MULTISET (~~DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE~~)

UN MULTISET SU UN n-INSIEME ($\underline{n} = \{1, 2, \dots, n\}$)

È

$$\rho : \underline{n} \longrightarrow \mathbb{N} \quad \text{CIOÈ} \quad \rho(i) \in \mathbb{N} \quad \forall i \in \underline{n}.$$

(MOLTEPLICITÀ DI i IN ρ)

EX $n = 4$

(*) $\rho : \underline{4} \to \mathbb{N}$, $\rho(1) = 1$, $\rho(2) = 1$, $\rho(3) = 3$, $\rho(4) = 0$

LA CARDINALITÀ DEL MULTISET $\rho : \underline{n} \to \mathbb{N}$

È $$|\rho| = \sum_{i=0}^{n} \rho(i)$$

PRESO (*)

$$|\rho| = 1 + 1 + 3 + 0 = 5.$$

DATO UN MULTISET $\rho : \underline{n} \to \mathbb{N}$

CANONICAMENTE (BIETTIVAMENTE) POSSIAMO

ASSOCIARE AD ESSO UNA PAROLA SULL'ALFABETO $\underline{n}$

NON DECRESCENTE, CIOÈ

CON $e_{i_1} < e_{i_2} < \dots < e_{i_k}$

$$\omega = \underbrace{e_{i_1} e_{i_1} \dots e_{i_1} \; e_{i_2} \dots e_{i_2} \; \dots \; e_{i_k} \dots e_{i_k}}_{\text{DI LUNGHEZZA } n}$$

(*) $\rho(1) = 1$, $\rho(2) = 1$, $\rho(3) = 3$, $\rho(4) = 0$

$$\omega(\rho) = 1\ 2\ 3\ 3\ 3$$

MULTISET COEFFICIENTS

$n, k \in \mathbb{N}$

$$\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle \overset{\text{DEF}}{=} \#\ k\text{-MULTISETS SU UN } n\text{-INSIEME}.$$

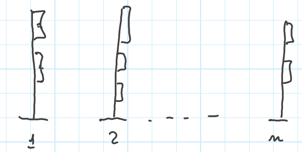
ORA $$\left\langle \begin{matrix} 0 \\ k \end{matrix} \right\rangle = \delta_{0k} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

$$\left\langle \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\rangle = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

CALCOLIAMO $\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle$ IN FORMA CHIUSA ???

PRINCIPIO DEL PASTORE

ZAMPE FILE !!!



n PENNONI

k BANDIERE

Quante sono le n-FILE su k "BANDIERE" ??

FISSO n! k VARIABILE.

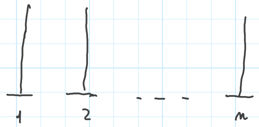
L_k = # modi di distribuire k BANDIERE su n PENNONI.

OVVIAMENTE $L_1 = n$.

$L_k = ?$

FORMA RICORSIVA (BAD ELEMENT)

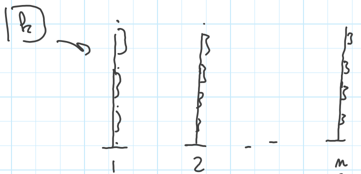
SIA k IL BAD ELEMENT.



VADO A DISTRIBUIRE LE BANDIERE $1, 2, \dots, k-1$ IN QUANTI MODI?

L_{k-1} PER DEF

DOPODICHÉ DOVRÒ ANDARE A INTRODURRE IL BAD ELEMENT k.



$k-1$ BANDIERE

ADESSO IN QUANTI MODI POSSO AGGIUNGERE LA BANDIERA k ???

$i_1 + i_2 + \dots + i_n = k-1$

QUINDI IL RISULTATO È

$$(i_1+1) + (i_2+1) + \dots + (i_n+1) =$$

$$i_1 + i_2 + \dots + i_k + n = k-1+n = \underline{n+k-1}$$

QUINDI
$$\begin{cases} L_1 = n \\ L_k = (n+k-1) \cdot L_{k-1} \end{cases}$$

(*) SUC. RICORSIVA

$$L_k = (n+k-1)\, L_{k-1} = (n+k-1)(n+k-2)\, L_{k-2} =$$

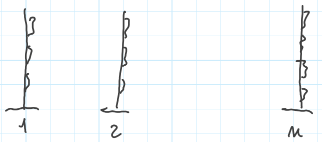
$$= (n+k-1)(n+k-2) \cdots (n+1)\, n =$$

$$= n(n+1)(n+2) \cdots (n+k-1) = \langle n \rangle_k$$

FATTORIALE CRESCENTE DI n FINO A k

QUINDI $L_k = \langle n \rangle_k$.

k BANDIERE SU n PENNONI



$$i_1 + i_2 + \cdots + i_n = k$$

QUINDI HO DEFINITO UN k MULTISET SU $\underline{n}$

$$f(1) = i_1,\ f(2) = i_2 \ldots,\ f(n) = i_n$$

MA AVRÒ ESATTAMENTE $k!$ DISTRIBUZIONI CHE DANNO LUOGO ALLO STESSO k MULTISET.

THM

$$\left\langle\!\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle\!\right\rangle = \frac{L_k}{k!} = \frac{\langle n \rangle_k}{k!}$$

SI NOTI CHE

$$\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}$$