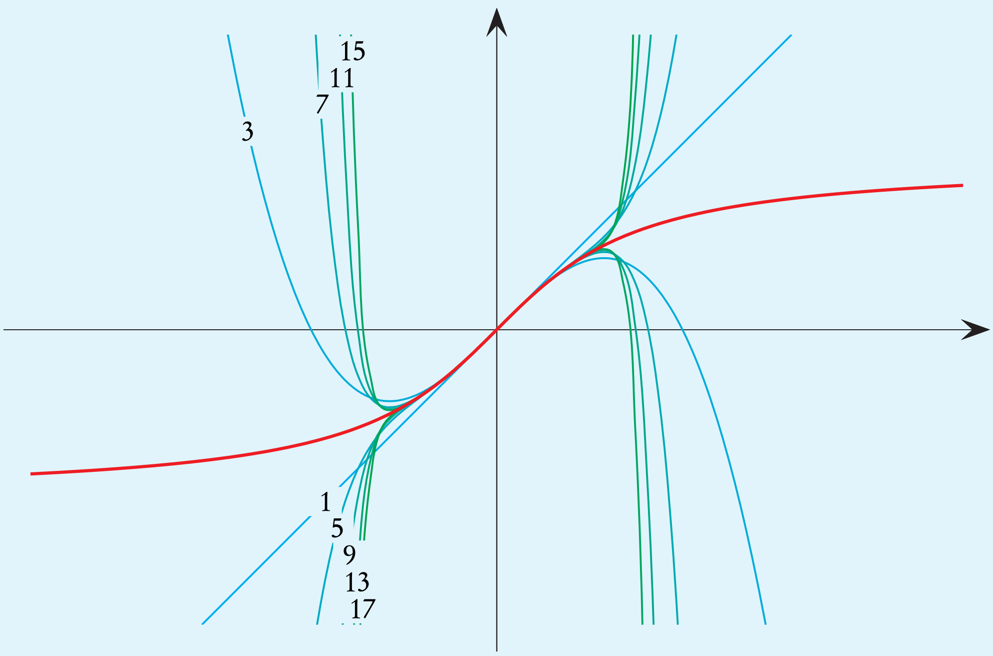
Giovanni Dore

Esercizi del corso di Analisi Matematica 2
Modulo 2



Alma Mater Studiorum - Università di Bologna
Corso di Laurea in Matematica
Anno Accademico 2023/2024

In copertina:
somme parziali della serie di Taylor di punto iniziale 0 della funzione arcotangente.
Il numero riportato su ciascun grafico è l'indice della somma parziale.

Indice

1
Integrali multipli

1.1 Esercizi

Integrali doppi

1) Calcolare la misura di

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + 4y^2 \le 8\,,\ x \ge -2\,,\ y \le 1\right\}.$$

2) Calcolare $\displaystyle\iint_B y\,dx\,dy$ con

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \le 25\,,\ x + y \ge 5\right\}.$$

3) Calcolare $\displaystyle\iint_B y^2\,dx\,dy$ con

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |x| \le 3\,,\ |x - 2y| \le 2\right\}.$$

4) Calcolare $\displaystyle\iint_B y\,dx\,dy$ con

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \le 4\,,\ 0 \le x \le y\right\}.$$

5) Calcolare $\displaystyle\iint_B y\,dx\,dy$ con

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + (y + 1)^2 \le 4\right\}.$$

6) Calcolare $\displaystyle\iint_B (x + y)\,dx\,dy$ con

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + 3y^2 \le 4\,,\ y \ge x\right\}.$$

7) Calcolare $\displaystyle\iint_B f(x,y)\,dx\,dy$ con:

a. $B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x\le 1\,,\ x+y\le 2,\ 3x+y\ge 0\right\}$ $\qquad f(x,y)=1$

b. $B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, |x|\le 3\,,\ |2x-y|\le 2\right\}$ $\qquad f(x,y)=y^2$

c. $B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2-y\le 2\,,\ x-y\ge -4\right\}$ $\qquad f(x,y)=x$

d. $B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+4y^2\le 16\,,\ x-y^2\ge -4\right\}$ $\qquad f(x,y)=x$

e. $B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2\le 9\,,\ x^2+y^2\ge 1\right\}$ $\qquad f(x,y)=\sqrt{1+x^2+y^2}$

f. $B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+4y^2\le 4\,,\ x\ge 0\right\}$ $\qquad f(x,y)=x^2$

g. $B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+(y+1)^2\le 4\,,\ x\le |y+1|\right\}$ $\qquad f(x,y)=x^2+y^2+4$

h. $B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 4x^2+9y^2\le 3\,,\ x\le 0\,,\ x+y\le 0\right\}$ $\qquad f(x,y)=xy$

i. $B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x\ge 0, y\ge 0\,,\ x\le 1+y\,,\ y\le 2-x\right\}$ $\qquad f(x,y)=xy$

j. $B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2\le 3\,,\ x^2\ge 2y\,,\ x\ge 0\right\}$ $\qquad f(x,y)=x$

Integrali tripli

8) Calcolare la misura di

$$B=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, 9x^2+y^2+z^2\le 25\,,\ z\le 3\,,\ 9x^2+y^2\le (z+1)^2\right\}.$$

9) Calcolare la misura di

$$B=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, 4x^2+y^2-1\le 2z\,,\ 0\le z\le y+1\right\}.$$

10) Calcolare $\displaystyle\iiint_B z\,dx\,dy\,dz$ con

$$B=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+(y-3)^2\le 9\,,\ z^2\le 2x^2+y^2\,,\ z\ge 0\right\}.$$

11) Calcolare $\displaystyle\iiint_B x\,dx\,dy\,dz$ con

$$B=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+6y^2+3z^2\le 6\,,\ x^2+2y^2+3z^2\ge 4\,,\ x\ge z\right\}.$$

12) Calcolare $\iiint_B (z+1)\,dx\,dy\,dz$ con

$$B=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, z^2\geq 4x^2+y^2\,,\ 4x^2+y^2+z^2\leq 8\right\}.$$

13) Calcolare $\iiint_B y^2\,dx\,dy\,dz$ con

$$B=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, z\geq x^2+y^2,\ z\leq 3+2|x|\right\}.$$

14) Calcolare $\iiint_B z\,dx\,dy\,dz$ con

$$B=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+3z^2\leq 4\,,\ x\geq 0\,,\ z\geq x\right\}.$$

15) Calcolare $\iiint_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ con:

a. $B=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, y^2+4z^2\leq 16\,,\ y^2+4z^2\geq x^2\right\}$ $\qquad f(x,y,z)=1$

b. $B=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2-z^2\leq 12\,,\ -2\leq z\leq \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right\}$ $\qquad f(x,y,z)=1$

c. $B=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+4z^2\leq 9\,,\ -3+\sqrt{x^2+4z^2}\leq 2y\leq 3\right\}$ $\qquad f(x,y,z)=1$

d. $B=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+2y^2+z^2\leq 4\,,\ x^2+2y^2+9z^2\geq 9\,,\ z\geq 0\right\}$ $\qquad f(x,y,z)=1$

e. $B=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2\leq 4\,,\ z\leq (x-1)^2+y^2\,,\ z\geq -1\right\}$ $\qquad f(x,y,z)=1$

f. $B=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+4z^2\leq 3\,,\ x^2-y^2+4z^2\leq 1\,,\ z\geq 0\right\}$ $\qquad f(x,y,z)=1$

g. $B=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+3y^2+z^2\geq 4\,,\ x^2+3y^2\leq 4\,,\ z\geq 0\,,\ x+z\leq 10\right\}$ $\qquad f(x,y,z)=1$

h. $B=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+9y^2\leq \frac{9}{z^2+2}\,,\ x^2+9y^2+z^2\leq 4\,,\ z\geq 0\right\}$ $\qquad f(x,y,z)=1$

i. $B=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+4z^2\leq 4\,,\ |y|\leq x+3\right\}$ $\qquad f(x,y,z)=1$

j. $B=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2\leq 4, x^2+y^2+z^2\leq 16\,,\ z\geq -\sqrt{x^2+y^2}\right\}$ $\qquad f(x,y,z)=1$

k. $B=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+9y^2\geq (z-2)^2\,,\ x^2+9y^2+z^2\leq 16\right\}$ $\qquad f(x,y,z)=1$

l. $B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2 \le 9,\ -\sqrt{y^2+z^2} \le x \le 3 - \frac{y^2+z^2}{3}\right\}$ $\quad f(x,y,z) = 1$

m. $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 \le 4,\ y \le 1\}$ $\quad f(x,y,z) = x^2 y$

n. $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 4y^2+z^2 \le 16,\ x \le \sqrt{4y^2+z^2},\ x+y \ge -1\}$ $\quad f(x,y,z) = x$

o. $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+4y^2+z^2 \le 4,\ x^2+4y^2 \ge 4z+4\}$ $\quad f(x,y,z) = x^2$

p. $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 4x^2+4y^2+z^2 \le 16,\ \sqrt{3}(x+1) \le \sqrt{4y^2+z^2}\}$ $\quad f(x,y,z) = z^2$

q. $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 4x^2+2y^2+z^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$ $\quad f(x,y,z) = 4+2y^2+z^2$

r. $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+4y^2+16z^2 \le 4,\ x+4z \le 2,\ y \ge 0\}$ $\quad f(x,y,z) = y$

s. $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z \ge \sqrt{7x^2+3y^2},\ 2x+z \le 3\}$ $\quad f(x,y,z) = z$

t. $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 3x^2+y^2+z^2 \ge 4,\ 3x^2+y^2+z^2 \le 9,\ z \ge 0\}$ $\quad f(x,y,z) = 3x^2+y^2$

1.2 Soluzioni e risultati

1) L'equazione $x^2+4y^2=8$ individua un'ellisse di centro l'origine, assi gli assi cartesiani, semiassi di lunghezza $2\sqrt{2}$ lungo l'asse x e $\sqrt{2}$ lungo l'asse y. La disequazione $x^2+4y^2\le 8$ è verificata dai punti interni all'ellisse. Le altre due disequazioni individuano dei semipiani. L'insieme di integrazione è l'intersezione della parte di piano interna all'ellisse con i due semipiani.

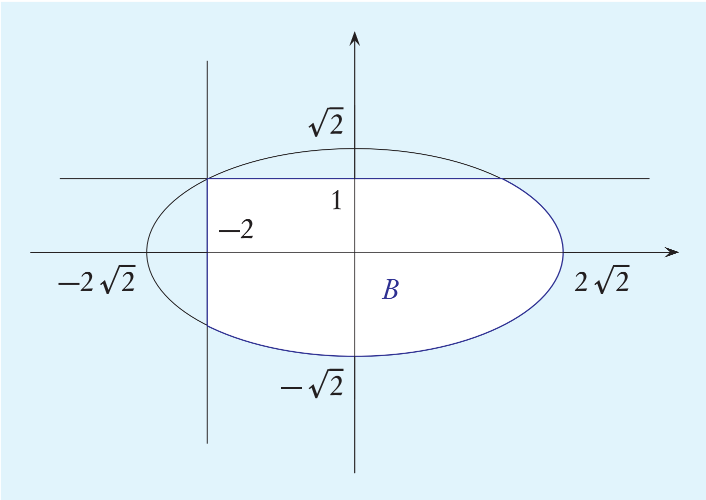


Figura 1.2.1
Il dominio di integrazione dell'esercizio 1.

L'insieme non ha particolari simmetrie, quindi non è utile procedere a un cambiamento di variabili. Ricavando x oppure y dalle disuguaglianze che definiscono B si ottengono disuguaglianze simili, quindi è indifferente sezionare B parallelamente all'asse x o all'asse y.

Se $(x,y)\in B$ allora $x\ge -2$; inoltre risulta $x^2+4y^2\le 8$, quindi deve essere $x^2\le 8$, cioè $x\in\left[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right]$. Perciò, se $(x,y)\in B$, allora $x\in\left[-2,2\sqrt{2}\right]$. Per x in tale intervallo, si ha $y\in B_x$ se e solo se $y\le 1$ e $x^2+4y^2\le 8$, cioè $-\sqrt{2-x^2/4}\le y\le\sqrt{2-x^2/4}$: quindi

$$B_x=\left[-\sqrt{2-\frac{x^2}{4}},\min\left\{\sqrt{2-\frac{x^2}{4}},1\right\}\right].$$

La disequazione $\sqrt{2-x^2/4}\ge 1$ equivale a $2-x^2/4\ge 1$, cioè $x^2/4\le 1$, che è verificata per $x\in[-2,2]$. Perciò se $x\in[-2,2]$, allora si ha $\min\left\{\sqrt{2-x^2/4},1\right\}=1$, se invece $x\in\left]2,2\sqrt{2}\right]$, allora si ha $\min\left\{\sqrt{2-x^2/4},1\right\}=\sqrt{2-x^2/4}$. Pertanto se $x\in\left[-2,2\sqrt{2}\right]$, cioè $B_x\ne\varnothing$, risulta

$$B_x=\begin{cases}\left[-\sqrt{2-\dfrac{x^2}{4}},1\right], & \text{se } x\in[-2,2],\\[2ex] \left[-\sqrt{2-\dfrac{x^2}{4}},\sqrt{2-\dfrac{x^2}{4}}\right], & \text{se } x\in\left]2,2\sqrt{2}\right].\end{cases}$$

Perciò

$$
\begin{aligned}
\mu(B) &= \iint_B 1\,dx\,dy = \int_{-2}^{2}\left(\int_{-\sqrt{2-x^2/4}}^{1} 1\,dy\right)dx + \int_{2}^{\sqrt{2}}\left(\int_{-\sqrt{2-x^2/4}}^{\sqrt{2-x^2/4}} 1\,dy\right)dx = \\
&= \int_{-2}^{2}\left(1+\sqrt{2-\frac{x^2}{4}}\right)dx + \int_{2}^{2\sqrt{2}} 2\sqrt{2-\frac{x^2}{4}}\,dx = \\
&= 4+\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sqrt{2-2\sin^2 t}\,2\sqrt{2}\cos t\,dt + \int_{\pi/4}^{\pi/2} 2\sqrt{2-2\sin^2 t}\,2\sqrt{2}\cos t\,dt = \\
&= 4+\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 4\cos^2 t\,dt + \int_{\pi/4}^{\pi/2} 8\cos^2 t\,dt = \\
&= 4+\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 2\big(1+\cos(2t)\big)\,dt + \int_{\pi/4}^{\pi/2} 4\big(1+\cos(2t)\big)\,dt = \\
&= 4+\big[2t+\sin(2t)\big]_{-\pi/4}^{\pi/4} + \big[4t+2\sin(2t)\big]_{\pi/4}^{\pi/2} = \\
&= 4+\left(\frac{\pi}{2}+1\right)-\left(-\frac{\pi}{2}-1\right)+2\pi-(\pi+2) = 4+2\pi\,.
\end{aligned}
$$

2) L'insieme B è l'intersezione tra il cerchio di centro l'origine e raggio 5 e il semipiano costituito dai punti a destra della retta $x+y=5$.

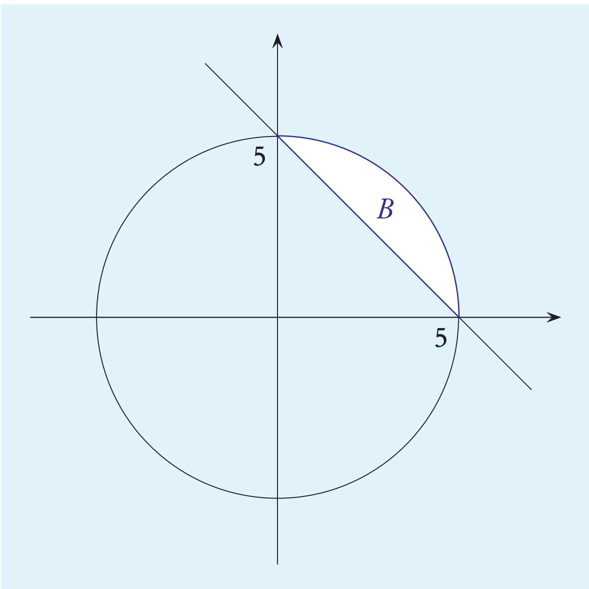


Figura 1.2.2
Il dominio di integrazione dell'esercizio 2.

Le disuguaglianze che definiscono B non cambiano scambiando x con y, quindi è indifferente applicare il teorema di Fubini integrando prima rispetto alla variabile x o prima rispetto alla variabile y. Ricaviamo y dalle disequazioni che definiscono B; si ha $y \geq 5-x$ e $y^2 \leq 25-x^2$. Esiste y tale che la seconda disequazione è verificata se e solo se $x^2 \leq 25$, cioè $x \in [-5,5]$; in tal caso la disequazione equivale a $-\sqrt{25-x^2} \leq y \leq \sqrt{25-x^2}$. Pertanto $(x,y) \in B$ se e solo se $x \in [-5,5]$ e

$$\max\left\{-\sqrt{25-x^2}, 5-x\right\} \leq y \leq \sqrt{25-x^2}\,.$$

Poiché $5-x \geq 0$, si ha $\max\{-\sqrt{25-x^2}, 5-x\} = 5-x$, quindi

$$B_x = \{y \in \mathbb{R} \,|\, 5-x \leq y \leq \sqrt{25-x^2}\}.$$

Tale insieme è non vuoto se e solo se $5-x \leq \sqrt{25-x^2}$. Poiché $5-x \geq 0$, la disequazione è equivalente a $(5-x)^2 \leq 25-x^2$, cioè $25-10x+x^2 \leq 25-x^2$ e quindi $x(x-5) \leq 0$; poiché è $x-5 \leq 0$, deve essere $x \geq 0$. Perciò $B_x \neq \varnothing$ per $x \in [0,5]$.

Si ha quindi

$$\iint_B y\,dx\,dy = \int_0^5 \left(\int_{5-x}^{\sqrt{25-x^2}} y\,dy \right) dx = \int_0^5 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=5-x}^{y=\sqrt{25-x^2}} dx =$$
$$= \int_0^5 \frac{1}{2}\big(25-x^2-(5-x)^2\big)\,dx = \int_0^5 \frac{1}{2}\big(25-x^2-25+10x-x^2\big)\,dx =$$
$$= \int_0^5 (-x^2+5x)\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 \right]_0^5 = -\frac{125}{3} + \frac{125}{2} = \frac{125}{6}.$$

3) L'insieme B è la parte di piano interna al parallelogramma con i lati contenuti nelle rette di equazione $x=3$, $x=-3$, $x-2y=2$ e $x-2y=-2$.

Per calcolare l'integrale utilizziamo il teorema di Fubini. Poiché y compare in una sola delle disequazioni che definiscono B, mentre x compare in entrambe, risulta più semplice calcolare le sezioni di B per x fissato che calcolare le sezioni per y fissato. Applichiamo quindi il teorema di Fubini sezionando B con rette parallele all'asse y.

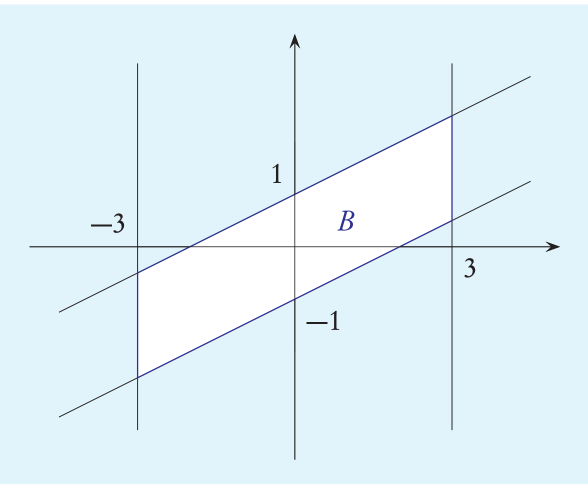


Figura 1.2.3
Il dominio di integrazione dell'esercizio 3.

Se $(x,y) \in B$, allora $x \in [-3,3]$. Inoltre deve essere $-2 \leq 2y-x \leq 2$ e quindi

$$\frac{x}{2} - 1 \leq y \leq \frac{x}{2} + 1.$$

Pertanto se $x \in [-3,3]$ si ha $B_x = [x/2-1, x/2+1]$, mentre se $x \notin [-3,3]$ si ha $B_x = \varnothing$. Quindi risulta

$$\iint_B y^2\,dx\,dy = \int_{-3}^3 \left(\int_{x/2-1}^{x/2+1} y^2\,dy \right) dx = \int_{-3}^3 \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_{y=x/2-1}^{y=x/2+1} dx =$$

$$= \int_{-3}^{3} \frac{1}{3}\left(\left(\frac{x}{2}+1\right)^3 - \left(\frac{x}{2}-1\right)^3\right) dx =$$
$$= \int_{-3}^{3} \frac{1}{3}\left(\left(\frac{x^3}{8}+\frac{3x^2}{4}+\frac{3x}{2}+1\right) - \left(\frac{x^3}{8}-\frac{3x^2}{4}+\frac{3x}{2}-1\right)\right) dx =$$
$$= \int_{-3}^{3} \left(\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}\right) dx = \left[\frac{1}{6}x^3+\frac{2}{3}x\right]_{-3}^{3} = 13\,.$$

4) L'insieme B è l'intersezione del cerchio di centro l'origine e raggio 2 con i semipiani individuati dalle disequazioni $0 \le x$ e $x \le y$. Poiché le rette origine dei semipiani passano per il centro della circonferenza, abbiamo un settore circolare.

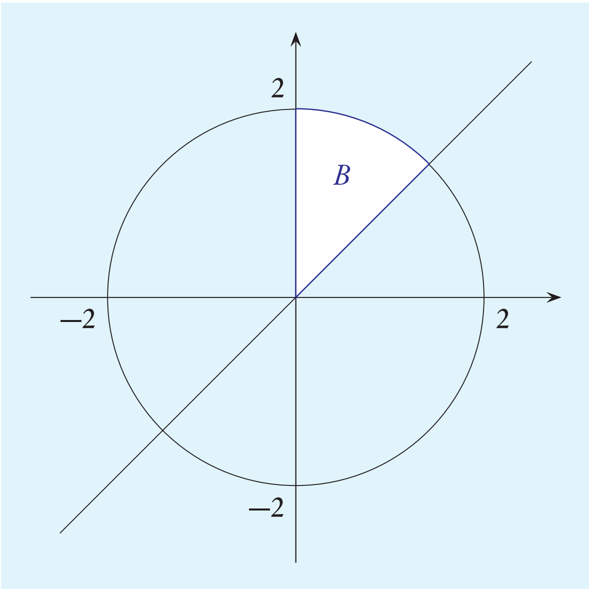


Figura 1.2.4
Il dominio di integrazione dell'esercizio 4.

In coordinate polari l'appartenenza ad uno dei semipiani si traduce in una limitazione sulla coordinata θ. Risulta quindi utile passare in coordinate polari. Poniamo

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\,, \\ y = \rho\sin\theta\,; \end{cases}$$

cioè effettuiamo il cambiamento di variabili

$$\Phi(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta),$$

considerando $\rho \in \mathbb{R}^+$ e $\theta \in \,]0,2\pi[$. Si ha $\det \mathscr{J}_\Phi(\rho,\theta) = \rho$, quindi, per il teorema di cambiamento di variabili, risulta

$$\iint_B y\,dx\,dy = \iint_{\Phi^{-1}(B)} \rho^2 \sin\theta\,d\rho\,d\theta\,.$$

Risulta

$$\Phi^{-1}(B) = \left\{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times \,]0,2\pi[\;\middle|\; \rho^2 \le 4\,,\; 0 \le \rho\cos\theta \le \rho\sin\theta\right\} =$$
$$= \,]0,2] \times \left\{\theta \in \,]0,2\pi[\;\middle|\; 0 \le \cos\theta \le \sin\theta\right\}.$$

Se $0 \leq \cos\theta \leq \sin\theta$ allora sia $\sin\theta$ che $\cos\theta$ sono non negativi, quindi $\theta \in]0, \pi/2]$. Per tali θ la disequazione $\cos\theta \leq \sin\theta$ è verificata se e solo se $\theta = \pi/2$ oppure $\tan\theta \geq 1$, cioè $\theta \geq \pi/4$. Quindi $\Phi^{-1}(B) =]0,2] \times [\pi/4, \pi/2]$.

Applicando il teorema di Fubini si ottiene

$$\iint_B y\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_{\pi/4}^{\pi/2} \rho^2 \sin\theta\,d\theta \right) d\rho = \int_0^2 \rho^2\,d\rho \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin\theta\,d\theta =$$
$$= \left[\frac{1}{3}\rho^3 \right]_0^2 \left[-\cos\theta \right]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{8}{3}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

5) L'insieme B è il cerchio di centro $(0,-1)$ e raggio 2, pertanto per calcolare l'integrale è utile passare in coordinate polari, opportunamente modificate in modo da tenere conto che il centro del cerchio non è l'origine.

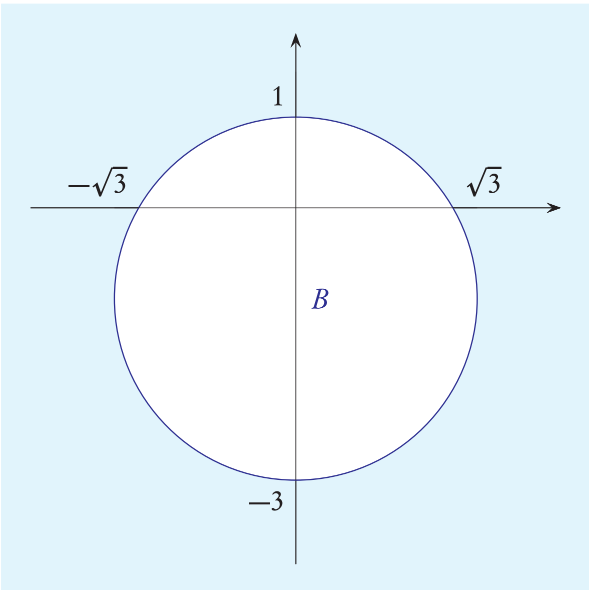


Figura 1.2.5
Il dominio di integrazione dell'esercizio 5.

Poniamo

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y + 1 = \rho\sin\theta, \end{cases}$$

cioè effettuiamo il cambiamento di variabili

$$\Phi(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, -1 + \rho\sin\theta),$$

considerando $\rho \in \mathbb{R}^+$ e $\theta \in]0, 2\pi[$. Si ha $\det \mathscr{J}_\Phi(\rho,\theta) = \rho$, perciò

$$\iint_B y\,dx\,dy = \iint_{\Phi^{-1}(B)} (-1 + \rho\sin\theta)\rho\,d\rho\,d\theta.$$

Si ha

$$\Phi^{-1}(B) = \left\{ (\rho,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times]0,2\pi[\,\middle|\, \rho^2 \leq 4 \right\} =]0,2] \times]0,2\pi[,$$

quindi

$$\iint_B y\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} (-\rho + \rho^2 \sin\theta)\,d\theta \right) d\rho = \int_0^2 \big[-\rho\theta - \rho^2\cos\theta\big]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\,d\rho =$$

$$= -\int_0^2 2\pi\rho\,d\rho = -\big[\pi\rho^2\big]_0^2 = -4\pi\,.$$

6) L'equazione $x^2+3y^2=4$ individua un'ellisse di centro l'origine, assi gli assi cartesiani e semiassi di lunghezza 2 e $2/\sqrt{3}$. La disequazione $x^2+3y^2\le 4$ è verificata dai punti interni all'ellisse. La disequazione $y\ge x$ individua un semipiano con origine passante per l'origine degli assi.

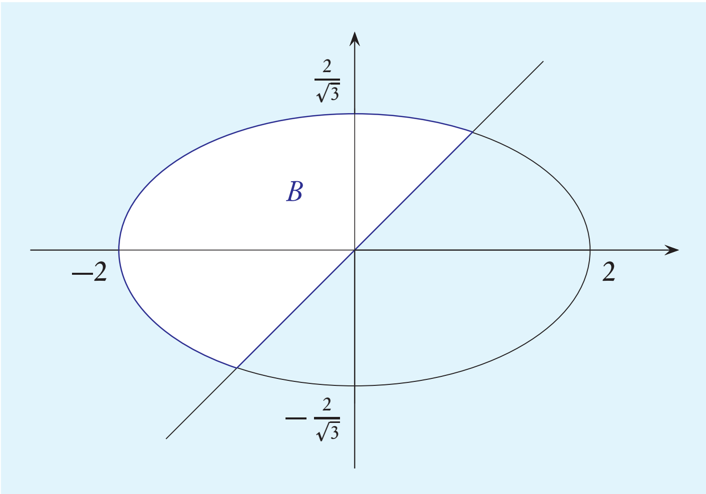


Figura 1.2.6
Il dominio di integrazione dell'esercizio 6.

Passando in coordinate polari (opportunamente modificate) l'ellisse si trasforma in un rettangolo. Poiché la retta che delimita il semipiano passa per l'origine, che è il centro dell'ellisse, anche l'intersezione tra ellisse e semipiano si trasforma in un rettangolo. Poniamo quindi

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\,, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\rho\sin\theta\,, \end{cases}$$

cioè effettuiamo il cambiamento di variabili

$$\Phi(\rho,\theta) = \left(\rho\cos\theta, \frac{1}{\sqrt{3}}\rho\sin\theta\right),$$

considerando $\rho\in\mathbb{R}^+$ e $\theta\in\,]0,2\pi[$. Si ha

$$\det \mathscr{J}_\Phi(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\cos\theta \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\rho\cos\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\rho\cos^2\theta + \frac{1}{\sqrt{3}}\rho\sin^2\theta = \frac{\rho}{\sqrt{3}}\,,$$

perciò

$$\iint_B (x+y)\,dx\,dy = \iint_{\Phi^{-1}(B)} \left(\rho\cos\theta + \frac{\rho}{\sqrt{3}}\sin\theta\right)\frac{\rho}{\sqrt{3}}\,d\rho\,d\theta\,.$$

Si ha

$$\Phi^{-1}(B) = \left\{ (\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times]0, 2\pi[\;\middle|\; \rho^2 \le 4 \,,\ \frac{\rho}{\sqrt{3}} \sin\theta \ge \rho\cos\theta \right\}.$$

Risulta $\left(1/\sqrt{3}\right)\rho\sin\theta \ge \rho\cos\theta$ se e solo se $\sin\theta \ge \sqrt{3}\cos\theta$. In questa espressione vale l'uguaglianza se $\tan\theta = \sqrt{3}$, cioè $\theta = \pi/3 + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Poiché consideriamo solo $\theta \in]0, 2\pi[$ si ha $\theta = \pi/3$ o $\theta = 4\pi/3$. Si verifica facilmente che è $\sin\theta \ge \sqrt{3}\cos\theta$ per $\theta \in [\pi/3, 4\pi/3]$. Perciò $\Phi^{-1}(B) =]0, 2] \times [\pi/3, 4\pi/3]$. Applicando il teorema di Fubini si ottiene

$$\begin{aligned}
\iint_B y\,dx\,dy &= \int_0^2 \left(\int_{\pi/3}^{4\pi/3} \left(\rho\cos\theta + \frac{\rho}{\sqrt{3}} \sin\theta \right) \frac{1}{\sqrt{3}} \rho\,d\theta \right) d\rho = \\
&= \int_0^2 \rho^2\,d\rho \int_{\pi/3}^{4\pi/3} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cos\theta + \frac{1}{3} \sin\theta \right) d\theta = \left[\frac{1}{3}\rho^3 \right]_0^2 \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \sin\theta - \frac{1}{3}\cos\theta \right]_{\pi/3}^{4\pi/3} = \\
&= \frac{8}{3} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3}\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3}\frac{1}{2} \right) = \frac{8}{3}\left(-1 + \frac{1}{3} \right) = -\frac{16}{9}.
\end{aligned}$$

7)

a. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \int_{-3x}^{2-x} 1\,dy\,dx = 4$

b. $\displaystyle\int_{-3}^{3} \int_{2x-2}^{2x+2} y^2\,dy\,dx = 320$

c. $\displaystyle\int_{-2}^{3} \int_{x^2-2}^{x+4} x\,dy\,dx = \frac{125}{12}$

d. $\displaystyle\int_{-2}^{2} \int_{y^2-4}^{\sqrt{16-4y^2}} x\,dx\,dy = \frac{64}{15}$

e. $\displaystyle\int_{1}^{3} \int_{0}^{2\pi} \rho\sqrt{1+\rho^2}\,d\theta\,d\rho = 2\pi(10^{3/2} - 2^{3/2})$

f. $\displaystyle\int_{0}^{2} \int_{0}^{\pi} \frac{1}{2}\rho^3\cos^2\theta\,d\theta\,d\rho = \pi$

g. $\displaystyle\int_{0}^{2} \int_{\pi/4}^{7\pi/4} (\rho^3 - 2\rho^2\sin\theta + 5\rho)\,d\theta\,d\rho = 21\pi$

h. $\displaystyle\frac{1}{36}\int_{0}^{\sqrt{3}} \int_{\pi-\arctan(3/2)}^{3\pi/2} \rho^3\cos\theta\sin\theta\,d\theta\,d\rho = \frac{1}{104}$

i. $\displaystyle\int_0^1\int_0^{2-x} xy\,dy\,dx+\int_1^{3/2}\int_{x-1}^{2-x} xy\,dy\,dx=\frac{29}{48}$

j. $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^0\int_0^{\sqrt{3-y^2}} x\,dx\,dy+\int_0^1\int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{3-y^2}} x\,dx\,dy=\frac{5}{6}+\sqrt{3}$

8) L'equazione $9x^2+y^2+z^2=25$ individua l'ellissoide di centro l'origine, avente come assi gli assi cartesiani e semiassi di lunghezza 5 lungo gli assi y e z e $5/3$ lungo l'asse x; la disequazione $9x^2+y^2+z^2\le 25$ è verificata dai i punti interni all'ellissoide. L'equazione $9x^2+y^2=(z+1)^2$ individua un cono di vertice $(0,0,-1)$, avente come asse l'asse z; la disequazione $9x^2+y^2\le(z+1)^2$ è verificata dai punti interni a una delle due falde del cono. L'insieme B è quindi costituito dai punti che sono interni sia all'ellissoide che al cono e che inoltre hanno quota minore o uguale a 3.

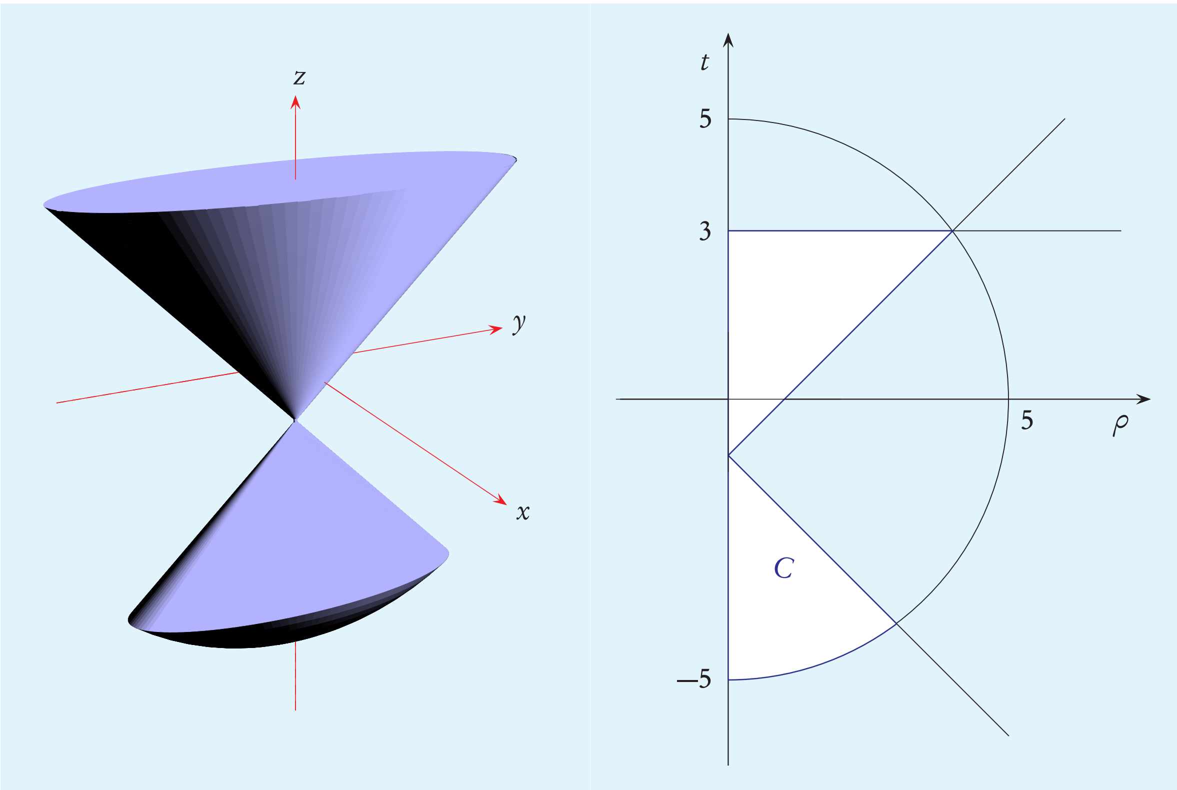


Figura 1.2.7
Il dominio di integrazione dell'esercizio 8 (a sinistra) e la proiezione sul piano (ρ,t) del suo trasformato in coordinate cilindriche (a destra).

Passando in coordinate sferiche modificate, l'ellissoide si trasforma in un parallelepipedo, ma il cono non ha vertice nell'origine e quindi viene trasformato in un insieme difficile da determinare. Quindi non è opportuno utilizzare le coordinate sferiche. Poiché nelle disequazioni che individuano l'insieme B le variabili x e y compaiono sempre nella forma $9x^2+y^2$ è invece opportuno fare un cambiamento di variabili in coordinate cilindriche, modificate opportunamente in modo da tenere conto della costante che moltiplica il termine x^2. Poniamo quindi

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}\rho\cos\theta\,, \\ y = \rho\sin\theta\,, \\ z = t\,; \end{cases}$$

cioè effettuiamo il cambiamento di variabili

$$\Phi(\rho,\theta,t) = \left(\frac{1}{3}\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, t\right),$$

considerando $\rho \in \mathbb{R}^+$, $\theta \in \,]0,2\pi[$ e $t \in \mathbb{R}$. Si ha

$$\det \mathscr{J}_\Phi(\rho,\theta,t) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\cos\theta & -\frac{1}{3}\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\rho\,.$$

Inoltre

$$\Phi^{-1}(B) = \left\{(\rho,\theta,t) \in \mathbb{R}^+ \times \,]0,2\pi[\, \times \mathbb{R} \,\middle|\, \rho^2 + t^2 \leq 25\,,\ t \leq 3\,,\ \rho^2 \leq (t+1)^2\right\},$$

perciò, posto

$$C = \left\{(\rho,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \,\middle|\, \rho^2 + t^2 \leq 25\,,\ t \leq 3\,,\ \rho^2 \leq (t+1)^2\right\},$$

risulta

$$\Phi^{-1}(B) = \left\{(\rho,\theta,t) \in \mathbb{R}^+ \times \,]0,2\pi[\, \times \mathbb{R} \,\middle|\, (\rho,t) \in C\right\};$$

pertanto si ha

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \iiint_B 1\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\Phi^{-1}(B)} \frac{\rho}{3}\,d\rho\,d\theta\,dt = \\ &= \iint_C \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{3}\rho\,d\theta\right) d\rho\,dt = \frac{2}{3}\pi \iint_C \rho\,d\rho\,dt\,. \end{aligned}$$

Calcoliamo questo integrale mediante il teorema di Fubini. Dalle disequazioni che definiscono l'insieme C è più semplice ricavare ρ in funzione di t piuttosto che t in funzione di ρ, perché ρ compare solo in due disequazioni ed è non negativo. Determiniamo C_t. Se $(\rho,t) \in C$ allora $t \leq 3$, quindi se $t > 3$ si ha $C_t = \varnothing$. Se inoltre $t \notin [-5,5]$, allora $C_t = \varnothing$ perché in tal caso non esiste ρ tale che $\rho^2 + t^2 \leq 25$. Se $t \in \,]-\infty,3] \cap [-5,5] = [-5,3]$, allora

$$C_t = \left\{\rho \in \mathbb{R}^+ \,\middle|\, \rho \leq \sqrt{25-t^2}\,,\ \rho \leq |t+1|\right\} = \left]0, \min\left\{\sqrt{25-t^2}, |t+1|\right\}\right].$$

Questo insieme è non vuoto, perché $\sqrt{25-t^2}$ e $|t+1|$ sono entrambi non negativi. Determiniamo il minimo tra $\sqrt{25-t^2}$ e $|t+1|$; si ha

$$\begin{aligned} \sqrt{25-t^2} \geq |t+1| &\iff 25 - t^2 \geq (t+1)^2 \\ &\iff 25 - t^2 \geq t^2 + 2t + 1 \\ &\iff t^2 + t - 12 \leq 0\,. \end{aligned}$$

Il polinomio t^2+t-12 ha le radici

$$t=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(-12)}}{2}=\frac{-1\pm 7}{2}=\begin{cases}-4\,,\\ 3\,;\end{cases}$$

quindi è non negativo per $t\in[-4,3]$; pertanto

$$\sqrt{25-t^2}\geq|t+1| \iff t\in[-4,3].$$

Quindi se $t\in[-5,-4[$ allora si ha $C_t=\left[0,\sqrt{25-t^2}\,\right]$, mentre se $t\in[-4,3]$ risulta $C_t=\big[0,|t+1|\big]$. Perciò

$$\iint_C \rho\,d\rho\,dt=\int_{-5}^{-4}\left(\int_0^{\sqrt{25-t^2}}\rho\,d\rho\right)dt+\int_{-4}^{3}\left(\int_0^{|t+1|}\rho\,d\rho\right)dt=$$

$$=\int_{-5}^{-4}\left[\frac12\rho^2\right]_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{25-t^2}}dt+\int_{-4}^{3}\left[\frac12\rho^2\right]_{\rho=0}^{\rho=|t+1|}dt=\frac12\int_{-5}^{-4}(25-t^2)\,dt+\frac12\int_{-4}^{3}(t+1)^2\,dt=$$

$$=\frac12\left[25t-\frac13 t^3\right]_{-5}^{-4}+\frac12\left[\frac13(t+1)^3\right]_{-4}^{3}=\frac12\left(-100+\frac{64}{3}+125-\frac{125}{3}+\frac{64}{3}+\frac{27}{3}\right)=\frac{35}{2}\,,$$

pertanto

$$\mu(B)=\frac{2\pi}{3}\iint_C\rho\,d\rho\,dt=\frac{35}{3}\pi\,.$$

9) L'equazione $4x^2+y^2-1=2z$ individua un paraboloide ellittico di vertice il punto $(0,0,-1/2)$ e asse l'asse z; la disequazione $4x^2+y^2-1\leq 2z$ è soddisfatta dai punti che hanno quota maggiore o uguale a punti che appartengono al paraboloide, cioè dai punti interni al paraboloide. Le due disequazioni $0\leq z$ e $z\leq y+1$ individuano l'intersezione di due semispazi.

L'insieme B non presenta particolari simmetrie, quindi per calcolarne il volume non è opportuno eseguire un cambiamento di variabili, ma applichiamo direttamente il teorema di Fubini.

É evidente che, fissati y e z, l'insieme in cui varia x è individuato dalla sola disequazione $4x^2+y^2-1\leq 2z$, cioè $x^2\leq(2z-y^2+1)/4$ e quindi

$$B_{y,z}=\left[-\frac{\sqrt{2z-y^2+1}}{2},\frac{\sqrt{2z-y^2+1}}{2}\right],$$

purché y e z siano tali che la quantità sotto radice sia non negativa e sia $0\leq z\leq y+1$. Perciò l'insieme degli (y,z) tali che $B_{y,z}\neq\varnothing$ è

$$C=\left\{(y,z)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,y^2-1\leq 2z\,,\ 0\leq z\leq y+1\right\}.$$

Quindi

$$\mu(B)=\iiint_B 1\,dx\,dy\,dz=\iint_C\left(\int_{-(1/2)\sqrt{2z-y^2+1}}^{(1/2)\sqrt{2z-y^2+1}}1\,dx\right)dy\,dz=\iint_C\sqrt{2z-y^2+1}\,dy\,dz\,.$$

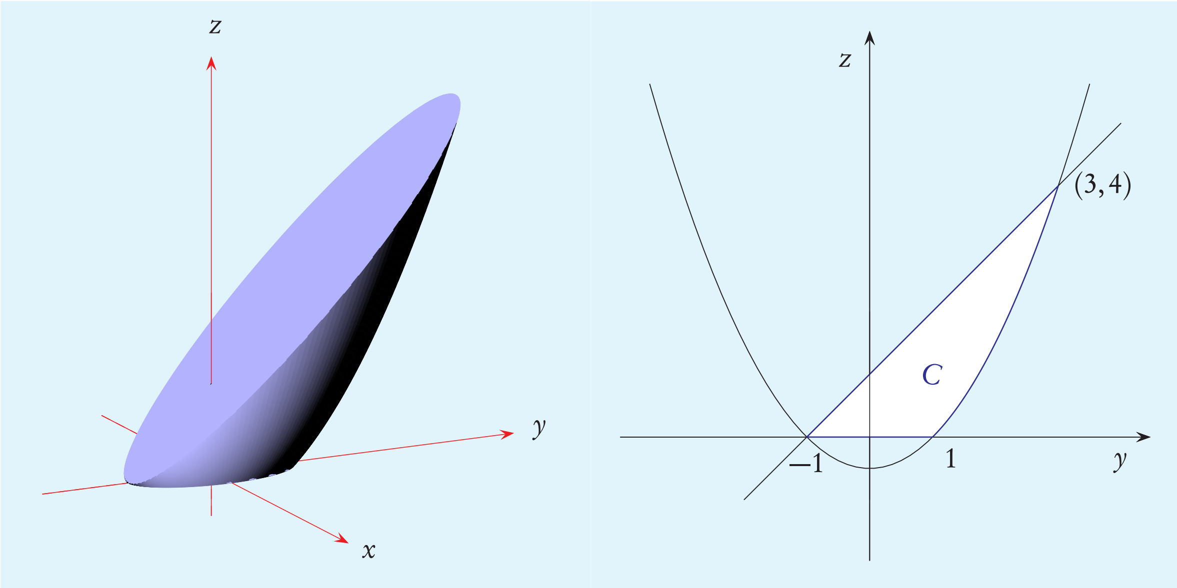


Figura 1.2.8
Il dominio di integrazione dell'esercizio 9 (a sinistra) e la sua proiezione sul piano (y,z) (a destra).

Calcoliamo questo integrale mediante il teorema di Fubini. Poiché il polinomio sotto radice nella funzione integranda è di primo grado nella variabile z e di secondo nella y, è più semplice integrare rispetto a z che rispetto a y; pertanto applichiamo il teorema di Fubini in modo che il primo integrale che viene calcolato sia quello rispetto a z. Come vedremo questa scelta costringe a scomporre l'integrale nella somma di due integrali, ma ciò è compensato dalla semplificazione dei calcoli successivi. Si ha

$$C_y = \left\{ z \in \mathbb{R} \;\middle|\; \max\left\{0, \frac{y^2-1}{2}\right\} \leq z \leq y+1 \right\};$$

poiché $\max\{0,(y^2-1)/2\}$ è 0 se $y \in [-1,1]$ ed è $(y^2-1)/2$ in caso contrario, si ha

$$C_y = \begin{cases} \{z \in \mathbb{R} \mid 0 \leq z \leq y+1\}, & \text{se } y \in [-1,1], \\ \left\{ z \in \mathbb{R} \;\middle|\; \dfrac{y^2-1}{2} \leq z \leq y+1 \right\}, & \text{se } y \notin [-1,1]. \end{cases}$$

Per $y \in [-1,1]$ è $y+1 \geq 0$ e quindi $C_y \neq \varnothing$; per $y \notin [-1,1]$ si ha

$$C_y \neq \varnothing \iff \frac{y^2-1}{2} \leq y+1 \iff y^2-2y-3 \leq 0.$$

Il polinomio y^2-2y-3 ha le radici

$$y = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2 = \begin{cases} -1, \\ 3, \end{cases}$$

quindi è non positivo per $y \in [-1,3]$. Pertanto per $y \notin [-1,1]$ si ha $C_y \neq \varnothing$ se e solo se $y \in \,]1,3]$. Perciò $C_y \neq \varnothing$ e e solo se $y \in [-1,1] \cup \,]1,3] = [-1,3]$. Per il teorema di Fubini si ha quindi

$$\begin{aligned}
&\iint_C \sqrt{2z-y^2+1}\,dy\,dz = \\
&= \int_{-1}^{1}\left(\int_0^{y+1} \sqrt{2z-y^2+1}\,dz\right)dy + \int_1^3\left(\int_{(y^2-1)/2}^{y+1} \sqrt{2z-y^2+1}\,dz\right)dy = \\
&= \int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{3}(2z-y^2+1)^{3/2}\right]_{z=0}^{z=y+1} dy + \int_1^3\left[\frac{1}{3}(2z-y^2+1)^{3/2}\right]_{z=(y^2-1)/2}^{z=y+1} dy = \\
&= \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\Big((2y+2-y^2+1)^{3/2}-(-y^2+1)^{3/2}\Big)dy + \frac{1}{3}\int_1^3\Big((2y+2-y^2+1)^{3/2}-0\Big)dy = \\
&= \frac{1}{3}\int_{-1}^{3}\big(4-(y-1)^2\big)^{3/2}\,dy - \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}(1-y^2)^{3/2}\,dy\,.
\end{aligned}$$

Con la sostituzione $y-1=2\sin t$ nel primo integrale e $y=\sin s$ nel secondo, si ottiene

$$\begin{aligned}
&\iint_C \sqrt{z-y^2+1}\,dy\,dz = \\
&= \frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(4-4\sin^2 t)^{3/2}2\cos t\,dt - \frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\sin^2 s)^{3/2}\cos s\,ds = \\
&= \frac{16}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4 t\,dt - \frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4 s\,ds = 5\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4 t\,dt\,.
\end{aligned}$$

Si ha

$$\begin{aligned}
\cos^4 t &= \left(\frac{1+\cos(2t)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\big(1+2\cos(2t)+\cos^2(2t)\big) = \\
&= \frac{1}{4}\left(1+2\cos(2t)+\frac{1+\cos(4t)}{2}\right) = \frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos(2t)+\frac{1}{8}\cos(4t),
\end{aligned}$$

quindi la funzione

$$t \mapsto \frac{3}{8}t+\frac{1}{4}\sin(2t)+\frac{1}{32}\sin(4t).$$

è una primitiva di $t\mapsto\cos^4 t$. Pertanto

$$\mu(B) = 5\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4 t\,dt = 5\left[\frac{3}{8}t+\frac{1}{4}\sin(2t)+\frac{1}{32}\sin(4t)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{15}{8}\pi\,.$$

La misura dell'insieme B può però essere calcolata anche in un altro modo. Posto

$$D = \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\big|\, 4x^2+y^2-1\le 2z\,,\ z\le y+1\big\},$$

si ha $B\subseteq D$ e quindi $\mu(B)=\mu(D)-\mu(D\setminus B)$. Poniamo

$$E = D\setminus B = \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\big|\, 4x^2+y^2-1\le 2z\,,\ z<0\,,\ z\le y+1\big\}.$$

Se $4x^2+y^2-1\leq 2z$ e $z<0$ allora $4x^2+y^2-1<0$, quindi $y^2<1$, da cui segue $y>-1$ e quindi $y+1>0>z$. Pertanto

$$E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, 4x^2+y^2-1\leq 2z\,,\ z<0\right\}.$$

Calcoliamo ora $\mu(D)$.

In entrambe le disuguaglianze che definiscono D la variabile z è già esplicitata, quindi si determina facilmente $D_{x,y}$. Si ha

$$D_{x,y}=\left\{z\in\mathbb{R} \,\middle|\, \frac{4x^2+y^2-1}{2}\leq z\leq y+1\right\}.$$

Evidentemente $D_{x,y}\neq\varnothing$ se e solo se $(4x^2+y^2-1)/2\leq y+1$, cioè $4x^2+y^2-2y-3\leq 0$, che equivale a $x^2+(y-1)^2\leq 4$. Quindi, posto

$$F=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 4x^2+(y-1)^2\leq 4\right\},$$

si ha

$$D_{x,y}=\begin{cases}[4x^2+y^2-1,y+1], & \text{se } (x,y)\in F\,,\\ \varnothing, & \text{se } (x,y)\notin F\,.\end{cases}$$

Per il teorema di Fubini si ha

$$\mu(D)=\iint_F\left(\int_{(4x^2+y^2-1)/2}^{y+1}1\,dz\right)dx\,dy=\iint_F\frac{-4x^2-y^2+2y+3}{2}\,dx\,dy\,.$$

Poiché F è la parte di piano delimitata dall'ellisse $4x^2+(y-1)^2=4$, per calcolare quest'ultimo integrale è utile porre

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\rho\cos\theta\,,\\ y-1=\rho\sin\theta\,,\end{cases}$$

cioè considerare la funzione cambiamento di variabili

$$\Phi(\rho,\theta)=\left(\frac{1}{2}\rho\cos\theta,1+\rho\sin\theta\right),$$

considerando $\rho\in\mathbb{R}^+$ e $\theta\in\,]0,2\pi[$. Si ha

$$\det\mathscr{J}_\Phi(\rho,\theta)=\det\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2}\cos\theta & -\dfrac{1}{2}\rho\sin\theta\\ \sin\theta & \rho\cos\theta\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\rho\,.$$

Inoltre

$$\Phi^{-1}(F)=\left\{(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^+\times\,]0,2\pi[\,\middle|\,\rho^2\leq 4\right\}=\,]0,2]\times\,]0,2\pi[\,,$$

quindi si ha

$$\mu(D)=\iint_F\frac{-4x^2-y^2+2y+3}{2}\,dx\,dy=\iint_{\Phi^{-1}(F)}\frac{1}{2}(4-\rho^2)\frac{1}{2}\rho\,d\rho\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^2\left(\int_0^{2\pi}\rho(4-\rho^2)\,d\theta\right)d\rho=\frac{\pi}{2}\int_0^2(4\rho-\rho^3)\,d\rho=\frac{\pi}{2}\left[2\rho^2-\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^2=\frac{\pi}{2}(8-4)=2\pi\,.$$

Calcoliamo ora $\mu(E)$. È possibile procedere in modo analogo a quanto fatto per calcolare $\mu(D)$, tenendo presente che si ha

$$E_{x,y} = \left\{ z \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{4x^2+y^2-1}{2} \leq z < 0 \right\}$$

e quindi $E_{x,y} \neq \varnothing$ se e solo se $4x^2+y^2-1<0$. Perciò, posto

$$G = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 4x^2+y^2<1 \right\},$$

si ha

$$E_{x,y} = \begin{cases} \left[(4x^2+y^2-1)/2, 0\right[, & \text{se } (x,y) \in G, \\ \varnothing, & \text{se } (x,y) \notin G. \end{cases}$$

Quindi

$$\mu(E) = \iint_G \left(\int_{(4x^2+y^2-1)/2}^{0} 1\,dz \right) dx\,dy = \iint_G \frac{1-4x^2-y^2}{2}\,dx\,dy.$$

Poiché G è la parte di piano delimitata dall'ellisse $4x^2+y^2=1$ è opportuno effettuare il cambiamento di variabili

$$\Phi(\rho,\theta) = \left(\frac{1}{2}\rho\cos\theta, \rho\sin\theta \right),$$

considerando $\rho \in \mathbb{R}^+$ e $\theta \in \left]0,2\pi\right[$. Si ha $\det \mathscr{J}_\Phi(\rho,\theta) = \rho/2$ e

$$\Phi^{-1}(G) = \left\{ (\rho,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times \left]0,2\pi\right[\,\middle|\, \rho^2<1 \right\} = \left]0,1\right[\times \left]0,2\pi\right[,$$

quindi

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \iint_G \frac{1-4x^2-y^2}{2}\,dx\,dy = \iint_{\Phi^{-1}(G)} \frac{1}{2}(1-\rho^2)\frac{1}{2}\rho\,d\rho\,d\theta = \\ &= \frac{1}{4}\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \rho(1-\rho^2)\,d\theta \right) d\rho = \frac{\pi}{2}\int_0^1 (\rho-\rho^3)\,d\rho = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4 \right]_0^1 = \\ &= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{8}\pi. \end{aligned}$$

Si ottiene nuovamente

$$\mu(B) = \mu(D) - \mu(E) = 2\pi - \frac{1}{8}\pi = \frac{15}{8}\pi.$$

10) L'equazione $x^2+(y-3)^2=9$ individua (in $\mathbb{R}^3$) un cilindro con direttrici parallele all'asse z, generato dalla circonferenza nel piano (x,y) di centro $(0,3)$ e raggio 3; la disequazione $x^2+(y-3)^2 \leq 9$ è soddisfatta dai punti interni al cilindro. L'equazione $z^2=2x^2+y^2$ individua un cono di vertice l'origine e asse l'asse z, quindi la disequazione $z^2 \leq 2x^2+y^2$ individua i punti esterni al cono. L'insieme B è quindi costituito dai punti interni al cilindro ed esterni al cono, che inoltre abbiano quota maggiore o uguale a zero.

Poiché l'insieme non presenta nessun tipo di simmetria non è opportuno procedere ad un cambiamento di variabile. La proiezione di B sul piano (x,y) è contenuta nell'insieme

$$C = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+(y-3)^2 \leq 9 \right\};$$

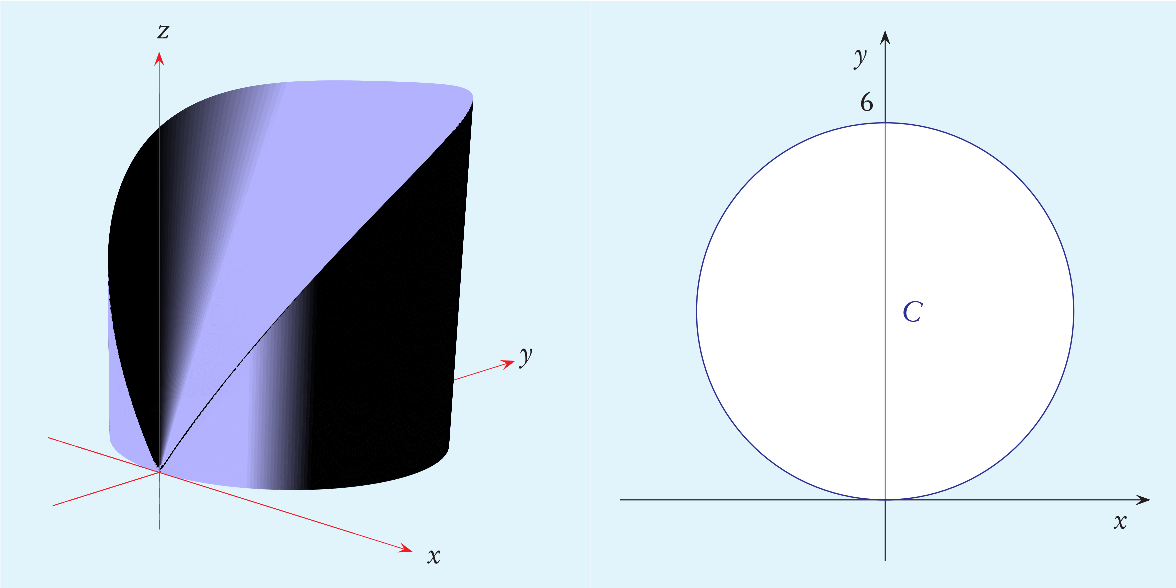


Figura 1.2.9
Il dominio di integrazione dell'esercizio 10 (a sinistra) e la sua proiezione sul piano (x,y) (a destra).

per $(x,y)\in C$, si ha $z\in B_{x,y}$ se e solo se sono soddisfatte le due disequazioni $z^2\le 2x^2+y^2$ e $z\ge 0$, cioè $B_{x,y}=\left[0,\sqrt{2x^2+y^2}\,\right]$; questo insieme è non vuoto qualunque sia $(x,y)\in C$, quindi C è la proiezione di B sul piano (x,y).

Pertanto, per il teorema di Fubini,

$$\iiint_B z\,dx\,dy\,dz=\iint_C\left(\int_0^{\sqrt{2x^2+y^2}} z\,dz\right)dx\,dy=\iint_C\left[\frac{1}{2}z^2\right]_{z=0}^{z=\sqrt{2x^2+y^2}}dx\,dy=$$
$$=\frac{1}{2}\iint_C(2x^2+y^2)\,dx\,dy\,.$$

Poiché C è un cerchio, per calcolare questo integrale è opportuno passare in coordinate polari, opportunamente modificate, perché il centro di C è il punto $(0,3)$ e non l'origine. Poniamo quindi

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\,,\\ y=3+\rho\sin\theta\,,\end{cases}$$

cioè effettuiamo il cambiamento di variabili

$$\Phi(\rho,\theta)=(\rho\cos\theta,3+\rho\sin\theta)\,,$$

considerando $\rho\in\mathbb{R}^+$ e $\theta\in\,]0,2\pi[$. Il cambiamento di variabili differisce per una costante additiva dalle coordinate polari, quindi $\det\mathcal{J}_\Phi(\rho,\theta)=\rho$. Si ha

$$\Phi^{-1}(C)=\left\{(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^+\times\,]0,2\pi[\;\middle|\;\rho^2\le 9\right\}=\,]0,3]\times\,]0,2\pi[\,,$$

quindi

$$\iiint_B z\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}\iint_{\Phi^{-1}(C)} \left(2\rho^2\cos^2\theta + (3+\rho\sin\theta)^2\right)\rho\,d\rho\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^3 \left(\int_0^{2\pi} (\rho^3 + \rho^3\cos^2\theta + 6\rho^2\sin\theta + 9\rho)\,d\theta\right) d\rho =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^3 \left[\rho^3\theta + \rho^3\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4}\right) - 6\rho^2\cos\theta + 9\rho\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\rho =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^3 (2\pi\rho^3 + \pi\rho^3 - 6\rho^2 + 18\pi\rho + 6\rho^2)\,d\rho = \frac{1}{2}\int_0^3 (3\pi\rho^3 + 18\pi\rho)\,d\rho =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{3}{4}\rho^4 + 9\rho^2\right]_0^3 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{3}{4}81 + 81\right) = \frac{567}{8}\pi.$$

11) L'equazione $x^2+6y^2+3z^2=6$ individua un ellissoide di centro l'origine, con assi gli assi cartesiani e semiassi di lunghezza $\sqrt{6}$ lungo l'asse x, 1 lungo l'asse y e $\sqrt{2}$ lungo l'asse z; la disequazione $x^2+6y^2+3z^2 \le 6$ è soddisfatta dai punti interni all'ellissoide. L'equazione $x^2+2y^2+3z^2=4$ individua un ellissoide di centro l'origine, assi gli assi cartesiani e semiassi di lunghezza 2 lungo l'asse x, $\sqrt{2}$ lungo l'asse y e $2/\sqrt{3}$ lungo l'asse z; la disequazione $x^2+2y^2+3z^2 \ge 4$ è soddisfatta dai punti esterni all'ellissoide. Infine la disequazione $x \ge z$ è soddisfatta dai punti del semispazio delimitato dal piano $x=z$ che contiene il semiasse delle x positive.

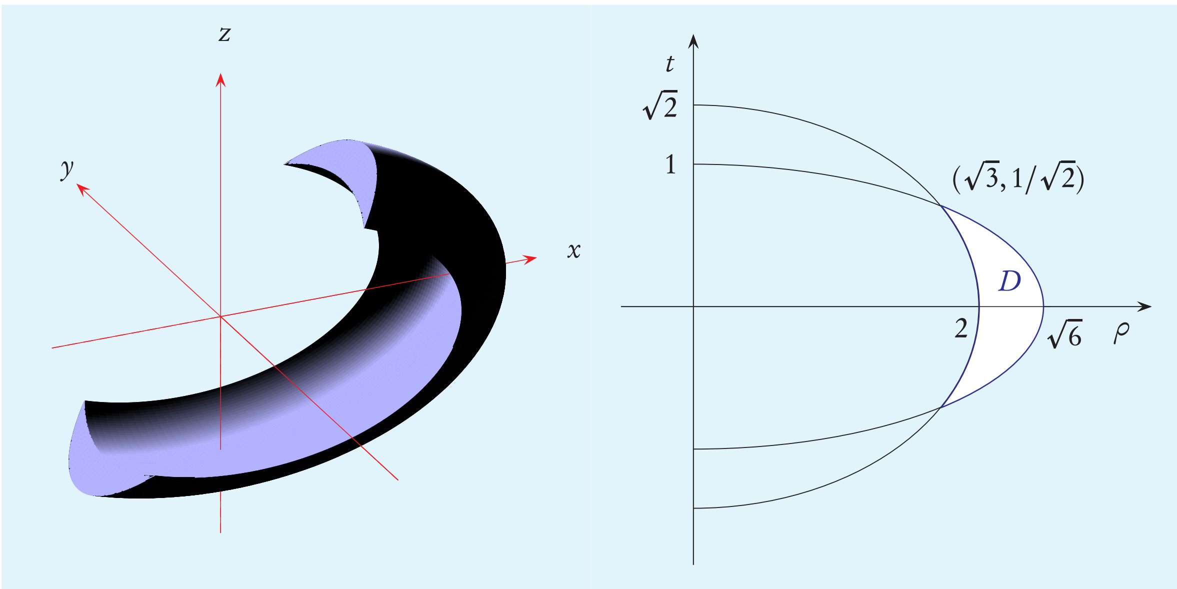


Figura 1.2.10
Il dominio di integrazione dell'esercizio 11 (a sinistra) e la proiezione sul piano (ρ, t) del suo trasformato in coordinate cilindriche (a destra).

Poiché l'insieme è individuato da ellissoidi si può pensare di passare in coordinate sferiche (opportunamente modificate), ma i coefficienti di x^2, y^2 e z^2 non sono proporzionali tra loro nelle equazioni dei due ellissoidi (cioè gli ellissoidi non sono omotetici), quindi le coordinate sferiche non possono essere modificate in modo da adattarsi a entrambi gli ellissoidi; pertanto questo metodo non è utile per semplificare i calcoli. Nelle equazioni degli ellissoidi sono proporzionali tra loro i coefficienti dei termini in x^2 e z^2, per questo motivo è utile effettuare un cambiamento di variabili, passando alle coordinate cilindriche modificate, ponendo cioè

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\,, \\ y = t\,, \\ z = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\rho\sin\theta\,, \end{cases}$$

quindi effettuiamo il cambiamento di variabili

$$\Phi(\rho,\theta,t) = \Big(\rho\cos\theta, t, \frac{1}{\sqrt{3}}\rho\sin\theta\Big),$$

considerando $\rho \in \mathbb{R}^+$, $\theta \in \,]0,2\pi[$ e $t \in \mathbb{R}$. Si ha

$$\det \mathscr{J}_\Phi(\rho,\theta,t) = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\rho\cos\theta & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\rho\,.$$

Risulta

$$\Phi^{-1}(B) = \Big\{(\rho,\theta,t) \in \mathbb{R}^+ \times \,]0,2\pi[\, \times \mathbb{R} \,\Big|\, \rho^2 + 6t^2 \le 6\,,\ \rho^2 + 2t^2 \ge 4\,,\ \rho\cos\theta \ge \frac{\rho}{\sqrt{3}}\sin\theta\Big\}.$$

La disuguaglianza $\rho\cos\theta \ge (1/\sqrt{3})\rho\sin\theta$ equivale a $\cos\theta \ge (1/\sqrt{3})\sin\theta$. Si ha

$$\cos\theta \ge \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta \iff \sqrt{3}\,\cos\theta - \sin\theta \ge 0 \iff \cos\theta\big(\sqrt{3} - \tan\theta\big) \ge 0\,;$$

per risolvere tale disequazione studiamo il segno di ciascuno dei fattori; si ottiene

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
 & 0 & & \pi/3 & & \pi/2 & & 4\pi/3 & & 3\pi/2 & & 2\pi \\
\cos\theta & | & +\ +\ + & | & + & | & -\ -\ -\ -\ -\ -\ - & | & - & | & +\ +\ +\ + & | \\
\sqrt{3} - \tan\theta & | & +\ +\ + & | & - & | & +\ +\ +\ +\ +\ +\ + & | & - & | & +\ +\ +\ + & | \\
\cos\theta\big(\sqrt{3} - \tan\theta\big) & | & +\ +\ + & | & - & | & -\ -\ -\ -\ -\ -\ - & | & + & | & +\ +\ +\ + & |
\end{array}$$

quindi è $\rho\cos\theta \ge (1/\sqrt{3})\rho\sin\theta$ se e solo se $\theta \in \,]0,\pi/3] \cup [4\pi/3, 2\pi[$, perciò

$$\Phi^{-1}(B) = \Big\{(\rho,\theta,t) \in [0,+\infty[\, \times \Big]0, \frac{\pi}{3}\Big] \cup \Big[\frac{4}{3}\pi, 2\pi\Big[\times \mathbb{R} \,\Big|\, \rho^2 + 6t^2 \le 6\,,\ \rho^2 + 2t^2 \ge 4\Big\}.$$

Poiché le funzioni seno e coseno sono periodiche, non cambia il risultato se invece che in $\Phi^{-1}(B)$ si integra in

$$C = \Big\{(\rho,\theta,t) \in [0,+\infty[\, \times \Big[-\frac{2}{3}\pi, \frac{\pi}{3}\Big] \times \mathbb{R} \,\Big|\, \rho^2 + 6t^2 \le 6\,,\ \rho^2 + 2t^2 \ge 4\Big\};$$

in tal modo i calcoli risultano un po' più semplici.

Abbiamo quindi

$$\iiint_B x\,dx\,dy\,dz = \iiint_C \rho\cos\theta\,\frac{1}{\sqrt{3}}\rho\,d\rho\,d\theta\,dt\,.$$

Nelle disequazioni che individuano l'insieme C non compare θ, quindi, posto

$$D = \{(\rho,t)\in[0,+\infty[\,\times\mathbb{R}\,|\,\rho^2+6t^2\le 6,\ \rho^2+2t^2\ge 4\},$$

se $(\rho,t)\in D$ si ha $C_{\rho,t}=[-2\pi/3,\pi/3]$, mentre se $(\rho,t)\notin D$ si ha $C_{\rho,t}=\varnothing$. Applicando il teorema di Fubini si ha quindi

$$\iiint_B x\,dx\,dy\,dz = \iint_D\left(\int_{-2\pi/3}^{\pi/3}\frac{1}{\sqrt{3}}\rho^2\cos\theta\,d\theta\right)d\rho\,dt =$$
$$= \iint_D\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\rho^2\sin\theta\right]_{\theta=-2\pi/3}^{\theta=\pi/3}d\rho\,dt = \iint_D \frac{1}{\sqrt{3}}\rho^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)d\rho\,dt = \iint_D \rho^2\,d\rho\,dt\,.$$

Se $(\rho,t)\in D$ si ha $\rho\ge 0$, quindi, ricavando ρ da ciascuna delle disequazioni che individuano D, si ottiene una sola limitazione per ρ, se invece si ricava t da ciascuna disequazione se ne ottengono due, è quindi evidente che è più semplice applicare il teorema di Fubini in modo da integrare prima rispetto a ρ e poi rispetto a t.

Se $t^2>1$ allora $D_t=\varnothing$, perché in tal caso la disequazione $\rho^2+6t^2\le 6$ non è mai verificata. Se $t^2\le 1$, cioè $t\in[-1,1]$, si ha

$$D_t = \{\rho\in\mathbb{R}^+\,|\,\sqrt{4-2t^2}\le\rho\le\sqrt{6-6t^2}\};$$

questo insieme è non vuoto se e solo se t verifica la disequazione $\sqrt{4-2t^2}\le\sqrt{6-6t^2}$, cioè $4-2t^2\le 6-6t^2$, che equivale a $t^2\le 1/2$. Quindi se $t\in[-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}]$, allora si ha $D_t=[\sqrt{4-2t^2},\sqrt{6-6t^2}]$, in caso contrario $D_t=\varnothing$. Abbiamo quindi

$$\iiint_B x\,dx\,dy\,dz = \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}}\left(\int_{\sqrt{4-2t^2}}^{\sqrt{6-6t^2}}\rho^2\,d\rho\right)dt = \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}}\left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_{\rho=\sqrt{4-2t^2}}^{\rho=\sqrt{6-6t^2}}dt =$$
$$= \frac{1}{3}\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}}(6-6t^2)^{3/2}\,dt - \frac{1}{3}\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}}(4-2t^2)^{3/2}\,dt\,.$$

Effettuando la sostituzione $t=\sin\sigma$ nel primo integrale e $t=\sqrt{2}\sin\tau$ nel secondo si ottiene

$$\frac{1}{3}\int_{-\arcsin(1/\sqrt{2})}^{\arcsin(1/\sqrt{2})}(6-6\sin^2\sigma)^{3/2}\cos\sigma\,d\sigma - \frac{1}{3}\int_{-\arcsin(1/2)}^{\arcsin(1/2)}(4-4\sin^2\tau)^{3/2}\sqrt{2}\,\cos\tau\,d\tau =$$
$$= 2\sqrt{6}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos^4\sigma\,d\sigma - \frac{8\sqrt{2}}{3}\int_{-\pi/6}^{\pi/6}\cos^4\tau\,d\tau\,.$$

Si ha

$$\cos^4\sigma = \left(\frac{1+\cos(2\sigma)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\big(1+2\cos(2\sigma)+\cos^2(2\sigma)\big) =$$
$$= \frac{1}{4}\left(1+2\cos(2\sigma)+\frac{1+\cos(4\sigma)}{2}\right) = \frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos(2\sigma)+\frac{1}{8}\cos(4\sigma),$$

quindi la funzione

$$\sigma \mapsto \frac{3}{8}\sigma + \frac{1}{4}\sin(2\sigma) + \frac{1}{32}\sin(4\sigma).$$

è una primitiva di $\sigma \mapsto \cos^4\sigma$. Pertanto

$$\iiint_B x\,dx\,dy\,dz = 2\sqrt{6}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos^4\sigma\,d\sigma - \frac{8\sqrt{2}}{3}\int_{-\pi/6}^{\pi/6}\cos^4\sigma\,d\sigma =$$
$$= 2\sqrt{6}\left[\frac{3}{8}\sigma+\frac{1}{4}\sin(2\sigma)+\frac{1}{32}\sin(4\sigma)\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} - \frac{8\sqrt{2}}{3}\left[\frac{3}{8}\sigma+\frac{1}{4}\sin(2\sigma)+\frac{1}{32}\sin(4\sigma)\right]_{-\pi/6}^{\pi/6} =$$
$$= 2\sqrt{6}\left(\frac{3}{32}\pi+\frac{1}{4}+\frac{3}{32}\pi+\frac{1}{4}\right) - \frac{8\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1}{16}\pi+\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\sqrt{3}}{64}+\frac{1}{16}\pi+\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\sqrt{3}}{64}\right) =$$
$$= \frac{3\sqrt{6}}{8}\pi+\sqrt{6}-\frac{\sqrt{2}}{3}\pi-\frac{2\sqrt{6}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{12} = \left(\frac{3\sqrt{6}}{8}-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\pi+\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

12) L'equazione $z^2=4x^2+y^2$ individua un cono di centro l'origine e asse l'asse z ; la disequazione $z^2\geq 4x^2+y^2$ è verificata dai punti interni al cono. L'equazione $4x^2+y^2+z^2=8$ individua un ellissoide di centro l'origine, assi gli assi cartesiani e semiassi di lunghezza $\sqrt{2}$ lungo l'asse x , $2\sqrt{2}$ lungo l'asse y e $2\sqrt{2}$ lungo l'asse z ; la disequazione $4x^2+y^2+z^2\leq 8$ è soddisfatta dai punti interni all'ellissoide. Quindi B è la parte di spazio che è all'interno sia dell'ellissoide che del cono.

Sia nell'equazione del cono che in quella dell'ellissoide le coordinate x e y compaiono solo nella forma $4x^2+y^2$, è quindi utile passare in coordinate cilindriche opportunamente modificate. È anche possibile utilizzare le coordinate sferiche, modificate in modo che l'ellissoide sia trasformato in un parallelepipedo; in tale modo anche il cono viene trasformato in un parallelepipedo. Poniamo quindi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\rho\sin\theta\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \\ z = \rho\cos\theta, \end{cases}$$

cioè effettuiamo il cambiamento di variabili

$$\Phi(\rho,\theta,\varphi) = \left(\frac{1}{2}\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta\right),$$

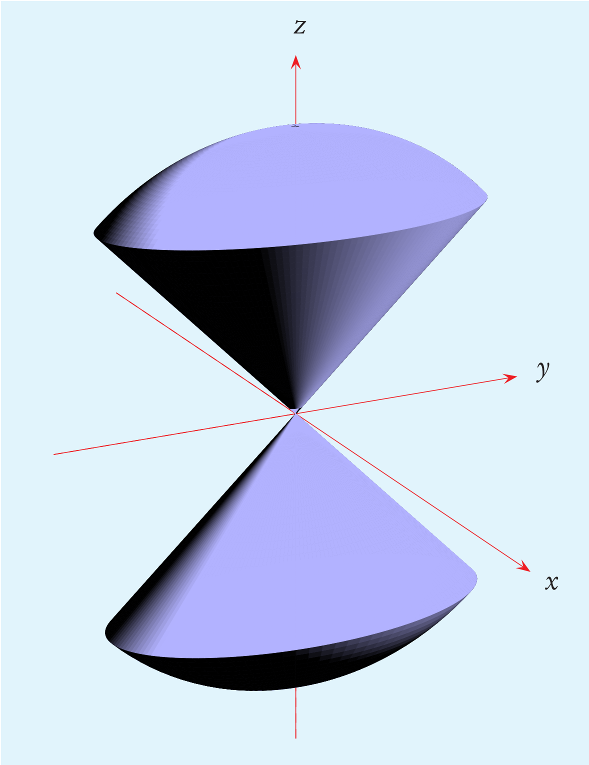


Figura 1.2.11
Il dominio di integrazione dell'esercizio 12.

considerando $\rho \in \mathbb{R}^+$, $\theta \in \,]0,\pi[$ e $\varphi \in \,]0,2\pi[$. Si ha

$$\det \mathscr{J}_\Phi(\rho,\theta,\varphi) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin\theta\cos\varphi & \frac{1}{2}\rho\cos\theta\cos\varphi & -\frac{1}{2}\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\rho^2\sin\theta\,.$$

Risulta

$$\Phi^{-1}(B) = \left\{(\rho,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \,]0,\pi[\, \times \,]0,2\pi[\, \mid \rho^2\cos^2\theta \geq \rho^2\sin^2\theta\,,\ \rho^2 \leq 8\right\}.$$

La disuguaglianza $\rho^2\cos^2\theta \geq \rho^2\sin^2\theta$ equivale a $\cos^2\theta \geq \sin^2\theta$, cioè $\tan^2\theta \leq 1$, che equivale a $-1 \leq \tan\theta \leq 1$. Ricordando che $\theta \in \,]0,\pi[$, queste condizioni sono verificate per $\theta \in \,]0,\pi/4] \cup [3\pi/4,\pi[$. Quindi

$$\Phi^{-1}(B) = \left]0, 2\sqrt{2}\right] \times \left(\left]0,\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}\pi,\pi\right[\right) \times \,]0,2\pi[\,.$$

Pertanto si ha

$$\iiint_B (z+1)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\Phi^{-1}(B)} (\rho\cos\theta+1)\frac{1}{2}\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\sqrt{2}}\left(\int_0^{\pi/4}\left(\int_0^{2\pi}(\rho^3\cos\theta\sin\theta+\rho^2\sin\theta)\,d\varphi\right)d\theta\right)d\rho +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{2\sqrt{2}}\left(\int_{3\pi/4}^{\pi}\left(\int_0^{2\pi}(\rho^3\cos\theta\sin\theta+\rho^2\sin\theta)\,d\varphi\right)d\theta\right)d\rho =$$

$$= \pi \int_0^{2\sqrt{2}} \left(\int_0^{\pi/4} (\rho^3 \cos\theta \sin\theta + \rho^2 \sin\theta)\, d\theta \right) d\rho +$$

$$+ \pi \int_0^{2\sqrt{2}} \left(\int_{3\pi/4}^{\pi} (\rho^3 \cos\theta \sin\theta + \rho^2 \sin\theta)\, d\theta \right) d\rho =$$

$$= \pi \int_0^{2\sqrt{2}} \left[\frac{1}{2} \rho^3 \sin^2\theta - \rho^2 \cos\theta \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} d\rho + \pi \int_0^{2\sqrt{2}} \left[\frac{1}{2} \rho^3 \sin^2\theta - \rho^2 \cos\theta \right]_{\theta=3\pi/4}^{\theta=\pi} d\rho =$$

$$= \pi \int_0^{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{4} \rho^3 - \frac{1}{\sqrt{2}} \rho^2 + \rho^2 \right) d\rho + \pi \int_0^{2\sqrt{2}} \left(\rho^2 - \frac{1}{4} \rho^3 - \frac{1}{\sqrt{2}} \rho^2 \right) d\rho =$$

$$= (2-\sqrt{2})\pi \int_0^{2\sqrt{2}} \rho^2\, d\rho = (2-\sqrt{2})\pi \left[\frac{1}{3} \rho^3 \right]_0^{2\sqrt{2}} = \frac{32}{3} (\sqrt{2}-1)\pi\, .$$

13) L'equazione $z = x^2 + y^2$ individua un paraboloide di rotazione intorno all'asse z, con vertice nell'origine; la disequazione $z \geq x^2 + y^2$ è verificata dai punti all'interno del paraboloide. L'equazione $z = 3 + 2|x|$ individua l'unione di due semipiani: $z = 3 + 2x$ nel semispazio $x \geq 0$ e $z = 3 - 2x$ nel semispazio $x \leq 0$; la disequazione $z \leq 3 + 2|x|$ è verificata dai punti che hanno quota minore o uguale a quella di punti di tale unione. Quindi B è la parte di spazio all'interno del paraboloide e al di sotto dell'unione dei due semipiani.

Sia l'insieme che la funzione integranda sono simmetrici rispetto al piano $x = 0$, perché sostituendo $-x$ a x l'insieme e la funzione restano invariati. Quindi, posto

$$C = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z \geq x^2 + y^2 ,\ z \leq 3 + 2x ,\ x \geq 0 \right\}$$

si ha

$$\iiint_B y^2\, dx\, dy\, dz = 2 \iiint_C y^2\, dx\, dy\, dz\, .$$

In questo modo si ha sempre $|x| = x$ e ciò semplifica i calcoli.

Dalle disequazioni che definiscono C è agevole ricavare z in funzione di x e y o y in funzione di x e z, mentre è più complicato ricavare le condizioni su x. Ricaviamo z, perché la funzione integranda non dipende da z, quindi l'integrale che si ottiene è banale. Se $(x,y) \in [0,+\infty[\times \mathbb{R}$, allora si ha $(x,y,z) \in C$ se e solo se $x^2+y^2 \leq z \leq 2x+3$, pertanto

$$C_{x,y} = \begin{cases} [x^2 + y^2, 2x + 3], & \text{se } x^2 + y^2 < 2x + 3\, , \\ \{2x + 3\}, & \text{se } x^2 + y^2 = 2x + 3\, , \\ \emptyset, & \text{se } x^2 + y^2 > 2x + 3\, . \end{cases}$$

Quindi, posto

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 2x + 3 ,\ x \geq 0 \right\},$$

per il teorema di Fubini si ha

$$\iiint_C y^2\, dx\, dy\, dz = \iint_D \left(\int_{x^2+y^2}^{2x+3} y^2\, dz \right) dx\, dy = \iint_D y^2 (2x + 3 - x^2 - y^2)\, dx\, dy\, .$$

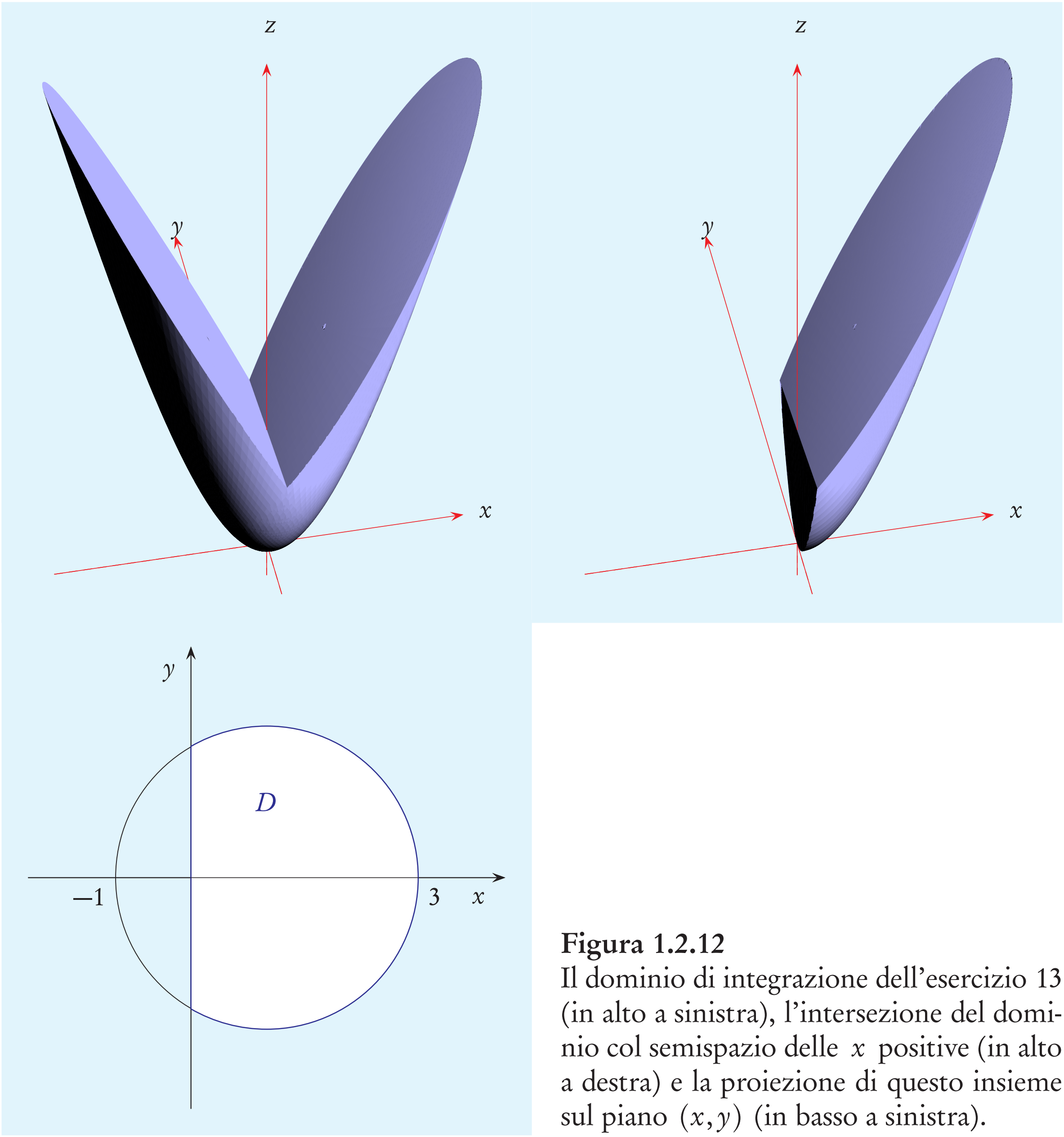


Figura 1.2.12
Il dominio di integrazione dell'esercizio 13 (in alto a sinistra), l'intersezione del dominio col semispazio delle x positive (in alto a destra) e la proiezione di questo insieme sul piano (x,y) (in basso a sinistra).

La disequazione $x^2+y^2 \leq 2x+3$ equivale a $x^2-2x+1+y^2 \leq 4$, cioè $(x-1)^2+y^2 \leq 4$, quindi è verificata dai punti del cerchio di centro $(1,0)$ e raggio 2. Deve però essere anche $x \geq 0$, cosa che rende poco conveniente passare in coordinate polari. Poiché le disequazioni che definiscono D si risolvono facilmente rispetto a y, applichiamo direttamente il teorema di Fubini sezionando D con rette parallele all'asse delle y. Per $x \in [0,+\infty[$, si ha $(x,y) \in D$ se e solo se $y^2 \leq -x^2+2x+3$, quindi $D_x \neq \varnothing$ per $-x^2+2x+3 \geq 0$. Il trinomio $-x^2+2x+3$ si annulla per $x=-1$ e $x=3$, quindi è non negativo in $[-1,3]$, pertanto $D_x \neq \varnothing$ per $x \in [0,3]$; per tali x risulta $y \in D_x$ se e solo se si ha $-\sqrt{-x^2+2x+3} \leq y \leq \sqrt{-x^2+2x+3}$. Quindi

$$\iint_D y^2(2x+3-x^2-y^2)\,dx\,dy = \int_0^3 \left(\int_{-\sqrt{-x^2+2x+3}}^{\sqrt{-x^2+2x+3}} y^2(2x+3-x^2-y^2)\,dy \right) dx =$$

$$= \int_0^3 \left[\frac{1}{3}(2x+3-x^2)y^3 - \frac{1}{5}y^5 \right]_{y=-\sqrt{-x^2+2x+3}}^{y=\sqrt{-x^2+2x+3}} dx =$$

$$= \int_0^3 \Big(\frac{1}{3}(2x+3-x^2)^{5/2} - \frac{1}{5}(2x+3-x^2)^{5/2} +$$

$$+ \frac{1}{3}(2x+3-x^2)^{5/2} - \frac{1}{5}(2x+3-x^2)^{5/2} \Big) dx =$$

$$= \int_0^3 \frac{4}{15}(2x+3-x^2)^{5/2}\, dx\,.$$

Si ha $2x+3-x^2 = 4-x^2-2x-1 = 4-(x-1)^2$, pertanto è utile effettuare la sostituzione $x-1 = 2\sin t$, cioè $x = 2\sin t + 1$, la cui derivata è $\cos t$. Per $x=3$ si ha $2\sin t = 2$, quindi $t = \pi/2$, mentre per $x=0$ si ha $2\sin t = -1/2$, quindi $t = -\pi/6$. Pertanto

$$\int_0^3 (2x+3-x^2)^{5/2}\, dx = \int_0^3 \big(4-(x-1)^2\big)^{5/2} dx = \int_{-\pi/6}^{\pi/2} (4-4\sin^2 t)^{5/2} 2\cos t\, dt =$$

$$= \int_{-\pi/6}^{\pi/2} 2^6 \cos^6 t\, dt = \int_{-\pi/6}^{\pi/2} 2^6 \Big(\frac{1+\cos(2t)}{2} \Big)^3 dt =$$

$$= \int_{-\pi/6}^{\pi/2} 8\big(1+3\cos(2t)+3\cos^2(2t)+\cos^3(2t)\big)\, dt =$$

$$= \int_{-\pi/6}^{\pi/2} 8\Big(1+3\cos(2t)+3\,\frac{1+\cos(4t)}{2} + \cos(2t)\big(1-\sin^2(2t)\big)\Big)\, dt =$$

$$= \int_{-\pi/6}^{\pi/2} \big(20+32\cos(2t)+12\cos(4t)-8\cos(2t)\sin^2(2t)\big)\, dt =$$

$$= \Big[20t + 16\sin(2t) + 3\sin(4t) - \frac{4}{3}\sin^3(2t) \Big]_{-\pi/6}^{\pi/2} =$$

$$= 20\,\frac{\pi}{2} + 20\,\frac{\pi}{6} + 16\,\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\,\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{4}{3}\,\frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{40}{3}\pi + 9\sqrt{3}\,.$$

Pertanto

$$\iiint_B y^2\, dx\, dy\, dz = 2\iiint_C y^2\, dx\, dy\, dz = 2\iint_D y^2(2x+3-x^2-y^2)\, dx\, dy =$$

$$= \frac{8}{15}\int_0^3 (2x+3-x^2)^{5/2}\, dx = \frac{8}{15}\Big(\frac{40}{3}\pi + 9\sqrt{3} \Big) = \frac{64}{9}\pi + \frac{24\sqrt{3}}{5}\,.$$

14) L'equazione $x^2+y^2+9z^2 = 4$ individua un ellissoide di centro l'origine, assi gli assi cartesiani e semiassi di lunghezza 2, 2 e $2/\sqrt{3}$, la disequazione $x^2+y^2+9z^2 \leq 4$ è verificata dai punti interni all'ellissoide. Le disequazioni $x \geq 0$ e $y \geq x$ individuano due semipiani.

Passando in coordinate sferiche, opportunamente modificate, l'ellissoide si trasforma in un parallelepipedo. Occorre però fare attenzione a come si trasformano i semispazi.

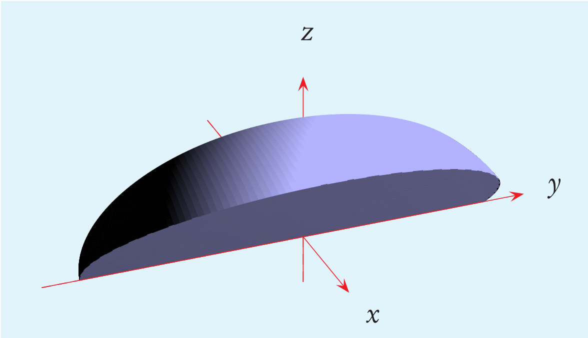


Figura 1.2.13
Il dominio di integrazione dell'esercizio 14.

Consideriamo le abituali coordinate sferiche, che privilegiano l'asse z; la condizione che il punto (x, y, z) appartenga a un semispazio individuato da un piano contenente l'asse z è espressa da una disequazione del tipo $ax \leq by$ (eventualmente con a o b nulli), quindi si traduce in una condizione sulla nuova coordinata φ. Se invece il piano che individua il semispazio non contiene l'asse z le condizioni sulle nuove coordinate coinvolgono sia θ che φ e risultano piuttosto complicate. Nel nostro caso entrambi i piani coinvolti, $x = 0$ e $z = x$, contengono l'asse y, quindi è opportuno utilizzare le coordinate sferiche modificate in modo da privilegiare l'asse y. Poniamo quindi

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi\,, \\ y = \rho\cos\theta\,, \\ z = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\rho \sin\theta \sin\varphi\,, \end{cases}$$

cioè effettuiamo il cambiamento di variabili

$$\Phi(\rho, \theta, \varphi) = \left(\rho \sin\varphi \cos\theta, \rho\cos\varphi, \frac{1}{\sqrt{3}}\rho \sin\varphi \sin\theta\right),$$

considerando $\rho \in \mathbb{R}^+$, $\theta \in \,]0, \pi[$ e $\varphi \in \,]0, 2\pi[$. Si ha

$$\det \mathscr{J}_\Phi(\rho, \theta, \varphi) = \det \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & \rho\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\sin\varphi & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\rho\cos\theta\sin\varphi & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\rho\sin\theta\cos\varphi \end{pmatrix} =$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\rho^2 \sin\theta\,.$$

Il punto $(\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \,]0, \pi[\, \times \,]0, 2\pi[$ appartiene a $\Phi^{-1}(B)$ se e solo se sono verificate le disequazioni $\rho^2 \leq 4$, $\rho \sin\theta \cos\varphi \geq 0$ e $\rho \sin\theta \sin\varphi/\sqrt{3} \geq \rho \sin\theta \cos\varphi$. La prima è verificata per $\rho \in \,]0, 2]$. Le seconda equivale a $\cos\varphi \geq 0$, pertanto è verificata per $\varphi \in \,]0, \pi/2] \cup [3\pi/2, 2\pi[$. Infine la terza equivale a $\sin\varphi \geq \sqrt{3}\cos\varphi$. Si ha

$$\sin\varphi \geq \sqrt{3}\cos\varphi \iff \sin\varphi - \sqrt{3}\cos\varphi \geq 0 \iff \cos\varphi\left(\tan\varphi - \sqrt{3}\right) \geq 0\,.$$

Studiamo il segno di ciascuno dei fattori; si ha

$$
\begin{array}{r|ccc|c|ccccccc|c|cccc|}
\multicolumn{1}{r}{} & \multicolumn{3}{l}{0} & \multicolumn{1}{c}{\pi/3\ \ \pi/2} & \multicolumn{7}{r}{4\pi/3} & \multicolumn{1}{c}{3\pi/2} & \multicolumn{4}{r}{2\pi} \\
\cos\varphi & + & + & + & + & - & - & - & - & - & - & - & - & + & + & + & + \\
\tan\varphi-\sqrt{3} & - & - & - & + & - & - & - & - & - & - & - & + & - & - & - & - \\
\cos\theta\big(\sqrt{3}-\tan\theta\big) & - & - & - & + & + & + & + & + & + & + & + & - & - & - & - & -
\end{array}
$$

quindi la disequazione è verificata per $\varphi\in\big[\pi/3,(4/3)\pi\big]$. Perciò

$$\Phi^{-1}(B)=\,]0,2]\times\,]0,\pi[\,\times\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right].$$

Pertanto si ha

$$\iiint_B z\,dx\,dy\,dz=\iiint_{\Phi^{-1}(B)}\frac{1}{\sqrt{3}}\rho\sin\theta\,\sin\varphi\,\frac{1}{\sqrt{3}}\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^2\left(\int_0^\pi\left(\int_{\pi/3}^{\pi/2}\rho^3\sin^2\theta\,\sin\varphi\,d\varphi\right)d\theta\right)d\rho=\frac{1}{3}\int_0^2\rho^3\,d\rho\int_0^\pi\sin^2\theta\,d\theta\int_{\pi/3}^{\pi/2}\sin\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^2\int_0^\pi\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\,d\theta\big[-\cos\varphi\big]_{\pi/3}^{\pi/2}=\frac{1}{3}4\left[\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{4}\sin(2\theta)\right]_0^\pi\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{3}.$$

15)

a. $\displaystyle\int_0^4\int_{-\rho}^{\rho}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\rho\,d\theta\,dt\,d\rho=\frac{128}{3}\pi$

b. $\displaystyle\int_{-2}^0\int_0^{\sqrt{12+t^2}}\int_0^{2\pi}\rho\,d\theta\,d\rho\,dt+\int_0^2\int_{2t}^{\sqrt{12+t^2}}\int_0^{2\pi}\rho\,d\theta\,d\rho\,dt=\frac{128}{3}\pi$

c. $\displaystyle\int_{-3/2}^0\int_0^{3+2\eta}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\rho\,d\theta\,d\rho\,dt+\int_0^{3/2}\int_0^{\sqrt{9-\eta^2}}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\rho\,d\theta\,d\rho\,dt=\frac{135}{16}\pi$

d. $\displaystyle\int_0^{3\sqrt{3}/(2\sqrt{2})}\int_{\sqrt{1-(\rho/3)^2}}^{\sqrt{4-\rho^2}}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}\rho\,d\theta\,dt\,d\rho=\frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{6}\pi$

e. $\displaystyle\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{-1}^{(x-1)^2+y^2}1\,dz\,dy\,dx=16\pi$

f. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{3-\rho^2}}^{\sqrt{3-\rho^2}}\int_0^\pi\frac{1}{2}\rho\,d\theta\,dt\,d\rho-\int_1^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{\rho^2-1}}^{\sqrt{\rho^2-1}}\int_0^\pi\frac{1}{2}\rho\,d\theta\,dt\,d\rho=\left(\sqrt{3}-\frac{2}{3}\right)\pi$

g. $\displaystyle\int_0^2\int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{4-\rho^2}}^{10-\rho\cos\theta}\frac{1}{\sqrt{3}}\rho\,dt\,d\theta\,d\rho=\frac{104}{3\sqrt{3}}\pi$

h. $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-t^2}}\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}\rho\,d\theta\,d\rho\,dt=\frac{16}{9}\pi$

i. $\displaystyle\int_{-2}^2\int_{-(1/2)\sqrt{4-x^2}}^{(1/2)\sqrt{4-x^2}}\int_{-x-3}^{x+3}1\,dy\,dz\,dx=12\pi$

j. $\displaystyle\int_0^2\int_{-\rho}^{\sqrt{16-\rho^2}}\int_0^{2\pi}\rho\,d\theta\,dt\,d\rho=\left(48-16\sqrt{3}\right)\pi$

k. $\displaystyle\int_{1-\sqrt{7}}^{1+\sqrt{7}}\int_{|\zeta-2|}^{\sqrt{16-\zeta^2}}\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}\rho\,d\theta\,d\rho\,dt=\frac{56\sqrt{7}}{9}\pi$

l. $\displaystyle\int_0^{3/\sqrt{2}}\int_{-\rho}^{3-\rho^2/3}\int_0^{2\pi}\rho\,d\theta\,dt\,d\rho+\int_{3/\sqrt{2}}^3\int_{-\sqrt{9-\rho^2}}^{3-\rho^2/3}\int_0^{2\pi}\rho\,d\theta\,dt\,d\rho=\left(\frac{27}{2}+9\sqrt{2}\right)\pi$

m. $\displaystyle\int_{-2}^1\int_0^{\sqrt{4-t^2}}\int_0^{2\pi}\rho^3 t\cos^2\theta\,d\theta\,d\rho\,dt=-\frac{9}{8}\pi$

n. $\displaystyle\int_0^4\int_0^{2\pi}\int_{-(1/2)\rho\cos\theta-1}^{\rho}\frac{1}{2}\rho t\,dt\,d\theta\,d\rho=24\pi$

o. $\displaystyle\int_0^2\int_{-\sqrt{4-\rho^2}}^{(\rho^2-4)/4}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^3\cos^2\theta}{2}\,d\theta\,dt\,d\rho=\frac{22}{15}\pi$

p. $\displaystyle\int_{-2}^{-1}\int_0^{\sqrt{16-4t^2}}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\rho^3\sin^2\theta\,d\theta\,d\rho\,dt+\int_{-1}^1\int_{\sqrt{3}(t+1)}^{\sqrt{16-4t^2}}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\rho^3\sin^2\theta\,d\theta\,d\rho\,dt=54\pi$

q. $\displaystyle\int_0^4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi}\frac{1}{2\sqrt{2}}\rho^2\sin\theta(4+\rho^2\sin^2\theta)\,d\varphi\,d\theta\,d\rho=\frac{832\sqrt{2}}{15}\pi$

r. $\displaystyle\int_{-1/2}^0\int_{-\sqrt{4-16z^2}}^{\sqrt{4-16z^2}}\int_0^{(1/2)\sqrt{4-x^2-16z^2}}y\,dy\,dx\,dz+\int_0^{1/2}\int_{-\sqrt{4-16z^2}}^{2-4z}\int_0^{(1/2)\sqrt{4-x^2-16z^2}}y\,dy\,dx\,dz=$
$\displaystyle=\frac{3}{16}\pi+\frac{1}{6}$

s. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{7}}\int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{28-28\rho\cos\theta+3\rho^2\cos^2\theta+4\rho^2}}^{7-2\rho\cos\theta}\rho t\,dt\,d\theta\,d\rho=\frac{147}{2}\pi$

t. $\displaystyle\int_2^3\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{3}}\rho^4\sin^3\theta\,d\varphi\,d\theta\,d\rho=\frac{844}{5\sqrt{3}}\pi$

2
Serie di funzioni

2.1 Esercizi

1) Studiare la convergenza, puntuale e uniforme, per $x \in \mathbb{R}$, della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp\left(nx - \sqrt{n} + 1\right)}{n^3 + 2^n}$$

2) Studiare la convergenza, puntuale e uniforme, per $x \in \mathbb{R}$, della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2 + 2n}{x^2 n^4 + 1}$$

3) Studiare la convergenza, puntuale e uniforme, per $x \in \mathbb{R}$, della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{3^n} (x^2 - 2x - 2)^n$$

4) Studiare la convergenza, puntuale e uniforme, per $x \in \mathbb{R}$, della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\exp(nx)}{2n}$$

5) Studiare la convergenza, puntuale e uniforme, per $x \in \mathbb{R}$, della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2 + 2}{x^2 + n^2}$$

6) Studiare la convergenza, puntuale e uniforme, per $x \in \mathbb{R}^*$, della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(1/n^2)}{3^n + 2} \left(\frac{x + 4}{x^2}\right)^n$$

7) Studiare la convergenza puntuale e uniforme, per $x \in \mathbb{R}$ della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx|x| + 1}{x^2 + n^3}$$

8) Studiare la convergenza puntuale e uniforme, per $x \in \mathbb{R}$ della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-x+1}{n^2x^2-nx+n}$$

9) Studiare la convergenza, puntuale e uniforme, delle seguenti serie di funzioni, con x appartenente all'insieme indicato:

a. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \arctan \frac{1}{\sqrt{n+2}}(x+2)^n \qquad x \in \mathbb{R}$

b. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n+2^n}{n^n+4^n}(x^2-8x+16)^n \qquad x \in \mathbb{R}$

c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-2\sqrt{n^2+1}\right)(2x^2-4ex+e^2)^n$ $x \in \mathbb{R}$

d. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\exp\left(\frac{n^2+1}{2^n}\right)-1\right)(x^2+4x+2)^{n+2}$ $x \in \mathbb{R}$

e. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2n^3+1} \arctan\left((x^2-1)^n\right) \qquad x \in \mathbb{R}$

f. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2n^3+1}\left(\arctan(x^2-1)\right)^n \qquad x \in \mathbb{R}$

g. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \arctan(3n)(2x^3-2x^2-2x+1)^n$ $x \in \mathbb{R}$

h. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2-7x+6)^n}{n^2 6^{n+2}} \qquad x \in \mathbb{R}$

i. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{4/n}}{4^n\, n^{1/4}}(e^{2x}-2)^n \qquad x \in \mathbb{R}$

j. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n+\frac{1}{n}\right)^{1/x} \qquad x \in \mathbb{R}^+$

k. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{3x}}{(3x)^n+n^{3x}} \qquad x \in \mathbb{R}^+$

l. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+1}{x+n}\right)^n \qquad x \in \mathbb{R}^+$

m. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{x+1}\right)^n \frac{1}{3n-2} \qquad x \in \mathbb{R}^+$

n. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2+1} \qquad x \in \mathbb{R}$

o. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{3n}-4)\exp\left(n/(4x)\right)}{n^2+1} \qquad x \in \mathbb{R}^*$

p. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{4nx}\right)^n (x^2+1)^n \qquad x \in \mathbb{R}^*$

q. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2+2}{n|x|+n^2} \qquad x \in \mathbb{R}$

r. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n^2x} \qquad x \in \mathbb{R}^+$

s. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n+e^x}{n^2x^n+e^x} \qquad x \in \mathbb{R}^+$

t. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n+e^x}{x^n+n^2e^x} \qquad x \in \mathbb{R}^+$

u. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(x+n)^2+3} \qquad x \in \mathbb{R}$

v. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^2} \exp\left(\frac{x}{n^2}\right) \qquad x \in \mathbb{R}$

2.2 Soluzioni e risultati

1) Il termine n-simo delle serie può essere scritto nella forma

$$\frac{\exp(-\sqrt{n}+1)}{n^3+2^n}(e^x)^n\,,$$

quindi, se si pone $y=e^x$, si ottiene la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\exp(-\sqrt{n}+1)}{n^3+2^n}y^n\,.$$

Calcoliamo il raggio di convergenza di questa serie di potenze mediante il teorema di Cauchy-Hadamard. Si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{\exp(-\sqrt{n}+1)}{n^3+2^n}\right|}=\lim_{n\to+\infty}\exp\left(\frac{-\sqrt{n}+1}{n}\right)(n^3+2^n)^{-1/n}=$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)2^{-1}\left(\frac{n^3}{2^n}+1\right)^{-1/n}=\frac{1}{2}\,;$$

quindi il raggio di convergenza della serie di potenze è 2. Pertanto la serie converge per $y\in\,]-2,2[$, non converge se $|y|>2$ e converge uniformemente in ogni intervallo $[-\delta,\delta]$ con $0<\delta<2$.

Dobbiamo studiare le convergenza per $y=\pm 2$; poiché $y=e^x>0$, ci interessa solo il caso $y=2$. Per tale valore di y la serie è a termini positivi e il termine n-simo è

$$\frac{\exp(-\sqrt{n}+1))}{n^3+2^n}2^n=\frac{\exp(-\sqrt{n}+1)}{(n^3/2^n)+1}\sim\exp(-\sqrt{n}+1)=\frac{e}{e^{\sqrt{n}}}\,.$$

Confrontiamo questa quantità con il termine n-simo della serie armonica generalizzata; qualunque sia $\alpha\in\mathbb{R}^+$ è $\lim_{n\to+\infty}n^\alpha/e^{\sqrt{n}}=0$ quindi, scegliendo ad esempio $\alpha=2$, definitivamente si ha $e/e^{\sqrt{n}}\leq n^{-2}$, dunque la serie si maggiora con una serie armonica di esponente 2, pertanto,per il criterio del confronto, è convergente. Per il teorema di Abel la convergenza è uniforme in $[0,2]$.

Si ha $e^x\in[0,2]$ se e solo se $x\in\,]-\infty,\log 2]$, pertanto la serie converge se e solo se $x\in\,]-\infty,\log 2]$; la convergenza in tale insieme è uniforme.

2) Qualunque sia $x\in\mathbb{R}$ la serie è a termini non negativi.

Se $x=0$ allora il termine n-simo della serie è $2n$ che non tende a 0, quindi la serie non converge.

Se $x\neq 0$ allora, per $n\to+\infty$, si ha

$$\frac{x^2+2n}{x^2n^4+1}\sim\frac{2n}{x^2n^4}=\frac{2}{x^2n^3}$$

quindi la serie si comporta come la serie armonica generalizzata di esponente 3 che è convergente, pertanto la serie studiata è convergente.

Per studiare la convergenza uniforme studiamo il comportamento del termine n-simo della serie al variare di x nell'insieme di convergenza . Poniamo, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{x^2 + 2n}{x^2 n^4 + 1},$$

Evidentemente ciascuna f_n è pari e quindi è sufficiente studiare il comportamento per $x > 0$. Le f_n sono derivabili con derivata

$$f_n'(x) = \frac{2x(x^2n^4 + 1) - 2xn^4(x^2 + 2n)}{(x^2n^4 + 1)^2} = \frac{2x(1 - 2n^5)}{(x^2n^4 + 1)^2}.$$

Qualunque sia $n \in \mathbb{N}^*$, si ha, $\forall x \in [0, +\infty[$, $f_n'(x) \leq 0$, pertanto f_n è decrescente in tale insieme. Poiché f_n è a valori non negativi ed è pari, si ha

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^*} |f_n(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}^*} f_n(x) = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} f_n(x) = \lim_{n \to 0} f_n(x) = f_n(0) = 2n.$$

Quindi $\sup_{x \in \mathbb{R}^*} |f_n(x)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, pertanto non è verificata la condizione necessaria per la convergenza uniforme in $\mathbb{R}^*$.

Poiché il termine n-simo della serie si avvicina al suo estremo superiore quando x si avvicina a 0, per cercare insiemi di convergenza uniforme è opportuno studiare il comportamento della serie in intervalli che non abbiano 0 come punto di accumulazione. Consideriamo quindi, per $\delta \in \mathbb{R}^+$ l'insieme $[\delta, +\infty[$. Poiché f_n è decrescente in $\mathbb{R}^+$, se $x \geq \delta$, allora $f_n(x) \leq f_n(\delta)$, pertanto $\max_{[\delta, +\infty[} f_n(x) = f_n(\delta)$. Abbiamo dimostrato che la serie converge per $x = \delta$ e quindi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ è totalmente convergente in $[\delta, +\infty[$ e quindi è anche uniformemente convergente in tale insieme; per simmetria ciò è vero anche sull'insieme $]-\infty, -\delta] \cup [\delta, +\infty[$.

Quindi la serie studiata è convergente se solo se $x \in \mathbb{R}^*$ e, qualunque sia $\delta \in \mathbb{R}^+$, converge uniformemente in $]-\infty, -\delta] \cup [\delta, +\infty[$.

3) Ponendo $y = x^2 - 2x - 2$, si ottiene la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{3^n} y^n.$$

Calcoliamone il raggio di convergenza mediante il teorema di Caychy-Hadamard. Indicando con a_n l'n-simo coefficiente della serie di potenze, risulta

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\sqrt{n+1}}{3^{n+1}} \frac{3^n}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}}{3\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{3}.$$

Quindi il raggio di convergenza della serie è 3. Pertanto la serie converge se $y \in]-3, 3[$, non converge se $y \notin [-3, 3]$. Inoltre converge uniformemente in ogni intervallo $[-\delta, \delta]$, se $0 < \delta < 3$.

Studiamo la serie negli estremi dell'intervallo di convergenza. Per $y = 3$ otteniamo la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n}$, mentre per $y = -3$ otteniamo la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}$. In entrambi i casi il termine n-simo non tende a 0, quindi la serie non converge.

Pertanto la serie da studiare converge se e solo se $x^2-2x-2 \in \left]-3,3\right[$, cioè se e solo se x è soluzione del sistema

$$\begin{cases} x^2-2x-2>-3\,, \\ x^2-2x-2<3\,, \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} x^2-2x+1>0\,, \\ x^2-2x-5<0\,. \end{cases}$$

Poiché $x^2-2x+1=(x-1)^2$ la prima disequazione è verificata per $x \neq 1$. Il trinomio x^2-2x-5 si annulla per

$$x = 1 \pm \sqrt{1^2+5} = 1 \pm \sqrt{6}\,,$$

quindi è positivo se e solo se $x \in \left]1-\sqrt{6}, 1+\sqrt{6}\right[$. Pertanto l'insieme delle soluzioni del sistema è $\left]1-\sqrt{6},1\right[\cup \left]1,1+\sqrt{6}\right[$.

Quindi si ha convergenza puntuale se e solo se $x \in \left]1-\sqrt{6},1\right[\cup \left]1,1+\sqrt{6}\right[$.

Poiché la funzione $x \mapsto x^2-2x-2$ è continua in $\mathbb{R}$, l'immagine mediante tale funzione di ogni chiuso contenuto in $\left]1-\sqrt{6},1\right[\cup \left]1,1+\sqrt{6}\right[$ è un compatto. Inoltre, per quanto già visto, tale immagine è contenuta in $\left]-3,3\right[$, quindi esiste $\delta \in \left]0,3\right[$ tale che $[-\delta,\delta]$ contiene tale immagine. Poiché la serie in y converge uniformemente su tale insieme, la serie studiata converge uniformemente in ogni chiuso contenuto nell'insieme di convergenza puntuale.

Pertanto le serie studiata converge se e solo se $x \in \left]1-\sqrt{6},1\right[\cup \left]1,1+\sqrt{6}\right[$ e converge uniformemente in ogni chiuso contenuto in tale insieme.

4) Il termine n-simo della serie può essere scritto nella forma

$$\frac{(-1)^n}{2n}(e^x)^n\,.$$

Ponendo $y=e^x$, si ottiene serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} y^n\,,$$

da studiare per y positivo, perché l'esponenziale assume solo valori positivi.

Cerchiamo il raggio di convergenza di questa serie mediante il teorema di Cauchy-Hadamard. Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{2n}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2n}} = 1\,,$$

le serie di potyenze ha raggio di convergenza 1. Quindi converge per $y \in \left]0,1\right[$, non converge per $y \in \left]1,+\infty\right[$ e converge uniformemente in ogni intervallo $\left]0,\delta\right]$ con $\delta < 1$.

Per $y=1$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/(2n)$ che è convergente per il criterio di Leibniz. Per il teorema di Abel, la serie converge uniformemente in $\left]0,1\right]$.

Quindi la serie studiata converge se e solo se $e^x \leq 1$, cioè per $x \in \left]-\infty,0\right]$ e converge uniformemente in tale intervallo.

5) Qualunque sia $x \in \mathbb{R}$ la serie è a termini positivi e, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, si ha

$$\frac{x^2+2}{x^2+n^2} \leq \frac{x^2+2}{n^2}.$$

Pertanto la serie è maggiorata da una serie armonica generalizzata di esponente 2, quindi, per il criterio del confronto, è convergente.

Qualunque sia $n \in \mathbb{N}^*$, si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2}{x^2+n^2} = 1,$$

pertanto $\sup\{(x^2+2)/(n|x|+n^2) \,|\, x \in \mathbb{R}\} \geq 1$. Quindi non è verificata la condizione che il termine n-simo converga uniformemente a 0, necessaria per la convergenza uniforme. Pertanto la serie non converge uniformemente in $\mathbb{R}$.

Poniamo

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{x^2+2}{x^2+n^2}.$$

Risulta, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f_n'(x) = \frac{2x(x^2+n^2) - 2x(x^2+2)}{(x^2+n^2)^2} = \frac{2x(n^2-2)}{(x^2+n^2)^2}.$$

Pertanto se $n \geq 2$ è $f_n'(x) \geq 0$ per $x \in [0,+\infty[$, quindi f_n è crescente in $[0,+\infty[$; qualunque sia $\delta \in \mathbb{R}^+$, si ha quindi $\sup\{f_n(x) \,|\, x \in [0,\delta]\} = f_n(\delta)$. Poiché f_n è pari risulta anche $\sup\{f_n(x) \,|\, x \in [-\delta,\delta]\} = f_n(\delta)$. Poiché la serie di funzioni converge per $x = \delta$, essa converge totalmente in $[-\delta,\delta]$, quindi, per il criterio di Weierstrass, converge uniformemente.

Quindi la serie converge $\forall x \in \mathbb{R}$ e, $\forall \delta \in \mathbb{R}^+$, converge uniformemente in $[-\delta,\delta]$.

6) Posto $y = (x+4)/x^2$, si ottiene la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(1/n^2)}{3^n+2} y^n.$$

Calcoliamo il raggio di convergenza. Indichiamo con a_n il coefficiente di y^n. Poiché $\forall n \in \mathbb{N}^*$ risulta $1/n^2 \leq 1 < \pi$, si ha $\sin(1/n^2) > 0$, quindi $a_n > 0$. Per $n \to +\infty$, tenuto conto che $\sin(1/n^2) \sim 1/n^2$, risulta

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sin\bigl(1/(n+1)^2\bigr)}{3^{n+1}+2} \, \frac{3^n+2}{\sin(1/n^2)} \sim \frac{1/(n+1)^2}{3^{n+1}} \, \frac{3^n}{1/n^2} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \, \frac{1}{3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3}.$$

Pertanto il raggio di convergenza è 3.

Studiamo la convergenza della serie per $y = 3$ e $y = -3$. Per $y = 3$ il termine n-simo della serie è $\sin(1/n^2)3^n(3^n+2)$ e, per $n \to +\infty$, si ha

$$\frac{\sin(1/n^2)}{3^n+2} 3^n \sim \frac{3^n}{n^2(3^n+2)} \sim \frac{1}{n^2}.$$

Poiché la serie armonica generalizzata di esponente 2 converge, per il criterio del confronto asintotico anche la serie studiata converge. Se $y = -3$ il valore assoluto del termine n-simo della serie coincide con il termine per $y = 3$, pertanto la serie converge assolutamente.

Poiché, $\forall y \in [-3,3]$, si ha

$$\left|\frac{\sin(1/n^2)}{3^n+2}\,y^n\right| = \frac{\sin(1/n^2)}{3^n+2}\,|y|^n \leq \frac{\sin(1/n^2)}{3^n+2}\,3^n,$$

indicato con f_n il termine n-simo della serie, risulta $\sup_{y\in[-3,3]}|f_n(y)| = f_n(3)$. Abbiamo dimostrato che $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(3)$ converge, quindi la serie converge totalmente in $[-3,3]$, quindi, per il criterio di Weierstrass, converge anche uniformemente.

Per $x \in \mathbb{R}^*$ si ha $(x+4)/x^2 \in [-3,3]$ se e solo se $-3x^2 \leq (x+4) \leq 3x^2$, cioè x è soluzione del sistema

$$\begin{cases} 3x^2 + x + 4 \geq 0, \\ 3x^2 - x - 4 \geq 0. \end{cases}$$

Il trinomio $3x^2 + x + 4$ ha discriminante $1^2 - 4\cdot 3\cdot 4$, che è negativo, quindi il trinomio è sempre positivo. Si annulla per

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\cdot 3\cdot 4}}{6} = \frac{1\pm 7}{6} = \begin{cases} \dfrac{4}{3}, \\ -1. \end{cases}$$

Pertanto il sistema è verificato per $x \in \,]-\infty,-1] \cup [4/3,+\infty[$.

Possiamo quindi concludere che la serie converge se e solo se $x \in \,]-\infty,-1] \cup [4/3,+\infty[$ e in tale insieme la convergenza è uniforme.

7) Per ogni $x \in \mathbb{R}^*$ risulta, per $n \to +\infty$,

$$\left|\frac{nx|x|+1}{x^2+n^3}\right| = \frac{|nx|x|+1|}{x^2+n^3} \sim \frac{|nx|x||}{x^2+n^3} = \frac{nx^2}{n^3} = \frac{x^2}{n^2}.$$

Poiché la serie armonica generalizzata di esponente 2 converge, per il criterio del confronto asintotico la serie studiata è assolutamente convergente e quindi convergente. Se $x = 0$ la serie è $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-3}$ che è convergente. Quindi la serie converge puntualmente in $\mathbb{R}$.

Poiché

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{nx|x|+1}{x^2+n^3} = n, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{nx|x|+1}{x^2+n^3} = -n,$$

si ha

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{nx|x|+1}{x^2+n^3}\right| \geq n.$$

Pertanto non è verificata la condizione necessaria per la convergenza uniforme della serie in $\mathbb{R}$.

Studiamo la convergenza uniforme in sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

Indichiamo con f_n il termine n-simo della serie. Per $x \neq 0$ si ha

$$f_n'(x) = \frac{\big(n|x| + nx\,\mathrm{sgn}(x)\big)(x^2+n^3) - 2x\big(nx|x|+1\big)}{(x^2+n^3)^2} =$$
$$= \frac{2n|x|(x^2+n^3) - 2nx^2|x| - 2x}{(x^2+n^3)^2} = \frac{2n^4|x| - 2x}{(x^2+n^3)^2}.$$

Poiché $\lim_{x\to 0} f_n'(x) = 0$, f_n è derivabile anche in 0 con derivata nulla.

Si ha, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ e $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$2n^4|x| - 2x \geq 2n^4|x| - 2|x| = 2(n^4-1)|x| \geq 0;$$

quindi $f_n'(x) \geq 0$, pertanto f_n è crescente. Perciò, fissato $M \in \mathbb{R}^+$, si ha

$$\max_{x\in[-M,M]} |f_n(x)| = \max\big\{|f_n(-M)|, |f_n(M)|\big\} =$$
$$= \max\left\{\frac{|-nM^2+1|}{M^2+n^3}, \frac{|nM^2+1|}{M^2+n^3}\right\} = \frac{nM^2+1}{M^2+n^3} = f_n(M).$$

Poiché $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(M)$ converge, si ha convergenza totale della serie in $[-M,M]$, quindi, per il criterio di Weierstrass, in tale insieme si ha anche convergenza uniforme.

8) Per $n \in \mathbb{N}^*$ poniamo

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{-x+1}{n^2x^2 - nx + n}.$$

Se $x = 0$ il termine n-simo della serie è $1/n$, quindi la serie non converge. Se $x \neq 0$ allora si ha

$$\left|\frac{-x+1}{n^2x^2 - nx + n}\right| \sim \frac{|-x+1|}{n^2x^2}.$$

Quindi la serie dei valori assoluti si comporta come la serie armonica generalizzata di esponente 2, pertanto converge assolutamente e converge.

Perciò la serie converge puntualmente in $\mathbb{R}^*$.

Risulta

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^*} |f_n(x)| \geq \lim_{x\to 0} |f_n(x)| = |f_n(0)| = \frac{1}{n},$$

quindi non si ha convergenza totale in $\mathbb{R}^*$.

Studiamo le funzioni f_n per determinare la convergenza totale su sottoinsiemi di $\mathbb{R}^*$. Si ha

$$f_n'(x) = \frac{-(n^2x^2 - nx + n) - (-x+1)(2n^2x - n)}{(n^2x^2 - nx + n)^2} =$$
$$= \frac{-n^2x^2 + nx - n + 2n^2x^2 - nx - 2n^2x + n}{(n^2x^2 - nx + n)^2} = \frac{n^2x^2 - 2n^2x}{(n^2x^2 - nx + n)^2} = \frac{n^2x(x-2)}{(n^2x^2 - nx + n)^2}.$$

Il segno di f_n coincide col segno di $x(x-2)$, quindi f_n è crescente in $]-\infty, 0]$ e in $[2, +\infty[$ ed è decrescente in $[0,2]$. Inoltre $f_n(x) \geq 0$ se $x \in]-\infty, 1]$ e $f_n(x) \leq 0$ se $x \in [1, +\infty[$.

Dalle informazioni sul segno e sulla monotonia di f_n segue immediatamente che se $\delta < 0$ si ha

$$\sup_{x\in]-\infty,\delta]} |f_n(x)| = \sup_{x\in]-\infty,\delta]} f_n(x) = f_n(\delta).$$

Poiché $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(\delta)$ è convergente la serie è totalmente convergente in $]-\infty,\delta]$, quindi in tali intervalli è uniformemente convergente.

Se $0 < \delta < 1$, allora, per $x \in [\delta, 2]$, risulta

$$f_n(2) \le f_n(x) \le f_n(\delta),$$

quindi

$$\sup_{x\in[\delta,0]} |f_n(x)| \le \max\{f_n(\delta), -f_n(2)\}.$$

Poiché le serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(\delta)$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(2)$ sono convergenti, la serie è totalmente convergente, quindi uniformemente convergente, in $[\delta, 2]$.

Se $x \in [2, +\infty[$, allora si ha

$$f_n(2) \le f_n(x) < 0,$$

quindi

$$\sup_{x\in[2,+\infty[} |f_n(x)| = -f_n(2).$$

Poiché la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(2)$ è convergente, la serie è totalmente convergente, quindi uniformemente convergente, in $[2, +\infty[$.

Pertanto la serie è puntualmente convergente in $\mathbb{R}^*$ e, $\forall \delta \in \mathbb{R}^+$ è assolutamente convergente in $]-\infty, -\delta] \cup [\delta, +\infty[$.

9)

a. Converge se e solo se $x \in [-3, -1[$ e, $\forall \delta \in]-3, -1[$, converge uniformemente $[-3, \delta]$.

b. Converge se e solo se $x \in]3, 5[$ e converge uniformemente in ogni intervallo chiuso contenuto in tale insieme.

c. Converge se e solo se $x \in]0, 2e[\setminus \{e\}$ e converge uniformemente in ogni intervallo chiuso contenuto in tale insieme.

d. Converge se e solo se $x \in]-4, 0[\setminus \{-2\}$ e converge uniformemente in ogni intervallo chiuso contenuto in tale insieme.

e. Converge puntualmente e uniformemente in $\mathbb{R}$.

f. Converge se e solo se $x \in \left[-\sqrt{1+\frac{\pi}{4}}, -\sqrt{1-\frac{\pi}{4}}\right] \cup \left[\sqrt{1-\frac{\pi}{4}}, \sqrt{1+\frac{\pi}{4}}\right]$ e in tale insieme la convergenza è uniforme.

g. Converge se e solo se $x \in \left]-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[\setminus \{1\}$ e converge uniformemente in ogni intervallo chiuso contenuto in tale insieme.

h. Converge se e solo se $x \in [0,3] \cup [4,7]$ e in tale insieme la convergenza è uniforme.

i. Converge se e solo se $x \in \left]-\infty, \log\left(\sqrt{6}\right)\right[$ e converge uniformemente in ogni intervallo chiuso contenuto in tale insieme.

j. Converge se e solo se $x \in]0,1[$ e, $\forall \delta \in]0,1[$, converge uniformemente in $]0,\delta]$.

k. Converge se e solo se $x \in \left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$ e converge uniformemente in ogni intervallo chiuso contenuto in tale insieme.

l. Converge per ogni $x \in \mathbb{R}^+$ e, $\forall \delta \in \mathbb{R}^+$ converge uniformemente in $]0,\delta]$.

m. Converge se e solo se $x \in]2,+\infty[$ e, $\forall \delta \in]2,+\infty[$, converge uniformemente in $[\delta,+\infty[$.

n. Converge puntualmente in $\mathbb{R}$ e, $\forall \delta \in \mathbb{R}$, converge uniformemente in $[\delta,+\infty[$.

o. Converge se e solo se $x \in [-1/12, 0[$ e in tale insieme la convergenza è uniforme.

p. Converge se e solo se $x \in]-2-\sqrt{5}, -2+\sqrt{5}[\cup]2-\sqrt{5}, 2+\sqrt{5}[$ e converge uniformemente in ogni intervallo chiuso contenuto in tale insieme.

q. Converge puntualmente in $\mathbb{R}$ e, $\forall \delta \in \mathbb{R}^+$, converge uniformemente in $[-\delta,\delta]$.

r. Converge $\forall x \in \mathbb{R}^+$ e, $\forall \delta \in \mathbb{R}^+$, converge uniformemente in $[\delta,+\infty[$.

s. Converge se e solo se $x \in [1,+\infty[$ e, $\forall \delta \in]1,+\infty[$, converge uniformemente in $[1,\delta]$.

t. Converge se e solo se $x \in]0,1]$ e in tale insieme la convergenza è uniforme.

u. Converge puntualmente in $\mathbb{R}$ e, $\forall \delta \in \mathbb{R}^+$, converge uniformemente in $[-\delta,\delta]$.

v. Converge puntualmente in $\mathbb{R}$ e, $\forall \delta \in \mathbb{R}^+$, converge uniformemente in $[-\delta,\delta]$.

3

Equazioni differenziali

3.1 Esercizi

Equazioni lineari del primo ordine

1) Determinare la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) - 2ty(t) = -4t^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

2) Determinare la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) + \dfrac{4t}{t^2+6}\, y(t) = \dfrac{8t}{(t^2+6)^3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

3) Determinare la soluzione massimale dei seguenti problemi di Cauchy:

a. $\begin{cases} y'(t) + \cos t\, y(t) = \sin t \cos t \\ y(0) = 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} y'(t) - \dfrac{2}{t}\, y(t) = \dfrac{6}{t} \\ y(1) = 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} y'(t) + t y(t) = t^3 \\ y(0) = 2 \end{cases}$

d. $\begin{cases} y'(t) - \tan t\, y(t) = -\cos t \\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases}$

Equazioni non lineari del primo ordine

4) Determinare la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{-t\left(3 + \left(y(t)\right)^2\right)}{(t^2-4)y(t)} \\ y(0) = -2 \end{cases}$$

5) Determinare la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{2t}{t^2-4}\left(\left(y(t)\right)^2 + y(t)\right) \\ y(4) = -2 \end{cases}$$

6) Determinare la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{\cos^3\left(y(t)\right)}{\sin\left(y(t)\right)} \\ y(1) = \dfrac{5}{4}\pi \end{cases}$$

7) Determinare la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) + \left(t + \dfrac{1}{2t}\right)y(t) = 2t^2\left(y(t)\right)^3 \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

8) Determinare la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) + (1+t)y(t) = te^t\left(y(t)\right)^2 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

9) Determinare la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) + \dfrac{2}{2t-\sqrt{t}}\,y(t) = \dfrac{4}{\sqrt{t}}\sqrt{y(t)} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

10) Determinare la soluzione massimale dei seguenti problemi di Cauchy:

a. $\begin{cases} y'(t) = t\left(y(t)\right)^3 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} y'(t) = \dfrac{\left(y(t)\right)^2 - 2}{2ty(t)} \\ y'(1) = 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} y'(t) = \dfrac{4 + \left(y(t)\right)^2}{3t^2} \\ y\left(\dfrac{2}{\pi}\right) = 0 \end{cases}$

d. $\begin{cases} y'(t) = \dfrac{t\sqrt{1+t^2}}{\left(y(t)\right)^2} \\ y(1) = \sqrt{2} \end{cases}$

e. $\begin{cases} y'(t) = \dfrac{\big(y(t)\big)^2 + 4}{4(t^2 - 2t)} \\ y(1) = -2 \end{cases}$

f. $\begin{cases} y'(t) = \dfrac{t}{t^2 - 1}\big(4 - \big(y(t)\big)^2\big) \\ y(0) = -3 \end{cases}$

g. $\begin{cases} y'(t) - \dfrac{2}{t}\, y(t) = t\big(y(t)\big)^2 \\ y(1) = \dfrac{4}{3} \end{cases}$

h. $\begin{cases} y'(t) + \dfrac{1}{3t}\, y(t) = \dfrac{2}{t}\big(y(t)\big)^4 \\ y(1) = 2 \end{cases}$

i. $\begin{cases} y'(t) - \cot t\; y(t) = \big(y(t)\big)^2 \\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases}$

j. $\begin{cases} y'(t) - \dfrac{1}{t}\, y(t) = 2t\big(y(t)\big)^2 \\ y(1) = 4 \end{cases}$

k. $\begin{cases} y'(t) - \tan t\; y(t) = 6 \sin t\, \big(y(t)\big)^{-4} \\ y(\pi) = 1 \end{cases}$

l. $\begin{cases} y'(t) - \dfrac{3t}{t^2 + 2}\, y(t) = -\dfrac{3t}{\big(y(t)\big)^{1/3}} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Equazioni lineari a coefficienti costanti

11) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''(t) + y(t) = \cos t$$

12) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = e^{-3t}\,.$$

13) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'''(t) - y''(t) + y'(t) - y(t) = \cos t$$

14) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) - 6y'(t) + 8y(t) = e^{2t} + 4\sin(4t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

15) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'''(t) - 3y''(t) + 4y'(t) - 2y(t) = e^{t} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 0 \end{cases}$$

16) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'''(t)+y''(t)-y'(t)-y(t)=t^2 \\ y(0)=0 \\ y'(0)=0 \\ y''(0)=0 \end{cases}$$

17) Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali:

a. $y''(t)-4y'(t)+4y(t)=t\,e^t$

b. $y^{(4)}(t)-3y''(t)-4y(t)=t^2$

c. $y'''(t)-2y''(t)-4y'(t)+8y(t)=5t\sin t$

d. $y'''(t)+3y''(t)-4y(t)=\sin t$

e. $y'''(t)+4y''(t)+4y'(t)=12t^2$

f. $y'''(t)+y''(t)-y'(t)-y(t)=e^t$

g. $y^{(4)}(t)-16y(t)=e^{2t}$

h. $y'''(t)+2y''(t)-3y'(t)=t\,e^t$

18) Determinare la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy:

a. $\begin{cases} y''(t)+6y'(t)+9y(t)=12e^{3t} \\ y(0)=0 \\ y'(0)=1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} y''(t)-6y'(t)+9y(t)=9t \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} y'''(t)+6y''(t)+12y'(t)+8y(t)=e^{-2t} \\ y(0)=0 \\ y'(0)=1 \\ y''(0)=2 \end{cases}$

d. $\begin{cases} y'''(t)-y''(t)+4y'(t)-4y(t)=3e^t \\ y(0)=0 \\ y'(0)=0 \\ y''(0)=0 \end{cases}$

e. $\begin{cases} y'''(t)-y''(t)-y'(t)+y(t)=t^2+1 \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \\ y''(0)=0 \end{cases}$

f. $\begin{cases} y'''(t)+6y''(t)+9y'(t)=36 \\ y(0)=0 \\ y'(0)=0 \\ y''(0)=1 \end{cases}$

g. $\begin{cases} y'''(t)+4y'(t)=t^2 \\ y(0)=0 \\ y'(0)=0 \\ y''(0)=0 \end{cases}$

h. $\begin{cases} y'''(t)-6y''(t)+9y'(t)=t \\ y(0)=0 \\ y'(0)=0 \\ y''(0)=0 \end{cases}$

3.2 Soluzioni e risultati

1) L'equazione differenziale è lineare del primo ordine. Il coefficiente e il termine noto sono definiti in $\mathbb{R}$, pertanto la soluzione massimale ha dominio $\mathbb{R}$.

Per risolvere l'equazione, moltiplichiamola per l'esponenziale di una primitiva del coefficiente di $y(t)$, che è $t \mapsto -2t$. Quindi moltiplichiamo per e^{-t^2}, ottenendo

$$e^{-t^2} y'(t) - 2t e^{-t^2} y(t) = -4t^3 e^{-t^2},$$

cioè

$$\frac{d}{dt}\big(e^{-t^2} y(t)\big) = -4t^3 e^{-t^2};$$

integrando tra 0 e t si ottiene

$$e^{-t^2} y(t) - e^{-0^2} y(0) = \int_0^t \left(-4\tau^3 e^{-\tau^2}\right) d\tau .$$

Per calcolare l'integrale effettuiamo la sostituzione $s = \varphi(\tau) = \tau^2$, quindi $\varphi'(\tau) = 2\tau$, pertanto

$$\int_0^t \left(-4\tau^3 e^{-\tau^2}\right) d\tau = \int_0^{t^2} \left(-2se^{-s}\right) ds = \left[2se^{-s}\right]_0^{t^2} - \int_0^{t^2} 2e^{-s}\, ds =$$
$$= \left[2se^{-s}\right]_0^{t^2} + \left[2e^{-s}\right]_0^{t^2} = 2t^2 e^{-t^2} + 2e^{-t^2} - 2 .$$

Poiché $y(0) = 1$, si ha

$$e^{-t^2} y(t) = 1 + 2t^2 e^{-t^2} + 2e^{-t^2} - 2,$$

da cui si ricava

$$y(t) = e^{t^2}\left(2t^2 e^{-t^2} + 2e^{-t^2} - 1\right) = 2t^2 + 2 - e^{t^2} .$$

2) L'equazione differenziale è lineare del primo ordine. Il coefficiente e il termine noto sono definiti in $\mathbb{R}$, pertanto la soluzione massimale ha dominio $\mathbb{R}$.

Per risolvere il problema di Cauchy occorre anzitutto trovare una primitiva del coefficiente di $y(t)$, cioè della funzione $t \mapsto 4t/(t^2+6)$. Poiché che la derivata del denominatore è $2t$, una primitiva è la funzione $t \mapsto 2\log(t^2+6)$, il cui esponenziale è

$$\exp\big(2\log(t^2+6)\big) = \exp\big(\log((t^2+6)^2)\big) = (t^2+6)^2;$$

moltiplicando per tale funzione otteniamo

$$(t^2+6)^2 y'(t) + 4t(t^2+6) y(t) = \frac{8t}{t^2+6},$$

cioè

$$\frac{d}{dt}\big((t^2+6)^2 y(t)\big) = \frac{8t}{t^2+6} .$$

Integrando tra 0 e t si ottiene

$$(t^2+6)^2 y(t) - 36 y(0) = \int_0^t \frac{8\tau}{\tau^2+6}\, d\tau = \left[4\log(\tau^2+6)\right]_0^t = 4\log(t^2+6) - 4\log 6 .$$

Poiché $y(0)=0$, si ha

$$(t^2+6)^2 y(t)=4\log(t^2+6)-4\log 6\,.$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi:

$$y(t)=\frac{4\log(t^2+6)-4\log 6}{(t^2+6)^2}\,.$$

3)

a. $y(t)=\exp(-\sin t)+\sin t-1$, $\mathscr{D}(y)=\mathbb{R}$

b. $y(t)=4t^2-3$, $\mathscr{D}(y)=\mathbb{R}^+$

c. $y(t)=4\exp\left(\dfrac{t^2}{2}\right)+t^2-2$, $\mathscr{D}(y)=\mathbb{R}$

d. $y(t)=-t\cos t+\dfrac{\pi}{4}\cos t$, $\mathscr{D}(y)=\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$

4) L'equazione è a variabili separabili, perché la funzione che la definisce è prodotto della funzione $t\mapsto -t/(t^2-4)$ per la funzione $y\mapsto(3+y^2)/y$. La prima ha dominio naturale $\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$, poiché la condizione iniziale è assegnata per $t=0$ consideriamo la funzione nell'intervallo $]-2,2[$; pertanto la soluzione massimale ha dominio incluso in $]-2,2[$. La seconda ha dominio naturale $\mathbb{R}^*$; poiché $y(0)<0$, consideriamo la funzione in $\mathbb{R}^-$. In tale insieme la funzione non si annulla.

L'equazione differenziale è verificata se e solo se si ha, successivamente,

$$\frac{y'(t)y(t)}{3+\big(y(t)\big)^2}=\frac{t}{4-t^2}\,,$$

$$\int_0^t\frac{y'(\tau)y(\tau)}{3+\big(y(\tau)\big)^2}\,d\tau=\int_0^t\frac{\tau}{4-\tau^2}\,d\tau\,,$$

$$\left[\frac{1}{2}\log\big(3+\big(y(t)\big)^2\big)\right]_0^t=\left[-\frac{1}{2}\log\big(|4-t^2|\big)\right]_0^t.$$

Poiché deve essere $y(0)=-2$ si ottiene

$$\frac{1}{2}\log\big(3+\big(y(t)\big)^2\big)-\frac{1}{2}\log 7=-\frac{1}{2}\log(4-t^2)+\frac{1}{2}\log 4\,,$$

$$\log\big(3+\big(y(t)\big)^2\big)-\log 7=-\log(4-t^2)+\log 4\,,$$

$$3+\big(y(t)\big)^2=\frac{28}{4-t^2}\,,$$

$$\big(y(t)\big)^2=\frac{28}{4-t^2}-3=\frac{16+3t^2}{4-t^2}\,.$$

Poiché $y(0) < 0$, si ricava

$$y(t) = -\sqrt{\frac{16+3t^2}{4-t^2}}\,.$$

Il dominio naturale di questa funzione è $]-2,2[$, pertanto, per quanto osservato sopra, questa è la soluzione massimale.

5) L'equazione è a variabili separabili, perché la funzione che la definisce è prodotto della funzione $t \mapsto 2t/(t^2-4)$ per la funzione $y \mapsto y^2+y$. La prima funzione ha dominio naturale $\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$, poiché la condizione iniziale è assegnata per $t=4$, consideriamo $t\in\,]2,+\infty[$. La seconda ha dominio $\mathbb{R}$. Essa si annulla in -1 e in 0, poiché abbiamo la condizione iniziale $y(4)=-2$, con il metodo risolutivo per le equazioni a variabili separabili otteniamo una soluzione con immagine contenuta in $]-\infty,-1[$. Questo non porta a problemi nella determinazione del dominio della soluzione, perché la funzione che definisce l'equazione è di classe C^1, quindi c'è unicità della soluzione. La funzione che vale costantemente -1 verifica l'equazione, pertanto ogni funzione che verifica l'equazione e assume in un punto valore -1 coincide con essa; pertanto se y verifica l'equazione e $y(4)=-2$, allora y non assume mai il valore -1.

La funzione y è soluzione se e solo se si ha $y(4)=-2$ e

$$\int_4^t \frac{y'(\tau)}{\big(y(t)\big)^2+y(t)}\,d\tau = \int_4^t \frac{2\tau}{\tau^2-4}\,d\tau\,,$$

che, con la sostituzione $\sigma = y(\tau)$, equivale a

$$\int_{-2}^{y(t)} \frac{1}{\sigma^2+\sigma}\,d\sigma = \int_4^t \frac{2\tau}{\tau^2-4}\,d\tau\,.$$

Risulta

$$\int_{-2}^{y(t)} \frac{1}{\sigma^2+\sigma}\,d\sigma = \int_{-2}^{y(t)} \left(\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{\sigma+1}\right)d\sigma = \big[\log|\sigma|-\log|\sigma+1|\big]_{-2}^{y(t)} =$$

$$= \log\big|y(t)\big| - \log\big|y(t)+1\big| - \log 2 = \log\left(\frac{|y(t)|}{2\big|y(t)+1\big|}\right).$$

Poiché $y(t)\in\,]-\infty,-1[$ risulta

$$\log\left(\frac{|y(t)|}{2\big|y(t)+1\big|}\right) = \log\left(\frac{y(t)}{2\big(y(t)+1\big)}\right).$$

Inoltre

$$\int_4^t \frac{2\tau}{\tau^2-4}\,d\tau = \big[\log|\tau^2-4|\big]_4^t = \log(t^2-4) - \log 12\,,$$

perché nell'intervallo che ci interessa $t^2-4>0$. Se y è soluzione si ha quindi, successivamente,

$$\begin{gathered}\log\left(\frac{y(t)}{2\big(y(t)+1\big)}\right)=\log(t^2-4)-\log 12,\\ \frac{y(t)}{2\big(y(t)+1\big)}=\frac{t^2-4}{12},\\ 6y(t)=(t^2-4)\big(y(t)+1\big),\\ (10-t^2)y(t)=t^2-4,\\ y(t)=\frac{t^2-4}{10-t^2}.\end{gathered}$$

Il dominio naturale di questa funzione è $]-\infty,-\sqrt{10}[\cup]-\sqrt{10},\sqrt{10}[\cup]\sqrt{10},+\infty[$. Poiché la condizione iniziale è assegnata per $t=4$ la consideriamo in $]\sqrt{10},+\infty[$.

Poiché si ha

$$\lim_{t\to\sqrt{10}^+}\frac{t^2-4}{10-t^2}=-\infty$$

questa è la soluzione massimale.

6) L'equazione è a variabili separabili, perché la funzione che la definisce non dipende da t. La funzione $y\mapsto\cos^3 y/\sin y$ ha dominio naturale l'insieme dei reali che non annullano la funzione seno, quindi $\mathbb{R}\setminus\{n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\}$; poiché la condizione iniziale su y è $5\pi/4$, consideriamo la funzione nell'intervallo $]\pi,2\pi[$. Il metodo risolutivo delle equazioni a variabili separabili richiede inoltre che la funzione della y non si annulli, quindi dobbiamo restringerci all'intervallo $]\pi,3\pi/2[$.

Deve essere

$$\int_1^t\frac{\sin\big(y(s)\big)}{\cos^3\big(y(s)\big)}y'(s)\,ds=\int_1^t 1\,ds=t-1.$$

Si ha

$$\int_1^t\frac{\sin\big(y(s)\big)}{\cos^3\big(y(s)\big)}y'(s)\,ds=\int_{5\pi/4}^{y(t)}\frac{\sin\sigma}{\cos^3\sigma}\,d\sigma=\left[\frac{1}{2\cos^2\sigma}\right]_{5\pi/4}^{y(t)}=\frac{1}{2\cos^2\big(y(t)\big)}-1,$$

quindi

$$\frac{1}{2\cos^2\big(y(t)\big)}-1=t-1,$$

da cui si ricava $\cos^2\big(y(t)\big)=1/(2t)$. Poiché $\cos\big(y(1)\big)=\cos(5\pi/4)<0$, deve essere $\cos\big(y(t)\big)=-1/\sqrt{2t}$. Quindi $t>0$ e $-1\le-1/\sqrt{2t}\le 1$. La condizione $-1/\sqrt{2t}\le 1$ è sempre verificata, mentre $-1\le-1/\sqrt{2t}$ equivale a $1/\sqrt{2t}\le 1$, cioè $2t\ge 1$, quindi deve essere $t\ge 1/2$.

Il valore iniziale della soluzione $5\pi/4$ non appartiene all'immagine della funzione arcocoseno, quindi per ricavare $y(t)$ da questa uguaglianza non possiamo usare direttamente la funzione arcocoseno. Se $y \in \,]\pi, 3\pi/2[$, allora $y-\pi \in \,]0,\pi/2[\, \subseteq Im(\arccos)$ e $\cos(y-\pi) = -\cos y$. Pertanto, se $a \in [-1,1]$, si ha $\cos y = a$ se e solo se $\cos(y-\pi) = -a$, che equivale a $y - \pi = \arccos(-a)$. Pertanto da $\cos\bigl(y(t)\bigr) = -1/\sqrt{2t}$ si ricava

$$y(t) = \pi + \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2t}}\right).$$

Come osservato sopra deve essere $t \in [1/2, +\infty[$. Inoltre l'equazione ha senso per $y(t) \in \,]\pi, 2\pi[$, cioè $0 < \arccos\bigl(1/\sqrt{2t}\bigr) < \pi$. Ciò è verificato se $1/\sqrt{2t} \neq 1$, cioè $t \neq 1/2$.

Pertanto abbiamo la soluzione

$$y\colon \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\to \mathbb{R}, \qquad y(t) = \pi + \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2t}}\right).$$

Si ha

$$\lim_{t\to 1/2}\left(\pi + \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2t}}\right)\right) = \pi + \arccos 1 = \pi,$$

il punto $(1/2, \pi)$ appartiene alla frontiera del dominio della funzione $(t,y) \mapsto \cos^3 y/\sin y$, quindi la soluzione è massimale.

7) L'equazione non è definita per $t = 0$, poiché la condizione iniziale è assegnata in 1 la consideriamo per $t \in \mathbb{R}^+$. L'equazione è di tipo Bernoulli, con esponente 3, perciò per risolverla è opportuno considerare la nuova funzione incognita $v(t) = \bigl(y(t)\bigr)^{-2}$. Ciò e possibile perché la condizione iniziale su y è non nulla.

Poiché $v'(t) = -2\bigl(y(t)\bigr)^{-3} y'(t)$, l'equazione si trasforma in

$$\begin{aligned} v'(t) &= -2\bigl(y(t)\bigr)^{-3}\left(-\left(t + \frac{1}{2t}\right)y(t) + 2t^2\bigl(y(t)\bigr)^3\right) = \\ &= \left(2t + \frac{1}{t}\right)\bigl(y(t)\bigr)^{-2} - 4t^2 = \left(2t + \frac{1}{t}\right)v(t) - 4t^2. \end{aligned}$$

La condizione iniziale è $v(1) = (-1)^{-2} = 1$. Dobbiamo quindi risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} v'(t) - \left(2t + \dfrac{1}{t}\right)v(t) = -4t^2, \\ v(1) = 1. \end{cases}$$

L'equazione differenziale è lineare. Il coefficiente di $v(t)$ è $-2t - (1/t)$; poiché t è positivo, una primitiva è la funzione $t \mapsto -t^2 - \log t$, il cui esponenziale è e^{-t^2}/t. Quindi, moltiplicando per tale funzione, si ha

$$\frac{1}{t}e^{-t^2}v'(t) - \left(2 + \frac{1}{t^2}\right)e^{-t^2}v(t) = -4t\,e^{-t^2},$$

cioè

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\,e^{-t^2}v(t)\right)=-4t\,e^{-t^2}.$$

Ciò equivale a

$$\frac{1}{t}\,e^{-t^2}v(t)-e^{-1}v(1)=\int_1^t\left(-4\tau e^{-\tau^2}\right)d\tau=\left[2e^{-\tau^2}\right]_1^t=2e^{-t^2}-2e^{-1}.$$

Poiché $v(1)=1$, si ha

$$\frac{1}{t}\,e^{-t^2}v(t)-e^{-1}=2e^{-t^2}-2e^{-1}.$$

da cui si ricava

$$v(t)=2t-e^{-1}t\,e^{t^2}.$$

Pertanto $\big(y(t)\big)^{-2}=2t-t\,e^{t^2-1}$; poiché deve essere verificata la condizione $y(1)=-1$, da qui segue

$$y(t)=-\frac{1}{\sqrt{2t-t\,e^{t^2-1}}}.$$

Il dominio naturale di questa funzione è costituito dai t tali che $t(2-e^{t^2-1})>0$. Si ha $2-e^{t^2-1}>0$ se e solo se $t^2<1+\log 2$. Il segno del prodotto $t(2-e^{t^2-1})$ risulta dal seguente schema

		$-\sqrt{1+\log 2}$		0		$\sqrt{1+\log 2}$	
t	$-\ -\ -\ -\ -$		$-\ -\ -\ -\ -$		$+\ +\ +\ +\ +$		$+\ +\ +\ +\ +$
$2-e^{t^2-1}$	$-\ -\ -\ -\ -$		$+\ +\ +\ +\ +$		$+\ +\ +\ +\ +$		$-\ -\ -\ -\ -$
$t(2-e^{t^2-1})$	$+\ +\ +\ +\ +$		$-\ -\ -\ -\ -$		$+\ +\ +\ +\ +$		$-\ -\ -\ -\ -$

Poiché 1 deve appartenere al dominio della soluzione, consideriamo la funzione con dominio $\left]0,\sqrt{1+\log 2}\right[$. Per t in tale intervallo $\big(t,y(t)\big)$ appartiene al dominio della funzione che definisce l'equazione, pertanto y è soluzione. Se $t\to 0$ o $t\to\sqrt{1+\log 2}$ la soluzione tende a $-\infty$, quindi questa è la soluzione massimale.

8) L'equazione è di tipo Bernoulli, con esponente 2, perciò per risolverla è opportuno considerare la nuova funzione incognita $v(t)=1/y(t)$. Ciò e possibile perché la condizione iniziale su y è non nulla.

Risulta

$$v'(t)=-\frac{y'(t)}{\big(y(t)\big)^2}=-\frac{-(1+t)y(t)+t\,e^t\big(y(t)\big)^2}{\big(y(t)\big)^2}=(1+t)\frac{1}{y(t)}-t\,e^t=(1+t)v(t)-t\,e^t.$$

Inoltre deve essere $v(0)=1/y(0)=-1$. Pertanto v è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} v'(t)-(1+t)v(t)=-t\,e^t, \\ v(0)=-1. \end{cases}$$

L'equazione è lineare del primo ordine. Il coefficiente del termine $v(t)$ è $-(1+t)$, una cui primitiva $t \mapsto -t-(t^2/2)$; moltiplicando entrambi i termini per l'esponenziale di tale funzione si ha

$$\exp\left(-t-\frac{t^2}{2}\right)v'(t)-\exp\left(-t-\frac{t^2}{2}\right)(1+t)v(t)=-t\,e^t\exp\left(-t-\frac{t^2}{2}\right),$$

cioè

$$\frac{d}{dt}\left(\exp\left(-t-\frac{t^2}{2}\right)v(t)\right)=-t\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

Integrando tra 0 e t si ottiene

$$\exp\left(-t-\frac{t^2}{2}\right)v(t)-v(0)=\int_0^t\left(-\tau\exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right)\right)d\tau=\left[\exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right)\right]_0^t=\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)-1.$$

Poiché $v(0)=-1$, si ha

$$\exp\left(-t-\frac{t^2}{2}\right)v(t)+1=\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)-1,$$

quindi

$$v(t)=\exp\left(t+\frac{t^2}{2}\right)\left(\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)-2\right)=e^t\left(1-2\exp\left(\frac{t^2}{2}\right)\right).$$

Pertanto risulta

$$y(t)=\frac{1}{v(t)}=\frac{1}{e^t\big(1-2\exp(t^2/2)\big)}.$$

Poiché $\forall t\in\mathbb{R}$ si ha $2\exp(t^2/2)\geq 2$, il denominatore non si annulla, quindi il dominio naturale è $\mathbb{R}$.

9) L'equazione è definita per $t>0$ e $2t-\sqrt{t}\neq 0$, cioè $\big(2\sqrt{t}-1\big)\sqrt{t}\neq 0$; deve quindi essere $t\neq 1/4$. Poiché la condizione iniziale è data per $t=1$ consideriamo $t\in\,]1/4,+\infty[$. Inoltre deve essere $y(t)\geq 0$.

L'equazione è di tipo Bernoulli, con esponente $1/2$, perciò per risolverla è opportuno considerare la nuova funzione incognita $v(t)=\big(y(t)\big)^{1/2}$. Risulta

$$v'(t)=\frac{1}{2}y'(t)\big(y(t)\big)^{-1/2}=-\frac{1}{2t-\sqrt{t}}\big(y(t)\big)^{1/2}+\frac{2}{\sqrt{t}}=-\frac{1}{2t-\sqrt{t}}v(t)+\frac{2}{\sqrt{t}},$$

cioè

$$v'(t)+\frac{1}{2t-\sqrt{t}}v(t)=\frac{2}{\sqrt{t}}.$$

Inoltre deve essere $v(1)=\big(y(1)\big)^{1/2}=1$.

L'equazione è lineare del primo ordine. Una primitiva del coefficiente di v è

$$\int_1^t \frac{1}{2\tau-\sqrt{\tau}}\,d\tau = \int_1^{\sqrt{t}} \frac{1}{2s^2-s}\,2s\,ds = \int_1^{\sqrt{t}} \frac{2}{2s-1}\,ds = \big[\log|2s-1|\big]_1^{\sqrt{t}} =$$
$$= \log|2\sqrt{t}-1| = \log\big(2\sqrt{t}-1\big),$$

perché ci interessa t vicino a 1. Moltiplicando per l'esponenziale di questa primitiva otteniamo

$$\big(2\sqrt{t}-1\big)v'(t) + \frac{\big(2\sqrt{t}-1\big)}{\sqrt{t}\big(2\sqrt{t}-1\big)}\,v(t) = \frac{2}{\sqrt{t}}\big(2\sqrt{t}-1\big),$$

cioè

$$\big(2\sqrt{t}-1\big)v'(t) + \frac{1}{\sqrt{t}}\,v(t) = 4 - \frac{2}{\sqrt{t}}.$$

Pertanto si ha

$$\frac{d}{dt}\Big(\big(2\sqrt{t}-1\big)v(t)\Big) = 4 - \frac{2}{\sqrt{t}}.$$

Poiché $v(1)=1$, si ottiene

$$\big(2\sqrt{t}-1\big)v(t) - 1 = \int_1^t \left(4-\frac{2}{\sqrt{\tau}}\right)d\tau = \big[4\tau-4\sqrt{\tau}\,\big]_1^t = 4t-4\sqrt{t},$$

quindi

$$v(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}-1}\big(4t-4\sqrt{t}+1\big) = 2\sqrt{t}-1.$$

Poiché $v(t) = \big(y(t)\big)^{1/2}$ deve essere $v(t)\geq 0$; poiché si ha $t\in\,]1/4,+\infty[$, questo è sempre verificato. Pertanto abbiamo la soluzione

$$y\colon \left]\frac{1}{4},+\infty\right[\to \mathbb{R}, \qquad y(t) = \big(2\sqrt{t}-1\big)^2.$$

Poiché la funzione che definisce l'equazione ha dominio $]1/4,+\infty[\,\times[0,+\infty[$ questa è la soluzione massimale.

10)

a. $y(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, $\mathscr{D}(y) = \,]-1,1[$

b. $y(t) = 2\tan\!\left(-\dfrac{2}{3t}+\dfrac{\pi}{3}\right)$, $\mathscr{D}(y) = \left]\dfrac{4}{5\pi},+\infty\right[$

c. $y(t) = \sqrt{2-t}$, $\mathscr{D}(y) = \,]0,2[$

d. $y(t) = \sqrt{1+t^2}$, $\mathscr{D}(y) = \mathbb{R}$

e. $y(t)=2\tan\left(\frac{1}{4}\log\left(\frac{2-t}{t}\right)-\frac{\pi}{4}\right)$, $\mathscr{D}(y)=\left]\frac{2}{\exp(3\pi)+1},\frac{2}{\exp(-\pi)+1}\right[$

f. $y(t)=\frac{2t^4-4t^2+12}{t^4-2t^2-4}$, $\mathscr{D}(y)=]-1,1[$

g. $y(t)=-\frac{4t^2}{t^4-4}$, $\mathscr{D}(y)=]0,2[$

h. $y(t)=\frac{2}{\sqrt[3]{48-47t}}$, $\mathscr{D}(y)=\left]0,\frac{48}{47}\right[$

i. $y(t)=\tan t$, $\mathscr{D}(y)=\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

j. $y(t)=\frac{12t}{11-8t^3}$, $\mathscr{D}(y)=\left]-\infty,\frac{\sqrt[3]{11}}{2}\right[$

k. $y(t)=\left(4\cos^{-5}t-5\cos t\right)^{1/5}$, $\mathscr{D}(y)=\left]\arccos\left(-\sqrt[6]{\frac{4}{5}}\right),2\pi-\arccos\left(-\sqrt[6]{\frac{4}{5}}\right)\right[$

l. $y(t)=\left(\frac{(t^2+2)(-3t^2+2)}{4}\right)^{3/4}$, $\mathscr{D}(y)=\left]-\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right[$

11) L'equazione è lineare a coefficienti costanti non omogenea. Il polinomio caratteristico dell'omogenea associata è λ^2+1, che ha le radici $\pm i$. Quindi l'integrale generale reale dell'omogenea è

$$\{c_1\sin t+c_2\cos t\,|\,c_1,c_2\in\mathbb{R}\}.$$

Cerchiamo una soluzione dell'equazione non omogenea. Il numero i è radice semplice del polinomio caratteristico, quindi $\cos t$ è soluzione dell'omogenea associata, pertanto esiste una soluzione della forma $v(t)=at\cos t+bt\sin t$ con $a,b\in\mathbb{R}$. Abbiamo

$$\begin{aligned}
v'(t)&=a\cos t-at\sin t+b\sin t+bt\cos t,\\
v''(t)&=-a\sin t-a\sin t-at\cos t+b\cos t+b\cos t-bt\sin t=\\
&=-2a\sin t-at\cos t+2b\cos t-bt\sin t;
\end{aligned}$$

affinché v sia soluzione deve essere

$$(-2a\sin t-at\cos t+2b\cos t-bt\sin t)+(at\cos t+bt\sin t)=\cos t,$$

cioè

$$-2a\sin t+2b\cos t=\cos t;$$

pertanto $a=0$ e $b=1/2$.

Quindi l'integrale generale è

$$\left\{c_1\sin t+c_2\cos t+\frac{1}{2}t\sin t\;\middle|\;c_1,c_2\in\mathbb{R}\right\}.$$

12) L'equazione è lineare a coefficienti costanti. Il polinomio caratteristico dell'omogenea associata è $\lambda^2+4\lambda+3$, che si annulla per

$$\lambda=-2\pm\sqrt{2^2-3}=-2\pm 1=\begin{cases}-3,\\-1.\end{cases}$$

Perciò l'omogenea associata ha le soluzioni e^{-t} e e^{-3t}.

Poiché che -3 è radice semplice del polinomio caratteristico, cerchiamo una soluzione dell'equazione non omogenea nella forma $v(t)=ate^{-3t}$, con $a\in\mathbb{R}$. Si ha

$$\begin{aligned}v'(t)&=ae^{-3t}-3ate^{-3t},\\ v''(t)&=-3ae^{-3t}-3ae^{-3t}+9ate^{-3t}=-6ae^{-3t}+9ate^{-3t}.\end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione differenziale, v risulta essere soluzione se e solo se, $\forall t\in\mathbb{R}$, si ha

$$-6ae^{-3t}+9ate^{-3t}+4(ae^{-3t}-3ate^{-3t})+3ate^{-3t}=e^{-3t},$$

cioè

$$-2ae^{-3t}=e^{-3t};$$

quindi affinché v sia soluzione deve essere $a=-1/2$.

Perciò l'integrale generale è

$$\left\{c_1e^{-t}+c_2e^{-3t}-\frac{1}{2}te^{-3t}\,\middle|\,c_1,c_2\in\mathbb{R}\right\}.$$

13) L'equazione è lineare non omogenea a coefficienti costanti. Cerchiamo anzitutto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata

$$y'''(t)-y''(t)+y'(t)-y(t)=0.$$

Il polinomio caratteristico di tale equazione è $\lambda^3-\lambda^2+\lambda-1$ che è uguale a

$$\lambda^2(\lambda-1)+(\lambda-1)=(\lambda^2+1)(\lambda-1).$$

Perciò le radici sono 1 e $\pm i$. L'integrale generale reale dell'equazione è

$$\{d_1e^t+d_2\sin t+d_3\cos t\,|\,d_1,d_2,d_3\in\mathbb{R}\}.$$

Cerchiamo una soluzione dell'equazione non omogenea. Il termine non omogeneo è $\cos t$ e i è radice semplice del polinomio caratteristico, quindi la soluzione si può cercare nella forma $y(t)=at\cos t+bt\sin t$ con $a,b\in\mathbb{R}$.

Si ha

$$\begin{aligned}y'(t)&=a\cos t-at\sin t+b\sin t+bt\cos t,\\ y''(t)&=-a\sin t-a\sin t-at\cos t+b\cos t+b\cos t-bt\sin t=\\ &=-2a\sin t-at\cos t+2b\cos t-bt\sin t,\\ y'''(t)&=-2a\cos t-a\cos t+at\sin t-2b\sin t-b\sin t-bt\cos t=\\ &=-3a\cos t+at\sin t-3b\sin t-bt\cos t.\end{aligned}$$

Sostituendo tale funzione nell'equazione, affinché essa sia soluzione deve essere

$$
\begin{aligned}
&(-3a\cos t + at\sin t - 3b\sin t - bt\cos t) - \\
&\qquad -(-2a\sin t - at\cos t + 2b\cos t - bt\sin t) + \\
&\qquad +(a\cos t - at\sin t + b\sin t + bt\cos t) - (at\cos t + bt\sin t) = \cos t\,,
\end{aligned}
$$

cioè

$$(2a-2b)\sin t - (2a+2b)\cos t = \cos t\,;$$

perciò a e b devono verificare il sistema

$$\begin{cases} 2a-2b=0\,, \\ -2a-2b=1\,. \end{cases}$$

Pertanto $a=b$, sostituendo nella seconda equazione si ha $-4a=1$; perciò la soluzione è $a=b=-1/4$.

Quindi una soluzione dell'equazione non omogenea è

$$v(t) = -\frac{1}{4}\,t\sin t - \frac{1}{4}\,t\cos t$$

e l'integrale generale è

$$\left\{ c_1 e^t + c_2 e^{it} + c_3 e^{-it} - \frac{1}{4}\,t\sin t - \frac{1}{4}\,t\cos t \;\middle|\; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

14) Per risolvere il problema di Cauchy occorre anzitutto determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y''(t) - 6y'(t) + 8y(t) = e^{2t} + 4\sin(4t)$$

che è lineare a coefficienti costanti non omogenea.

Il polinomio caratteristico dell'omogenea associata è $\lambda^2 - 6\lambda + 8$. Le radici di questo polinomio sono

$$\lambda = 3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 1\cdot 8} = 3 \pm 1 = \begin{cases} 2\,, \\ 4\,, \end{cases}$$

quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$\{c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Cerchiamo una soluzione dell'equazione non omogenea. Il termine non omogeneo è somma di due addendi, cerchiamo una soluzione come somma di soluzioni delle due equazioni non omogenee

$$
\begin{aligned}
y''(t) - 6y'(t) + 8y(t) &= e^{2t}\,, \\
y''(t) - 6y'(t) + 8y(t) &= 4\sin(4t)\,.
\end{aligned}
$$

Il numero 2 è radice semplice del polinomio caratteristico, quindi esiste una soluzione della prima equazione della forma $v(t) = a\,t\,e^{2t}$, con $a \in \mathbb{R}$. Si ha

$$\begin{aligned} v'(t) &= a e^{2t} + 2a\,t\,e^{2t}, \\ v''(t) &= 2a e^{2t} + 2a e^{2t} + 4a\,t\,e^{2t} = 4a e^{2t} + 4a\,t\,e^{2t}. \end{aligned}$$

Perciò a deve essere tale che

$$4a e^{2t} + 4a\,t\,e^{2t} - 6\big(a e^{2t} + 2a\,t\,e^{2t}\big) + 8a\,t\,e^{2t} = e^{2t},$$

cioè $-2a e^{2t} = e^{2t}$, quindi $a = -1/2$.

I numeri $\pm 4i$ non sono radici del polinomio caratteristico, quindi esiste una soluzione della seconda equazione della forma $v(t) = a\sin(4t) + b\cos(4t)$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Si ha

$$\begin{aligned} v'(t) &= 4a\cos(4t) - 4b\sin(4t), \\ v''(t) &= -16a\sin(4t) - 16b\cos(4t), \end{aligned}$$

perciò a e b devono essere tali che, $\forall t \in \mathbb{R}$, si abbia

$$-16a\sin(4t) - 16b\cos(4t) - 6\big(4a\cos(4t) - 4b\sin(4t)\big) + 8\big(a\sin(4t) + b\cos(4t)\big) = 4\sin(4t)$$

cioè

$$(-8a + 24b)\sin(4t) + (-24a - 8b)\cos(4t) = 4\sin(4t).$$

I coefficienti delle funzioni $\sin(4t)$ e $\cos(4t)$ nei due membri dell'uguaglianza devono essere uguali, quindi si deve avere

$$\begin{cases} -8a + 24b = 4, \\ -24a - 8b = 0; \end{cases}$$

dalla seconda equazione si ottiene $b = -3a$, perciò la prima diventa $-80a = 4$ e quindi $a = -1/20$ e $b = 3/20$.

Perciò una soluzione dell'equazione non omogenea è

$$-\frac{1}{2}\,t\,e^{2t} - \frac{1}{20}\sin(4t) + \frac{3}{20}\cos(4t)$$

e l'integrale generale è

$$\left\{ c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t} - \frac{1}{2}\,t\,e^{2t} - \frac{1}{20}\sin(4t) + \frac{3}{20}\cos(4t) \,\middle|\, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Per determinare una soluzione del problema di Cauchy occorre trovare c_1 e c_2 tali che la funzione

$$w(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t} - \frac{1}{2}\,t\,e^{2t} - \frac{1}{20}\sin(4t) + \frac{3}{20}\cos(4t)$$

verifichi le condizioni

$$\begin{cases} w(0) = 0, \\ w'(0) = 0. \end{cases}$$

Poiché

$$w'(t)=2c_1e^{2t}+4c_2e^{4t}-\frac{1}{2}e^{2t}-te^{2t}-\frac{1}{5}\cos(4t)-\frac{3}{5}\sin(4t),$$

deve essere

$$\begin{cases} c_1+c_2+\dfrac{3}{20}=0, \\ 2c_1+4c_2-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{5}=0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava $c_1=-c_2-3/20$, sostituendo nella seconda si ottiene

$$-2c_2-\frac{3}{10}+4c_2-\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=0,$$

cioè $2c_2-1=0$ e quindi $c_2=1/2$ e $c_1=-13/20$.

Perciò la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(t)=-\frac{13}{20}e^{2t}+\frac{1}{2}e^{4t}-\frac{1}{2}te^{2t}-\frac{1}{20}\sin(4t)+\frac{3}{20}\cos(4t).$$

15) L'equazione differenziale è lineare a coefficienti costanti. Determiniamone anzitutto l'integrale generale. L'omogenea associata ha polinomio caratteristico $\lambda^3-3\lambda^2+4\lambda-2$. Come si verifica facilmente esso si annulla per $\lambda=1$; dividendo per $\lambda-1$ si ha:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -3 & 4 & -2 \\ 1 & & 1 & -2 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & 0 \end{array}$$

e quindi il polinomio si fattorizza in $(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+2)$. Il secondo fattore si annulla per

$$\lambda=1\pm\sqrt{1^2-1\cdot 2}=1\pm\sqrt{-1}=1\pm i.$$

Perciò le radici del polinomio caratteristico sono 1, $1-i$ e $1+i$; pertanto l'integrale generale dell'omogenea associata è

$$\{c_1e^t\cos t+c_2e^t\sin t+c_3e^t \mid c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}\}.$$

Determiniamo una soluzione dell'equazione non omogenea. Poiché 1 è soluzione dell'equazione caratteristica, esiste una soluzione dell'equazione con termine non omogeneo e^t della forma ate^t, con $a\in\mathbb{R}$. Posto $v(t)=ate^t$, risulta

$$\begin{aligned} v'(t)&=ae^t+ate^t, \\ v''(t)&=ae^t+ae^t+ate^t=2ae^t+ate^t, \\ v'''(t)&=2ae^t+ae^t+ate^t=3ae^t+ate^t. \end{aligned}$$

Quindi v è soluzione dell'equazione non omogenea se si ha

$$3ae^t+ate^t-3(2ae^t+ate^t)+4(ae^t+ate^t)-2ate^t=e^t,$$

cioè $ae^t = e^t$. Pertanto $a = 1$ e l'integrale generale dell'equazione non omogenea è

$$\{c_1 e^t + c_2 e^t \sin t + c_3 e^t \cos t + t e^t \mid c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Posto

$$w(t) = c_1 e^t + c_2 e^t \sin t + c_3 e^t \cos t + t e^t,$$

determiniamo c_1, c_2 e c_3 in modo che siano verificate le condizioni

$$\begin{cases} w(0) = 0, \\ w'(0) = 0, \\ w''(0) = 0. \end{cases}$$

Si ha

$$\begin{aligned} w'(t) &= c_1 e^t + c_2 e^t \sin t + c_2 e^t \cos t + c_3 e^t \cos t - c_3 e^t \sin t + t e^t + e^t = \\ &= c_1 e^t + (c_2 - c_3) e^t \sin t + (c_2 + c_3) e^t \cos t + t e^t + e^t, \\ w''(t) &= c_1 e^t + (c_2 - c_3) e^t \sin t + (c_2 - c_3) e^t \cos t + \\ &\qquad + (c_2 + c_3) e^t \cos t - (c_2 + c_3) e^t \sin t + t e^t + 2e^t = \\ &= c_1 e^t - 2c_3 e^t \sin t + 2c_2 e^t \cos t + t e^t + 2e^t. \end{aligned}$$

Pertanto risulta

$$\begin{aligned} w(0) &= c_1 + c_3, \\ w'(0) &= c_1 + c_2 + c_3 + 1, \\ w''(0) &= c_1 + 2c_2 + 2. \end{aligned}$$

Quindi w verifica le condizioni di Cauchy se si ha

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 0, \\ c_1 + c_2 + c_3 + 1 = 0, \\ c_1 + 2c_2 + 2 = 0. \end{cases}$$

Sottraendo la prima equazione dalla seconda si ottiene $c_2 = -1$, quindi dalla terza segue $c_1 = 0$ e dalla prima $c_3 = 0$.

Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(t) = -e^t \sin t + t e^t.$$

16) L'equazione differenziale è lineare a coefficienti costanti. L'omogenea associata ha polinomio caratteristico $\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1$. Risulta

$$\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = \lambda^2(\lambda + 1) - (\lambda + 1) = (\lambda^2 - 1)(\lambda + 1) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2;$$

pertanto tale polinomio ha le radici -1 doppia e 1 semplice. Quindi l'integrale generale dell'omogenea è

$$\{c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + c_3 e^t \mid c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Il termine noto è un polinomio di secondo grado; Poiché 0 non è radice del polinomio caratteristico, cerchiamo una soluzione dell'equazione non omogenea nella forma

$$y(t) = at^2 + bt + c.$$

Si ha

$$\begin{aligned} y'(t) &= 2at + b\,, \\ y''(t) &= 2a\,, \\ y'''(t) &= 0; \end{aligned}$$

quindi deve essere

$$2a - (2at + b) - (at^2 + bt + c) = t^2\,,$$

cioè

$$-at^2 - (2a + b)t + 2a - b - c = t^2\,.$$

Quindi a, b e c devono verificare il sistema

$$\begin{cases} -a = 1\,, \\ 2a + b = 0\,, \\ 2a - b - c = 0\,. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ha $a = -1$, sostituendo nella seconda si ottiene $b = 2$ e dalla terza si ottiene $c = -4$. Quindi ogni soluzione dell'equazione non omogenea è della forma

$$w(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + c_3 e^t - t^2 + 2t - 4\,,$$

con $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Determiniamo c_1, c_2 e c_3 in modo che w verifichi le condizioni iniziali. Si ha

$$\begin{aligned} w'(t) &= -c_1 e^{-t} + c_2 e^{-t} - c_2 t e^{-t} + c_3 e^t - 2t + 2\,, \\ w''(t) &= c_1 e^{-t} - c_2 e^{-t} - c_2 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + c_3 e^t - 2\,, \end{aligned}$$

quindi w verifica le condizioni iniziali se si ha

$$\begin{cases} c_1 + c_3 - 4 = 0\,, \\ -c_1 + c_2 + c_3 + 2 = 0\,, \\ c_1 - 2c_2 + c_3 - 2 = 0\,. \end{cases}$$

Sottraendo la terza equazione dalla prima si ottiene $2c_2 - 2 = 0$, quindi $c_2 = 1$. Quindi abbiamo il sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_3 - 4 = 0 \\ -c_1 + c_3 + 3 = 0\,. \end{cases}$$

Sommando le due equazioni si ottiene $2c_3 - 1 = 0$, quindi $c_3 = 1/2$, da cui segue $c_1 = 7/2$.

Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(t) = \frac{7}{2} e^{-t} + t e^{-t} + \frac{1}{2} e^t - t^2 + 2t - 4\,.$$

17)

a. $\{c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + (t+2)e^t \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$

b. $\left\{c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3 e^{-2t} + c_4 e^{2t} - \dfrac{t^2}{4} + \dfrac{3}{8} \,\middle|\, c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}\right\}$

c. $\left\{c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + c_3 e^{-2t} + \dfrac{1}{25} \sin t + \dfrac{8}{25} \cos t + \dfrac{2}{5}\, t \sin t + \dfrac{1}{5}\, t \cos t \,\middle|\, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\right\}$

d. $\left\{c_1 e^t + c_2 e^{-2t} + c_3 t e^{-2t} + \dfrac{1}{50} \cos t - \dfrac{7}{50} \sin t \,\middle|\, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\right\}$

e. $\left\{c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t} + c_3 + t^3 - 3t^2 + \dfrac{9}{2}\, t \,\middle|\, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\right\}$

f. $\left\{c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 t e^{-t} + \dfrac{1}{4}\, t e^t \,\middle|\, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\right\}$

g. $\left\{c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} + c_3 \cos(2t) + c_4 \sin(2t) + \dfrac{1}{32}\, t e^{2t} \,\middle|\, c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}\right\}$

h. $\left\{c_1 e^t + c_2 e^{-3t} + c_3 + \left(\dfrac{1}{8}\, t^2 - \dfrac{5}{16}\, t\right) e^t \,\middle|\, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\right\}$

18)

a. $y(t) = -\dfrac{1}{3}\, e^{-3t} - t e^{-3t} + \dfrac{1}{3}\, e^{3t}$

b. $y(t) = \dfrac{1}{3}\, e^{3t} - 2t e^{3t} + t + \dfrac{2}{3}$

c. $y(t) = \dfrac{1}{6}\, t^3 e^{-2t} + 3t^2 e^{-2t} + t e^{-2t}$

d. $y(t) = \dfrac{3}{5}\, t e^t - \dfrac{6}{25} e^t + \dfrac{6}{25} \cos(2t) - \dfrac{9}{50} \sin(2t)$

e. $y(t) = -\dfrac{7}{2}\, e^t + t e^t - \dfrac{1}{2}\, e^{-t} + t^2 + 2t + 5$

f. $y(t) = \dfrac{23}{9}\, e^{-3t} + \dfrac{11}{3}\, t e^{-3t} + 4t - \dfrac{23}{9}$

g. $y(t) = \dfrac{1}{16} \sin(2t) + \dfrac{1}{12}\, t^3 - \dfrac{1}{8}\, t$

h. $y(t) = -\dfrac{1}{27}\, e^{3t} + \dfrac{1}{27}\, t e^{3t} + \dfrac{1}{27} + \dfrac{1}{18}\, t^2 + \dfrac{2}{27}\, t$