Prova scritta di ANALISI MATEMATICA T-1 25/1/24
(Ingegneria dell'automazione)

COGNOME E NOME ....

1. Sia f la funzione definita da
$$f(x) = \log\big|2\cos(x^3\pi) + 5\sin(x^3\pi)\big| .$$
Calcolare $f'(1)$.

SOLUZIONE
Si ha
$$f'(x) = \frac{\operatorname{sgn}\big(2\cos(x^3\pi) + 5\sin(x^3\pi)\big)\big(-6x^2\pi\sin(x^3\pi) + 15x^2\pi\cos(x^3\pi)\big)}{\big|2\cos(x^3\pi) + 5\sin(x^3\pi)\big|} =$$
$$= \frac{-6x^2\pi\sin(x^3\pi) + 15x^2\pi\cos(x^3\pi)}{2\cos(x^3\pi) + 5\sin(x^3\pi)} ,$$
quindi
$$f'(1) = \frac{-15}{-2}\,\pi = \frac{15}{2}\,\pi .$$

2. Studiare, nel suo dominio naturale, la funzione definita da:
$$f(x) = 5\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan(x+4) .$$

SOLUZIONE
Il dominio naturale di f è $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
Non studiamo quando f si annulla, perché è piuttosto complicato.
Si ha
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} , \qquad \lim_{x\to0^-} f(x) = -\frac{5}{2}\pi + \arctan 4 ,$$
$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \frac{5}{2}\pi + \arctan 4, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} .$$
Quindi non vi sono asintoti verticali o obliqui, mentre le rette di equazione $y = -\pi/2$ e $y = \pi/2$ sono asintoti orizzontali.
f è derivabile in ogni punto del dominio e si ha
$$f'(x) = 5\frac{1}{(1/x)^2+1}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{(x+4)^2+1} = -\frac{5}{x^2+1} + \frac{1}{(x+4)^2+1} =$$
$$= \frac{-5x^2 - 40x - 80 - 5 + x^2 + 1}{(x^2+1)((x+4)^2+1)} = \frac{-4x^2 - 40x - 84}{(x^2+1)((x+4)^2+1)} =$$
$$= \frac{-4(x^2+10x+21)}{(x^2+1)((x+4)^2+1)} .$$

Studiamo il segno di $f'(x)$. Il denominatore è positivo nel dominio di f. Il numeratore si annulla per

$$x = -5 \pm \sqrt{5^2 - 21} = -5 \pm 2 = \begin{cases} -7 \\ -3\,. \end{cases}$$

Pertanto $f'(x) > 0$ per

$$x \in \left]-7, -3\right[$$

e $f'(x) < 0$ per

$$x \in \left]-\infty, -7\right[\cup \left]-3, +\infty\right[\setminus \{0\}\,.$$

Quindi f è crescente nell'intervallo $[-7, -3]$, è decrescente negli intervalli $\left]-\infty, -7\right]$, $\left[-3, 0\right[$ e $\left]0, +\infty\right[$. -3 è punto di massimo locale, -7 è punto di minimo locale.

Si ha

$$\begin{aligned} f(-7) &= -5 \arctan\left(\frac{1}{7}\right) - \arctan 3\,, \\ f(-3) &= -5 \arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan 1\,. \end{aligned}$$

3. Sapendo che

$$\begin{aligned} \log(1+y) &= y - \frac{1}{2}\,y^2 + o(y^2)\,, &\qquad \text{per } y \to 0\,, \\ \cosh y &= 1 + \frac{1}{2}\,y^2 + \frac{1}{24}\,y^4 + o(y^5)\,, &\qquad \text{per } y \to 0\,, \end{aligned}$$

calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\log\frac{x^8+3}{x^8-x^6}}\ \log\left(\sqrt{\frac{x^8+3}{x^8-x^6}}\right)\bigl(\log\bigl(\cosh(2e^{-x})\bigr) - 2e^{-2x}\bigr)\sqrt{x^8e^{6x} + x^6e^{8x}}\,.$$

SOLUZIONE

Per $x \to +\infty$ si ha

$$\sqrt{\log\frac{x^8+3}{x^8-x^6}} \sim \sqrt{\frac{x^8+3}{x^8-x^6} - 1} = \sqrt{\frac{3+x^6}{x^8-x^6}} \sim \sqrt{x^{-2}} = x^{-1}\,,$$

$$\log\left(\sqrt{\frac{x^8+3}{x^8-x^6}}\right) = \frac{1}{2}\log\frac{x^8+3}{x^8-x^6} \sim \frac{1}{2}\left(\frac{x^8+3}{x^8+x^6} - 1\right) = \frac{1}{2}\frac{3+x^6}{x^8-x^6} \sim \frac{1}{2}x^{-2}\,.$$

$$\begin{aligned} &\log\bigl(\cosh(2e^{-x})\bigr) = \log\left(1 + 2e^{-2x} + \frac{2}{3}e^{-4x} + o(e^{-4x})\right) = \\ &= 2e^{-2x} + \frac{2}{3}e^{-4x} + o(e^{-4x}) - \frac{1}{2}\left(2e^{-2x} + \frac{2}{3}e^{-4x} + o(e^{-4x})\right)^2 + o(e^{-4x}) = \\ &= 2e^{-2x} + \frac{2}{3}e^{-4x} - 2e^{-4x} + o(e^{-4x}) = 2e^{-2x} - \frac{4}{3}e^{-4x} + o(e^{-4x})\,, \end{aligned}$$

quindi

$$\log\bigl(\cosh(2e^{-x})\bigr) - 2e^{-2x} = 2e^{-2x} - \frac{4}{3}e^{-4x} + o(e^{-4x}) - 2e^{-2x} \sim -\frac{4}{3}e^{-4x}\,.$$

Infine

$$\sqrt{x^8e^{6x} + x^6e^{8x}} \sim \sqrt{x^6e^{8x}} = x^3e^{4x}\,.$$

Pertanto, per $x \to +\infty$, si ha

$$\sqrt{\log\frac{x^8+b}{x^8-x^6}}\ \log\left(\sqrt{\frac{x^8+b}{x^8-x^6}}\right)\bigl(\log\bigl(\cosh(2e^{-x})\bigr) - 2e^{-2x}\bigr)\sqrt{x^8e^{6x}+x^6e^{8x}} \sim$$

$$\sim x^{-1}\frac{1}{2}x^{-2}\left(-\frac{4}{3}e^{-4x}\right)x^3e^{4x} = -\frac{2}{3}\,.$$

Questo è il limite cercato.

4. Calcolare

$$\int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos^2 x}\log(3\sin x + 2\cos x)\,dx\,.$$

SOLUZIONE

Possiamo integrare per parti, poiché conosciamo un aprimitiva del fattore $1/\cos^2 x$. Questo porta a un integrale di un quoziente di seni e coseni. Si ottiene

$$\bigl[\tan x \log(3\sin x + 2\cos x)\bigr]_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} \tan x\,\frac{3\cos x - 2\sin x}{3\sin x + 2\cos x}\,dx$$

Si può scrivere la funzione integranda rimasta come funzione della tangente e trasformare l'integrale nell'integrale di una funzione razionale con la sostituzione $t = \tan x$. Quindi $x = \varphi(t) = \arctan t$ e $\varphi'(t) = 1/(t^2+1)$. Per $x = 0$ si ha $t = \tan 0 = 0$, per $x = \pi/3$ si ha $t = \tan(\pi/3) = \sqrt{3}$. Pertanto

$$\int_0^{\pi/3} \tan x\,\frac{3\cos x - 2\sin x}{3\sin x + 2\cos x}\,dx = \int_0^{\pi/3} \tan x\,\frac{3 - 2\tan x}{3\tan x + 2}\,dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} t\,\frac{3-2t}{3t+2}\,\frac{1}{t^2+1}\,dt = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{-2t^2+3t}{(3t+2)(t^2+1)}\,dt.$$

Il denominatore della funzione integranda è già scomposto, il numeratore ha grado minore del denominatore, dobbiamo scomporre la funzione integranda nella forma

$$\frac{\alpha}{3t+2} + \frac{\beta t + \gamma}{t^2+1}.$$

Si ha

$$\frac{\alpha}{3t+2} + \frac{\beta t+\gamma}{t^2+1} = \frac{\alpha t^2 + \alpha + 3\beta t^2 + 3\gamma t + 2\beta t + 2\gamma}{(3t+2)(t^2+1)} =$$

$$= \frac{(\alpha+3\beta)t^2 + (3\gamma+2\beta)t + \alpha + 2\gamma}{(3t+2)(t^2+1)},$$

quindi α, β e γ devono verificare il sistema

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = -2 \\ 3\gamma + 2\beta = 3 \\ \alpha + 2\gamma = 0. \end{cases}$$

Pertanto dalla terza equazione si ha $\alpha = -2\gamma$, sostituendo nella prima si ha il sistema

$$\begin{cases} -2\gamma + 3\beta = -2 \\ 3\gamma + 2\beta = 3, \end{cases}$$

che evidentemente ha la soluzione $\beta = 0$, $\gamma = 1$, quindi $\alpha = -2$. Pertanto

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{-2t^2 + 3t}{(3t+2)(t^2+1)}\, dt &= \int_0^{\sqrt{3}} \left(-\frac{2}{3t+2} + \frac{1}{t^2+1} \right) dt = \\ &= \left[-\frac{2}{3} \log(3t+2) + \arctan t \right]_0^{\sqrt{3}} . \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos^2 x} \log(3\sin x + 2\cos x)\, dx = \\ &= \big[\tan x \log(3\sin x + 2\cos x)\big]_0^{\pi/3} - \left[-\frac{2}{3} \log(3t+2) + \arctan t \right]_0^{\sqrt{3}} = \\ &= \sqrt{3} \log \frac{3\sqrt{3}+2}{2} + \frac{2}{3} \log(3\sqrt{3}+2) + \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3} \log 2 \end{aligned}$$

5. Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$\left(\frac{9ie^{2z} + 1/2 - i}{e^z} \right)^2 = 18i\,.$$

SOLUZIONE

Poniamo $w = e^z$. z è soluzione dell'equazione se e solo se $(9iw + 1/2 - i)/w$ è una radice quadrata di $18i$. $18i$ ha modulo 18 e un argomento è $\pi/2$, quindi le radici cubiche sono

$$\pm\sqrt{18} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = \pm 3\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \pm(3+3i).$$

Da cui si ottengono le due equazioni

$$\begin{aligned} 9iw^2 - (3+3i)w + \frac{1}{2} - i = 0 \\ 9iw^2 + (3+3i)w + \frac{1}{2} - i = 0\,. \end{aligned}$$

Abbiamo due equazioni di secondo grado, entrambe hanno il discriminante

$$(3+3i)^2 - 36i\left(\frac{1}{2} - i\right) = 18i - 18i - 36 = -36\,.$$

Le radici quadrate del discriminante sono $\pm 6i$.

La prima equazione ha soluzione

$$w = \frac{3+3i \pm 6i}{18i} = \begin{cases} \dfrac{3+9i}{18i} = \dfrac{3(-i)+9i(-i)}{18} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6}i \\ \dfrac{3-3i}{18i} = \dfrac{3(-i)-3i(-i)}{18} = -\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{6}i. \end{cases}$$

Pertanto

$$z = \log\frac{\sqrt{10}}{6} + i\left(-\arctan\frac{1}{3} + 2k\pi\right) \qquad k \in \mathbb{Z}$$
$$z = \log\frac{\sqrt{2}}{6} + i\left(\frac{5}{4}\pi + 2k\pi\right) \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

La seconda equazione ha soluzione

$$w = \frac{-3-3i \pm 6i}{18i} = \begin{cases} \dfrac{-3+3i}{18i} = \dfrac{-3(-i)+3i(-i)}{18} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6}i \\ \dfrac{-3-9i}{18i} = \dfrac{-3(-i)-9i(-i)}{18} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6}i. \end{cases}$$

Pertanto

$$z = \log\frac{\sqrt{2}}{6} + i\left(\frac{1}{4}\pi + 2k\pi\right) \qquad k \in \mathbb{Z}$$
$$z = \log\frac{\sqrt{10}}{6} + i\left(-\arctan\frac{1}{3} + \pi + 2k\pi\right) \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$