Prova scritta di ANALISI MATEMATICA T-1 12/2/24

(Ingegneria dell'automazione)

COGNOME E NOME ....

1. Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \big(\log(x^4)\big)^{\sqrt{5x^2+1}}$$

Calcolare $f'(2)$.

SOLUZIONE

Si ha

$$f(x) = \exp\big(\sqrt{5x^2+1}\,\log\big(\log(x^4)\big)\big)\,.$$

Pertanto

$$f'(x) = \exp\big(\sqrt{5x^2+1}\,\log\big(\log(x^4)\big)\big)\left(\frac{5x}{\sqrt{5x^2+1}}\log\big(\log(x^4)\big) + \frac{\sqrt{5x^2+1}\,4x^3}{\log(x^4)x^4}\right) =$$

$$= \big(\log(x^4)\big)^{\sqrt{5x^2+1}}\left(\frac{5x}{\sqrt{5x^2+1}}\log\big(\log(x^4)\big) + \frac{4\sqrt{5x^2+1}}{\log(x^4)x}\right),$$

quindi

$$f'(2) = \big(\log(2^4)\big)^{\sqrt{21}}\left(\frac{10}{\sqrt{21}}\log\big(\log(2^4)\big) + \frac{2\sqrt{21}}{\log(2^4)}\right).$$

2. Studiare, nel suo dominio naturale, la funzione definita da:

$$f(x) = \frac{x^2+5x}{\sqrt{|x^2-x|}}\,.$$

SOLUZIONE

Il dominio naturale di f è costituito dai punti che non annullano il denominatore, quindi è $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

La funzione si annulla per $x=-5$. Il denominatore è sempre positivo, quindi f è positiva in $]-\infty,-5[\,\cup\,]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$ ed è negativa in $]-5,0[$.

Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = 0\,,$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,.$$

Quindi la retta di equazione $x=1$ è asintoto verticale.

Cerchiamo gli asintoti obliqui. Per $x \to \pm\infty$ si ha

$$f(x) = (x^2+5x)(x^2-x)^{-1/2} = (x^2+5x)|x|^{-1}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-1/2} =$$
$$= \operatorname{sgn}(x)\,(x+5)\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{x}+o(x^{-1})\right) = \operatorname{sgn}(x)\left(x+5+\frac{1}{2}+o(1)\right).$$

Perciò la retta di equazione $y = -x - 11/2$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$ e la retta di equazione $y = x + 11/2$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

f è derivabile in ogni punto del dominio e si ha

$$f'(x) = \frac{(2x+5)\sqrt{|x^2-x|} - (x^2+5x)\operatorname{sgn}(x^2-x)\,(2x-1)/\big(2\sqrt{|x^2-x|}\big)}{|x^2-x|} =$$
$$= \frac{2(2x+5)|x^2-x| - (x^2+5x)\operatorname{sgn}(x^2-x)\,(2x-1)}{2|x^2-x|^{3/2}} =$$
$$= \operatorname{sgn}(x^2-x)\frac{2(2x^3+5x^2-2x^2-5x)-(2x^3-x^2+2ax^2-5x)}{2|x^2-x|^{3/2}} =$$
$$= \frac{2x^3-3x^2-5x}{2\sqrt{|x^2-x|}(x^2-x)} = \frac{2x^2-3x-5}{2\sqrt{|x^2-x|}(x-1)}.$$

Studiamo il segno di $f'(x)$. Il termine $2\sqrt{|x^2-x|}$ è positivo nel dominio di f. Quindi il segno di $f'(x)$ dipende dal segno di $x-1$ e dal segno di $2x^2-3x-5$. Si ha $2x^2-3x-5=0$ per

$$x = \frac{3\pm\sqrt{3^2+4\cdot 2\cdot 5}}{4} = \frac{3\pm 7}{4} = \begin{cases} \frac{5}{2}, \\ -1, \end{cases}$$

quindi $f'(x) > 0$ se e solo se

$$x \in \,]-1,0[\, \cup \,]0,1[\, \cup \left]\frac{5}{2},+\infty\right[.$$

Quindi f è crescente negli'intervalli $]-1,0[$, $]0,1[$ e $]5/2,+\infty[$ ed è decrescente negli intervalli $]-\infty,-1[$ e $]1,5/2[$.

-1 e $5/2$ sono punti di minimo locale.

Il valore di f negli estremanti locali è

$$f(-1) = \frac{1-5}{\sqrt{|1+1|}} = -2\sqrt{2},$$
$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5/4+25/2}{\sqrt{|5/4-5/2|}} = \frac{55/4}{\sqrt{5/4}} = \frac{11\sqrt{5}}{2}.$$

3. Sapendo che

$$\exp(y) = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2), \qquad \text{per } y \to 0,$$
$$\cos y = 1 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{24}y^4 + o(y^5), \qquad \text{per } y \to 0,$$
$$\cosh y = 1 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{24}y^4 + o(y^5), \qquad \text{per } y \to 0,$$

calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\big(\exp(3\cos(x^2)) - e^3\cos(\sqrt{3}\,x^2)\big)\log\big(4\cos x\big)}{\big(\exp(2\cosh x) - e^2\cosh(\sqrt{2}\,x)\big)\log\big(\cosh(4x^2)\big)}\,.$$

SOLUZIONE

Per $x \to 0$ si ha

$$\begin{aligned}
&\exp(3\cos(x^2)) - e^3\cos(\sqrt{3}\,x^2) = \\
&= \exp\left(3\left(1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{24}x^8 + o(x^{10})\right)\right) - e^3\left(1 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{9}{24}x^8 + o(x^{10})\right) = \\
&= e^3\left(\exp\left(-\frac{3}{2}x^4 + \frac{1}{8}x^8 + o(x^{10})\right) - \left(1 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{3}{8}x^8 + o(x^{10})\right)\right) = \\
&= e^3\left(1 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{1}{8}x^8 + o(x^{10}) + \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}x^4\right)^2 + o(x^8) - 1 + \frac{3}{2}x^4 - \frac{3}{8}x^8 + o(x^{10})\right) \sim \\
&\sim e^3\frac{7}{8}x^8\,.
\end{aligned}$$

$$\log\big(4\cos x\big) \to \log 4\,.$$

$$\begin{aligned}
&\exp(2\cosh x) - e^2\cosh(\sqrt{2}\,x) = \\
&= \exp\left(2\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)\right)\right) - e^2\left(1 + \frac{2}{2}x^2 + \frac{4}{24}x^4 + o(x^5)\right) = \\
&= e^2\left(\exp\left(x^2 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^5)\right) - \left(1 + x^2 + \frac{1}{6}x^4 + o(x^5)\right)\right) = \\
&= e^2\left(1 + x^2 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^5) + \frac{1}{2}\left(x^2\right)^2 + o(x^4) - 1 - x^2 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^5)\right) \sim \\
&\sim e^2\frac{5}{12}x^4\,.
\end{aligned}$$

$$\log\big(\cosh(4x^2)\big) \sim \cosh(4x^2) - 1 \sim \frac{16}{2}x^4 = 8x^4\,.$$

Pertanto, per $x \to 0$, si ha

$$\frac{\big(\exp(3\cos(x^2)) - e^3\cos(\sqrt{3}\,x^2)\big)\log\big(4\cos x\big)}{\big(\exp(2\cosh x) - e^2\cosh(\sqrt{2}\,x)\big)\log\big(\cosh(4x^2)\big)} \sim \frac{e^3\frac{7}{8}x^8\log 4}{e^2\frac{5}{12}x^4 8x^4} = \frac{21e\log 4}{80}\,.$$

Questo è il limite cercato.

4. Calcolare

$$\int_0^3 \frac{4\sinh\sqrt{x+1} + 6\cosh\sqrt{x+1}}{\left(6\sinh\sqrt{x+1} + 4\cosh\sqrt{x+1}\right)^2}\,dx\,.$$

SOLUZIONE

Eliminiamo la radice con la sostituzione $t = \sqrt{x+1}$, quindi $x = \varphi(t) = t^2 - 1$ e $\varphi'(t) = 2t$. Per $x = 0$ si ha $t = \sqrt{0+1} = 1$ e per $x = 3$ si ha $t = \sqrt{3+1} = 2$. Pertanto l'integrale è uguale a

$$\int_1^2 \frac{4\sinh t + 6\cosh t}{\big(6\sinh t + 4\cosh t\big)^2}\, 2t\, dt\,.$$

Il numeratore della frazione è la derivata del termine elevato al quadrato al denominatore, quindi è facile determinare una primitiva della frazione. Possiamo quindi integrare per parti derivando il fattore $2t$. In tal modo si ottiene una funzione integranda razionale rispetto a sinh e cosh. Si ottiene

$$\left[-\frac{1}{6\sinh t + 4\cosh t}\, 2t\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{2}{6\sinh t + 4\cosh t}\, dt\,.$$

Per la definizione delle funzioni iperboliche risulta

$$\int_1^2 \frac{2}{6\sinh t + 4\cosh t}\, dt = \int_1^2 \frac{4}{6(e^t - e^{-t}) + 4(e^t + e^{-t})}\, dt =$$
$$= \int_1^2 \frac{4}{10e^t - 2e^{-t}}\, dt = \int_1^2 \frac{2e^t}{5e^{2t} - 1}\, dt$$

Eliminiamo l'esponenziale con la sostituzione $s = e^t$, cioè $t = \psi(s) = \log s$, quindi $\psi'(s) = 1/s$. Per $t = 1$ si ha $s = e$, per $t = 2$ si ha $s = e^2$. Pertanto

$$\int_1^2 \frac{2e^t}{5e^{2t} - 1}\, dt = \int_e^{e^2} \frac{2s}{5s^2 - 1}\, \frac{1}{s}\, ds = \int_e^{e^2} \frac{2}{5s^2 - 1}\, ds\,.$$

Il denominatore si fattorizza come $\big(\sqrt{5}\, s - 1\big)\big(\sqrt{5}\, s + 1\big)$, quindi si ha

$$\int_e^{e^2} \frac{2}{5s^2 - 1}\, ds = \int_e^{e^2} \frac{1 + \sqrt{5}\, s + 1 - \sqrt{5}\, s}{\big(\sqrt{5}\, s - 1\big)\big(\sqrt{5}\, s + 1\big)}\, ds =$$
$$= \int_e^{e^2} \left(\frac{1}{\sqrt{5}\, s - 1} - \frac{1}{\sqrt{5}\, s + 1}\right) ds =$$
$$= \left[\frac{1}{\sqrt{5}} \log\big(\sqrt{5}\, s - 1\big) - \frac{1}{\sqrt{5}} \log\big(\sqrt{5}\, s + 1\big)\right]_e^{e^2}$$

Quindi

$$\int_0^3 \frac{4\sinh\sqrt{x+1} + 6\cosh\sqrt{x+1}}{\big(6\sinh\sqrt{x+1} + 4\cosh\sqrt{x+1}\big)^2}\, dx =$$
$$= \left[-\frac{1}{6\sinh t + 4\cosh t}\, 2t\right]_1^2 + \left[\frac{1}{\sqrt{5}} \log\big(\sqrt{5}\, s - 1\big) - \frac{1}{\sqrt{5}} \log\big(\sqrt{5}\, s + 1\big)\right]_e^{e^2}\,.$$

5.
$$iz^4 + (5+5i)z^2 + 13 = 0\,.$$

SOLUZIONE

Poniamo $w = z^2$. Otteniamo l'equazione di secondo grado $iw^2 + (5+5i)w + 13 = 0$. Il discriminante è

$$(5+5i)^2 - 4 \cdot 13i = 25 + 50i - 25 - 52i = -2i\,.$$

Le radici quadrate del discriminante sono $\pm(1-i)$. Quindi si ha

$$w = \frac{-5-5i \pm (1-i)}{2i} = \begin{cases} \dfrac{-4-6i}{2i} & = -3+2i\,, \\ \dfrac{-6-4i}{2i} & = -2+3i\,. \end{cases}$$

Quindi abbiamo le equazioni

$$\begin{aligned} z^2 &= -3+2i\,, \\ z^2 &= -2+3i\,. \end{aligned}$$

Il numero $-3+2i$ ha modulo $\sqrt{13}$ e un argomento è $-\arctan(2/3)+\pi$, quindi si hanno le soluzioni

$$z = \pm\,(13)^{1/4} \exp\left(-\frac{1}{2}\arctan\frac{2}{3} + \frac{\pi}{2}\right)\,.$$

Il numero $-2+3i$ ha modulo $\sqrt{13}$ e un argomento è $-\arctan\big(3/2\big)+\pi$, quindi si hanno le soluzioni

$$z = \pm\,(13)^{1/4} \exp\left(-\frac{1}{2}\arctan\frac{3}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\,.$$