Esercizio 1A. Stabilire se la seguente matrice A è invertibile. In caso affermativo calcolarne l'inversa.

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione: applichiamo l'algoritmo di Gauss con la seguente catena di operazioni:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

La forma a scalini ridotta di A è la matrice identità. Quindi A è invertibile con inversa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 1B. Stabilire se la seguente matrice A è invertibile. In caso affermativo calcolarne l'inversa.

$$A := \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione: applichiamo l'algoritmo di Gauss con la seguente catena di operazioni:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

La forma a scalini ridotta di A è la matrice identità. Quindi A è invertibile con inversa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2A. Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la seguente matrice A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1+\alpha & 2 \end{pmatrix}.$$

Soluzione: Il polinomio caratteristico è $P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 4\alpha$, che ha discriminante

$$\Delta = 16(1+\alpha).$$

- Se $\alpha < -1$ allora $\Delta < 0$, quindi A_α non ha autovalori reali ed in particolare non è diagonalizzabile.
- Se $\alpha > -1$ allora $\Delta > 0$, quindi A_α è diagonalizzabile perché ha due autovalori distinti.
- Se $\alpha = -1$ allora

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ha il solo autovalore $\lambda = 2$, con $P(\lambda) = (2-\lambda)^2$. Quindi A_{-1} non è diagonalizzabile perché l'autospazio corrispondente soddisfa

$$\ker(A_{-1} - 2\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbb{R}^2.$$

Esercizio 2B. Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la seguente matrice A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} 1 & \alpha - 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione: Il polinomio caratteristico è $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + \alpha$, che ha discriminante

$$\Delta = 4(1-\alpha).$$

- Se $\alpha > 1$ allora $\Delta < 0$, quindi A_α non ha autovalori reali ed in particolare non è diagonalizzabile.
- Se $\alpha < 1$ allora $\Delta > 0$, quindi A_α è diagonalizzabile perché ha due autovalori distinti.
- Se $\alpha = 1$ allora

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ha il solo autovalore $\lambda = 1$, con $P(\lambda) = (1-\lambda)^2$. Quindi A_1 non è diagonalizzabile perché l'autospazio corrispondente soddisfa

$$\ker(A_{-1} - \mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbb{R}^2.$$