}$$

dove $f \in C(A, \mathbb{R})$, con $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, è una funzione omogenea di grado 0 e $(t_0, y_0) \in A$.

Supponiamo che sia $t_0 \neq 0$ e consideriamo una nuova funzione incognita z tale che $z(t) = y(t)/t$, cioè $y(t) = tz(t)$. Se y è soluzione del problema, allora si ha:

$$z'(t) = \frac{y'(t)}{t} - \frac{y(t)}{t^2} = \frac{f\big(t, y(t)\big)}{t} - \frac{y(t)}{t^2} = \frac{f\big(t, tz(t)\big)}{t} - \frac{tz(t)}{t^2} = \frac{f\big(1, z(t)\big) - z(t)}{t}.$$

Abbiamo quindi il problema

$$\begin{cases} z'(t) = \dfrac{1}{t}\Big(f\big(1, z(t)\big) - z(t)\Big), \\ z(t_0) = \dfrac{y_0}{t_0}, \end{cases} \tag{3.3.27}$$

in cui l'equazione è a variabili separabili (v. sottosezione 3.3.2).

Viceversa, se z è soluzione del problema (3.3.27), posto $y(t) = tz(t)$ si ha

$$y'(t) = z(t) + tz'(t) = z(t) + f\big(1, z(t)\big) - z(t) = f\big(1, z(t)\big) = f\big(t, tz(t)\big) = f\big(t, y(t)\big)$$

e $y(t_0) = t_0 z(t_0) = y_0$. Abbiamo così ottenuto una soluzione del problema (3.3.26).

Come osservato sopra, si può utilizzare questo procedimento solo se $t_0 \neq 0$. In questo modo si ottengono soluzioni che non sono definite in 0, ma che possono essere prolungabili. Per determinare la soluzione massimale quindi bisogna studiare il dominio della soluzione del problema (3.3.26) e non quello della soluzione del problema (3.3.27).

Per studiare il problema (3.3.26) con $t_0 = 0$, si può utilizzare il metodo appena visto per trovare funzioni che verificano l'equazione senza condizione di Cauchy; spesso la funzione trovata può essere prolungata in modo naturale, ottenendo una soluzione definita in 0.

3.3.19 Osservazione. Nella sottosezione 3.3.2 abbiamo studiato un metodo risolutivo per problema di Cauchy per un'equazione a variabili separabili della forma

$$\begin{cases} y'(t) = g(t)\,h\big(y(t)\big), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

nell'ipotesi che sia $h(y_0) \neq 0$.

Per risolvere un'equazione a secondo membro omogeneo l'abbiamo trasformata in una equazione a variabili separabili, con $h(z) = f(1, z) - z$ e valore iniziale y_0/t_0. L'ipotesi $h(y_0) \neq 0$ implica quindi che sia $f(1, y_0/t_0) - y_0/t_0 \neq 0$. Se $f(1, y_0/t_0) - y_0/t_0 = 0$, allora si verifica facilmente che il problema (3.3.26) ha la soluzione $t \mapsto y_0 t/t_0$, con dominio $\mathbb{R}^+$ o $\mathbb{R}^-$ a seconda che t_0 sia positivo o negativo.

Come nel caso delle equazioni a variabili separabili, oltre a questa possono esserci altre soluzioni. ◀

3.3.20 Osservazione. Se $v\colon J \to \mathbb{R}$ è una soluzione del problema (3.3.26), con f omogenea di grado 0, allora, posto $J_1 = \{t \in \mathbb{R} \mid -t \in J\}$, la funzione

$$w\colon J_1 \to \mathbb{R}, \qquad w(t) = -v(-t),$$

è soluzione del problema di Cauchy per la stessa equazione con la condizione $y(-t_0) = -y_0$.

Infatti è ovvio che w verifica la condizione iniziale e, $\forall t \in J_1$, si ha

$$w'(t) = \frac{d}{dt}\big(-v(-t)\big) = v'(-t) = f\big(-t, v(-t)\big) = f\big(t, -v(-t)\big) = f\big(t, w(t)\big). \quad ◀$$

3.3.21 Esempio. Studiamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt{\dfrac{y(t)}{t} - \dfrac{y(t)}{t}}\,, \\ y(2) = 1\,. \end{cases} \tag{3.3.28}$$

La funzione

$$f_1 : \{(t,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \mid ty \geq 0\} \to \mathbb{R}, \qquad f_1(t,y) = \sqrt{\frac{y}{t}} - \frac{y}{t}\,,$$

è omogenea di grado 0. Ponendo $z(t) = y(t)/t$ e procedendo come sopra, z risulta essere soluzione del problema

$$\begin{cases} z'(t) = \dfrac{1}{t}\big(\sqrt{z(t)} - 2z(t)\big), \\ z(2) = \dfrac{1}{2}\,. \end{cases} \tag{3.3.29}$$

Una funzione $w : I \to \mathbb{R}$, con $I \subseteq \mathbb{R}^+$ intervallo tale che $2 \in I$, è soluzione del problema (3.3.29) se e solo se si ha

$$\int_2^t \frac{w'(s)}{\sqrt{w(s)} - 2w(s)}\,ds = \int_2^t \frac{1}{s}\,ds$$

e $w(2) = 1/2$. Ciò equivale a

$$\int_{1/2}^{w(t)} \frac{1}{\sqrt{\sigma} - 2\sigma}\,d\sigma = \int_2^t \frac{1}{s}\,ds = \log t - \log 2\,.$$

Nell'integrale a primo membro effettuiamo la sostituzione $\sigma = \varphi(\tau) = \tau^2$, con $\tau > 0$. Si ha

$$\int_{1/2}^{w(t)} \frac{1}{\sqrt{\sigma} - 2\sigma}\,d\sigma = \int_{\sqrt{1/2}}^{\sqrt{w(t)}} \frac{2\tau}{\tau - 2\tau^2}\,d\tau = \int_{\sqrt{1/2}}^{\sqrt{w(t)}} \frac{2}{1 - 2\tau}\,d\tau = \Big[-\log|2\tau - 1|\Big]_{\sqrt{1/2}}^{\sqrt{w(t)}} =$$
$$= -\log\big|2\sqrt{w(t)} - 1\big| + \log\big(\sqrt{2} - 1\big).$$

Poiché $w(2) = 1/2$, nell'intervallo che ci interessa si ha $2\sqrt{w(t)} - 1 > 0$. Pertanto risulta

$$-\log\big(2\sqrt{w(t)} - 1\big) + \log\big(\sqrt{2} - 1\big) = \log t - \log 2\,,$$

cioè

$$\log\left(\frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{w(t)} - 1}\right) = \log\left(\frac{t}{2}\right),$$

che equivale a $2\sqrt{w(t)} - 1 = 2\big(\sqrt{2} - 1\big)/t$ da cui segue $2\sqrt{w(t)} = \big(2\sqrt{2} - 2 + t\big)/t$, quindi

$$w(t) = \frac{\big(t + 2\sqrt{2} - 2\big)^2}{4t^2}\,.$$

La condizione iniziale è assegnata per $t = 2$, pertanto consideriamo tale funzione in $\mathbb{R}^+$.

Nel ricavare la soluzione, abbiamo diviso per $\sqrt{w(t)} - 2w(t)$. Per $t \in \mathbb{R}^+$ si ha

$$\sqrt{w(t)} - 2w(t) = \frac{t + 2\sqrt{2} - 2}{2t} - 2\frac{\left(t + 2\sqrt{2} - 2\right)^2}{4t^2} = \frac{\left(t + 2\sqrt{2} - 2\right)\left(t - t - 2\sqrt{2} - 2\right)}{2t^2} \neq 0;$$

quindi la procedura seguita è valida in $\mathbb{R}^+$, perciò la funzione

$$w: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \qquad w(t) = \frac{\left(t + 2\sqrt{2} - 2\right)^2}{4t^2},$$

è soluzione del problema (3.3.29).

Pertanto la funzione

$$v: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \qquad v(t) = \frac{\left(t + 2\sqrt{2} - 2\right)^2}{4t},$$

è soluzione del problema (3.3.28).

Si ha $\lim_{t \to 0^+} v(t) = +\infty$, quindi la soluzione è massimale. ◀

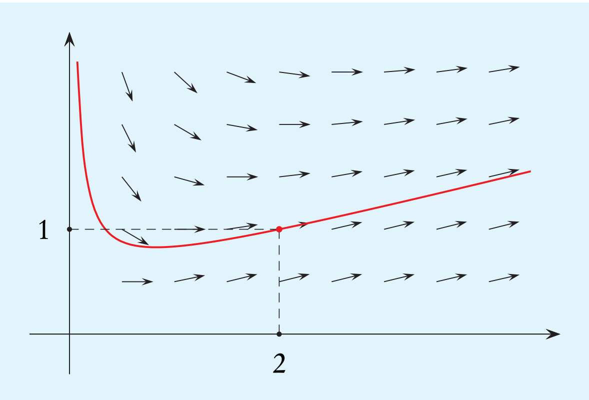


Figura 3.3.10
La soluzione del problema di Cauchy (3.3.28).

3.3.22 Esempio. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{\left(y(t)\right)^2}{t^2} - 2, \\ y(2) = y_0, \end{cases} \tag{3.3.30}$$

con $y_0 \in \mathbb{R}$.

La funzione

$$f_2: \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_2(t, y) = \frac{y^2}{t^2} - 2,$$

è omogenea di grado 0. Ponendo $z(t) = y(t)/t$ e procedendo come sopra, z risulta essere soluzione del problema

$$\begin{cases} z'(t) = \dfrac{1}{t}\left(\left(z(t)\right)^2 - z(t) - 2\right), \\ z(2) = \dfrac{y_0}{2}. \end{cases} \tag{3.3.31}$$

Si ha $z^2 - z - 2 = 0$ se e solo se $z = 2$ o $z = -1$, pertanto se $y_0 = 4$ o $y_0 = -2$ la funzione che vale costantemente $y_0/2$ è soluzione del problema. Pertanto la funzione $t \mapsto y_0 t/2$ è soluzione del problema (3.3.30).

Se $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{-2,4\}$, una funzione $w\colon I \to \mathbb{R}$, con $I \subseteq \mathbb{R}^+$ intervallo tale che $2 \in I$, è soluzione del problema (3.3.31) se e solo se si ha

$$\int_2^t \frac{1}{\big(w(s)\big)^2 - w(s) - 2}\, ds = \int_2^t \frac{1}{s}\, ds$$

e $w(2) = y_0/2$. Ciò equivale a

$$\int_{y_0/2}^{w(t)} \frac{1}{\sigma^2 - \sigma - 2}\, d\sigma = \int_2^t \frac{1}{s}\, ds = \log t - \log 2. \tag{3.3.32}$$

Scomponiamo in fratti semplici il denominatore, cioè determiniamo $a, b \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{\sigma^2 - \sigma - 2} = \frac{a}{\sigma - 2} + \frac{b}{\sigma + 1}.$$

Si ha

$$\frac{a}{\sigma - 2} + \frac{b}{\sigma + 1} = \frac{a(\sigma + 1) + b(\sigma - 2)}{(\sigma - 2)(\sigma + 1)} = \frac{(a + b)\sigma + a - 2b}{\sigma^2 - \sigma - 2},$$

quindi deve essere

$$\begin{cases} a + b = 0, \\ a - 2b = 1, \end{cases}$$

da cui segue $b = -a$, $3a = 1$; pertanto $a = 1/3$ e $b = -1/3$. Quindi risulta

$$\int_{y_0/2}^{w(t)} \frac{1}{\sigma^2 - \sigma - 2}\, d\sigma = \frac{1}{3}\int_{y_0/2}^{w(t)} \left(\frac{1}{\sigma - 2} - \frac{1}{\sigma + 1}\right) d\sigma = \frac{1}{3}\Big[\log|\sigma - 2| - \log|\sigma + 1|\Big]_{y_0/2}^{w(t)}.$$

Pertanto dall'uguaglianza (3.3.32) si ottiene

$$\log\big|w(t) - 2\big| - \log\big|w(t) + 1\big| - \log\left|\frac{y_0}{2} - 2\right| + \log\left|\frac{y_0}{2} + 1\right| = 3\log t - 3\log 2,$$

quindi

$$\left|\frac{w(t) - 2}{w(t) + 1}\,\frac{(y_0/2) + 1}{(y_0/2) - 2}\right| = \frac{t^3}{8},$$

cioè

$$\left|\frac{w(t) - 2}{w(t) + 1}\,\frac{y_0 + 2}{y_0 - 4}\right| = \frac{t^3}{8}.$$

Per $t = 2$ l'argomento del valore assoluto è 1, quindi esso è positivo in un intorno di 2, perciò tale argomento coincide con il suo valore assoluto, pertanto abbiamo

$$8(y_0 + 2)w(t) - 16(y_0 + 2) = t^3(y_0 - 4)w(t) + t^3(y_0 - 4),$$

cioè

$$\big((y_0 - 4)t^3 - 8(y_0 + 2)\big)w(t) = -(y_0 - 4)t^3 - 16(y_0 + 2),$$

da cui si ricava

$$w(t) = -\frac{(y_0-4)t^3+16(y_0+2)}{(y_0-4)t^3-8(y_0+2)}.$$

Determiniamo il dominio della soluzione. Cerchiamo una soluzione definita in un intervallo I tale che $2 \in I \subseteq \mathbb{R}^+$. La funzione w non è definita se $(y_0-4)t^3-8(y_0+2)=0$; poiché $y_0 \neq 4$, ciò equivale a $t^3 = 8(y_0+2)/(y_0-4)$. Se $(y_0+2)/(y_0-4) \leq 0$, cioè $y_0 \in [-2,4[$, tale equazione non è mai verificata per $t \in \mathbb{R}^+$, pertanto possiamo considerare w con dominio $\mathbb{R}^+$.

Se $y_0 < -2$ o $y_0 > 4$ si ha $t^3 = 8(y_0+2)/(y_0-4)$ per $t = 2\sqrt[3]{(y_0+2)/(y_0-4)}$. Risulta

$$2\sqrt[3]{\frac{y_0+2}{y_0-4}} > 2 \iff \frac{y_0+2}{y_0-4} > 1 \iff \frac{6}{y_0-4} > 0.$$

Se $y_0 > 4$, allora $6/(y_0-4) > 0$, quindi un intervallo contenente 2 in cui w è definita è $\left]0, 2\sqrt[3]{(y_0+2)/(y_0-4)}\right[$. Se invece $y_0 < -2$, allora $6/(y_0-4) < 0$, quindi consideriamo w definita in $\left]2\sqrt[3]{(y_0+2)/(y_0-4)}, +\infty\right[$.

Osserviamo che per $y_0 = 4$ o $y_0 = -2$ l'espressione di w scritta sopra si semplifica e si risulta $v(t) = 2t$ o $v(t) = -t$, rispettivamente, che sono le soluzioni del problema (3.3.31). Ciò consente di scrivere la soluzione con una unica formula.

Poiché il problema (3.3.30) ha la soluzione $tw(t)$, possiamo concludere che una sua soluzione è

$$v\colon \begin{cases} \left]2\sqrt[3]{\dfrac{y_0+2}{y_0-4}}, +\infty\right[\to \mathbb{R}, & \text{se } y_0 < -2, \\ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, & \text{se } -2 \leq y_0 \leq 4, \\ \left]0, 2\sqrt[3]{\dfrac{y_0+2}{y_0-4}}\right[, & \text{se } y_0 > 4, \end{cases} \qquad v(t) = -\frac{(y_0-4)t^4+16(y_0+2)t}{(y_0-4)t^3-8(y_0+2)}.$$

Se $y_0 < -2$, per $t > 2\sqrt[3]{(y_0+2)/(y_0-4)}$ numeratore e denominatore della frazione che definisce $v(t)$ sono negativi, e, per $t \to 2\sqrt[3]{(y_0+2)/(y_0-4)}^{\,+}$, il numeratore ha limite negativo, mentre il denominatore ha limite 0; pertanto $v(t) \to -\infty$. Analogamente se $y_0 > 4$ per $t < 2\sqrt[3]{(y_0+2)/(y_0-4)}$ il numeratore è positivo e il denominatore è negativo, per $t \to 2\sqrt[3]{(y_0+2)/(y_0-4)}^{\,-}$, il numeratore ha limite positivo, mentre il denominatore ha limite 0; pertanto $v(t) \to +\infty$. Quindi, in tutti i casi, v è soluzione massimale. ◀

3.3.23 Esempio. Consideriamo l'equazione differenziale

$$y'(t) = \frac{-y(t)-2t}{y(t)+t}. \tag{3.3.33}$$

La funzione

$$f_3\colon \{(t,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq -t\} \to \mathbb{R}, \qquad f_3(t,y) = \frac{-y-2t}{y+t},$$

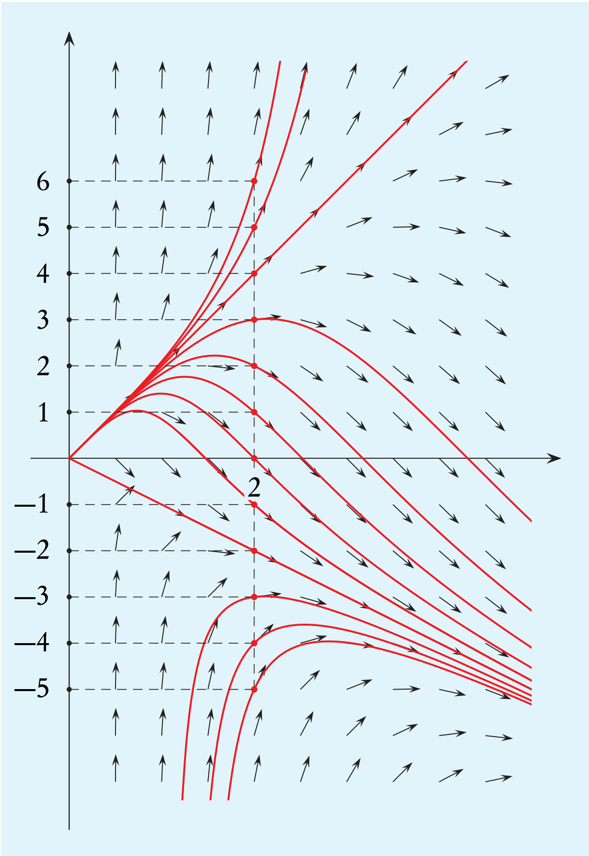


Figura 3.3.11
La soluzione del problema di Cauchy (3.3.30) per alcuni valori di y_0.
La scala in asse delle ordinate è metà di quella in asse delle ascisse.

è omogenea di grado 0. Cerchiamo soluzioni definite in un intervallo che non contiene 0. Ponendo $z(t)=y(t)/t$ e procedendo come sopra, si ottiene che z verifica l'equazione

$$z'(t)=\frac{1}{t}\left(\frac{-z(t)-2}{z(t)+1}-z(t)\right),$$

cioè

$$z'(t)=\frac{1}{t}\,\frac{-\big(z(t)\big)^2-2z(t)-2}{z(t)+1}, \tag{3.3.34}$$

Il trinomio $-z^2-2z-2$ ha discriminante negativo, quindi non si annulla mai. Pertanto l'equazione è equivalente a

$$-\frac{\big(z(t)+1\big)z'(t)}{\big(z(t)\big)^2+2z(t)+2}=\frac{1}{t},$$

cioè

$$\frac{\big(2z(t)+2\big)z'(t)}{\big(z(t)\big)^2+2z(t)+2}=-\frac{2}{t}.$$

Quindi una funzione $w\colon I\to\mathbb{R}$, con $I\subseteq\mathbb{R}^*$ intervallo, verifica l'equazione (3.3.34) se e solo se, $\forall t\in I$, si ha

$$\frac{d}{dt}\log\Big(\big(w(t)\big)^2+2w(t)+2\Big)=\frac{d}{dt}\log(t^{-2}).$$

Questa uguaglianza è verificata se e solo se $\exists c \in \mathbb{R}$ tale che, $\forall t \in I$ si ha

$$\log\Big(\big(w(t)\big)^2 + 2w(t) + 2\Big) = \log(t^{-2}) + c\,,$$

cioè

$$\big(w(t)\big)^2 + 2w(t) + 2 = \frac{e^c}{t^2}\,.$$

quindi

$$\big(w(t) + 1\big)^2 = \frac{e^c}{t^2} - 1\,.$$

Pertanto dve essere $e^c/t^2 \geq 1$, cioè $t \in [-e^{c/2}, e^{c/2}] \setminus \{0\}$. Si ha allora

$$w(t) = -1 \pm \sqrt{\frac{e^c}{t^2} - 1}\,.$$

Risulta

$$t\,w(t) = -t \pm t\sqrt{\frac{e^c}{t^2} - 2} = \begin{cases} -t \pm \sqrt{e^c - t^2}, & \text{se } t > 0, \\ -t \mp \sqrt{e^c - t^2}, & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Poiché e^c, al variare di c in $\mathbb{R}$, è un arbitrario numero positivo, possiamo concludere che ogni soluzione dell'equazione (3.3.33) è della forma $t \mapsto -t \pm \sqrt{d - t^2}$, con $d \in \mathbb{R}^+$. Le considerazioni fatte per ottenere questa informazione presuppongono che sia $t \neq 0$, ma questa funzione è definita anche per $t = 0$; la funzione e la sua derivata sono continue in 0, quindi l'equazione è verificata anche per $t = 0$.

Il dominio naturale della funzione v definita da $v(t) = -t \pm \sqrt{d - t^2}$ è $\big[-\sqrt{d}, \sqrt{d}\,\big]$, ma essa non è derivabile in $\pm\sqrt{d}$, inoltre per tali valori di t risulta $y(t) + t = 0$, perciò si annulla il denominatore dell'equazione; dobbiamo quindi considerare la funzione con dominio $\big]-\sqrt{d}, \sqrt{d}\big[$.

Si ha $v(0) = \pm\sqrt{d}$, pertanto il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{-y(t) - 2t}{y(t) + t}\,, \\ y(0) = y_0\,, \end{cases} \tag{3.3.35}$$

ha soluzione

$$v_+ : \,]-y_0, y_0[\, \to \mathbb{R}, \qquad v_+(t) = -t + \sqrt{y_0^2 - t^2}\,,$$

se $y_0 \in \mathbb{R}^+$ e ha soluzione

$$v_- : \,]-y_0, y_0[\, \to \mathbb{R}, \qquad v_-(t) = -t - \sqrt{y_0^2 - t^2}\,,$$

se $y_0 \in \mathbb{R}^-$.

Si ha

$$\lim_{t \to -y_0} \big(t, v_+(t)\big) = (-y_0, y_0), \qquad \lim_{t \to y_0} \big(t, v_+(t)\big) = (y_0, -y_0).$$

Poiché $(-y_0, y_0), (y_0, -y_0) \in \partial\mathscr{D}(f_3)$, $v_+(t)$ si avvicina a $\partial\mathscr{D}(f_3)$ se t si avvicina a $\pm y_0$, quindi v_+ è la soluzione massimale. Si può fare un ragionamento analogo per v_-. ◀

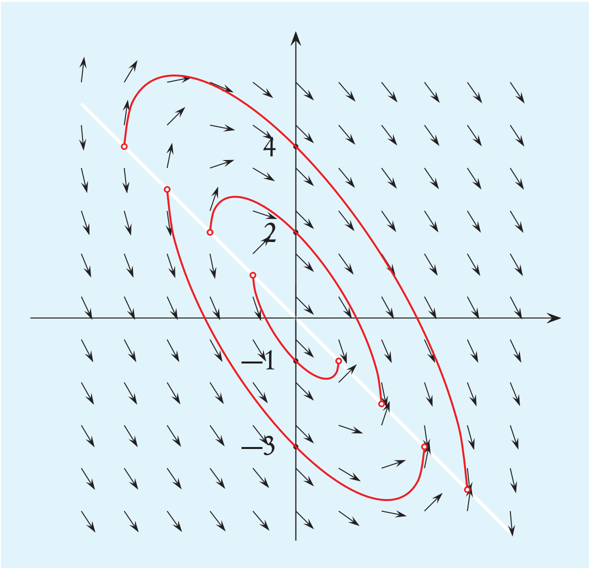


Figura 3.3.12
Soluzioni del problema di Cauchy (3.3.35) con $y_0 = -3, -1, 2, 4$.
In bianco la retta di equazione $y = -t$ in cui non è definita la funzione a secondo membro dell'equazione differenziale.

3.3.5 Equazioni del secondo ordine autonome

Studiamo le equazioni differenziali del secondo ordine definite da una funzione in cui non compare esplicitamente la variabile indipendente t.

Consideriamo quindi il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) = g\big(y(t), y'(t)\big), \\ y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = y_1, \end{cases} \tag{3.3.36}$$

dove $g \in C(A, \mathbb{R})$, con $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, e $(y_0, y_1) \in A$. Le equazioni di questo tipo sono dette **autonome**.

Supponiamo $y_1 \neq 0$. Sia $v : I \to \mathbb{R}$, con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, una soluzione di questo problema. Poiché $y_1 \neq 0$ e v' è continua esiste un intorno di t_0 in cui v' ha segno costante; per semplificare le notazioni supponiamo che tale intorno sia tutto I. Pertanto, per il criterio di monotonia stretta, v è strettamente monotona, quindi iniettiva, e ha inversa derivabile.

Per il teorema dei valori intermedi $v(I)$ è un intervallo, che indichiamo con J. Poniamo

$$w : J \to \mathbb{R}, \qquad w = v' \circ v^{-1},$$

Si ha $w \in C^1(J, \mathbb{R})$, perché v' e v^{-1} sono di classe C^1, inoltre, $\forall s \in J$, si ha

$$w'(s) = v''\big(v^{-1}(s)\big)\big(v^{-1}\big)'(s) = \frac{v''\big(v^{-1}(s)\big)}{v'\big(v^{-1}(s)\big)}.$$

Poiché v è soluzione del problema (3.3.36), da qui segue

$$w'(s) = \frac{g\Big(v\big(v^{-1}(s)\big), v'\big(v^{-1}(s)\big)\Big)}{v'\big(v^{-1}(s)\big)} = \frac{g\big(s, w(s)\big)}{w(s)}.$$

Inoltre si ha

$$w(y_0) = v'\big(v^{-1}(y_0)\big) = v'(t_0) = y_1.$$

Quindi w è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} z'(s) = \dfrac{g\bigl(s, z(s)\bigr)}{z}, \\ z(y_0) = y_1. \end{cases} \tag{3.3.37}$$

Abbiamo ottenuto un problema di Cauchy per un'equazione differenziale del primo ordine, che solitamente è più semplice da risolvere di una del secondo ordine.

Viceversa, siano $w\colon J \to \mathbb{R}$, con $J \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, soluzione del problema (3.3.37) e $v\colon I_1 \to \mathbb{R}$, con $I_1 \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = w\bigl(x(t)\bigr), \\ x(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{3.3.38}$$

Allora $v' = w \circ v \in C^1(I_1, \mathbb{R})$, perché composizione di funzioni di classe C^1; pertanto $v \in C^2(I_1, \mathbb{R})$. Inoltre, $\forall t \in I_1$, risulta

$$v''(t) = (w \circ v)'(t) = w'\bigl(v(t)\bigr)v'(t) = \frac{g\bigl(v(t), w\bigl(v(t)\bigr)\bigr)}{w\bigl(v(t)\bigr)}\, v'(t) = g\bigl(v(t), v'(t)\bigr).$$

Poiché v è soluzione del problema (3.3.38) si ha $v(t_0) = y_0$; inoltre, poiché w è soluzione del problema (3.3.37) si ha $v'(t_0) = w\bigl(v(t_0)\bigr) = w(y_0) = y_1$.

Osserviamo che l'equazione che compare nel problema (3.3.38) è a variabili separabili, quindi possiamo risolverla con il metodo illustrato nella sottosezione 3.3.2.

Abbiamo così dimostrato il seguente teorema.

3.3.24 Teorema

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $g \in C(A, \mathbb{R})$, $t_0 \in \mathbb{R}$ e $(y_0, y_1) \in A$ con $y_1 \neq 0$. Siano w soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} z'(s) = \dfrac{g\bigl(s, z(s)\bigr)}{z(s)}, \\ z(y_0) = y_1, \end{cases}$$

e v soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = w\bigl(x(t)\bigr), \\ x(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Allora v è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) = g\bigl(y(t), y'(t)\bigr), \\ y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = y_1, \end{cases}$$

3.3.25 Osservazione. Nel caso $y_1 = 0$ può non esistere un intorno di t_0 in cui la soluzione è iniettiva, quindi il metodo esposto sopra non è utilizzabile.

Se si ha $g(y_0, 0) = 0$, allora la funzione che vale costantemente y_0 è soluzione del problema

$$\begin{cases} y''(t) = g\big(y(t), y'(t)\big), \\ y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = 0, \end{cases}$$

Se invece $g(y_0, 0) = 0$ si può cercare una soluzione del problema (3.3.36) con y_1 arbitrario e non nullo e fare tendere y_1 a 0. ◀

3.3.26 Esempio. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) = -\dfrac{\big(y'(t)\big)^2}{y(t)} + 2y'(t), \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = 1. \end{cases} \tag{3.3.39}$$

L'equazione differenziale è del secondo ordine autonoma. La condizione iniziale su y' è diversa da 0, quindi possiamo trasformare l'equazione in una del primo ordine considerando la funzione incognita $z = y' \circ y^{-1}$. Si ha allora

$$z'(s) = \frac{y''\big(y^{-1}(s)\big)}{y'\big(y^{-1}(s)\big)} = \frac{1}{y'\big(y^{-1}(s)\big)}\left(-\frac{\big(y'\big(y^{-1}(s)\big)\big)^2}{y\big(y^{-1}(s)\big)} + 2y'\big(y^{-1}(s)\big)\right) = -\frac{z(s)}{s} + 2.$$

Dobbiamo quindi risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} z'(s) = -\dfrac{1}{s}\, z(s) + 2, \\ z(2) = 1. \end{cases} \tag{3.3.40}$$

L'equazione differenziale è lineare e può essere scritta nella forma $z'(s) + (1/s)z(s) = 2$. Poiché cerchiamo soluzioni definite per s positivo, una primitiva del coefficiente $1/s$ è la funzione logaritmo. Pertanto, per il teorema 3.3.2 questo problema di Cauchy ha la soluzione

$$\begin{aligned} w(s) &= \exp(-\log s) \int_2^s 2\exp(\log\sigma)\, d\sigma + \exp(-\log s)\exp(\log 2) = \\ &= \frac{1}{s}\int_2^s 2\sigma\, d\sigma + \frac{2}{s} = \frac{1}{s}\big[\sigma^2\big]_2^s + \frac{2}{s} = \frac{1}{s}(s^2 - 4) + \frac{2}{s} = \frac{s^2-2}{s}. \end{aligned}$$

Per il teorema 3.3.24, per trovare una soluzione del problema (3.3.39) dobbiamo risolvere il problema

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{\big(y(t)\big)^2 - 2}{y(t)}, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Sia $v \in C^1(I,\mathbb{R})$, con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo contenente 0, che verifica questa equazione; restringendo eventualmente il dominio I, possiamo supporre che sia $v(t) \neq \pm\sqrt{2}$. Allora, $\forall t \in I$, si ha

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^t \frac{v(\tau)v'(\tau)}{\big(v(\tau)\big)^2-2}\,d\tau = \int_0^t 1\,d\tau\,, \\ v(0)=2\,, \end{cases}$$

$$\int_2^{v(t)} \frac{\sigma}{\sigma^2-2}\,d\sigma = \int_0^t 1\,d\tau\,,$$

$$\frac{1}{2}\log\Big(\big(v(t)\big)^2-2\Big)-\frac{1}{2}\log 2 = t\,,$$

$$\log\Big(\big(v(t)\big)^2-2\Big) = 2t+\log 2\,,$$

$$\big(v(t)\big)^2-2 = 2e^{2t}\,,$$

$$\big(v(t)\big)^2 = 2e^{2t}+2\,.$$

Poiché deve essere $v(0) = 2 > 0$, si ricava $v(t) = \sqrt{2e^{2t}+2}$. Poiché, $\forall t \in \mathbb{R}$, si ha $2e^{2t}+2>0$, questa è definita in $\mathbb{R}$, inoltre è sempre diversa da $\pm\sqrt{2}$. Pertanto il problema (3.3.39) ha la soluzione

$$v\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\,, \qquad v(t)=\sqrt{2e^{2t}+2}\,. \qquad \blacktriangleleft$$

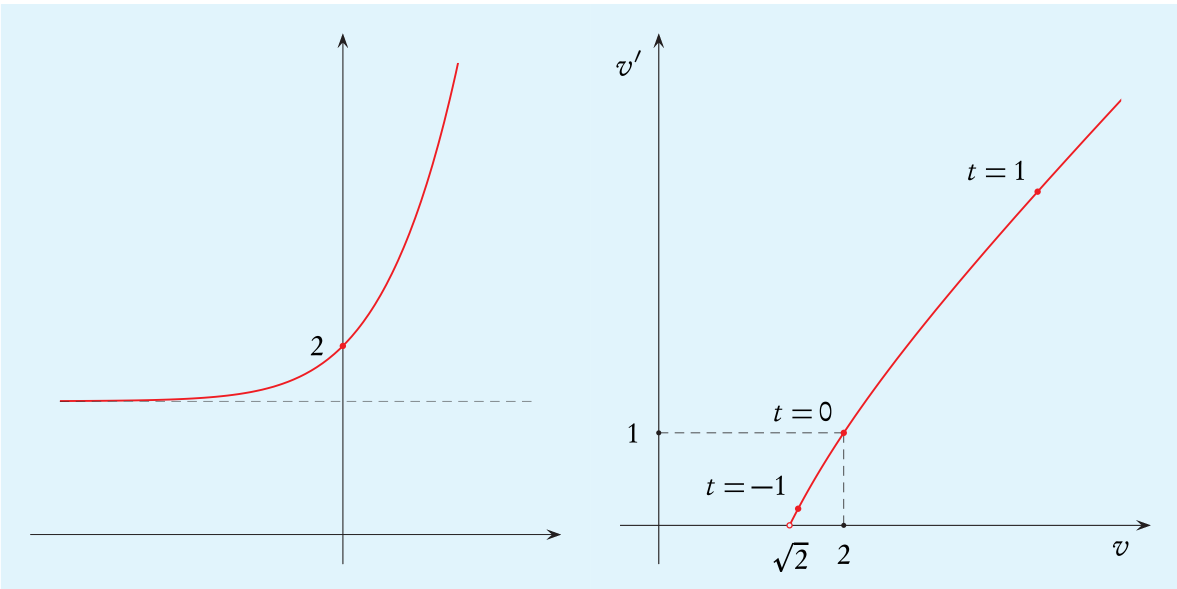


Figura 3.3.13
A sinistra: grafico della funzione v, soluzione del problema di Cauchy (3.3.39). A destra: la traiettoria del punto $\big(v(t),v'(t)\big)$.

3.3.27 Esempio. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) = \dfrac{\big(y'(t)\big)^2}{y(t)} - \dfrac{1}{2}\big(y(t)\big)^2, \\ y(0) = y_0, \\ y'(0) = y_1, \end{cases} \tag{3.3.41}$$

con $y_0 \in \mathbb{R}^+$ e $y_1 \in \mathbb{R}$.

L'equazione differenziale è del secondo ordine autonoma. Supponiamo $y_1 \neq 0$; possiamo trasformare l'equazione in una del primo ordine considerando la funzione incognita $z = y' \circ y^{-1}$. Si ha allora

$$z'(s) = \frac{y''\big(y^{-1}(s)\big)}{y'\big(y^{-1}(s)\big)} = \frac{1}{y'\big(y^{-1}(s)\big)}\left(\frac{\Big(y'\big(y^{-1}(s)\big)\Big)^2}{y\big(y^{-1}(s)\big)} - \frac{1}{2}\Big(y\big(y^{-1}(s)\big)\Big)^2\right) = \frac{z(s)}{s} - \frac{s^2}{2z(s)}.$$

Dobbiamo quindi risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} z'(s) = \dfrac{z(s)}{s} - \dfrac{s^2}{2z(s)}, \\ z(y_0) = y_1. \end{cases} \tag{3.3.42}$$

L'equazione differenziale è di Bernoulli (v. sottosezione 3.3.3). Ponendo $x = z^2$ si ottiene

$$x'(s) = 2z(s)z'(s) = \frac{2\big(z(s)\big)^2}{s} - s^2 = \frac{2}{s}\,x(s) - s^2,$$

quindi dobbiamo risolvere il problema

$$\begin{cases} x'(s) = \dfrac{2}{s}\,x(s) - s^2, \\ x(y_0) = y_1^2. \end{cases}$$

L'equazione può essere scritta nella forma $x'(s) - (2/s)x(s) = -s^2$; una primitiva della funzione $s \mapsto -2/s$, con $s > 0$, è la funzione $s \mapsto -2\log s$, pertanto, per il teorema 3.3.2, il problema ha la soluzione

$$\begin{aligned} w(s) &= \exp\big(2\log|s|\big)\int_{y_0}^{s} \exp\big(-2\log|\sigma|\big)(-\sigma^2)\,d\sigma + \exp\big(2\log|s|\big)\exp\big(-2\log|y_0|\big)y_1^2 = \\ &= s^2\int_{y_0}^{s}(-1)\,d\sigma + s^2 y_0^{-2} y_1^2 = -s^3 + (y_0 + y_1^2/y_0^2)s^2. \end{aligned}$$

Quindi il problema (3.3.42) ha la soluzione

$$u(s) = \operatorname{sgn}(y_1)\sqrt{-s^3 + (y_0 + y_1^2/y_0^2)s^2}.$$

Come dominio di u consideriamo un intervallo contenente y_0 in cui l'argomento della radice è positivo, perché una soluzione del problema (3.3.42) deve essere diversa da 0. Tale argomento si annulla per $s = 0$ e $s = y_0 + y_1^2/y_0^2$ ed è positivo per s compreso tra tali valori; poiché risulta $y_0 + y_1^2/y_0^2 > y_0 > 0$, l'intervallo cercato è $]0, y_0 + y_1^2/y_0^2[$. Poniamo $k = \sqrt{y_0 + y_1^2/y_0^2}$. L'intervallo in cui è definita u è contenuto in $\mathbb{R}^+$, quindi si ha

$$u(s) = \operatorname{sgn}(y_1)\sqrt{-s^3 + k^2 s^2} = \operatorname{sgn}(y_1) s \sqrt{k^2 - s}\,.$$

Per il teorema 3.3.24, per trovare una soluzione del problema (3.3.41) dobbiamo risolvere il problema

$$\begin{cases} y'(t) = \operatorname{sgn}(y_1) y(t)\sqrt{k^2 - y(t)}, \\ y(0) = y_0\,. \end{cases} \tag{3.3.43}$$

L'equazione è a variabili separabili, perché del tipo $y'(t) = g(t)h\big(y(t)\big)$, con $g(t) = \operatorname{sgn}(y_1)$ e $h(y) = y\sqrt{k^2 - y}$, e $h(y_0) \neq 0$. Una funzione $v \in C^1(I, \mathbb{R})$, con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo tale che $0 \in I$, verifica l'equazione se e solo se, $\forall t \in I$, si ha

$$\int_0^t \frac{v'(\tau)}{v(\tau)\sqrt{k^2 - v(\tau)}}\, d\tau = \operatorname{sgn}(y_1)\int_0^t 1\, d\tau\,,$$

che, tenendo conto della condizione iniziale, equivale a

$$\int_{y_0}^{v(t)} \frac{1}{\sigma\sqrt{k^2 - \sigma}}\, d\sigma = \operatorname{sgn}(y_1) t\,.$$

Per calcolare l'integrale effettuiamo la sostituzione $\sqrt{k^2 - \sigma} = \rho$, cioè $\sigma = k^2 - \rho^2$. Per $\sigma = y_0$ si ha

$$\rho = \sqrt{k^2 - y_0} = \sqrt{y_0 + \frac{y_1^2}{y_0^2} - y_0} = \frac{|y_1|}{y_0}$$

e per $\sigma = v(t)$ si ha $\rho = \sqrt{k^2 - v(t)}$. Pertanto

$$\begin{aligned}
&\int_{y_0}^{v(t)} \frac{1}{\sigma\sqrt{k^2 - \sigma}}\, d\sigma = -\int_{|y_1|/y_0}^{\sqrt{k^2 - v(t)}} \frac{2\rho}{(k^2 - \rho^2)\rho}\, d\rho = \\
&= \frac{1}{k}\int_{\sqrt{k^2 - v(t)}}^{|y_1|/y_0} \frac{k + \rho + k - \rho}{(k - \rho)(k + \rho)}\, d\rho = \frac{1}{k}\int_{\sqrt{k^2 - v(t)}}^{|y_1|/y_0} \left(\frac{1}{k - \rho} + \frac{1}{k + \rho}\right) d\rho = \\
&= \frac{1}{k}\big[-\log|k - \rho| + \log|k + \rho|\big]_{\sqrt{k^2 - v(t)}}^{|y_1|/y_0} = \\
&= \frac{1}{k}\left(-\log\left|k - \frac{|y_1|}{y_0}\right| + \log\left|k + \frac{|y_1|}{y_0}\right| + \log\left|k - \sqrt{k^2 - v(t)}\right| - \log\left|k + \sqrt{k^2 - v(t)}\right|\right) = \\
&= \frac{1}{k}\log\left(\frac{\big(k + |y_1|/y_0\big)\big(k - \sqrt{k^2 - v(t)}\big)}{\big(k - |y_1|/y_0\big)\big(k + \sqrt{k^2 - v(t)}\big)}\right),
\end{aligned}$$

perché, come si verifica facilmente, gli argomenti dei valori assoluti sono positivi. Quindi si ha

$$\frac{1}{k}\log\left(\frac{(k+|y_1|/y_0)(k-\sqrt{k^2-v(t)})}{(k-|y_1|/y_0)(k+\sqrt{k^2-v(t)})}\right)=\operatorname{sgn}(y_1)\,t\,.$$

da cui si ricava, successivamente,

$$\frac{(k+|y_1|/y_0)(k-\sqrt{k^2-v(t)})}{(k-|y_1|/y_0)(k+\sqrt{k^2-v(t)})}=\exp\bigl(\operatorname{sgn}(y_1)kt\bigr),$$

$$\left(k+\frac{|y_1|}{y_0}\right)\left(k-\sqrt{k^2-v(t)}\right)=\left(k-\frac{|y_1|}{y_0}\right)\left(k+\sqrt{k^2-v(t)}\right)\exp\bigl(\operatorname{sgn}(y_1)kt\bigr),$$

$$\left(\left(k-\frac{|y_1|}{y_0}\right)\exp\bigl(\operatorname{sgn}(y_1)kt\bigr)+\left(k+\frac{|y_1|}{y_0}\right)\right)\sqrt{k^2-v(t)}=$$

$$=\left(-\left(k-\frac{|y_1|}{y_0}\right)\exp\bigl(\operatorname{sgn}(y_1)kt\bigr)+\left(k+\frac{|y_1|}{y_0}\right)\right)k\,.$$

Poiché $k-|y_1|/y_0>0$, il primo membro è positivo, pertanto deve essere positivo anche il secondo membro, cioè t deve essere tale che

$$-\left(k-\frac{|y_1|}{y_0}\right)\exp\bigl(\operatorname{sgn}(y_1)kt\bigr)+\left(k+\frac{|y_1|}{y_0}\right)>0,$$

cioè

$$\exp\bigl(\operatorname{sgn}(y_1)kt\bigr)<\frac{k+|y_1|/y_0}{k-|y_1|/y_0}\,. \tag{3.3.44}$$

Per tali t si ha

$$\left(\left(k-\frac{|y_1|}{y_0}\right)\exp\bigl(\operatorname{sgn}(y_1)kt\bigr)+\left(k+\frac{|y_1|}{y_0}\right)\right)^2(k^2-v(t))=$$

$$=\left(-\left(k-\frac{|y_1|}{y_0}\right)\exp\bigl(\operatorname{sgn}(y_1)kt\bigr)+\left(k+\frac{|y_1|}{y_0}\right)\right)^2k^2,$$

da cui, ricordando che abbiamo posto $k=\sqrt{y_0+y_1^2/y_0^2}$, si ricava

$$\left(\left(k-\frac{|y_1|}{y_0}\right)\exp\bigl(\operatorname{sgn}(y_1)kt\bigr)+\left(k+\frac{|y_1|}{y_0}\right)\right)^2v(t)=$$

$$=\left(\left(k-\frac{|y_1|}{y_0}\right)\exp\bigl(\operatorname{sgn}(y_1)kt\bigr)+\left(k+\frac{|y_1|}{y_0}\right)\right)^2k^2-$$

$$-\left(\left(k-\frac{|y_1|}{y_0}\right)\exp\bigl(\operatorname{sgn}(y_1)kt\bigr)-\left(k+\frac{|y_1|}{y_0}\right)\right)^2k^2=$$

$$=4\left(k-\frac{|y_1|}{y_0}\right)\exp\bigl(\operatorname{sgn}(y_1)kt\bigr)\left(k+\frac{|y_1|}{y_0}\right)k^2=4\left(k^2-\frac{|y_1|^2}{y_0^2}\right)\exp\bigl(\operatorname{sgn}(y_1)kt\bigr)k^2=$$

$$=4y_0\exp\bigl(\operatorname{sgn}(y_1)kt\bigr)k^2\,.$$

Pertanto

$$v(t)=\frac{4y_0\exp\big(\operatorname{sgn}(y_1)kt\big)k^2}{\Big(\big(k-|y_1|/y_0\big)\exp\big(\operatorname{sgn}(y_1)kt\big)+\big(k+|y_1|/y_0\big)\Big)^2}=$$

$$=\frac{4y_0\big(y_0+y_1^2/y_0^2\big)}{\Big(\big(k-\operatorname{sgn}(y_1)y_1/y_0\big)\exp\big(\operatorname{sgn}(y_1)(k/2)t\big)+\big(k+\operatorname{sgn}(y_1)y_1/y_0\big)\exp\big(-\operatorname{sgn}(y_1)(k/2)t\big)\Big)^2}=$$

$$=\frac{4y_0\big(y_0+y_1^2/y_0^2\big)}{\Big(\big(k-y_1/y_0\big)\exp\big((k/2)t\big)+\big(k+y_1/y_0\big)\exp\big(-(k/2)t\big)\Big)^2}=$$

$$=\frac{4y_0(y_0^3+y_1^2)}{\Big(\big(ky_0-y_1\big)\exp\big((k/2)t\big)+\big(ky_0+y_1\big)\exp\big(-(k/2)t\big)\Big)^2}.$$

Osserviamo che, poiché $ky_0-y_1>0$, il denominatore è sempre positivo, quindi u ha dominio naturale $\mathbb{R}$. Nel ricavare u si era invece fatta l'ipotesi che t verificasse la condizione (3.3.44). Questa condizione è dovuta al procedimento seguito, in particolare per trovare una soluzione del problema (3.3.43) abbiamo utilizzato il metodo risolutivo per le equazioni a variabili separabili, che non assicura di trovare una soluzione massimale se la funzione dipendente dall'incognita si annulla. Si può verificare che la funzione

$$u\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad u(t)=\frac{4y_0(y_0^3+y_1^2)}{\Big(\big(ky_0-y_1\big)\exp\big((k/2)t\big)+\big(ky_0+y_1\big)\exp\big(-(k/2)t\big)\Big)^2},$$

è soluzione del problema di Cauchy (3.3.41). Abbiamo determinato la soluzione u nel caso $y_1\neq 0$, ma l'espressione trovata ha senso anche per $y_1=0$; in tal caso si ha $k=\sqrt{y_0}$ e

$$u(t)=\frac{4y_0^4}{\Big(y_0^{3/2}\exp\big((\sqrt{y_0}/2)t\big)+y_0^{3/2}\exp\big(-(\sqrt{y_0}/2)t\big)\Big)^2}=\frac{y_0}{\cosh^2\big((\sqrt{y_0}/2)t\big)},$$

che, come si verifica facilmente, è soluzione del problema (3.3.41). ◀

Se la funzione g che definisce un'equazione autonoma del secondo ordine è prodotto di una funzione di y per una funzione di y' esiste un procedimento più semplice di quello esposto sopra per cercare una soluzione.

Consideriamo quindi un problema d Cauchy del tipo

$$\begin{cases} y''(t)=h_0\big(y(t)\big)h_1\big(y'(t)\big),\\ y(t_0)=y_0,\\ y'(t_0)=y_1,\end{cases}$$

con h_0 e h_1 opportune funzioni. Se h_1 non si annulla, l'equazione equivale a

$$\frac{y''(t)}{h_1\big(y'(t)\big)}=h_0\big(y(t)\big),$$

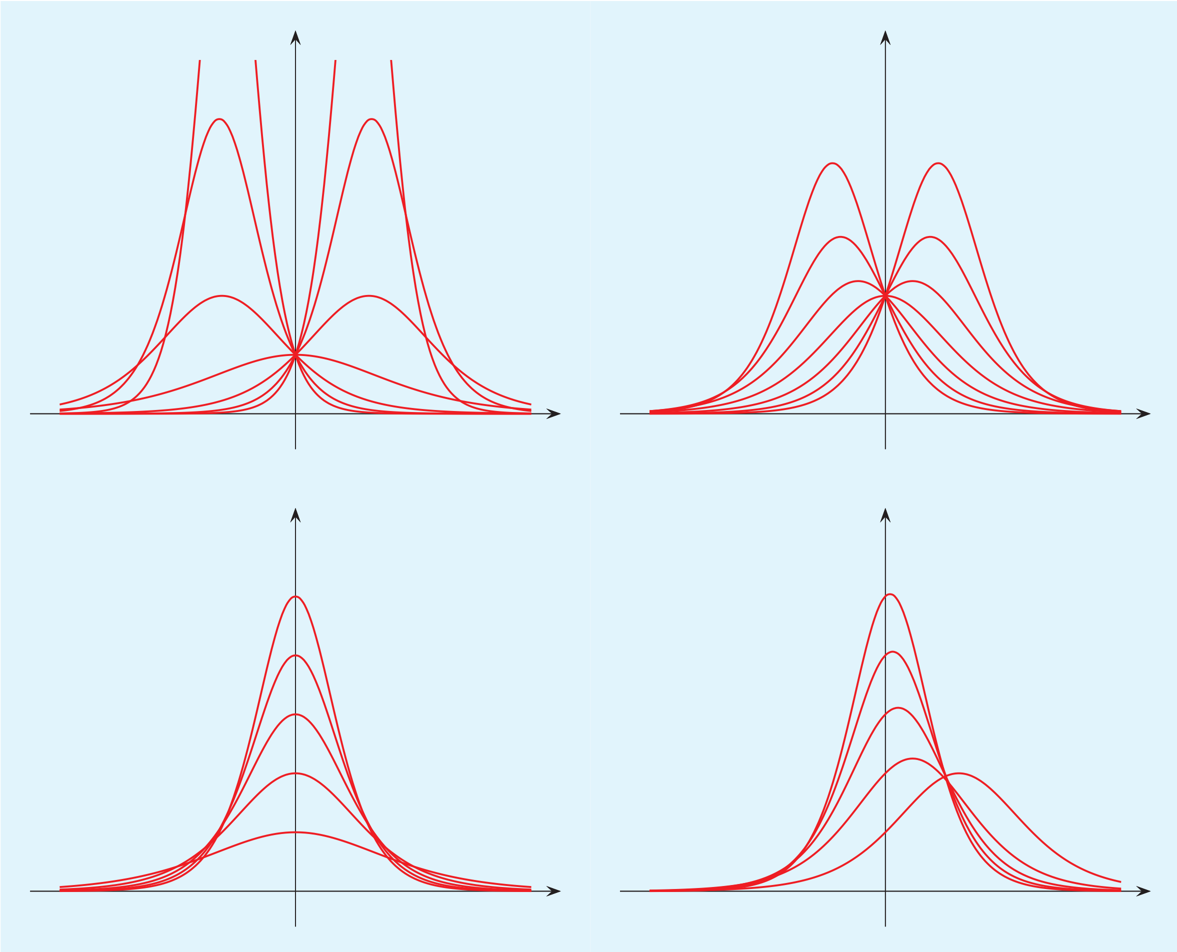


Figura 3.3.14
Soluzioni del problema di Cauchy (3.3.41). In alto a sinistra: $y_0 = 1$, $y_1 = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. In alto a destra: $y_0 = 2$, $y_1 = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. In basso a sinistra: $y_0 = 1, 2, 3, 4, 5$, $y_1 = 0$. In basso a destra: $y_0 = 1, 2, 3, 4, 5$, $y_1 = 1$.

cioè

$$\frac{y''(t)y'(t)}{h_1\big(y'(t)\big)} = y'(t)h_0\big(y(t)\big),$$

quindi

$$\int_{t_0}^{t} \frac{y''(s)y'(s)}{h_1\big(y'(s)\big)}\,ds = \int_{t_0}^{t} y'(s)h_0\big(y(s)\big)\,ds\,.$$

Con opportune sostituzioni questo equivale a

$$\int_{y_1}^{y'(t)} \frac{\sigma}{h_1(\sigma)}\,d\sigma = \int_{y_0}^{y(t)} h_0(\sigma)\,d\sigma\,.$$

Se si possono calcolare gli integrali si ottiene una uguaglianza tra una funzione di $y'(t)$ e una di $y(t)$, cioè una equazione differenziale del primo ordine, non necessariamente in forma normale. Si è così abbassato l'ordine dell'equazione.

Illustriamo questo procedimento con un esempio.

3.3.28 Esempio. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) = \dfrac{\big(2y'(t)\big)^2 y(t)}{\big(y(t)\big)^2+1}, \\ y(0) = y_0, \\ y'(0) = y_1, \end{cases} \tag{3.3.45}$$

con $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$.

Supponiamo $y_1 \neq 0$. In tal caso una soluzione ha derivata non nulla in un intorno di 0, pertanto consideriamo $v \in C^2(I,\mathbb{R})$, con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo tale che $0 \in I$, soluzione di questo problema con derivata non nulla. Allora, $\forall t \in I$, si ha

$$\frac{v''(t)}{v'(t)} = \frac{2v(t)v'(t)}{\big(v(t)\big)^2+1},$$

da cui segue

$$\int_0^t \frac{v''(s)}{v'(s)}\,ds = \int_0^t \frac{2v(s)v'(s)}{\big(v(s)\big)^2+1}\,ds.$$

Effettuando la sostituzione $\sigma = v'(s)$ nell'integrale a primo membro e $\sigma = v(s)$ nell'integrale a secondo membro si ottiene

$$\int_{v'(0)}^{v'(t)} \frac{1}{\sigma}\,d\sigma = \int_{v(0)}^{v(t)} \frac{2\sigma}{\sigma^2+1}\,d\sigma,$$

che, tenendo conto delle condizioni $v(0) = y_0$ e $v'(0) = y_1$, equivale a

$$\int_{y_1}^{v'(t)} \frac{1}{\sigma}\,d\sigma = \int_{y_0}^{v(t)} \frac{2\sigma}{\sigma^2+1}\,d\sigma,$$

cioè

$$\log|v'(t)| - \log|y_1| = \log\Big(\big(v(t)\big)^2+1\Big) - \log(y_0^2+1),$$

da cui si ricava

$$\left|\frac{v'(t)}{y_1}\right| = \frac{\big(v(t)\big)^2+1}{y_0^2+1}.$$

Poiché $v'(0) = y_1$, per t in un intorno di 0 l'argomento del valore assoluto è è positivo, quindi si ottiene

$$v'(t) = \frac{y_1}{y_0^2+1}\Big(\big(v(t)\big)^2+1\Big).$$

Dobbiamo ora risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{y_1}{y_0^2+1}\Big(\big(y(t)\big)^2+1\Big), \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

che è a variabili separabili. Una funzione $w \in C^1(I,\mathbb{R})$, con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo tale che $0 \in I$, è soluzione di questo problema se e solo se, $\forall t \in I$, si ha

$$\int_0^t \frac{w'(s)}{\big(w(s)\big)^2+1}\,ds = \int_0^t \frac{y_1}{y_0^2+1}\,ds\,,$$

con $w(0)=y_0$, cioè

$$\arctan\big(w(t)\big) - \arctan y_0 = \frac{y_1}{y_0^2+1}\,t\,,$$

che equivale a

$$\arctan\big(w(t)\big) = \frac{y_1}{y_0^2+1}\,t + \arctan y_0\,;$$

pertanto che deve essere

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{y_1}{y_0^2+1}\,t + \arctan y_0 < \frac{\pi}{2} \tag{3.3.46}$$

e, per tali t, risulta

$$w(t) = \tan\left(\frac{y_1}{y_0^2+1}\,t + \arctan y_0\right).$$

Se $y_1 > 0$ la condizione (3.3.46) equivale a

$$\frac{y_0^2+1}{y_1}\left(-\frac{\pi}{2} - \arctan y_0\right) < t < \frac{y_0^2+1}{y_1}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan y_0\right),$$

mentre se $y_1 < 0$ equivale a

$$\frac{y_0^2+1}{y_1}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan y_0\right) < t < \frac{y_0^2+1}{y_1}\left(-\frac{\pi}{2} - \arctan y_0\right),$$

in entrambi i casi abbiamo

$$\frac{y_0^2+1}{y_1}\left(-\operatorname{sgn}(y_1)\,\frac{\pi}{2} - \arctan y_0\right) < t < \frac{y_0^2+1}{y_1}\left(\operatorname{sgn}(y_1)\,\frac{\pi}{2} - \arctan y_0\right),$$

Pertanto il problema di Cauchy (3.3.45) ha la soluzione

$$w\colon \left]\frac{y_0^2+1}{y_1}\left(-\operatorname{sgn}(y_1)\,\frac{\pi}{2} - \arctan y_0\right), \frac{y_0^2+1}{y_1}\left(\operatorname{sgn}(y_1)\,\frac{\pi}{2} - \arctan y_0\right)\right[\to \mathbb{R}\,,$$

$$w(t) = \tan\left(\frac{y_1}{y_0^2+1}\,t + \arctan y_0\right).$$

Se t tende a uno degli estremi del dominio di w, allora l'argomento della funzione tangente tende a $-\pi/2$ oppure a $\pi/2$, quindi $w(t)$ diverge; pertanto w non può essere prolungata ulteriormente.

Abbiamo finora considerato il caso $y_1 \neq 0$. Se $y_1 = 0$, si verifica facilmente che la funzione che vale costantemente y_0 è soluzione del problema (3.3.45). Questo caso può essere considerato nell'ambito generale, perché è quello che si ottiene ponendo $y_1 = 0$ nella formula che definisce w. ◀

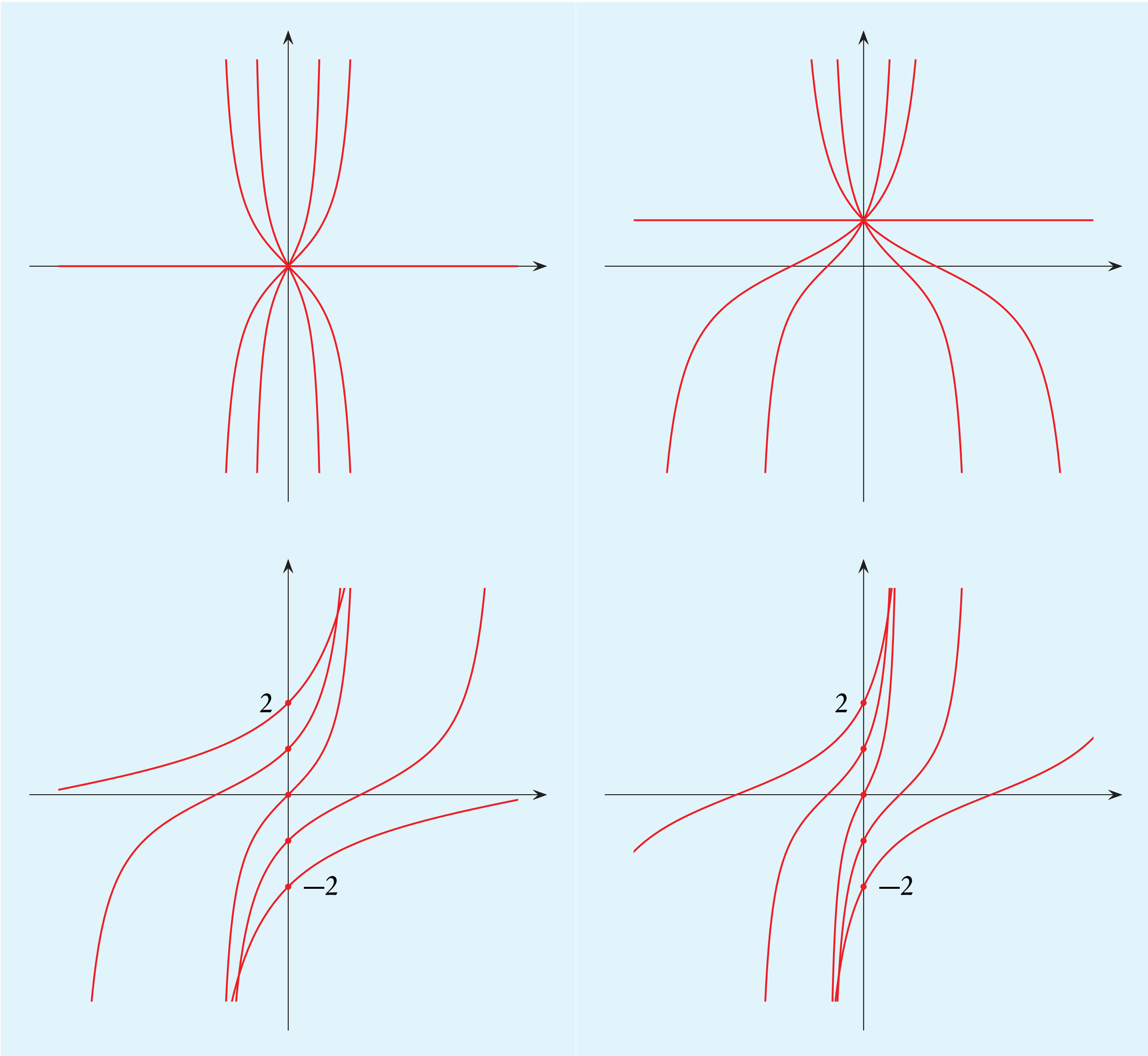


Figura 3.3.15
Soluzioni del problema di Cauchy (3.3.45). In alto a sinistra: $y_0 = 0$, $y_1 = -2, -1, 0, 1, 2$. In alto a destra: $y_0 = 1$, $y_1 = -2, -1, 0, 1, 2$. In basso a sinistra: $y_0 = -2, -1, 0, 1, 2$, $y_1 = 1$. In basso a destra: $y_0 = -2, -1, 0, 1, 2$, $y_1 = 2$.

3.4 Equazioni e sistemi lineari

3.4.1 Sistemi di equazioni differenziali lineari del primo ordine

Studiamo i sistemi lineari di equazioni differenziali, dove il termine “lineare” è inteso come nella sottosezione 3.3.1, cioè le funzioni incognite compaiono al primo grado.

Studiamo sistemi del primo ordine, quindi del tipo

$$\begin{cases} y_1'(t) = a_{11}(t)y_1(t) + a_{12}(t)y_2(t) + \cdots + a_{1n}(t)y_n(t) + b_1(t), \\ y_2'(t) = a_{21}(t)y_1(t) + a_{22}(t)y_2(t) + \cdots + a_{2n}(t)y_n(t) + b_2(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ y_n'(t) = a_{n1}(t)y_1(t) + a_{n2}(t)y_2(t) + \cdots + a_{nn}(t)y_n(t) + b_n(t); \end{cases}$$

dove, per $j,k=1,2,\ldots,n$, $a_{jk},b_j\in C(J,\mathbb{R})$, con $J\subseteq\mathbb{R}$ intervallo. Considerando le a_{jk} come elementi di una funzione a valori matrici, il sistema può essere scritto in forma vettoriale come

$$\boldsymbol{y}'(t)=A(t)\boldsymbol{y}(t)+\boldsymbol{b}(t), \tag{3.4.1}$$

dove $A\in C\big(J,\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})\big)$ e $\boldsymbol{b}\in C(J,\mathbb{R}^n)$. Un sistema di questo tipo è detto **sistema di equazioni differenziali lineare**; la funzione A è detta **matrice dei coefficienti** del sistema e la funzione $\boldsymbol{b}$ **termine noto**.

Con $C\big(J,\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})\big)$ indichiamo l'insieme della funzioni da J a $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ continue, cioè tali che ciascun elemento della matrice è una funzione continua.

Diciamo che il sistema (3.4.1) è **omogeneo** quando, $\forall t\in J$, si ha $\boldsymbol{b}(t)=\mathtt{0}$; in caso contrario diciamo che il sistema è **non omogeneo**. Il sistema

$$\boldsymbol{y}'(t)=A(t)\boldsymbol{y}(t) \tag{3.4.2}$$

è detto **sistema omogeneo associato** al sistema (3.4.1).

Osserviamo che, se J è aperto, la funzione $(t,\boldsymbol{y})\mapsto A(t)\boldsymbol{y}+\boldsymbol{b}(t)$ verifica le ipotesi del teorema di esistenza globale 3.1.15. Infatti se K è un compatto di J, allora, per il teorema di Weierstrass, $\exists M\in\mathbb{R}^+$ tale che, $\forall t\in K$ e, per $j,k=1,2,\ldots,n$, si ha $|a_{jk}(t)|\le M$, pertanto, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, $\forall(t,\boldsymbol{y}),(t,\boldsymbol{z})\in K\times\mathbb{R}^n$, risulta

$$\begin{aligned}
&\big\|\big(A(t)\boldsymbol{y}+\boldsymbol{b}(t)\big)-\big(A(t)\boldsymbol{z}+\boldsymbol{b}(t)\big)\big\|=\|A(t)(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})\|=\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{jk}(t)(y_k-z_k)\right)^2\right)^{1/2}\le\\
&\le\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}a_{jk}(t)^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n}(y_k-z_k)^2\right)^{1/2}\right)^2\right)^{1/2}=\left(\sum_{j,k=1}^{n}a_{jk}(t)^2\right)^{1/2}\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}\|\le\\
&\le\left(\sum_{j,k=1}^{n}M^2\right)^{1/2}\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}\|=nM\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}\|,
\end{aligned}$$

quindi si ha lipschitzianità rispetto alle ultime n variabili, uniformemente rispetto alla prima.

Pertanto, qualunque problema di Cauchy per l'equazione (3.3.1) ha soluzione con dominio J. Si può dimostrare che quanto appena osservato è vero anche se J non è aperto. Vale quindi il seguente teorema.

3.4.1 Teorema

Siano $J\subseteq\mathbb{R}$ intervallo, $A\in C\big(J,\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})\big)$, $\boldsymbol{b}\in C(J,\mathbb{R}^n)$, $t_0\in J$ e $\boldsymbol{y}_0\in\mathbb{R}^n$. Allora il problema di Cauchy

$$\begin{cases}\boldsymbol{y}'(t)=A(t)\boldsymbol{y}(t)+\boldsymbol{b}(t),\\ \boldsymbol{y}(t_0)=\boldsymbol{y}_0.\end{cases} \tag{3.4.3}$$

ha una e una sola soluzione di dominio J.

Questo teorema motiva il fatto che, diversamente dal caso dei sistemi di tipo generale, per i sistemi lineari consideriamo solo soluzioni con dominio uguale al dominio del coefficiente e del termine noto.

Definizione di soluzione di un sistema di equazioni differenziali lineare e di integrale generale

Siano $J \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $A \in C\big(J, \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})\big)$, $b \in C(J, \mathbb{R}^n)$ e $v : J \to \mathbb{R}^n$.

Diciamo che v è **soluzione del sistema di equazioni differenziali** (3.4.1) quando $v \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ e si ha, $\forall t \in J$,

$$v'(t) = A(t)v(t) + b(t).$$

Chiamiamo **integrale generale** del sistema di equazioni differenziali (3.4.1) l'insieme delle soluzioni del sistema.

Nell'osservazione 3.3.3 abbiamo notato che l'integrale generale di un'equazione lineare del primo ordine omogenea è un sottospazio di dimensione 1 dello spazio vettoriale delle funzioni di classe C^1, mentre l'integrale generale di un'equazione non omogenea è un sottospazio affine, traslato dell'integrale generale dell'omogenea associata.

La situazione è del tutto analoga per i sistemi, cambia solo la dimensione dell'integrale generale.

3.4.2 Teorema

Siano $J \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $A \in C\big(J, \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})\big)$ e $b \in C(J, \mathbb{R}^n)$. Allora

I) l'integrale generale del sistema omogeneo (3.4.2) è un sottospazio vettoriale di $C^1(J, \mathbb{R}^n)$ di dimensione n;

II) l'integrale generale del sistema non omogeneo (3.4.1) è un sottospazio affine di $C^1(J, \mathbb{R}^n)$, traslato dell'integrale generale dell'omogeneo associato.

Dimostrazione. I) Per $v \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ indichiamo con $T(v)$ la funzione

$$T(v) : J \to \mathbb{R}, \qquad T(v)(t) = v'(t) - A(t)v(t).$$

Poiché v è di classe C^1, $T(v)$ è continua, pertanto T è una funzione dallo spazio vettoriale $C^1(J, \mathbb{R}^n)$ allo spazio vettoriale $C(J, \mathbb{R}^n)$. Verifichiamo che T è lineare; infatti, se $v_1, v_2 \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, allora si ha

$$\begin{aligned} T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) &= (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)' - A(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 v_1' + \lambda_2 v_2' - \lambda_1 A v_1 - \lambda_2 A v_2 = \\ &= \lambda_1 (v_1' - A v_1) + \lambda_2 (v_2' - A v_2) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2). \end{aligned}$$

Evidentemente v è soluzione del sistema omogeneo (3.4.2) se e solo se $v \in \ker T$; poiché $\ker T$ è un sottospazio vettoriale di $C^1(J, \mathbb{R}^n)$, l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea è un sottospazio vettoriale di $C^1(J, \mathbb{R}^n)$. Indichiamo tale sottospazio con V.

Dimostriamo che V è isomorfo a $\mathbb{R}^n$, pertanto ha dimensione n.

Fissato $t_0 \in J$, sia

$$S: V \to \mathbb{R}^n, \qquad S(v) = v(t_0).$$

Evidentemente S è una trasformazione lineare. Se $v \in \ker S$, allora v è soluzione del sistema (3.4.2) e $S(v) = v(t_0) = 0$, pertanto v è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t), \\ y(t_0) = 0. \end{cases}$$

La funzione identicamente nulla è soluzione di questo problema e, per il teorema 3.4.1, c'è unicità della soluzione, pertanto v è identicamente nulla, quindi S è iniettiva. Fissato $y_0 \in \mathbb{R}^n$, sia $v \in C^1(J, \mathbb{R})$ soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Perciò $v \in V$ e $S(v) = y_0$, quindi y_0 appartiene all'immagine di S. Pertanto S è su $\mathbb{R}^n$.

Quindi S è un isomorfismo tra V e $\mathbb{R}^n$.

II) Una funzione $v \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ è soluzione del sistema non omogeneo (3.4.1) se e solo se $T(v) = b$ (dove T è la trasformazione lineare definita sopra). Pertanto, fissato $w \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ tale che $T(w) = b$, allora $\forall v \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$, si ha

$$\begin{aligned} T(v) = b &\iff T(v - w) = 0 \\ &\iff v - w \in \ker T \\ &\iff v \in w + \ker T. \end{aligned}$$

Quindi l'insieme delle soluzioni del sistema non omogeneo è un traslato di $\ker T$, che è l'integrale generale del sistema omogeneo associato. ■

3.4.3 Esempio. Consideriamo il sistema di equazioni differenziali lineare omogeneo

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{t}\right) y(t) + \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{t}\right) z(t), \\ z'(t) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{t}\right) y(t) + \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{t}\right) z(t), \end{cases} \tag{3.4.4}$$

con $t \in \mathbb{R}^+$.

Se $v: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$ è soluzione di questo sistema, allora, sommando membro a membro si ha

$$\begin{aligned} v_1'(t) + v_2'(t) &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{t}\right) v_1(t) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{t}\right) v_2(t) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{t}\right) v_1(t) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{t}\right) v_2(t) = \\ &= v_1(t) + v_2(t). \end{aligned}$$

Quindi $v_1 + v_2$ è soluzione dell'equazione differenziale lineare omogenea del primo ordine $x'(t) - x(t) = 0$; poiché una primitiva del coefficiente $t \mapsto -1$ è la funzione $t \mapsto -t$, per il teorema 3.3.1, $\exists c \in \mathbb{R}$ tale che $v_1(t) + v_2(t) = ce^t$.

In modo analogo, sottraendo membro a membro, si ha

$$v_1'(t)-v_2'(t)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t}\right)v_1(t)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t}\right)v_2(t)-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t}\right)v_1(t)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t}\right)v_2(t)=$$
$$=\frac{1}{t}\big(v_1(t)-v_2(t)\big).$$

Quindi v_1-v_2 è soluzione dell'equazione differenziale lineare omogenea del primo ordine $x'(t)-(1/t)x(t)=0$; poiché una primitiva del coefficiente $t\mapsto -1/t$ è la funzione $t\mapsto -\log t$, per il teorema 3.3.1, $\exists d\in\mathbb{R}$ tale che $v_1(t)-v_2(t)=d\exp(\log t)=dt$.

Pertanto risulta

$$v_1(t)=\frac{1}{2}\Big(\big(v_1(t)+v_2(t)\big)+\big(v_1(t)-v_2(t)\big)\Big)=\frac{c}{2}e^t+\frac{d}{2}t,$$
$$v_2(t)=\frac{1}{2}\Big(\big(v_1(t)+v_2(t)\big)-\big(v_1(t)-v_2(t)\big)\Big)=\frac{c}{2}e^t-\frac{d}{2}t.$$

Quindi l'integrale generale del sistema (3.4.4) è il sottospazio vettoriale di $C^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^2)$

$$\left\{t\mapsto(ce^t+dt,ce^t-dt)\,\middle|\,c,d\in\mathbb{R}\right\}.$$ ◀

Abbiamo dimostrato che l'integrale generale del sistema omogeneo (3.4.2) è un sottospazio vettoriale di $C^1(J,\mathbb{R}^n)$ di dimensione n; per determinarlo è sufficiente conoscerne una base, cioè un insieme di n soluzioni linearmente indipendenti. Diamo un nome a un tale insieme.

Definizione di sistema fondamentale di soluzioni e di matrice fondamentale

Siano $J\subseteq\mathbb{R}$ intervallo, $A\in C\big(J,\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})\big)$ e $\{v_1,v_2,\dots,v_n\}\subseteq C^1(J,\mathbb{R}^n)$.

Diciamo che $\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ è un **sistema fondamentale di soluzioni** del sistema omogeneo (3.4.2) quando $\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ è una base dell'integrale generale del sistema.

Diciamo che una funzione a valori matrici $\mathbf{\Phi}\colon J\to\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ è una **matrice fondamentale** del sistema (3.4.2) quando le colonne di tale matrice costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni del sistema.

Evidentemente un sistema fondamentale di soluzioni è un insieme di n soluzioni linearmente indipendenti.

Osserviamo che le funzioni $v_1,v_2,\dots,v_n\in C^1(J,\mathbb{R}^n)$ sono linearmente dipendenti quando esistono $c_1,c_2,\dots,c_n\in\mathbb{R}$, non tutti nulli, tali che $\sum_{j=1}^n c_jv_j=0$, cioè, $\forall t\in J$, si ha $\sum_{j=1}^n c_jv_j(t)=0$; quindi i vettori $v_1(t),v_2(t),\dots,v_n(t)$ sono linearmente dipendenti in $\mathbb{R}^n$. Invece se, $\forall t\in J$, i vettori $v_1(t),v_2(t),\dots,v_n(t)$ sono linearmente dipendenti non necessariamente le funzioni $v_1,v_2,\dots,v_n$ sono linearmente dipendenti.

Infatti i vettori $v_1(t),v_2(t),\dots,v_n(t)$ sono linearmente dipendenti se esiste una loro combinazione lineare nulla con coefficienti non tutti nulli, ma tali coefficienti possono dipendere da t. Invece le funzioni $v_1,v_2,\dots,v_n$ sono linearmente dipendenti se esiste una loro combinazione lineare nulla con coefficienti non tutti nulli che non dipendono da t.

3.4.4 Esempio. Consideriamo il sistema (3.4.4). Nell'esempio 3.4.3 abbiamo visto che l'integrale generale è
$$\left\{t \mapsto (ce^t + dt, ce^t - dt) \,\middle|\, c, d, \in \mathbb{R}\right\},$$
che è il sottospazio di $C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^2)$ generato dalle funzioni $t \mapsto (e^t, e^t)$ e $t \mapsto (t, -t)$. Per il teorema 3.4.2, affermazione I, tale spazio vettoriale ha dimensione 2, pertanto le due funzioni che lo generano sono linearmente indipendenti e costituiscono una base, cioè un sistema fondamentale. Una matrice fondamentale è
$$t \mapsto \begin{pmatrix} e^t & t \\ e^t & -t \end{pmatrix}.$$
◀

3.4.5 Osservazione. Sia $\boldsymbol{\Phi}: J \to \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ una matrice fondamentale per il sistema omogeneo (3.4.2). Allora, per $k = 1, 2, \ldots, n$, $(\varphi_{1k}, \varphi_{2k}, \ldots, \varphi_{nk})$ è soluzione del sistema. Pertanto, $\forall t \in J$, si ha
$$\begin{pmatrix} \varphi'_{1k}(t) \\ \varphi'_{2k}(t) \\ \vdots \\ \varphi'_{nk}(t) \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} \varphi_{1k}(t) \\ \varphi_{2k}(t) \\ \vdots \\ \varphi_{nk}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}(t)\varphi_{jk}(t) \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}(t)\varphi_{jk}(t) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}(t)\varphi_{jk}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \big(A(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\big)_{1k} \\ \big(A(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\big)_{2k} \\ \vdots \\ \big(A(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\big)_{nk} \end{pmatrix}$$
Quindi, $\forall t \in J$, si ha $\boldsymbol{\Phi}'(t) = A(t)\boldsymbol{\Phi}(t)$, dove indichiamo con $\boldsymbol{\Phi}'$ la funzione a valori matrici i cui elementi sono le derivate degli elementi della $\boldsymbol{\Phi}$. ◀

3.4.6 Teorema

Siano $J \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $A \in C\big(J, \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})\big)$, $\boldsymbol{\Phi}: J \to \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ e $\boldsymbol{v} \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$. Supponiamo che $\boldsymbol{\Phi}$ sia una matrice fondamentale del sistema omogeneo (3.4.2). Una funzione $\boldsymbol{v}: J \to \mathbb{R}^n$ è soluzione del sistema se e solo se $\exists \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ tale che, $\forall t \in J$, si ha $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}$.

Dimostrazione. Il teorema è conseguenza immediata del fatto che ogni soluzione è combinazione lineare delle colonne della matrice $\boldsymbol{\Phi}$ e che ogni combinazione lineare delle colonne di una matrice si può scrivere come prodotto della matrice per una matrice colonna. ■

Date n soluzioni di un sistema, è utile sapere se esse costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni. Il seguente teorema dà indicazioni in questo senso.

3.4.7 Teorema

Siano $J \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $A \in C\big(J, \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})\big)$ e $\boldsymbol{\Phi}: J \to \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ una funzione a valori matrici le cui colonne sono soluzioni del sistema omogeneo (3.4.2). Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

I) $\boldsymbol{\Phi}$ è una matrice fondamentale del sistema (3.4.2);

II) $\forall s \in J$, la matrice $\boldsymbol{\Phi}(s)$ è invertibile;

III) $\exists s \in J$ tale che la matrice $\boldsymbol{\Phi}(s)$ è invertibile.

DIMOSTRAZIONE. I $\Longrightarrow$ II) Sia $\boldsymbol{\Phi}$ è una matrice fondamentale; fissato $s \in J$, $\forall \boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^n$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}'(t) = A(t)\boldsymbol{y}(t), \\ \boldsymbol{y}(s) = \boldsymbol{y}_0, \end{cases}$$

ha una soluzione che, per il teorema 3.4.6, può essere scritta nella forma $\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}$, per un opportuno $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$. Quindi si ha $\boldsymbol{\Phi}(s)\boldsymbol{c} = \boldsymbol{y}_0$. Questo prova che l'immagine della trasformazione lineare associata a $\boldsymbol{\Phi}(s)$ è $\mathbb{R}^n$, perciò $\boldsymbol{\Phi}(s)$ è invertibile.

II $\Longrightarrow$ III) È ovvio.

III $\Longrightarrow$ I) Sia $s \in J$ tale che $\boldsymbol{\Phi}(s)$ è invertibile. Indicate con $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ le colonne di $\boldsymbol{\Phi}$, se $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ è tale che la combinazione lineare $\sum_{j=1}^n c_j \varphi_j$ è nulla, allora in particolare si ha $\sum_{j=1}^n c_j \varphi_j(s) = \mathbf{0}$, cioè $\boldsymbol{\Phi}(s)\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$, quindi $\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$, perché $\boldsymbol{\Phi}(s)$ è invertibile. Pertanto le $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sono linearmente indipendenti, perciò $\boldsymbol{\Phi}$ è una matrice fondamentale. ■

L'invertibilità di una matrice equivale al fatto che il suo determinante sia non nullo. Questo teorema suggerisce quindi di studiare il determinante di una matrice le cui colonne sono soluzioni di un sistema lineare omogeneo di equazioni differenziali.

Definizione di determinante wronskiano[19] per funzioni vettoriali

Siano $J \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n \in C(J, \mathbb{R}^n)$. Chiamiamo **determinante wronskiano** delle $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ la funzione

$$W(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n) : J \to \mathbb{R},$$

$$W(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n)(t) = \det \begin{pmatrix} v_{11}(t) & v_{21}(t) & \dots & v_{n1}(t) \\ v_{12}(t) & v_{22}(t) & \dots & v_{n2}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1n}(t) & v_{2n}(t) & \dots & v_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Il simbolo v_{jk} indica la k-esima componente di $\boldsymbol{v}_j$.

Poiché una matrice è invertibile se, e solo se, il suo determinante è non nullo, dal teorema 3.4.7 si ha immediatamente il teorema seguente.

3.4.8 Teorema

Siano $J \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $A \in C\big(J, \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})\big)$ e $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ soluzioni del sistema omogeneo (3.4.2). Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

I) $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ è un sistema fondamentale di soluzioni del sistema (3.4.2);

II) $\forall s \in J$, $W(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n)(s) \neq 0$;

III) $\exists s \in J$, $W(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n)(s) \neq 0$.

[19] Il determinante prende il nome da Jozéf-Maria Hoëné-Wronski (Wolsztyn, Polonia, 1778 - Neuilly-sur-Seine, Francia, 1853), che nel 1811 utilizzò il determinante wronskiano che definiremo nel caso di equazioni di ordine superiore per lo studio di serie di funzioni. Hoëné-Wronski fu studioso, oltre che di matematica, anche di filosofia e astronomia.

Per l'equivalenza tra le affermazioni II e III, un determinante wronskiano di n soluzioni del sistema (3.4.2) o è identicamente nullo, oppure non si annulla mai. Pertanto per stabilire se un insieme di n soluzioni costituisce un sistema fondamentale è sufficiente verificare se in un punto il determinante wronskiano è diverso da 0.

3.4.9 Osservazione. Il fatto che un determinante wronskiano o è identicamente nullo o non si annulla mai è conseguenza dell'equivalenza tra le affermazioni II e III del teorema 3.4.8. Per funzioni arbitrarie ciò non è vero: il determinante wronskiano può essere nullo in certi punti e diverso da 0 in altri.

Siano

$$\begin{aligned} v_1 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, & v_1(t) &= (1,0), \\ v_2 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, & v_2(t) &= (0,t). \end{aligned}$$

Evidentemente, $\forall t \in \mathbb{R}$, si ha $W(v_1,v_2)(t) = t$. Quindi $W(v_1,v_2)$ non è identicamente nullo, ma si annulla in 0. ◀

3.4.10 Osservazione. Per il teorema 3.4.8, se n soluzioni del sistema omogeneo (3.4.2) hanno determinante wronskiano nullo, allora sono linearmente dipendenti. Ciò non è vero se consideriamo il determinante di una matrice le cui colonne sono funzioni arbitrarie

Siano

$$\begin{aligned} v_1 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, & v_1(t) &= \big(t,|t|\big), \\ v_2 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, & v_2(t) &= \big(|t|,t\big). \end{aligned}$$

Evidentemente, $\forall t \in \mathbb{R}$, si ha

$$W(v_1,v_2)(t) = t^2 - |t|^2 = 0.$$

Se $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sono tali che la combinazione lineare $c_1 v_1 + c_2 v_2$ è identicamente nulla, allora ponendo $t=1$ si ottiene $c_1 + c_2 = 0$, mentre ponendo $t = -1$ si ottiene $c_1 - c_2 = 0$, quindi deve essere $c_1 = c_2 = 0$. Pertanto v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti. ◀

3.4.11 Esempio. Riprendiamo in esame il sistema (3.4.4). Nell'esempio 3.4.4 abbiamo visto che un sistema fondamentale di soluzioni è:

$$\{t \mapsto (e^t, e^t), t \mapsto (t, -t)\},$$

dove le due funzioni sono definite in $\mathbb{R}^+$. Il determinante wronskiano di tali funzioni è:

$$\det \begin{pmatrix} e^t & t \\ e^t & -t \end{pmatrix} = -2t\,e^t.$$

Come assicurato dal teorema 3.4.8, tale determinante è diverso da 0 per $t \in \mathbb{R}^+$. ◀

Per il teorema 3.4.6, conoscendo una matrice fondamentale per un sistema lineare si trovano agevolmente tutte le soluzioni del sistema. In particolare si può determinare una soluzione che verifica una certa condizione iniziale. Il teorema seguente precisa questo fatto.

3.4.12 Teorema

Siano $J \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $A \in C\big(J, \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})\big)$, $\boldsymbol{\Phi}: J \to \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, $t_0 \in J$ e $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^n$. Se $\boldsymbol{\Phi}$ è una matrice fondamentale del sistema omogeneo (3.4.2), allora la funzione

$$v: J \to \mathbb{R}, \qquad v(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\big(\boldsymbol{\Phi}(t_0)\big)^{-1}\boldsymbol{y}_0,$$

è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}'(t) = A(t)\boldsymbol{y}(t), \\ \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0. \end{cases}$$

Dimostrazione. La funzione

$$v: J \to \mathbb{R}^n, \qquad v(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\big(\boldsymbol{\Phi}(t_0)\big)^{-1}\boldsymbol{y}_0,$$

è il prodotto della matrice fondamentale $\boldsymbol{\Phi}$ per la matrice colonna $\big(\boldsymbol{\Phi}(t_0)\big)^{-1}\boldsymbol{y}_0$, quindi, per il teorema 3.4.6, è soluzione del sistema. Inoltre $v(t_0) = \boldsymbol{\Phi}(t_0)\big(\boldsymbol{\Phi}(t_0)\big)^{-1}\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{y}_0$, pertanto v verifica la condizione iniziale. ■

3.4.13 Esempio. Consideriamo il seguente problema di Cauchy per il sistema (3.4.4)

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{t}\right)y(t) + \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{t}\right)z(t), \\[2ex] z'(t) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{t}\right)y(t) + \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{t}\right)z(t), \\[2ex] y(1) = 2, \\ z(1) = -1. \end{cases} \tag{3.4.5}$$

Il sistema di equazioni differenziali è stato studiato negli esempi 3.4.3 e 3.4.4, una sua matrice fondamentale è

$$\boldsymbol{\Phi}: \mathbb{R}^+ \to \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}), \qquad \boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} e^t & t \\ e^t & -t \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$\big(\boldsymbol{\Phi}(t)\big)^{-1} = \frac{1}{-2t\,e^t}\begin{pmatrix} -t & -t \\ -e^t & e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}e^{-t} & \dfrac{1}{2}e^{-t} \\[2ex] \dfrac{1}{2t} & -\dfrac{1}{2t} \end{pmatrix}.$$

Per il teorema 3.4.12 la soluzione del problema di Cauchy è

$$v(t) = \begin{pmatrix} e^t & t \\ e^t & -t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2e} & \dfrac{1}{2e} \\[2ex] \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & t \\ e^t & -t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2e} \\[2ex] \dfrac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2e}e^t + \dfrac{3}{2}t \\[2ex] \dfrac{1}{2e}e^t - \dfrac{3}{2}t \end{pmatrix}.$$

◀

Studiamo ora un metodo per determinare una soluzione di un sistema non omogeneo a partire da un sistema fondamentale di soluzioni del sistema omogeneo associato.

Sia $\boldsymbol{\Phi}$ una matrice fondamentale del sistema omogeneo (3.4.2). Cerchiamo una soluzione del sistema non omogeneo (3.4.1) della forma $\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}(t)$, dove $\boldsymbol{c}\in C^1(J,\mathbb{R}^n)$ è una funzione da determinare. Poiché, per l'osservazione 3.4.5, si ha $\boldsymbol{\Phi}'=A\boldsymbol{\Phi}$, risulta

$$\boldsymbol{v}'=\begin{pmatrix} D\big(\sum_{j=1}^n \varphi_{1j}\,c_j\big) \\ D\big(\sum_{j=1}^n \varphi_{2j}\,c_j\big) \\ \vdots \\ D\big(\sum_{j=1}^n \varphi_{nj}\,c_j\big) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \varphi_{1j}'\,c_j+\sum_{j=1}^n \varphi_{1j}\,c_j' \\ \sum_{j=1}^n \varphi_{2j}'\,c_j+\sum_{j=1}^n \varphi_{2j}\,c_j' \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \varphi_{nj}'\,c_j+\sum_{j=1}^n \varphi_{nj}\,c_j' \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n (A\boldsymbol{\Phi})_{1j}\,c_j+\sum_{j=1}^n \varphi_{1j}\,c_j' \\ \sum_{j=1}^n (A\boldsymbol{\Phi})_{2j}\,c_j+\sum_{j=1}^n \varphi_{2j}\,c_j' \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n (A\boldsymbol{\Phi})_{nj}\,c_j+\sum_{j=1}^n \varphi_{nj}\,c_j' \end{pmatrix} = A\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{c}+\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{c}'=A\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{c}'\,.$$

Quindi $\boldsymbol{v}$ è soluzione del sistema non omogeneo (3.4.1) se e solo se si ha $\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{c}'=\boldsymbol{b}$; per il teorema 3.4.7, $\forall t\in J$, $\boldsymbol{\Phi}(t)$ è invertibile, quindi l'uguaglianza equivale a $\boldsymbol{c}'=\boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{b}$. Pertanto $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{c}$ è soluzione del sistema non omogeneo, se si sceglie $\boldsymbol{c}$ tale che, $\forall t\in J$, si ha

$$\boldsymbol{c}(t)=\int_{t_0}^t \big(\boldsymbol{\Phi}(s)\big)^{-1}\boldsymbol{b}(s)\,ds\,,$$

con $t_0\in J$. Notiamo che la funzione integranda è una funzione a valori vettoriali, l'integrale è definito componente per componente.

Abbiamo così dimostrato il seguente teorema.

3.4.14 Teorema (metodo della variazione delle costanti di Lagrange[20])

Siano $J\subseteq\mathbb{R}$ intervallo, $A\in C\big(J,\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})\big)$, $\boldsymbol{b}\in C(J,\mathbb{R}^n)$ e $\boldsymbol{\Phi}\colon J\to\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ una matrice fondamentale del sistema omogeneo (3.4.2). Scelto $t_0\in J$ sia

$$\boldsymbol{c}:J\to\mathbb{R}^n\,,\qquad \boldsymbol{c}(t)=\int_{t_0}^t \big(\boldsymbol{\Phi}(s)\big)^{-1}\boldsymbol{b}(s)\,ds\,.$$

Allora la funzione

$$\boldsymbol{v}:J\to\mathbb{R}^n\,,\qquad \boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{c}(t),$$

è soluzione del sistema non omogeneo (3.4.1).

[20] Il teorema prende il nome da Giuseppe Luigi Lagrange (Torino, 1736 - Parigi, 1813), che espose il metodo in un articolo del 1775. Lagrange fu tra i fondatori della meccanica analitica e diede grandi contributi allo sviluppo di vari settori dell'analisi; ottenne anche importanti risultati in astronomia, teoria dei numeri, algebra e geometria analitica.

3.4.15 Esempio. Consideriamo il sistema di equazioni differenziali lineare non omogeneo

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{1}{2}\Big(1+\dfrac{1}{t}\Big)y(t) + \dfrac{1}{2}\Big(1-\dfrac{1}{t}\Big)z(t) + 3t\,, \\ z'(t) = \dfrac{1}{2}\Big(1-\dfrac{1}{t}\Big)y(t) + \dfrac{1}{2}\Big(1+\dfrac{1}{t}\Big)z(t) + t\,, \end{cases} \tag{3.4.6}$$

con $t \in \mathbb{R}^+$.

Il sistema omogeneo associato è il sistema (3.4.4). Una matrice fondamentale per il sistema omogeneo è (v. esempio 3.4.4)

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} e^t & t \\ e^t & -t \end{pmatrix}$$

la cui inversa è (v. esempio 3.4.13)

$$\big(\boldsymbol{\Phi}(t)\big)^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}e^{-t} & \dfrac{1}{2}e^{-t} \\ \dfrac{1}{2t} & -\dfrac{1}{2t} \end{pmatrix}.$$

Per il metodo della variazione delle costanti di Lagrange 3.4.14, una soluzione del sistema (3.4.6) è la funzione $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\Phi c}$, con $\boldsymbol{c}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$\boldsymbol{c}(t) = \int_1^t \big(\boldsymbol{\Phi}(s)\big)^{-1}\begin{pmatrix} 3s \\ s \end{pmatrix} ds = \int_1^t \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}e^{-s} & \dfrac{1}{2}e^{-s} \\ \dfrac{1}{2s} & -\dfrac{1}{2s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3s \\ s \end{pmatrix} ds = \int_1^t \begin{pmatrix} 2se^{-s} \\ 1 \end{pmatrix} ds\,.$$

Si ha

$$\int_1^t 2se^{-s}\,ds = \big[-2se^{-s}\big]_1^t + \int_1^t 2e^{-s}\,ds = \big[-2se^{-s} - 2e^{-s}\big]_1^t = -2(t+1)e^{-t} + 4e^{-1}\,,$$

$$\int_1^t 1\,ds = t-1\,.$$

Pertanto una soluzione del sistema (3.4.6) è la funzione $\boldsymbol{v}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$,

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\begin{pmatrix} -2(t+1)e^{-t} + 4e^{-1} \\ t-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & t \\ e^t & -t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2(t+1)e^{-t} + 4e^{-1} \\ t-1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -2(t+1) + 4e^{t-1} + t^2 - t \\ -2(t+1) + 4e^{t-1} - t^2 + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4e^{t-1} + t^2 - 3t - 2 \\ 4e^{t-1} - t^2 - t - 2 \end{pmatrix}.$$ ◀

3.4.2 Equazioni differenziali lineari di ordine superiore

Consideriamo equazioni differenziali lineari di ordine superiore; anche in questo caso il termine “lineare” indica che la funzione incognita e le sue derivate compaiono al primo grado. Modificando la forma dell’equazione, come già fatto per le equazioni lineari del primo ordine (v. sottosezione 3.3.1), consideriamo equazioni del tipo

$$y^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t)y^{(j)}(t) = b(t)\,, \tag{3.4.7}$$

dove $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b \in C(J, \mathbb{R})$, con $J \subseteq \mathbb{R}$ intervallo. Un'equazione di questo tipo è detta **equazione differenziale lineare di ordine n**; le funzioni $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ vengono dette **coefficienti** dell'equazione e la funzione b **termine noto**.

Diciamo che l'equazione (3.4.7) è **omogenea** quando, $\forall t \in J$, si ha $b(t) = 0$; in caso contrario diciamo che l'equazione è **non omogenea**. L'equazione

$$y^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) y^{(j)}(t) = 0, \tag{3.4.8}$$

è detta **equazione omogenea associata** all'equazione (3.4.7).

Il teorema 3.1.16 stabilisce una corrispondenza biunivoca tra le soluzioni di un problema di Cauchy per una generica equazione di ordine superiore e le soluzioni di un problema di Cauchy per un particolare sistema del primo ordine. Ragionamenti analoghi si possono fare per le funzioni che verificano un'equazione differenziale lineare di ordine superiore. Procedendo come nella dimostrazione del teorema citato si costruisce una corrispondenza tra le funzioni che verificano l'equazione lineare (3.4.7) e le funzioni che verificano il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} z_1'(t) = z_2(t), \\ z_2'(t) = z_3(t), \\ \dots\dots\dots\dots, \\ z_{n-1}'(t) = z_n(t), \\ z_n'(t) = -\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) z_{j+1}(t) + b(t). \end{cases}$$

Questo sistema può essere scritto nella forma

$$\mathbf{z}'(t) = \boldsymbol{A}(t)\mathbf{z}(t) + \boldsymbol{\beta}(t), \tag{3.4.9}$$

dove

$$\boldsymbol{A} : J \to \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}), \qquad \boldsymbol{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \dots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta} : J \to \mathbb{R}^n, \qquad \boldsymbol{\beta}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix},$$

pertanto è lineare.

Si possono quindi trasportare tutti i risultati relativi ai sistemi lineari del primo ordine alle equazioni lineari di ordine superiore.

Ogni soluzione di un sistema lineare può essere prolungata all'intervallo di definizione dei coefficienti e del termine noto. Per quanto osservato sopra un fatto analogo vale per le equazioni lineari di ordine superiore, cioè vale il seguente teorema.

3.4.16 Teorema

Siano $J \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $a_0,\dots,a_{n-1}, b \in C(J,\mathbb{R}^n)$, $t_0 \in J$ e $(y_0,\dots,y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. Allora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) + \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) y^{(j)}(t) = b(t), \\ y(t_0) = y_0\,, \\ y'(t_0) = y_1\,, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}\,, \end{cases} \tag{3.4.10}$$

ha una e una sola soluzione di dominio J.

Sviluppiamo ora la teoria delle equazioni differenziali lineari di ordine superiore, seguendo quanto fatto per i sistemi lineari.

Ogni teorema può essere facilmente dimostrato a partire dall'analogo teorema relativo ai sistemi, tenendo conto della corrispondenza illustrata sopra.

Definizione di soluzione e di integrale generale di un'equazione differenziale lineare

Siano $J \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in C(J,\mathbb{R}^n)$ e $v : J \to \mathbb{R}$.

Diciamo che v è **soluzione dell'equazione differenziale lineare** (3.4.7) quando $v \in C^n(J,\mathbb{R})$ e si ha, $\forall t \in J$,

$$y^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) y^{(j)}(t) = b(t).$$

Chiamiamo **integrale generale dell'equazione** (3.4.7) l'insieme delle soluzioni dell'equazione.

3.4.17 Teorema

Siano $J \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $a_0,\dots,a_{n-1}, b \in C(J,\mathbb{R}^n)$, $t_0 \in J$ e $(y_0,\dots,y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. Allora

I) l'integrale generale dell'equazione lineare omogenea (3.4.8) è un sottospazio vettoriale di $C^n(J,\mathbb{R})$ di dimensione n;

II) l'integrale generale dell'equazione lineare non omogenea (3.4.7) è un sottospazio affine di $C^n(J,\mathbb{R})$ traslato dell'integrale generale dell'omogenea associata.

3.4.18 Esempio. Consideriamo l'equazione differenziale lineare del secondo ordine omogenea

$$y''(t) - \left(1 + \frac{1}{t}\right) y'(t) + \frac{1}{t}\, y(t) = 0\,, \tag{3.4.11}$$

con $t \in \mathbb{R}^+$.

Possiamo scrivere l'equazione nella forma $\big(y''(t) - y'(t)\big) - (1/t)\big(y'(t) - y(t)\big) = 0$, pertanto, se $v\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ è soluzione dell'equazione, allora la funzione $w = v' - v$ è soluzione dell'equazione lineare del primo ordine $z'(t) - (1/t)z(t) = 0$. Una primitiva del coefficiente $t \mapsto -1/t$ è la funzione $t \mapsto -\log t$, quindi, per il teorema 3.3.1, si ha, $\forall t \in \mathbb{R}^+$,

$$w(t) = c \exp(\log t) = c\,t\,,$$

con $c \in \mathbb{R}$. Quindi una soluzione v dell'equazione del secondo ordine (3.4.11) è soluzione dell'equazione lineare del primo ordine $y'(t) - y(t) = c\,t$. Una primitiva del coefficiente $t \mapsto -1$ è la funzione $t \mapsto -t$, quindi, per il teorema 3.3.1, si ha, $\forall t \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} v(t) &= e^t \int_1^t e^{-s} c s\, ds + d e^t = c e^t \left(\left[-s e^{-s} \right]_1^t + \int_1^t e^{-s}\, ds \right) + d e^t = \\ &= c e^t \left[-s e^{-s} - e^{-s} \right]_1^t + d e^t = -c t - c + c e^{-1} e^t + c e^{-1} e^t + d e^t = \\ &= -c(t+1) + (2 c e^{-1} + d) e^t\,, \end{aligned}$$

con $d \in \mathbb{R}$. Quindi ogni soluzione è combinazione lineare delle funzioni $t \mapsto t+1$ e $t \mapsto e^t$.

Viceversa, si verifica facilmente che ogni combinazione lineare di tali funzioni è soluzione dell'equazione.

Quindi l'integrale generale dell'equazione (3.4.11) è

$$\left\{ t \mapsto c(t+1) + d e^t \,\middle|\, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

◀

Definizione di sistema fondamentale di soluzioni

Siano $J \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in C(J, \mathbb{R}^n)$ e $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq C^n(J, \mathbb{R})$. Diciamo che $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ è un **sistema fondamentale di soluzioni** dell'equazione lineare omogenea (3.4.8) quando $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ è una base dell'integrale generale dell'equazione.

Le soluzioni dei sistemi lineari sono funzioni vettoriali, quindi un sistema fondamentale è un insieme di n funzioni a valori in $\mathbb{R}^n$. Risulta naturale rappresentarle in forma di matrice: la matrice fondamentale. Nel caso delle equazioni non viene individuata in modo altrettanto naturale una matrice, quindi non si definisce il concetto di matrice fondamentale.

3.4.19 Esempio. Riprendiamo in esame il sistema (3.4.11). Nell'esempio 3.4.18 abbiamo provato che l'integrale generale è $\left\{ t \mapsto c(t+1) + d e^t \,\middle|\, c, d \in \mathbb{R} \right\}$, cioè il sottospazio di $C^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^2)$ generato dalle funzioni $t \mapsto t+1$ e $t \mapsto e^t$. Per il teorema 3.4.17, affermazione I, l'integrale generale è uno spazio vettoriale di dimensione 2, quindi le due funzioni che lo generano sono linearmente indipendenti e costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni. ◀

3.4.20 Teorema

Siano $J \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in C(J, \mathbb{R}^n)$ e $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione lineare omogenea (3.4.8). Una funzione $v: J \to \mathbb{R}$ è soluzione dell'equazione se e solo se $\exists c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ tale che, $\forall t \in J$, si ha $v(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k(t)$.

Per studiare l'indipendenza lineare di un insieme di soluzioni di un sistema abbiamo introdotto il determinante wronskiano, cioè il determinante di una matrice le cui colonne sono soluzioni del sistema. Alla soluzione v dell'equazione (3.4.7) corrisponde la soluzione $(v, v', \ldots, v^{(n-1)})$ del sistema (3.4.9). Quindi, per studiare l'indipendenza lineare delle soluzioni di un'equazione di ordine superiore, bisogna considerare il determinante di una matrice le cui colonne contengono le derivate successive di soluzioni dell'equazione. Risulta quindi naturale la seguente definizione.

Definizione di determinante wronskiano per funzioni scalari

Siano $J \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $v_1, v_2, \ldots, v_n \in C^{n-1}(J, \mathbb{R})$. Chiamiamo **determinante wronskiano** delle $v_1, v_2, \ldots, v_n$ la funzione

$$W^*(v_1, v_2, \ldots, v_n): J \to \mathbb{R},$$

$$W^*(v_1, v_2, \ldots, v_n)(t) = \det \begin{pmatrix} v_1(t) & v_2(t) & \ldots & v_n(t) \\ v_1'(t) & v_2'(t) & \ldots & v_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^{(n-1)}(t) & v_2^{(n-1)}(t) & \ldots & v_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

3.4.21 Teorema

Siano $J \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in C(J, \mathbb{R}^n)$ e $v_1, v_2, \ldots, v_n$ soluzioni dell'equazione lineare omogenea (3.4.8). Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

I) $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ è un sistema fondamentale dell'equazione (3.4.8);

II) $\forall s \in J$, $W^*(v_1, v_2, \ldots, v_n)(s) \neq 0$;

III) $\exists s \in J$, $W^*(v_1, v_2, \ldots, v_n)(s) \neq 0$.

3.4.22 Esempio. Riprendiamo in esame il sistema (3.4.11). Nell'esempio 3.4.19 abbiamo visto che un sistema fondamentale di soluzioni è:

$$\{t \mapsto t+1, t \mapsto e^t\},$$

dove le due funzioni sono definite in $\mathbb{R}^+$. Il determinante wronskiano di tali funzioni è:

$$\det \begin{pmatrix} t+1 & e^t \\ 1 & e^t \end{pmatrix} = (t+1)e^t - t e^t = e^t.$$

Come assicurato dal teorema 3.4.21, tale determinante è diverso da 0 per $t \in \mathbb{R}^+$. ◀

Per studiare il metodo di variazione delle costanti di Lagrange (v. teorema 3.4.14) per le equazioni di ordine superiore non è opportuno applicare il metodo al sistema di equazioni corrispondente e trasferire il risultato all'equazione di ordine superiore, ma è più semplice procedere direttamente.

Supponiamo che $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ sia un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea (3.4.8). Cerchiamo una funzione v della forma $v(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t) v_k(t)$, che sia soluzione dell'equazione non omogenea (3.4.7), dove $c_1, c_2, \dots, c_n \in C^n(J, \mathbb{R})$ sono funzioni da determinare. Si ha

$$v' = \sum_{k=1}^{n} c_k' v_k + \sum_{k=1}^{n} c_k v_k' .$$

Imponiamo la condizione $\sum_{k=1}^{n} c_k' v_k = 0$, per cui $v' = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k'$. Risulta quindi

$$v'' = \sum_{k=1}^{n} c_k' v_k' + \sum_{k=1}^{n} c_k v_k'' .$$

Imponiamo la condizione $\sum_{k=1}^{n} c_k' v_k' = 0$, per cui $v'' = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k''$ e proseguiamo con le derivate successive. Si ottiene infine

$$v^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} c_k' v_k^{(n-1)} + \sum_{k=1}^{n} c_k v_k^{(n)} .$$

Si ha

$$\begin{aligned} v^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j v^{(j)} &= \sum_{k=1}^{n} c_k' v_k^{(n-1)} + \sum_{k=1}^{n} c_k v_k^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j \sum_{k=1}^{n} c_k v_k^{(j)} = \\ &= \sum_{k=1}^{n} c_k' v_k^{(n-1)} + \sum_{k=1}^{n} c_k \Big(v_k^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j v_k^{(j)} \Big) = \sum_{k=1}^{n} c_k' v_k^{(n-1)} , \end{aligned}$$

l'ultima uguaglianza segue dal fatto che le v_k sono soluzione dell'equazione omogenea. Quindi v è soluzione dell'equazione non omogenea (3.4.7) se e solo se $\sum_{k=1}^{n} c_k' v_k^{(n-1)} = b$. Pertanto se le funzioni $c_1, c_2, \dots, c_n$ sono tali che, $\forall t \in J$, si ha

$$\begin{cases} v_1(t) c_1'(t) + v_2(t) c_2'(t) + \cdots + v_n(t) c_n'(t) = 0, \\ v_1'(t) c_1'(t) + v_2'(t) c_2'(t) + \cdots + v_n'(t) c_n'(t) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots , \\ v_1^{(n-2)}(t) c_1'(t) + v_2^{(n-2)}(t) c_2'(t) + \cdots + v_n^{(n-2)}(t) c_n'(t) = 0, \\ v_1^{(n-1)}(t) c_1'(t) + v_2^{(n-1)}(t) c_2'(t) + \cdots + v_n^{(n-1)}(t) c_n'(t) = b(t), \end{cases}$$

allora v è soluzione dell'equazione non omogenea. Per ogni $t \in J$ abbiamo un sistema di n equazioni lineari nelle n incognite $c_1'(t), c_2'(t), \dots, c_n'(t)$. La matrice dei coefficienti del sistema è

$$\begin{pmatrix} v_1(t) & v_2(t) & \dots & v_n(t) \\ v_1'(t) & v_2'(t) & \dots & v_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^{(n-1)}(t) & v_2^{(n-1)}(t) & \dots & v_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix},$$

il cui determinante è $W^*(v_1, v_2, \dots, v_n)(t)$ che, per il teorema 3.4.21, è diverso da 0. Pertanto il sistema ha una e una sola soluzione. Risolvendo il sistema si determinano le c'_k da cui si ottengono le funzioni c_k.

Vale quindi il seguente teorema.

3.4.23 Teorema (metodo della variazione delle costanti di Lagrange)

Siano $J \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b \in C(J, \mathbb{R}^n)$ e $v_1, v_2, \dots, v_n : J \to \mathbb{R}$ che costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione lineare omogenea (3.4.8). Siano $c_1, c_2, \dots, c_n \in C^1(J, \mathbb{R})$ tali che, $\forall t \in J$, risulta

$$\begin{cases} v_1(t)c'_1(t) + v_2(t)c'_2(t) + \dots + v_n(t)c'_n(t) = 0, \\ v'_1(t)c'_1(t) + v'_2(t)c'_2(t) + \dots + v'_n(t)c'_n(t) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ v_1^{(n-2)}(t)c'_1(t) + v_2^{(n-2)}(t)c'_2(t) + \dots + v_n^{(n-2)}(t)c'_n(t) = 0, \\ v_1^{(n-1)}(t)c'_1(t) + v_2^{(n-1)}(t)c'_2(t) + \dots + v_n^{(n-1)}(t)c'_n(t) = b(t). \end{cases}$$

Allora la funzione

$$v : J \to \mathbb{R}, \qquad v(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t) v_k(t)$$

è soluzione dell'equazione lineare non omogenea (3.4.7).

3.4.24 Esempio. Consideriamo l'equazione differenziale lineare del secondo ordine non omogenea

$$y''(t) - \left(1 + \frac{1}{t}\right) y'(t) + \frac{1}{t} y(t) = 2t^2, \tag{3.4.12}$$

con $t \in \mathbb{R}^+$.

L'equazione omogenea associata è l'equazione (3.4.11). Un sistema fondamentale per l'equazione omogenea è $\{t \mapsto t+1, t \mapsto e^t\}$ (v. esempio 3.4.19).

Applichiamo il metodo della variazione delle costanti di Lagrange 3.4.23 per determinare una soluzione dell'equazione (3.4.12); quindi cerchiamo $c_1, c_2 \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ tali che

$$v : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \qquad v(t) = (t+1)c_1(t) + e^t c_2(t),$$

è soluzione dell'equazione (3.4.12). Si ha, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$v'(t) = c_1(t) + (t+1)c'_1(t) + e^t c_2(t) + e^t c'_2(t).$$

Posto $(t+1)c'_1(t) + e^t c'_2(t) = 0$ risulta $v'(t) = c_1(t) + e^t c_2(t)$, quindi

$$v''(t) = c'_1(t) + e^t c_2(t) + e^t c'_2(t).$$

Affinché v sia soluzione deve essere

$$c'_1(t) + e^t c_2(t) + e^t c'_2(t) - \left(1 + \frac{1}{t}\right)\big(c_1(t) + e^t c_2(t)\big) + \frac{1}{t}\big((t+1)c_1(t) + e^t c_2(t)\big) = 2t^2.$$

Poiché $t+1$ e e^t sono soluzioni dell'equazione omogenea, si ha

$$\left(-\left(1+\frac{1}{t}\right)+\frac{1}{t}(t+1)\right)c_1(t)=0,$$
$$\left(e^t-\left(1+\frac{1}{t}\right)e^t+\frac{1}{t}e^t\right)c_2(t)=0,$$

quindi deve essere $c_1'(t)+e^t c_2'(t)=t^2$. Dobbiamo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases}(t+1)c_1'(t)+e^t c_2'(t)=0,\\ c_1'(t)+e^t c_2'(t)=2t^2.\end{cases}$$

Sottraendo membro a membro si ottiene $tc_1'(t)=-2t^2$, cioè $c_1'(t)=-2t$; scegliamo $c_1(t)=-t^2$. Sostituendo nella prima equazione si ottiene $-2t(t+1)+e^t c_2'(t)=0$, quindi $c_2'(t)=2(t^2+t)e^{-t}$. Le primitive di questa funzione sono

$$\begin{aligned}\int 2(t^2+t)e^{-t}\,dt &=-2(t^2+t)e^{-t}+\int 2(2t+1)e^{-t}\,dt=\\ &=-2(t^2+t)e^{-t}-2(2t+1)e^{-t}+\int 4e^{-t}\,dt=\\ &=-2(t^2+t)e^{-t}-2(2t+1)e^{-t}-4e^{-t}+c=-2(t^2+3t+3)e^{-t}+c,\end{aligned}$$

quindi possiamo scegliere $c_2(t)=-2(t^2+3t+3)e^{-t}$.

Pertanto una soluzione dell'equazione (3.4.12) è la funzione

$$v(t)=-t^2(t+1)-2(t^2+3t+3)e^{-t}e^t=-t^3-3t^2-6t-6.$$ ◀

3.5 Equazioni e sistemi lineari a coefficienti costanti

In questa sezione studiamo equazioni e sistemi lineari in cui i coefficienti sono funzioni costanti. Questo giustifica il termine "coefficienti costanti" con cui vengono indicati. Per motivi che risulteranno chiari nel corso dell'esposizione, per lo studio di questi sistemi ed equazioni risulta naturale porsi in ambito complesso.

Come è facile verificare, quanto esposto finora relativamente a equazioni e sistemi lineari, nella sottosezione 3.3.1 e nella sezione 3.4, vale anche in ambito complesso.

3.5.1 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

Consideriamo un'equazione differenziale lineare di ordine n in cui i coefficienti non dipendono da t; come indicato sopra, consideriamo l'equazione in ambito complesso. Abbiamo quindi l'equazione

$$y^{(n)}(t)+\sum_{j=0}^{n-1}a_j y^{(j)}(t)=b(t), \tag{3.5.1}$$

dove $a_0,a_1,\dots,a_{n-1}\in\mathbb{C}$, $b\in C(J,\mathbb{C})$, con J intervallo di $\mathbb{R}$.

Un'equazione di questo tipo è detta **equazione differenziale lineare a coefficienti costanti**.

Nel seguito utilizzeremo una notazione particolare. Se p è il polinomio

$$p(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j$$

indichiamo con $p(d/dt)$ la trasformazione da $C^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ a $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tale che

$$p\left(\frac{d}{dt}\right)u = \sum_{j=0}^{n} a_j \frac{d^j u}{dt^j} = \sum_{j=0}^{n} a_j u^{(j)};$$

quindi $p(d/dt)$ si ottiene formalmente dal polinomio p sostituendo alla variabile λ la derivata.

Notiamo che dalla linearità della derivata segue immediatamente che $p(d/dt)$ è una trasformazione lineare.

Con questa notazione l'equazione (3.5.1) si può scrivere come $p(d/dt)u = b$, dove p è il polinomio tale che $p(\lambda) = \lambda^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j \lambda^j$. Tale polinomio è detto **polinomio caratteristico** dell'equazione differenziale (3.5.1).

Poiché i coefficienti hanno dominio $\mathbb{R}$, le equazioni a coefficienti costanti omogenee hanno soluzioni definite in $\mathbb{R}$.

Per un'equazione omogenea di ordine 1, $y'(t) = ay(t)$, dal teorema 3.3.1, che vale anche in ambito complesso, segue che l'integrale generale è $\{t \mapsto ce^{at} \mid c \in \mathbb{C}\}$.

Cerchiamo soluzioni di un'equazione omogenea di ordine n

$$y^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j y^{(j)}(t) = 0, \tag{3.5.2}$$

della stessa forma delle soluzioni dell'equazione del primo ordine. Sia quindi $\lambda \in \mathbb{C}$ e

$$v : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \qquad v(t) = e^{\lambda t}.$$

Poiché, $\forall k \in \mathbb{N}$, risulta $v^{(k)}(t) = \lambda^k e^{\lambda t}$, v è soluzione dell'equazione (3.5.2) se e solo se $\forall t \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lambda^n e^{\lambda t} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j \lambda^j e^{\lambda t} = 0,$$

cioè

$$\lambda^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j \lambda^j = 0. \tag{3.5.3}$$

Quindi per trovare le soluzioni dell'equazione differenziale è sufficiente trovare le radici del polinomio caratteristico, dobbiamo cioè risolvere un'equazione algebrica.

Il polinomio caratteristico p ha grado uguale all'ordine dell'equazione differenziale. Se p ha n radici distinte, vi sono n soluzioni dell'equazione differenziale della forma

$t \mapsto e^{\lambda t}$; vedremo che queste sono linearmente indipendenti, quindi costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni. Se p ha meno di n radici distinte, allora vi sono radici multiple.

Supponiamo che 0 sia radice di molteplicità m, cioè $a_0 = a_1 = \cdots = a_{m-1} = 0$ e $a_m \neq 0$. In questo caso, se u è una funzione con le derivate di ordine maggiore o uguale a m nulle, si ha

$$p\left(\frac{d}{dt}\right)u = u^{(n)} + \sum_{j=m}^{n-1} a_j u^{(j)} = 0.$$

Pertanto le funzioni $t \mapsto t^j$, per $j = 0, 1, \ldots, m-1$ sono soluzioni dell'equazione (3.5.2).

Per studiare il caso generale è utile il seguente lemma, che ci consentirà di trasferire i risultati ottenuti nel caso della radice 0 al caso generale.

3.5.1 Lemma

Siano p un polinomio di grado n, $u \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ e $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Posto

$$v : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \qquad v(t) = e^{\lambda_0 t} u(t)$$

e indicato con q il polinomio tale che $q(\lambda) = p(\lambda + \lambda_0)$, risulta

$$\left(p\left(\frac{d}{dt}\right)v\right)(t) = e^{\lambda_0 t}\left(q\left(\frac{d}{dt}\right)u\right)(t). \tag{3.5.4}$$

Dimostrazione. Anzitutto dimostriamo, per induzione, che, $\forall k \in \mathbb{N}$, risulta

$$v^{(k)}(t) = e^{\lambda_0 t} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda_0^{k-j} u^{(j)}(t). \tag{3.5.5}$$

Se $k = 0$ l'uguaglianza è ovvia.

Supponiamo che l'uguaglianza (3.5.5) valga per k. Allora

$$\begin{aligned}
v^{(k+1)}(t) &= \frac{d}{dt} v^{(k)}(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{\lambda_0 t} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda_0^{k-j} u^{(j)}(t)\right) = \\
&= \lambda_0 e^{\lambda_0 t} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda_0^{k-j} u^{(j)}(t) + e^{\lambda_0 t} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda_0^{k-j} u^{(j+1)}(t) = \\
&= e^{\lambda_0 t} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda_0^{k-j+1} u^{(j)}(t) + e^{\lambda_0 t} \sum_{j=1}^{k+1} \binom{k}{j-1} \lambda_0^{k-j+1} u^{(j)}(t) = \\
&= e^{\lambda_0 t} \lambda_0^{k+1} u(t) + e^{\lambda_0 t} \sum_{j=1}^{k} \left(\binom{k}{j} + \binom{k}{j-1}\right) \lambda_0^{k-j+1} u^{(j)}(t) + e^{\lambda_0 t} u^{(k+1)}(t) = \\
&= e^{\lambda_0 t} \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} \lambda_0^{k+1-j} u^{(j)}(t);
\end{aligned}$$

quindi l'uguaglianza vale per $k+1$ e, per induzione, vale $\forall k \in \mathbb{N}$.

Se p è il monomio λ^k allora il corrispondente polinomio q è

$$q(\lambda) = p(\lambda + \lambda_0) = (\lambda + \lambda_0)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda_0^{k-j} \lambda^j ,$$

quindi l'uguaglianza (3.5.5) si può scrivere come

$$\left(p\left(\frac{d}{dt}\right)v\right)(t) = e^{\lambda_0 t}\left(q\left(\frac{d}{dt}\right)u\right)(t).$$

Quindi l'uguaglianza (3.5.4) vale per $p(\lambda) = \lambda^k$, poiché ogni polinomio è combinazione lineare di potenze, si ottiene facilmente che essa vale per ogni polinomio. ■

Supponiamo ora $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ radice di molteplicità m del polinomio caratteristico p, allora esiste un polinomio p_1 tale che $p(\lambda) = p_1(\lambda)(\lambda - \lambda_0)^m$ e $p_1(\lambda_0) \neq 0$; pertanto, posto $q(\lambda) = p(\lambda + \lambda_0)$ risulta $q(\lambda) = p_1(\lambda + \lambda_0)\lambda^m$, quindi 0 è radice di molteplicità m di q, perciò, per $j = 0, 1, \ldots, m-1$ si ha $q(d/dt)t^j = 0$. Allora, per il lemma 3.5.1, posto

$$v : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \qquad v(t) = t^j e^{\lambda_0 t},$$

si ha

$$\left(p\left(\frac{d}{dt}\right)v\right)(t) = e^{\lambda_0 t} q\left(\frac{d}{dt}\right)\left(e^{-\lambda_0 t} v(t)\right) = e^{\lambda_0 t} q\left(\frac{d}{dt}\right)t^j = 0.$$

Pertanto, se il polinomio caratteristico ha le radici λ_k, con $k = 1, 2, \ldots, r$, rispettivamente con molteplicità m_k, allora l'equazione (3.5.2) ha le soluzioni $t^j e^{\lambda_k t}$, per $k = 1, 2, \ldots, r$ e $j = 0, 1, \ldots, m_{k-1}$. Il numero di tali soluzioni è la somma delle molteplicità delle radici, cioè è n. Pertanto otteniamo n soluzioni.

Il seguente teorema assicura la loro lineare indipendenza.

3.5.2 Lemma

Siano $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ diversi tra loro e $p_1, p_2, \ldots, p_r$ polinomi non identicamente nulli. Allora le funzioni $t \mapsto p_k(t)e^{\lambda_k t}$, $k = 1, 2, \ldots, r$ sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. Dimostriamo il lemma per induzione su r.

Se $r = 1$ l'affermazione è ovvia.

Supponiamo l'affermazione vera per r e siano $c_1, c_2, \ldots, c_{r+1} \in \mathbb{C}$ tali che, $\forall t \in \mathbb{R}$, risulti

$$\sum_{k=1}^{r+1} c_k p_k(t) e^{\lambda_k t} = 0.$$

Moltiplicando per $e^{-\lambda_{r+1} t}$ si ottiene

$$\sum_{k=1}^{r} c_k p_k(t) e^{(\lambda_k - \lambda_{r+1})t} + c_{r+1} p_{r+1}(t) = 0,$$

da cui, derivando ℓ volte, con ℓ maggiore del grado di p_{r+1}, si ottiene

$$\sum_{k=1}^{r} c_k \frac{d^\ell}{dt^\ell}\big(p_k(t)e^{(\lambda_k-\lambda_{r+1})t}\big)=0. \tag{3.5.6}$$

Se p è un polinomio di grado j e $\lambda\in\mathbb{C}^*$, allora si ha

$$\frac{d}{dt}\big(p(t)e^{\lambda t}\big)=p'(t)e^{\lambda t}+\lambda p(t)e^{\lambda t}=\big(p'(t)+\lambda p(t)\big)e^{\lambda t};$$

il polinomio $p'+\lambda p$ è somma di un polinomio di grado $j-1$ con un polinomio di grado j, quindi ha grado j. Pertanto la derivata di qualunque ordine del prodotto tra un polinomio e la funzione $t\mapsto e^{\lambda t}$, con $\lambda\neq 0$, è ancora il prodotto di un polinomio per la funzione $t\mapsto e^{\lambda t}$ e il grado del polinomio non cambia, in particolare il polinomio non è identicamente nullo.

Pertanto l'uguaglianza (3.5.6) può essere scritta come

$$\sum_{k=1}^{r} c_k q_k(t)e^{(\lambda_k-\lambda_{r+1})t}=0,$$

dove i q_k sono polinomi non identicamente nulli. Quindi, per ipotesi induttiva, si ha $c_1=c_2=\cdots=c_r=0$; pertanto anche $c_{r+1}=0$. Perciò l'affermazione è vera per $r+1$.

Per induzione otteniamo il teorema. ■

Abbiamo quindi dimostrato il seguente teorema.

3.5.3 Teorema

Siano $a_0,a_1,\dots,a_{n-1}\in\mathbb{C}$. Indichiamo con $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_r\in\mathbb{C}$ le radici del polinomio caratteristico dell'equazione differenziale (3.5.2), con molteplicità $m_1,m_2,\dots,m_r$ rispettivamente. Allora

$$\{t\mapsto t^j e^{\lambda_k t}\,|\,k=1,2,\dots,r,\ j=0,1,\dots,m_k-1\}.$$

è un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione (3.5.2).

3.5.4 Esempio. Consideriamo l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti omogenea

$$y''(t)+y'(t)-2y(t)=0. \tag{3.5.7}$$

Il polinomio caratteristico è $\lambda^2+\lambda-2$ che ha radici

$$\lambda=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot(-4)}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases}-2,\\ 1.\end{cases}$$

Per il teorema 3.5.3 un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione (3.5.7) è

$$\{t\mapsto e^{-2t}, t\mapsto e^{t}\}.$$ ◀

3.5.5 Esempio. Consideriamo l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti omogenea

$$y''(t)+4y'(t)+4y(t)=0. \tag{3.5.8}$$

Il polinomio caratteristico è $\lambda^2+4\lambda+4$ che ha radici

$$\lambda=-2\pm\sqrt{2^2-4}=-2.$$

Pertanto il polinomio ha la radice 2 doppia. Per il teorema 3.5.3 un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione (3.5.8) è

$$\{t\mapsto e^{-2t}, t\mapsto te^{-2t}\}.$$ ◀

3.5.6 Esempio. Consideriamo l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti omogenea

$$y'''(t)+y''(t)-y'(t)-y(t)=0. \tag{3.5.9}$$

Il polinomio caratteristico è $\lambda^3+\lambda^2-\lambda-1$, che si fattorizza in

$$(\lambda+1)(\lambda^2-1)=(\lambda+1)^2(\lambda-1).$$

Pertanto il polinomio ha le radici -1 doppia e 1 semplice. Per il teorema 3.5.3 un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione (3.5.8) è

$$\{t\mapsto e^{-t}, t\mapsto te^{-t}, t\mapsto e^{t}\}.$$ ◀

Nel caso in cui l'equazione sia in campo reale, cioè $a_0,a_1,\dots,a_{n-1}\in\mathbb{R}$, il polinomio caratteristico può avere radici non reali, quindi il sistema fondamentale descritto da questo teorema non è a valori reali. Per la teoria generale delle equazioni lineari esiste un sistema fondamentale reale; questo può facilmente essere determinato a partire da quello complesso.

Se un polinomio $p(\lambda)=\sum_{j=0}^{n}a_j\lambda^j$ ha coefficienti reali e $\lambda_0=\alpha+i\beta\in\mathbb{C}$ è una sua radice, allora anche $\overline{\lambda_0}=\alpha-i\beta$ è una radice. Infatti, poiché un numero reale coincide con il suo complesso coniugato, si ha

$$p(\overline{\lambda_0})=\sum_{j=0}^{n}a_j\overline{\lambda_0}^j=\sum_{j=0}^{n}\overline{a_j}\,\overline{\lambda_0}^j=\sum_{j=0}^{n}\overline{a_j\lambda_0^j}=\overline{\sum_{j=0}^{n}a_j\lambda_0^j}=\overline{p(\lambda_0)}=0.$$

Inoltre la molteplicità di $\overline{\lambda_0}$ è la stessa di λ_0. Infatti se $\lambda_0=\alpha+i\beta$ e $\overline{\lambda_0}=\alpha-i\beta$ sono radici di p, allora esiste un polinomio p_1 tale che

$$p(\lambda)=(\lambda-\alpha-i\beta)(\lambda-\alpha+i\beta)p_1(\lambda)=\big((\lambda-\alpha)^2-(i\beta)^2\big)p_1(\lambda)=(\lambda^2-2\alpha\lambda+\alpha^2+\beta^2)p_1(\lambda).$$

Pertanto p_1 è quoziente di due polinomi a coefficienti reali, quindi ha coefficienti reali. Se λ_0 è radice di molteplicità maggiore o uguale a 2 di p, allora è radice di p_1, quindi anche $\overline{\lambda_0}$ è radice di p_1, pertanto $\overline{\lambda_0}$ è radice di molteplicità maggiore o uguale a 2 di p. Ovviamente vale anche il viceversa: se $\overline{\lambda_0}$ è radice di molteplicità maggiore o uguale a 2 di p, allora anche λ_0 lo è. Ripetendo il ragionamento si prova che λ_0 e $\overline{\lambda_0}$ hanno la stessa molteplicità.

Pertanto, per il teorema 3.5.3, se $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ è radice di molteplicità m del polinomio caratteristico, allora le funzioni $t \mapsto t^j e^{\lambda_0 t}$ e $t \mapsto t^j e^{\overline{\lambda_0} t}$, con $j = 0, 1, \ldots, m-1$, sono soluzioni dell'equazione differenziale. Se $\lambda_0 = \alpha + i\beta$, si ha

$$\begin{aligned} t^j e^{\lambda_0 t} &= t^j e^{(\alpha+i\beta)t} = t^j e^{\alpha t}\big(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)\big), \\ t^j e^{\overline{\lambda_0} t} &= t^j e^{(\alpha-i\beta)t} = t^j e^{\alpha t}\big(\cos(\beta t) - i \sin(\beta t)\big). \end{aligned} \tag{3.5.10}$$

Combinazioni lineari di soluzioni sono ancora soluzioni, quindi sono soluzione anche le funzioni

$$t \mapsto t^j e^{\alpha t} \cos(\beta t), \qquad t \mapsto t^j e^{\alpha t} \sin(\beta t),$$

che sono rispettivamente la semisomma e la differenza divisa per $2i$ delle due soluzioni (3.5.10). Osserviamo che tali funzioni sono linearmente indipendenti, perché generano uno spazio vettoriale complesso che contiene le funzioni linearmente indipendenti $t \mapsto t^j e^{\lambda_0 t}$ e $t \mapsto t^j e^{\overline{\lambda_0} t}$, quindi ha dimensione 2.

Pertanto dal teorema 3.5.3 otteniamo il seguente.

3.5.7 Teorema

Siano $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Indichiamo con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ le radici reali del polinomio caratteristico dell'equazione differenziale (3.5.2), con molteplicità $m_1, m_2, \ldots, m_r$ rispettivamente, e con $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$, con $\operatorname{Im} \mu_j > 0$, le radici appartenenti a $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, con molteplicità $n_1, n_2, \ldots, n_s$ rispettivamente. Allora

$$\begin{aligned} &\{t \mapsto t^j e^{\lambda_k t} \mid k = 1, 2, \ldots, r,\ j = 0, 1, \ldots, m_k - 1\} \cup \\ &\quad \cup \big\{t \mapsto t^j e^{\operatorname{Re} \mu_k t} \cos(\operatorname{Im} \mu_k t) \,\big|\, k = 1, 2, \ldots, s,\ j = 0, 1, \ldots, n_k - 1\big\} \cup \\ &\qquad \cup \big\{t \mapsto t^j e^{\operatorname{Re} \mu_k t} \sin(\operatorname{Im} \mu_k t) \,\big|\, k = 1, 2, \ldots, s,\ j = 0, 1, \ldots, n_k - 1\big\} \end{aligned}$$

è un sistema fondamentale di soluzioni reale dell'equazione (3.5.2).

3.5.8 Esempio. Consideriamo l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti omogenea

$$y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0. \tag{3.5.11}$$

Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 + 2\lambda + 2$, il discriminante diviso 4 è $1^2 - 2 = -1$, quindi il polinomio ha le radici complesse $-1 \pm i$. Per il teorema 3.5.3 un sistema fondamentale reale di soluzioni dell'equazione (3.5.11) è

$$\{t \mapsto e^{-t} \cos t, t \mapsto e^{-t} \sin t\}.$$ ◀

3.5.9 Esempio. Consideriamo l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti omogenea

$$y'''(t)+y''(t)+y'(t)+y(t)=0. \tag{3.5.12}$$

Il polinomio caratteristico è $\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1$, che si fattorizza in

$$(\lambda+1)(\lambda^2+1)=(\lambda+1)(\lambda+i)(\lambda-i).$$

Pertanto il polinomio ha le radici -1, i e $-i$, che sono semplici. Per il teorema 3.5.3 un sistema fondamentale reale di soluzioni dell'equazione (3.5.12) è

$$\{t\mapsto e^{-t}, t\mapsto \cos t, t\mapsto \sin t\}.$$ ◀

3.5.10 Esempio. Consideriamo l'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti

$$y^{(4)}(t)+2y''(t)+y(t)=0. \tag{3.5.13}$$

Il polinomio caratteristico è $\lambda^4+2\lambda^2+1$, che si fattorizza in

$$(\lambda^2+1)^2=(\lambda+i)^2(\lambda-i)^2.$$

Pertanto il polinomio ha le radici complesse doppie i e $-i$. Per il teorema 3.5.3 un sistema fondamentale reale di soluzioni dell'equazione (3.5.13) è

$$\{t\mapsto \cos t, t\mapsto t\cos t, t\mapsto \sin t, t\mapsto t\sin t\}.$$ ◀

Studiamo l'equazione non omogenea (3.5.1), nel caso in cui il termine noto b è prodotto di un polinomio per un esponenziale, anche complesso.

Sia

$$u:\mathbb{R}\to\mathbb{C}, \qquad u(t)=t^k e^{\lambda_0 t},$$

con $k\in\mathbb{N}$ e $\lambda_0\in\mathbb{C}$; allora $u'(t)=kt^{k-1}e^{\lambda_0 t}+\lambda_0 t^k e^{\lambda_0 t}$. Pertanto se u è il prodotto tra un polinomio di grado k e la funzione $t\mapsto e^{\lambda_0 t}$, allora u' è il prodotto tra un polinomio di grado minore o uguale a k e la stessa funzione esponenziale. Derivando ulteriormente si ottengono funzioni dello stesso tipo, quindi se p è il polinomio caratteristico dell'equazione (3.5.2), anche $p(d/dt)u$ è prodotto di un polinomio di grado al più k per l'esponenziale.

Pertanto, indicato con $V_{\lambda_0,k}$ il sottospazio vettoriale di $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ tale che

$$V_{\lambda_0,k}=\left\{t\mapsto q(t)e^{\lambda_0 t}\,\middle|\,q \text{ è un polinomio di grado minore o uguale a } k\right\},$$

$p(d/dt)$ è una trasformazione lineare da $V_{\lambda_0,k}$ in se stesso.

Se λ_0 non è radice del polinomio caratteristico, allora dal teorema 3.5.3 segue che l'unica soluzione dell'equazione differenziale omogenea (3.5.2) appartenente a $V_{\lambda_0,k}$ è quella identicamente nulla. Pertanto $p(d/dt)|_{V_{\lambda_0,k}}$ ha nucleo banale, cioè è iniettiva. Poiché $V_{\lambda_0,k}$

ha dimensione uguale allo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a k, quindi ha dimensione finita, $p(d/dt)|_{V_{\lambda_0,k}}$ è anche suriettiva. Perciò l'equazione (3.5.1) con $b \in V_{\lambda_0,k}$ ha soluzione appartenente a $V_{\lambda_0,k}$.

Consideriamo il caso in cui λ_0 sia radice di molteplicità m del polinomio caratteristico.

Esaminiamo anzitutto il caso $\lambda_0 = 0$. Il numero 0 è radice di molteplicità m se e solo se $a_0 = a_1 = \cdots = a_{m-1} = 0$ e $a_m \neq 0$. Pertanto se $u \in V_{0,k}$, cioè u è una funzione polinomiale di grado minore o uguale a k, allora $p(d/dt)u = 0$ se $k < m$, mentre $p(d/dt)u \in V_{0,k-m}$ se $k \geq m$.

Supponiamo ora che $\lambda_0 \in \mathbb{C}^*$ sia radice di molteplicità m del polinomio caratteristico p. Allora esiste un polinomio p_1 tale che $p(\lambda) = p_1(\lambda)(\lambda - \lambda_0)^m$ e $p_1(\lambda_0) \neq 0$; pertanto, posto $q(\lambda) = p(\lambda + \lambda_0)$ risulta $q(\lambda) = p_1(\lambda + \lambda_0)\lambda^m$, quindi, per qualunque funzione u, $q(d/dt)u$ è combinazione lineare di derivate di ordine almeno m di u. Se $u \in V_{0,k}$, allora è un polinomio di grado minore o uguale a k, quindi $q(d/dt)u$ è nullo se $k < m$, mentre, se $k \geq m$, è un polinomio di grado minore o uguale a $k - m$, perciò appartiene a $V_{0,k-m}$. Se $v \in V_{\lambda_0,k}$, allora, posto

$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \qquad u(t) = e^{-\lambda_0 t} v(t),$$

si ha $u \in V_{0,k}$, pertanto $q(d/dt)u = 0$ se $k < m$ e $q(d/dt)u \in V_{0,k-m}$ se $k \geq m$. Per il lemma 3.5.1 risulta

$$\left(p\left(\frac{d}{dt}\right)v\right)(t) = e^{\lambda_0 t}\left(q\left(\frac{d}{dt}\right)u\right)(t),$$

quindi $p(d/dt)v = 0$ se $k < m$ e $p(d/dt)v \in V_{\lambda_0,k-m}$ se $k \geq m$. Perciò, se λ_0 è radice di molteplicità m del polinomio caratteristico e $k \geq m$, allora $p(d/dt)$ trasforma $V_{\lambda_0,k}$ in $V_{\lambda_0,k-m}$. Per il teorema 3.5.3, le soluzioni dell'equazione omogenea appartenenti a $V_{\lambda_0,k}$ sono gli elementi di $V_{\lambda_0,m-1}$, cioè il nucleo di $p(d/dt)$ ristretto a $V_{\lambda_0,k}$ è $V_{\lambda_0,m-1}$; questo spazio ha dimensione m, quindi $p(d/dt)(V_{\lambda_0,k})$ ha dimensione $k+1-m$, pertanto è tutto lo spazio $V_{\lambda_0,k-m}$. Perciò l'equazione (3.5.1) con $b \in V_{\lambda_0,k-m}$ ha soluzione appartenente a $V_{\lambda_0,k}$.

Osserviamo inoltre che, se $v \in V_{\lambda_0,k}$ è tale che $v(t) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j t^j e^{\lambda_0 t}$, allora risulta $p(d/dt)\left(\sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j t^j e^{\lambda_0 t}\right) = 0$, quindi si ha

$$\begin{aligned}\left(p\left(\frac{d}{dt}\right)v\right)(t) &= p\left(\frac{d}{dt}\right)\sum_{j=m}^{k} \alpha_j t^j e^{\lambda_0 t} = p\left(\frac{d}{dt}\right)\left(t^m \sum_{j=m}^{k} \alpha_j t^{j-m} e^{\lambda_0 t}\right) = \\ &= p\left(\frac{d}{dt}\right)\left(t^m \sum_{j=0}^{k-m} \alpha_{j+m} t^j e^{\lambda_0 t}\right).\end{aligned}$$

Quindi ogni equazione non omogenea con termine noto in $V_{\lambda_0,k-m}$, ha una soluzione della forma $t^m u(t)$, con $u \in V_{\lambda_0,k-m}$.

Abbiamo così provato il seguente teorema.

3.5.11 Teorema

Siano $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{C}$ e r un polinomio.

Se μ non è radice del polinomio caratteristico dell'equazione (3.5.2), allora esiste un polinomio s di grado minore o uguale a quello di r tale che la funzione

$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \qquad u(t) = s(t)e^{\mu t},$$

è soluzione dell'equazione non omogenea

$$y^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j y^{(j)}(t) = r(t)e^{\mu t}. \tag{3.5.14}$$

Se μ è radice di molteplicità m del polinomio caratteristico dell'equazione (3.5.2), allora esiste un polinomio s, di grado minore o uguale a quello di r, tale che la funzione

$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \qquad u(t) = t^m s(t)e^{\mu t},$$

è soluzione dell'equazione non omogenea (3.5.14).

3.5.12 Esempio. Consideriamo l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti non omogenea

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 2te^{-t}. \tag{3.5.15}$$

L'equazione omogenea associata è $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 0$; nell'esempio 3.5.4 abbiamo stabilito che il polinomio caratteristico ha le radici semplici -2 e 1, quindi un sistema fondamentale di soluzioni è

$$\{t \mapsto e^{-2t}, t \mapsto e^t\}.$$

Il termine noto è prodotto di un polinomio di grado 1 per la funzione $t \mapsto e^{-t}$, -1 non è radice del polinomio caratteristico. Quindi, per il teorema 3.5.11, esiste una soluzione dell'equazione non omogenea della forma $p(t)e^{-t}$, con p polinomio di grado 1. Cerchiamo quindi $a, b \in \mathbb{R}$ tali che la funzione

$$v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad v(t) = (at + b)e^{-t},$$

è soluzione dell'equazione (3.5.15). Si ha

$$\begin{aligned} v'(t) &= ae^{-t} - (at + b)e^{-t} = (-at + a - b)e^{-t}, \\ v''(t) &= -ae^{-t} - (-at + a - b)e^{-t} = (at - 2a + b)e^{-t}. \end{aligned}$$

Quindi v è soluzione dell'equazione se e solo se

$$(at - 2a + b)e^{-t} + (-at + a - b)e^{-t} - 2(at + b)e^{-t} = 2te^{-t},$$

cioè

$$(-2at - a - 2b)e^{-t} = 2te^{-t}.$$

Questa uguaglianza è verificata se e solo se i coefficienti dei polinomi nei due membri dell'uguaglianza sono uguali, quindi a e b devono soddisfare il sistema

$$\begin{cases} -2a = 2, \\ -a - 2b = 0. \end{cases}$$

Quindi si ha $a=-1$ e $b=1/2$. Pertanto la funzione $t\mapsto(-t+1/2)e^{-t}$ è soluzione dell'equazione (3.5.15) e l'integrale generale di tale equazione è

$$\left\{t\mapsto c_1e^{-2t}+c_2e^t+\left(-t+\frac{1}{2}\right)e^{-t}\,\middle|\,c_1,c_2\in\mathbb{R}\right\}.$$ ◀

3.5.13 Esempio. Consideriamo l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti non omogenea

$$y''(t)+y'(t)-2y(t)=2te^t\,. \tag{3.5.16}$$

L'equazione omogenea associata è $y''(t)+y'(t)-2y(t)=0$; nell'esempio 3.5.4 abbiamo stabilito che il polinomio caratteristico ha le radici semplici -2 e 1, quindi un sistema fondamentale di soluzioni è

$$\{t\mapsto e^{-2t},t\mapsto e^t\}.$$

Il termine noto è prodotto di un polinomio di grado 1 per la funzione $t\mapsto e^t$, 1 è radice semplice del polinomio caratteristico. Quindi, per il teorema 3.5.11, esiste una soluzione dell'equazione non omogenea della forma $tp(t)e^t$, con p polinomio di grado 1. Cerchiamo quindi $a,b\in\mathbb{R}$ tali che la funzione

$$v:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad v(t)=(at^2+bt)e^t\,,$$

è soluzione dell'equazione (3.5.15). Si ha

$$\begin{aligned}v'(t)&=(2at+b)e^t+(at^2+bt)e^t=\big(at^2+(2a+b)t+b\big)e^t\,,\\ v''(t)&=(2at+2a+b)e^t+\big(at^2+(2a+b)t+b\big)e^t=\big(at^2+(4a+b)t+2a+2b\big)e^t\,.\end{aligned}$$

Quindi v è soluzione dell'equazione se e solo se

$$\big(at^2+(4a+b)t+2a+2b\big)e^t+\big(at^2+(2a+b)t+b\big)e^t-2(at^2+bt)e^t=2te^t\,,$$

cioè

$$(6at+2a+3b)e^t=2te^t\,.$$

Questa uguaglianza è verificata se e solo se i coefficienti dei polinomi nei due membri dell'uguaglianza sono uguali, quindi a e b devono soddisfare il sistema

$$\begin{cases}6a=2\,,\\ 2a+3b=0\,.\end{cases}$$

Quindi si ha $a=1/3$ e $b=-2/9$. Pertanto la funzione $t\mapsto(t/3-2/9)e^t$ è soluzione dell'equazione (3.5.16) e l'integrale generale di tale equazione è

$$\left\{t\mapsto c_1e^{-2t}+c_2e^t+\left(\frac{1}{3}t-\frac{2}{9}\right)e^t\,\middle|\,c_1,c_2\in\mathbb{R}\right\}.$$ ◀

3.5.14 Esempio. Consideriamo l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti non omogenea

$$y''(t)+4y'(t)+4y(t)=4e^{-2t}\,. \tag{3.5.17}$$

L'equazione omogenea associata è $y''(t)+4y'(t)+4y(t)=0$; nell'esempio 3.5.5 abbiamo stabilito che il polinomio caratteristico ha la radice doppia -2, quindi un sistema fondamentale di soluzioni è

$$\{t\mapsto e^{-2t}, t\mapsto te^{-2t}\}\,.$$

Il termine noto è prodotto di una costante (cioè di un polinomio di grado 0) per la funzione $t\mapsto e^{-2t}$, -2 è radice doppia del polinomio caratteristico. Quindi, per il teorema 3.5.11, esiste una soluzione dell'equazione non omogenea della forma at^2e^{-2t}. Cerchiamo $a\in\mathbb{R}$ tale che la funzione

$$v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad v(t)=at^2e^{-2t}\,,$$

è soluzione dell'equazione (3.5.15). Si ha

$$\begin{aligned}
v'(t)&=2ate^{-2t}-2at^2e^{-2t}=(-2at^2+2at)e^{-2t}\,,\\
v''(t)&=(-4at+2a)e^{-2t}-2(-2at^2+2at)e^{-2t}=(4at^2-8at+2a)e^{-2t}\,.
\end{aligned}$$

Quindi v è soluzione dell'equazione se e solo se

$$(4at^2-8at+2a)e^{-2t}+4(-2at^2+2at)e^{-2t}+4at^2e^{-2t}=4e^{-2t}\,,$$

cioè

$$2ae^{-2t}=4e^{-2t}\,,$$

che è verificata se e solo $2a=4$, cioè $a=2$. Pertanto la funzione $t\mapsto 2t^2e^{-2t}$ è soluzione dell'equazione (3.5.17) e l'integrale generale di tale equazione è

$$\left\{t\mapsto c_1e^{-2t}+c_2te^{-2t}+2t^2e^{-2t}\;\middle|\; c_1,c_2\in\mathbb{R}\right\}. \qquad ◀$$

Nel caso reale, con considerazioni analoghe a quelle fatte per passare dal teorema 3.5.3 al teorema 3.5.7, dal teorema 3.5.11 si ottiene il seguente teorema.

3.5.15 Teorema

Siano $a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}\in\mathbb{R}$, $\mu\in\mathbb{R}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta\in\mathbb{R}^+$ e r,r_1,r_2 polinomi.

Se μ non è radice del polinomio caratteristico dell'equazione (3.5.2), allora esiste un polinomio s di grado minore o uguale a quello di r tale che la funzione

$$u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad u(t)=s(t)e^{\mu t}\,,$$

è soluzione dell'equazione non omogenea

$$y^{(n)}(t)+\sum_{j=0}^{n-1}a_jy^{(j)}(t)=r(t)e^{\mu t}\,. \tag{3.5.18}$$

Se μ è radice di molteplicità m del polinomio caratteristico dell'equazione (3.5.2), allora esiste un polinomio s, di grado minore o uguale a quello di r, tale che la funzione

$$u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad u(t) = t^m s(t) e^{\mu t},$$

è soluzione dell'equazione non omogenea (3.5.18).

Se $\alpha + i\beta$ non è radice del polinomio caratteristico dell'equazione (3.5.2), allora esistono due polinomi s_1 e s_2 di grado minore o uguale al massimo tra il grado di r_1 e quello di r_2 tali che la funzione

$$u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad u(t) = \big(s_1(t)\cos(\beta t) + s_2(t)\sin(\beta t)\big)e^{\alpha t},$$

è soluzione dell'equazione non omogenea

$$y^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j y^{(j)}(t) = \big(r_1(t)\cos(\beta t) + r_2(t)\sin(\beta t)\big)e^{\alpha t}. \tag{3.5.19}$$

Se $\alpha + i\beta$ è radice di molteplicità m del polinomio caratteristico dell'equazione (3.5.2), allora esistono due polinomi s_1 e s_2 di grado minore o uguale al massimo tra il grado di r_1 e quello di r_2 tali che la funzione

$$u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad u(t) = t^m\big(s_1(t)\cos(\beta t) + s_2(t)\sin(\beta t)\big)e^{\alpha t},$$

è soluzione dell'equazione non omogenea (3.5.19).

3.5.16 Esempio. Consideriamo l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti non omogenea

$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 5\cos t. \tag{3.5.20}$$

L'equazione omogenea associata è $y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 0$; nell'esempio 3.5.5 abbiamo stabilito che il polinomio caratteristico ha la radice doppia -2, quindi un sistema fondamentale di soluzioni è

$$\{t \mapsto e^{-2t}, t \mapsto t e^{-2t}\}.$$

Il termine noto è prodotto di una costante (cioè di un polinomio di grado 0) per la funzione coseno, i non è radice del polinomio caratteristico. Quindi, per il teorema 3.5.15, esiste una soluzione dell'equazione non omogenea della forma $a\cos t + b\sin t$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

Cerchiamo quindi $a, b \in \mathbb{R}$ tali che la funzione

$$v: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad v(t) = a\cos t + b\sin t,$$

è soluzione dell'equazione (3.5.20). Si ha

$$v'(t) = -a\sin t + b\cos t,$$
$$v''(t) = -a\cos t - b\sin t.$$

Quindi v è soluzione dell'equazione se e solo se

$$-a\cos t - b\sin t + 4(-a\sin t + b\cos t) + 4(a\cos t + b\sin t) = 5\cos t\,,$$

cioè

$$(3a+4b)\cos t + (3b-4a)\sin t = 5\cos t\,.$$

Questa uguaglianza è verificata se e solo a e b sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 3a+4b=5\,,\\ 3b-4a=0\,. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava $b=(4/3)a$, sostituendo nella prima si ha $(25/3)a=5$, quindi $a=3/5$ e $b=4/5$. Pertanto la funzione $t\mapsto(3/5)\cos t+(4/5)\sin t$ è soluzione dell'equazione (3.5.20) e l'integrale generale di tale equazione è

$$\left\{t\mapsto c_1e^{-2t}+c_2te^{-2t}+\frac{3}{5}\cos t+\frac{4}{5}\sin t \,\middle|\, c_1,c_2\in\mathbb{R}\right\}. \qquad \blacktriangleleft$$

3.5.17 Esempio. Consideriamo l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti non omogenea

$$y''(t)+2y'(t)+2y(t)=e^t\sin t\,. \tag{3.5.21}$$

L'equazione omogenea associata è $y''(t)+2y'(t)+2y(t)=0$; nell'esempio 3.5.8 abbiamo stabilito che il polinomio caratteristico ha le radici complesse $-1\pm i$, quindi un sistema fondamentale di soluzioni è

$$\{t\mapsto e^{-t}\cos t, t\mapsto e^{-t}\sin t\}\,.$$

Il termine noto è prodotto di un esponenziale per la funzione seno, $1+i$ non è radice del polinomio caratteristico. Quindi, per il teorema 3.5.15, esiste una soluzione dell'equazione non omogenea della forma $ae^t\cos t+be^t\sin t$, con $a,b\in\mathbb{R}$.

Cerchiamo quindi $a,b\in\mathbb{R}$ tali che la funzione

$$v\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad v(t)=ae^t\cos t+be^t\sin t\,,$$

è soluzione dell'equazione (3.5.21). Si ha

$$\begin{aligned} v'(t)&=ae^t\cos t-ae^t\sin t+be^t\sin t+be^t\cos t=(a+b)e^t\cos t+(-a+b)e^t\sin t\,,\\ v''(t)&=(a+b)e^t\cos t-(a+b)e^t\sin t+(-a+b)e^t\sin t+(-a+b)e^t\cos t=\\ &=2be^t\cos t-2ae^t\sin t\,. \end{aligned}$$

Quindi v è soluzione dell'equazione se e solo se

$$2be^t\cos t-2ae^t\sin t+2\big((a+b)e^t\cos t+(-a+b)e^t\sin t\big)+2(ae^t\cos t+be^t\sin t)=e^t\sin t\,,$$

cioè

$$(4a+4b)e^t\cos t+(-4a+4b)e^t\sin t=e^t\sin t\,.$$

Questa uguaglianza è verificata se e solo a e b sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 4a + 4b = 0\,, \\ -4a + 4b = 1\,. \end{cases}$$

Sommando membro a membro si ottiene $8b = 1$, quindi $b = 1/8$; allora dalla prima equazione si ottiene $a = -1/8$. Pertanto la funzione $t \mapsto -(1/8)e^t \cos t + (1/8)e^t \sin t$ è soluzione dell'equazione (3.5.21) e l'integrale generale di tale equazione è

$$\left\{ t \mapsto c_1 e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t} \sin t - \frac{1}{8}\, e^t \cos t + \frac{1}{8}\, e^t \sin t \;\middle|\; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}. \qquad \blacktriangleleft$$

3.5.18 Esempio. Consideriamo l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti non omogenea

$$y^{(4)}(t) + 2y''(t) + y(t) = 4\cos t - 2\sin t\,. \tag{3.5.22}$$

L'equazione omogenea associata è $y^{(4)}(t)+2y''(t)+y(t)=0$; nell'esempio 3.5.10 abbiamo stabilito che il polinomio caratteristico ha le radici complesse doppie i e $-i$, quindi un sistema fondamentale di soluzioni è

$$\{t \mapsto \cos t, t \mapsto t\cos t, t \mapsto \sin t, t \mapsto t\sin t\}.$$

Il termine noto è una combinazione lineare delle funzioni coseno e seno, i è radice doppia del polinomio caratteristico. Quindi, per il teorema 3.5.15, esiste una soluzione dell'equazione non omogenea della forma $t^2(a\cos t + b\sin t)$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

Cerchiamo quindi $a, b \in \mathbb{R}$ tali che la funzione

$$v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad v(t) = t^2(a\cos t + b\sin t),$$

è soluzione dell'equazione (3.5.22). Si ha

$$\begin{aligned}
v'(t) &= 2t(a\cos t + b\sin t) + t^2(-a\sin t + b\cos t) = \\
&= (bt^2 + 2at)\cos t + (-at^2 + 2bt)\sin t\,, \\
v''(t) &= (2bt + 2a)\cos t - (bt^2 + 2at)\sin t + (-2at + 2b)\sin t + (-at^2 + 2bt)\cos t = \\
&= (-at^2 + 4bt + 2a)\cos t + (-bt^2 - 4at + 2b)\sin t\,, \\
v'''(t) &= (-2at + 4b)\cos t - (-at^2 + 4bt + 2a)\sin t + \\
&\qquad\qquad + (-2bt - 4a)\sin t + (-bt^2 - 4at + 2b)\cos t = \\
&= (-bt^2 - 6at + 6b)\cos t + (at^2 - 6bt - 6a)\sin t\,, \\
v^{(4)}(t) &= (-2bt - 6a)\cos t - (-bt^2 - 6at + 6b)\sin t + \\
&\qquad\qquad + (2at - 6b)\sin t + (at^2 - 6bt - 6a)\cos t = \\
&= (at^2 - 8bt - 12a)\cos t + (bt^2 + 8at - 12b)\sin t\,.
\end{aligned}$$

Quindi v è soluzione dell'equazione se e solo se

$$\begin{aligned}&(at^2-8bt-12a)\cos t+(bt^2+8at-12b)\sin t+\\&\qquad+2\big((-at^2+4bt+2a)\cos t+(-bt^2-4at+2b)\sin t\big)+t^2(a\cos t+b\sin t)=\\&\qquad\qquad=4\cos t-2\sin t\,,\end{aligned}$$

cioè

$$-8a\cos t-8b\sin t=4\cos t-2\sin t\,.$$

Questa uguaglianza è verificata se $-8a=4$ e $-8b=-2$, cioè $a=-1/2$ e $b=1/4$. Pertanto la funzione $t\mapsto-(1/2)t^2\cos t+(1/4)t^2\sin t$ è soluzione dell'equazione (3.5.22) e l'integrale generale di tale equazione è

$$\left\{t\mapsto c_1\cos t+c_2t\cos t+c_3\sin t+c_4t\sin t-\frac{1}{2}t^2\cos t+\frac{1}{4}t^2\sin t\,\middle|\,c_1,c_2,c_3,c_4\in\mathbb{R}\right\}.\quad\blacktriangleleft$$

3.5.2 Sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

Consideriamo un sistema di equazioni differenziali lineare del primo ordine in cui la matrice dei coefficienti non dipende da t; come indicato sopra, consideriamo il sistema in ambito complesso. Abbiamo quindi il sistema

$$\boldsymbol{y}'(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(t)+\boldsymbol{b}(t),\tag{3.5.23}$$

dove $\boldsymbol{A}\in\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ e $\boldsymbol{b}\in C(J,\mathbb{C}^n)$, con $J\subseteq\mathbb{R}$ intervallo.

Un sistema di questo tipo è detto **sistema di equazioni differenziali lineare a coefficienti costanti**.

Cerchiamo le soluzioni del sistema omogeneo

$$\boldsymbol{y}'(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(t).\tag{3.5.24}$$

Come nel caso delle equazioni, cerchiamo soluzioni, non identicamente nulle, in forma esponenziale, cioè del tipo

$$\boldsymbol{v}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}^n\,,\qquad\boldsymbol{v}(t)=e^{\lambda t}\boldsymbol{c}\,,$$

dove $\lambda\in\mathbb{C}$ e $\boldsymbol{c}\in\left(\mathbb{C}^n\right)^*$. Poiché $\boldsymbol{v}'(t)=\lambda e^{\lambda t}\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{v}$ è soluzione del sistema (3.5.24) se e solo se, $\forall t\in\mathbb{R}$, si ha $\lambda e^{\lambda t}\boldsymbol{c}=e^{\lambda t}\boldsymbol{A}\boldsymbol{c}$. Questo è verificato se e solo se $\lambda\boldsymbol{c}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{c}$, cioè λ è un autovalore di $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{c}$ è un autovettore relativo a λ. Pertanto, se $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_r$ sono gli autovalori di $\boldsymbol{A}$ e, per $k=1,2,\dots,r$, $\{\boldsymbol{c}_{k,1},\boldsymbol{c}_{k,2},\dots,\boldsymbol{c}_{k,m_k}\}$ è una base dell'autospazio relativo a λ_k, allora abbiamo le soluzioni

$$t\mapsto e^{\lambda_k}\boldsymbol{c}_{k,j}\,,\qquad k=1,2,\dots,r\,,\quad j=1,2,\dots,m_k\,.$$

I valori di tali soluzioni per $t=0$ sono gli autovettori $\boldsymbol{c}_{k,j}$, quindi sono linearmente indipendenti, pertanto le soluzioni sono linearmente indipendenti. Il numero totale di queste soluzioni è la somma delle molteplicità geometriche degli autospazi di $\boldsymbol{A}$.

Se ogni autovalore di A ha molteplicità geometrica uguale a quella algebrica, cioè se esiste una base di $\mathbb{C}^n$ costituita da autovettori delle matrice A, in questo modo otteniamo n soluzioni del sistema (3.5.24) linearmente indipendenti, quindi abbiamo un sistema fondamentale di soluzioni.

Studiando le equazioni differenziali a coefficienti costanti (v.sottosezione 3.5.1) abbiamo visto che, oltre alle soluzioni di tipo esponenziale, in alcuni casi vi sono soluzioni che sono prodotto di un polinomio per un esponenziale. Cerchiamo soluzioni dello stesso tipo per i sistemi per cui non esiste una base di autovettori di A. Quindi consideriamo funzioni del tipo

$$\boldsymbol{v}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}^n, \qquad \boldsymbol{v}(t)=e^{\lambda t}\sum_{\ell=0}^{q} t^{\ell}\boldsymbol{c}_{\ell},$$

con $q\in\mathbb{N}^*$ e $\boldsymbol{c}_0,\boldsymbol{c}_1,\dots,\boldsymbol{c}_q\in\mathbb{C}^n$, $\boldsymbol{c}_q\neq\mathbf{0}$, e imponiamo che verifichino il sistema (3.5.24). Si ha, $\forall t\in\mathbb{R}$,

$$\boldsymbol{v}'(t)=\lambda e^{\lambda t}\sum_{\ell=0}^{q} t^{\ell}\boldsymbol{c}_{\ell}+e^{\lambda t}\sum_{\ell=1}^{q}\ell t^{\ell-1}\boldsymbol{c}_{\ell}=e^{\lambda t}\Big(\lambda\sum_{\ell=0}^{q} t^{\ell}\boldsymbol{c}_{\ell}+\sum_{\ell=0}^{q-1}(\ell+1)t^{\ell}\boldsymbol{c}_{\ell+1}\Big);$$

pertanto $\boldsymbol{v}$ è soluzione del sistema (3.5.24) se e solo se, $\forall t\in\mathbb{R}$, si ha

$$e^{\lambda t}\Big(\lambda\sum_{\ell=0}^{q} t^{\ell}\boldsymbol{c}_{\ell}+\sum_{\ell=0}^{q-1}(\ell+1)t^{\ell}\boldsymbol{c}_{\ell+1}\Big)=e^{\lambda t}\sum_{\ell=0}^{q} t^{\ell}A\boldsymbol{c}_{\ell}.$$

Ciò equivale a

$$\sum_{\ell=0}^{q-1}(\ell+1)t^{\ell}\boldsymbol{c}_{\ell+1}=\sum_{\ell=0}^{q} t^{\ell}(A-\lambda I)\boldsymbol{c}_{\ell},$$

cioè, per il principio di identità dei polinomi,

$$\begin{aligned}&(A-\lambda I)c_{\ell}=(\ell+1)\boldsymbol{c}_{\ell+1}, &&\text{per } \ell=0,1,\dots,q-1,\\ &(A-\lambda I)\boldsymbol{c}_q=\mathbf{0}.\end{aligned}$$

Quindi se $\boldsymbol{v}$ è soluzione, allora λ è un autovalore di A e $\boldsymbol{c}_q$ è un autovettore relativo a λ. Inoltre si ha

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c}_1&=(A-\lambda I)\boldsymbol{c}_0,\\ \boldsymbol{c}_2&=\frac{1}{2}(A-\lambda I)\boldsymbol{c}_1=\frac{1}{2}(A-\lambda I)^2\boldsymbol{c}_0,\\ \boldsymbol{c}_3&=\frac{1}{3}(A-\lambda I)\boldsymbol{c}_2=\frac{1}{3!}(A-\lambda I)^3\boldsymbol{c}_0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ \boldsymbol{c}_q&=\frac{1}{q}(A-\lambda I)\boldsymbol{c}_{q-1}=\frac{1}{q!}(A-\lambda I)^q\boldsymbol{c}_0,\\ \mathbf{0}&=(A-\lambda I)\boldsymbol{c}_q=\frac{1}{q!}(A-\lambda I)^{q+1}\boldsymbol{c}_0.\end{aligned}$$

Quindi, per $\ell = 1,2,\dots,q$, risulta

$$(A-\lambda I)^{q-\ell+1}c_\ell = \frac{1}{\ell!}(A-\lambda I)^{q-\ell+1}(A-\lambda I)^\ell c_0 = \frac{1}{\ell!}(A-\lambda I)^{q+1}c_0 = 0;$$

pertanto i c_ℓ sono autovettori generalizzati relativi all'autovalore λ e risulta

$$v(t) = e^{\lambda t}\sum_{\ell=0}^{q}\frac{t^\ell}{\ell!}(A-\lambda I)^\ell c_0, \tag{3.5.25}$$

dove q è tale che $(A-\lambda I)^q c_0 \neq 0$ e $(A-\lambda I)^{q+1}c_0 = 0$. Osserviamo che risulta $v(0) = c_0$. Quindi se $c \in \mathbb{C}^n$ è un autovettore generalizzato di A, allora esiste una soluzione del sistema che vale c in 0. Poiché per ogni matrice A esiste una base di $\mathbb{C}^n$ costituita da autovettori generalizzati di A, esiste un sistema fondamentale di soluzioni del sistema (3.5.24) costituito da soluzioni di questo tipo.

Poiché $(A-\lambda I)^q c_0 \neq 0$, nell'uguaglianza (3.5.25), deve essere $q \leq m-1$, dove m è la molteplicità algebrica dell'autovalore λ. Inoltre, se $\ell > q$, si ha $(A-\lambda I)^\ell c_0 = 0$, pertanto la somma non cambia se si sostituisce a q il numero $m-1$.

Abbiamo così dimostrato il seguente teorema.

3.5.19 Teorema

Sia $A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. Indichiamo con $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ gli autovalori di A, per $k = 1,2,\dots,r$ siano m_k la molteplicità algebrica di λ_k e $\{c_{k,1}, c_{k,2}, \dots c_{k,m_k}\}$ una base per l'autospazio generalizzato di A relativo a λ_k. Allora

$$\left\{ t \mapsto e^{\lambda_k t}\sum_{\ell=0}^{m_k-1}\frac{t^\ell}{\ell!}(A-\lambda_k I)^\ell c_{k,j} \,\middle|\, k = 1,2,\dots,r,\ j = 1,2,\dots,m_k \right\}$$

è un sistema fondamentale di soluzioni del sistema (3.5.24).

3.5.20 Osservazione. Questo teorema assicura che il sistema (3.5.24) ha un sistema fondamentale di soluzioni costituita da funzioni che sono il prodotto di un polinomio per un esponenziale. Se c è il valore di una di esse in 0, allora c è un autovalore generalizzato della matrice A e il grado del polinomio è il più grande esponente k tale che $(A-\lambda I)^k c \neq 0$, dove λ è l'autovettore corrispondente a c.

In particolare, se c è un autovalore il polinomio ha grado 0.

Per semplificare le soluzioni è utile considerare autovalori generalizzati per cui l'esponente k è il minore possibile. ◀

3.5.21 Esempio. Consideriamo il sistema di equazioni differenziali lineare omogeneo a coefficienti costanti $y' = Ay$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mediante il teorema 3.5.19, determiniamo una matrice fondamentale di questo sistema.

Il polinomio caratteristico di A è

$$\det(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}2-\lambda & 1\\ 1 & 2-\lambda\end{pmatrix}=(2-\lambda)^2-1=\lambda^2-4\lambda+3\,.$$

Le radici sono

$$\lambda=2\pm\sqrt{2^2-3}=2\pm 1=\begin{cases}1\,,\\ 3\,.\end{cases}$$

Gli autovettori relativi all'autovalore 1 sono gli $x\in\mathbb{R}^2$ tali che $(A-I)x=0$, cioè

$$\begin{cases}x_1+x_2=0\,,\\ x_1+x_2=0\,.\end{cases}$$

Entrambe le equazioni sono verificate se e solo se $x_2=-x_1$; quindi l'autospazio relativo all'autovettore 1 è generato dal vettore $(1,-1)$. Pertanto la funzione $t\mapsto e^t(1,-1)$ è soluzione del sistema.

Gli autovettori relativi all'autovalore 3 sono gli $x\in\mathbb{R}^2$ tali che $(A-3I)x=0$, cioè

$$\begin{cases}-x_1+x_2=0\,,\\ x_1-x_2=0\,.\end{cases}$$

Entrambe le equazioni sono verificate se e solo se $x_2=x_1$; quindi l'autospazio relativo all'autovettore 3 è generato dal vettore $(1,1)$. Pertanto la funzione $t\mapsto e^{3t}(1,1)$ è soluzione del sistema.

Quindi una matrice fondamentale è

$$\Phi:\mathbb{C}\to\mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{R}),\qquad \Phi(t)=\begin{pmatrix}e^t & e^{3t}\\ -e^t & e^{3t}\end{pmatrix}.$$ ◀

3.5.22 Esempio. Consideriamo il sistema di equazioni differenziali lineare omogeneo a coefficienti costanti $y'=Ay$, dove

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Mediante il teorema 3.5.19, determiniamo una matrice fondamentale di questo sistema.

Il polinomio caratteristico di A è

$$\det(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}2-\lambda & -1\\ 1 & -\lambda\end{pmatrix}=-(2-\lambda)\lambda+1=\lambda^2-2\lambda+1\,.$$

Quindi l'unica radice è 1.

Gli autovettori relativi all'autovalore 1 sono gli $x\in\mathbb{R}^2$ tali che $(A-I)x=0$, cioè

$$\begin{cases}x_1-x_2=0\,,\\ x_1-x_2=0\,.\end{cases}$$

Entrambe le equazioni sono verificate se e solo se $x_2=x_1$; quindi l'autospazio relativo all'autovettore 1 ha dimensione 1 ed è generato dal vettore $(1,1)$. Pertanto la funzione $t\mapsto e^t(1,1)$ è soluzione del sistema.

Per determinare un'altra soluzione, linearmente indipendente rispetto a questa, cerchiamo un autovettore generalizzato relativo all'autovalore 1, linearmente indipendente da $(1,1)$. Poiché la matrice ha un solo autovalore, l'autospazio generalizzato è $\mathbb{R}^2$, quindi possiamo scegliere il vettore $(1,0)$. Si ha

$$(A-I)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Pertanto si ha la soluzione

$$t\mapsto te^t(1,1)+e^t(1,0)=\big((t+1)e^t,te^t\big).$$

Quindi una matrice fondamentale è

$$\Phi\colon\mathbb{C}\to\mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{R}),\qquad \Phi(t)=\begin{pmatrix}e^t&(t+1)e^t\\e^t&te^t\end{pmatrix}.$$ ◀

3.5.23 Esempio. Consideriamo il sistema di equazioni differenziali lineare omogeneo a coefficienti costanti $y'=Ay$, dove

$$A=\begin{pmatrix}0&1&-2\\1&0&-2\\1&1&-3\end{pmatrix}.$$

Mediante il teorema 3.5.19, determiniamo una matrice fondamentale di questo sistema. Il polinomio caratteristico di A è

$$\det(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}-\lambda&1&-2\\1&-\lambda&-2\\1&1&-3-\lambda\end{pmatrix}=-\lambda^2(3+\lambda)-2-2-2\lambda-2\lambda+3+\lambda=$$
$$=-\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda-1=-(\lambda+1)^3.$$

Quindi l'unica radice è -1.

Gli autovettori relativi all'autovalore -1 sono gli $x\in\mathbb{R}^3$ tali che $(A+I)x=0$, cioè

$$\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&1&-2\\1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Ciò è verificato se e solo se $x_1+x_2-2x_3=0$, quindi l'autospazio relativo all'autovettore -1 è $\{x\in\mathbb{R}^3\mid x_1+x_2-2x_3=0\}$; tale spazio ha dimensione 2 ed è generato dai vettori $(1,1,1)$ e $(1,-1,0)$. Pertanto le funzioni $t\mapsto(e^{-t},e^{-t},e^{-t})$ e $t\mapsto(e^{-t},-e^{-t},0)$ sono due soluzioni linearmente indipendenti del sistema.

Per determinare un'altra soluzione, linearmente indipendente rispetto a queste, cerchiamo un autovettore generalizzato relativo all'autovalore -1, che non sia un autovettore. Poiché la matrice ha un solo autovalore, l'autospazio generalizzato è $\mathbb{R}^3$, quindi possiamo scegliere qualunque vettore che non sia un autovettore, ad esempio $(1,0,0)$. Si ha

$$(A+I)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&1&-2\\1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Pertanto, per il teorema 3.5.19, abbiamo la soluzione

$$t\mapsto te^{-t}(1,1,1)+e^{-t}(1,0,0)=\big((t+1)e^{-t},te^{-t},te^{-t}\big).$$

Quindi una matrice fondamentale è

$$\Phi\colon\mathbb{C}\to\mathscr{M}_{3,3}(\mathbb{R}),\qquad \Phi(t)=\begin{pmatrix}e^{-t}&e^{-t}&(t+1)e^{-t}\\e^{-t}&-e^{-t}&te^{-t}\\e^{-t}&0&te^{-t}\end{pmatrix}.$$ ◀

3.5.24 Esempio. Consideriamo il sistema di equazioni differenziali lineare omogeneo a coefficienti costanti $y'=Ay$, dove

$$A=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-1&-1&1\\-1&0&0\end{pmatrix}.$$

Mediante il teorema 3.5.19, determiniamo una matrice fondamentale di questo sistema. Il polinomio caratteristico di A è

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}-2-\lambda&1&0\\-1&-1-\lambda&1\\-1&0&-\lambda\end{pmatrix}&=-\lambda(2+\lambda)(1+\lambda)-1-\lambda=\\&=-\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda-1=-(\lambda+1)^3.\end{aligned}$$

Quindi l'unica radice è -1.

Gli autovettori relativi all'autovalore -1 sono gli $x\in\mathbb{R}^3$ tali che $(A+I)x=0$, cioè

$$\begin{pmatrix}-1&1&0\\-1&0&1\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Abbiamo le due equazioni $-x_1+x_2=0$ e $-x_1+x_3=0$, cioè $x_1=x_2=x_3$; quindi l'autospazio relativo all'autovettore -1 è $\{(x,x,x)\,|\,x\in\mathbb{R}\}$; tale spazio ha dimensione 1 ed è generato dal vettore $(1,1,1)$. Pertanto la funzione $t\mapsto(e^{-t},e^{-t},e^{-t})$ è soluzione del sistema.

Poiché A ha solo l'autovalore -1, l'autospazio generalizzato relativo a tale autovalore è $\mathbb{R}^3$. Per determinare l'integrale generale del sistema è sufficiente scegliere due vettori di $\mathbb{R}^3$ che, insieme a $(1,1,1)$, costituiscano una base e considerare le soluzioni costruite a partire da tali vettori come indicato nel teorema 3.5.19. Come visto nell'osservazione 3.5.20, la soluzione è più semplice se il vettore scelto appartiene al nucleo di $(A-\lambda I)^k$ per k minore possibile. Determiniamo $\ker(A+I)^2$. Si ha

$$(A+I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto $\ker(A+I)^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = x_3\}$. Questo è uno spazio vettoriale di dimensione 2 che ovviamente contiene $\ker(A+I)$; un vettore di tale spazio vettoriale che assieme a $(1,1,1)$ ne costituisca una base è $(1,0,0)$. Si ha

$$(A+I)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto abbiamo la soluzione

$$te^{-t}(-1,-1,-1) + e^{-t}(1,0,0) = \big((-t+1)e^{-t}, -te^{-t}, -te^{-t}\big).$$

Una terza soluzione che, insieme alle due già trovate, costituisca un integrale generale del sistema può essere determinata con la formula (3.5.25) a partire da un vettore che, insieme a $(1,1,1)$ e $(1,0,0)$, costituisce una base di $\mathbb{R}^3$. Scegliamo $(0,1,0)$. Si ha

$$(A+I)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e sappiamo che $(A+I)(1,0,0) = (-1,-1,-1)$, pertanto abbiamo la soluzione

$$t^2e^{-t}(-1,-1,-1) + te^{-t}(1,0,0) + e^{-t}(0,1,0) = \big((-t^2+t)e^{-t}, (-t^2+1)e^{-t}, -t^2e^{-t}\big).$$

Quindi una matrice fondamentale è

$$\Phi\colon \mathbb{C} \to \mathscr{M}_{3,3}(\mathbb{R}), \qquad \Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & (-t+1)e^{-t} & (-t^2+t)e^{-t} \\ e^{-t} & -te^{-t} & (-t^2+1)e^{-t} \\ e^{-t} & -te^{-t} & -t^2e^{-t} \end{pmatrix}. \qquad \blacktriangleleft$$

Se il sistema è in campo reale, cioè $A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, gli autovalori (in senso complesso) di A possono non essere tutti reali, in tal caso il sistema fondamentale descritto da questo teorema non è reale. Per la teoria generale dei sistemi di equazioni lineari esiste un sistema fondamentale reale, che può facilmente essere determinato a partire da quello complesso.

Se $A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ e $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ è soluzione del sistema (3.5.24), allora anche la funzione

$$w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n, \qquad w(t) = \overline{v(t)},$$

è soluzione, perché, $\forall t \in \mathbb{R}$, risulta

$$w'(t) = \overline{v'(t)} = \overline{Av(t)} = \overline{A}\,\overline{v(t)} = A\overline{v(t)} = Aw(t),$$

perché A ha coefficienti reali. Poiché

$$\mathrm{Re}\big(v(t)\big)=\frac{1}{2}\big(v(t)+w(t)\big), \qquad \mathrm{Im}\big(v(t)\big)=\frac{1}{2i}\big(v(t)-w(t)\big),$$

le funzioni $\mathrm{Re}\,v$ e $\mathrm{Im}\,v$ sono soluzioni reali del sistema. Esse sono linearmente indipendenti. Infatti se $d_1,d_2\in\mathbb{R}$ sono tali che $d_1\,\mathrm{Re}\,v+d_2\,\mathrm{Im}\,v=0$, allora risulta

$$0=\frac{d_1}{2}(v+w)+\frac{d_2}{2i}(v-w)=\frac{d_1-id_2}{2}\,v+\frac{d_1+id_2}{2}\,w\,,$$

ma v e w sono linearmente indipendenti, quindi $(d_1-id_2)/2=(d_1+id_2)/2=0$, da cui segue $d_1=d_2=0$. Per cui, sostituendo alla coppia di soluzioni linearmente indipendenti v e w le soluzioni $\mathrm{Re}\,v$ e $\mathrm{Im}\,v$, abbiamo ancora un sistema fondamentale di soluzioni.

Pertanto dal teorema 3.5.19 otteniamo il seguente teorema.

3.5.25 Teorema

Sia $A\in\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Siano $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r$ gli autovalori reali di A, con molteplicità algebrica $m_1,m_2,\ldots,m_r$ rispettivamente, e $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_s$, con $\mathrm{Im}\,\mu_k>0$, gli autovalori appartenenti a $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, con molteplicità algebrica $n_1,n_2,\ldots,n_s$; per $k=1,2,\ldots,r$ sia $\{\boldsymbol{c}_{k,1},\boldsymbol{c}_{k,2},\ldots\boldsymbol{c}_{k,m_k}\}$ una base per l'autospazio generalizzato di A relativo a λ_k e per $k=1,2,\ldots,s$ sia $\{\boldsymbol{d}_{k,1},\boldsymbol{d}_{k,2},\ldots\boldsymbol{d}_{k,n_k}\}$ una base per l'autospazio generalizzato di A relativo a μ_k. Allora, posto, per $k=1,2,\ldots,r$ e $j=1,2,\ldots,m_k$,

$$v_{k,j}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad v_{k,j}(t)=e^{\lambda_k t}\sum_{\ell=0}^{m_k-1}\frac{t^\ell}{\ell!}(A-\lambda_k I)^\ell \boldsymbol{c}_{k,j}$$

e per $k=1,2,\ldots,s$ e $j=1,2,\ldots,n_k$,

$$w_{k,j}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad w_{k,j}(t)=e^{\mu_k t}\sum_{\ell=0}^{n_k-1}\frac{t^\ell}{\ell!}(A-\lambda_k I)^\ell \boldsymbol{d}_{k,j}\,,$$

$$\big\{v_{k,j}\,\big|\,k=1,2,\ldots,r,\ j=1,2,\ldots,m_k\big\}\cup\big\{\mathrm{Re}\,w_{k,j}\,\big|\,k=1,2,\ldots,s,\ j=1,2,\ldots,n_k\big\}\cup$$
$$\cup\big\{\mathrm{Im}\,w_{k,j}\,\big|\,k=1,2,\ldots,s,\ j=1,2,\ldots,n_k\big\},$$

è un sistema fondamentale di soluzioni reali del sistema (3.5.24).

3.5.26 Esempio. Consideriamo il sistema di equazioni differenziali lineare omogeneo a coefficienti costanti $y'=Ay$, dove

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Mediante il teorema 3.5.19, determiniamo una matrice fondamentale di questo sistema. Il polinomio caratteristico di A è

$$\det(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}-\lambda & 1\\ -1 & -\lambda\end{pmatrix}=\lambda^2+1\,.$$

Le radici sono i e $-i$, entrambe di molteplicità 1.

Gli autovettori relativi all'autovalore i sono gli $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^2$ tali che $(\boldsymbol{A} - i\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, cioè

$$\begin{cases} -ix_1 + x_2 = 0, \\ -x_1 - ix_2 = 0. \end{cases}$$

Entrambe le equazioni sono verificate se e solo se $x_2 = ix_1$; quindi l'autospazio relativo all'autovettore i è generato dal vettore $(1, i)$. Pertanto la funzione $t \mapsto e^{it}(1, i)$ è soluzione del sistema.

Gli autovettori relativi all'autovalore $-i$ sono gli $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^2$ tali che $(\boldsymbol{A} + i\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, cioè

$$\begin{cases} ix_1 + x_2 = 0, \\ -x_1 + ix_2 = 0. \end{cases}$$

Entrambe le equazioni sono verificate se e solo se $x_2 = -ix_1$; quindi l'autospazio relativo all'autovettore $-i$ è generato dal vettore $(1, -i)$. Pertanto la funzione $t \mapsto e^{-it}(1, -i)$ è soluzione del sistema.

Notiamo che questa seconda soluzione è la coniugata della prima. Infatti, come già osservato sopra, se $\boldsymbol{v}$ è soluzione complessa di un sistema a coefficienti reali, allora anche $\overline{\boldsymbol{v}}$ è soluzione.

Quindi una matrice fondamentale in campo complesso è

$$\boldsymbol{\Phi}\colon \mathbb{C} \to \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C}), \qquad \boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} e^{it} & e^{-it} \\ ie^{it} & -ie^{-it} \end{pmatrix}.$$

Per il teorema 3.5.25 otteniamo una matrice fondamentale reale considerando le parti reali e i coefficienti dell'immaginario degli elementi della matrice fondamentale complessa. Consideriamo quindi la matrice che ha in prima colonna la parte reale e in seconda colonna il coefficiente dell'immaginario della prima colonna della matrice scritta sopra. Otteniamo così:

$$\boldsymbol{\Psi}\colon \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}), \qquad \boldsymbol{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$ ◀

3.5.27 Esempio. Consideriamo il sistema di equazioni differenziali lineare omogeneo a coefficienti costanti $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$, dove

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mediante il teorema 3.5.19, determiniamo una matrice fondamentale di questo sistema. Il polinomio caratteristico di $\boldsymbol{A}$ è

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= -\lambda \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ -2 & -\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 0 & -\lambda & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= -\lambda(-\lambda^3 + \lambda - 4\lambda) + (1-\lambda^2) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2+1)^2 .$$

Le radici sono i e $-i$, entrambe di molteplicità 2. Gli autovettori relativi all'autovalore i sono gli $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^4$ tali che $(\boldsymbol{A} - i\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, cioè

$$\begin{cases} -ix_1 + x_3 = 0, \\ -ix_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - ix_3 = 0 \\ -x_2 - ix_4 = 0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava $x_3 = ix_1$, dall'ultima $x_2 = -ix_4$; sommando alla seconda equazione l'ultima moltiplicata per $-i$ si ottiene $2x_3 - 2x_4 = 0$, cioè $x_3 = x_4$; sommando alla terza equazione la prima moltiplicata per i si ottiene $2x_1 - 2x_2 = 0$, cioè $x_1 = x_2$. Scelto $x_1 = 1$, si ricava quindi $x_2 = 1$, $x_3 = i$ e $x_4 = i$. Quindi l'autospazio relativo all'autovettore i ha dimensione 1 ed è generato dal vettore $(1,1,i,i)$. Pertanto la funzione $t \mapsto e^{it}(1,1,i,i)$ è soluzione del sistema.

Determiniamo l'autospazio generalizzato corrispondente a i. Sia $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^4$; $\boldsymbol{x}$ è autovettore generalizzato se e solo se $(\boldsymbol{A} - i\boldsymbol{I})^2\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, cioè

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} -i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -i & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -i & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -i & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -i & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -i \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2i & 0 \\ 2 & -4 & -4i & 2i \\ -2i & 4i & -4 & 2 \\ 0 & 2i & -2 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2x_2 - 2ix_3 \\ 2x_1 - 4x_2 - 4ix_3 + 2ix_4 \\ -2ix_1 + 4ix_2 - 4x_3 + 2x_4 \\ 2ix_2 - 2x_3 \end{pmatrix}.$$

La prima e l'ultima riga sono nulle se e solo se $x_3 = ix_2$. Sotto tale condizione la seconda e la terza riga sono nulle se e solo se $x_4 = ix_1$, Pertanto $\ker\big((\boldsymbol{A} - i\boldsymbol{I})^2\big)$ ha dimensione 2 ed è generato dai vettori $(1,0,0,i)$ e $(0,1,i,0)$. Poiché 2 è la molteplicità algebrica dell'autovettore i, questo è l'autospazio generalizzato.

Un vettore che insieme a $(1,1,i,i)$ formi una base dell'autospazio generalizzato è, ad esempio, il vettore $(1,0,0,i)$. Poiché si ha

$$(\boldsymbol{A} - i\boldsymbol{I}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -i & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -i & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ -i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

la funzione $t \mapsto e^{it}(-it+1, -it, t, t+i)$ è soluzione del sistema.

La matrice dei coefficienti è reale, quindi una funzione le cui componenti sono i coniugati delle componenti di una soluzione è ancora una soluzione. Perciò abbiamo le soluzioni $t \mapsto e^{-it}(1,1,-i,-i)$ e $t \mapsto e^{-it}(it+1, it, t, t-i)$.

Quindi una matrice fondamentale in campo complesso è

$$\boldsymbol{\Phi}\colon \mathbb{C} \to \mathscr{M}_{4,4}(\mathbb{C}), \qquad \boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} e^{it} & e^{-it} & (-it+1)e^{it} & (it+1)e^{-it} \\ e^{it} & e^{-it} & -ite^{it} & ite^{-it} \\ ie^{it} & -ie^{-it} & te^{it} & te^{-it} \\ ie^{it} & -ie^{-it} & (t+i)e^{it} & (t-i)te^{-it} \end{pmatrix}.$$

Per il teorema 3.5.25 otteniamo una matrice fondamentale reale considerando le parti reali e i coefficienti dell'immaginario degli elementi della matrice fondamentale complessa. Quindi una matrice fondamentale reale è

$$\boldsymbol{\Psi}\colon \mathbb{R} \to \mathscr{M}_{4,4}(\mathbb{R}), \qquad \boldsymbol{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & t\sin t + \cos t & -t\cos t + \sin t \\ \cos t & \sin t & t\sin t & -t\cos t \\ -\sin t & \cos t & t\cos t & t\sin t \\ -\sin t & \cos t & t\cos t - \sin t & t\sin t + \cos t \end{pmatrix}. \quad \blacktriangleleft$$

Indice analitico